МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра общей физики

Е.В. ЦВЕТКОВА, Е.В. ШАБУНИО

ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №111 ПО МЕХАНИКЕ

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов.

Оренбург 2006

УДК 531.7 (07)
ББК 22.213 я7
Ц 27

Рецензенты:
Старший преподаватель Михайличенко А.В., старший преподаватель Чакак А.А.

Цветкова Е.В.
Ц 27 Измерение момента инерции твердых тел методом крутильных колебаний: методические указания к лабораторной работе №111 по механике/Е.В.Цветкова., Шабунио Е.В. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. – 12 с.

Методические указания предназначены для студентов дневного, вечернего и заочного отделений технических специальностей для выполнения лабораторной работы №111 «Измерение момента инерции твердых тел методом крутильных колебаний».

ББК 22.213 я7

Содержание

1 Лабораторная работа № 111. Измерение момента инерции твердых тел методом крутильных колебаний

Цель работы:

1 Уяснить физический смысл момента инерции тел.
2 Познакомиться с экспериментальным определением момента инерции твердых тел правильной геометрической формы методом крутильных колебаний относительно оси симметрии.
3 Определить расчетным и опытным путем момент инерции твердого тела.

Введение

Вращательное движение абсолютного твердого тела относительно неподвижной оси, с которой совместили ось Z, описывается уравнением:

$$M_z = J \cdot \varepsilon, \qquad (1)$$

где: J – момент инерции тела относительно оси вращения, кг·м^2;

ε – угловое ускорение тела, определяемое как вторая производная от угла поворота по времени, рад/с^2;

M_z – полный момент сил относительно оси вращения, называемый иначе вращательным моментом, Н·м.

Уравнение (1) выражает основной закон динамики вращательного движения, как материальной точки, так и любого твердого тела вокруг неподвижной оси. Оно аналогично второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad (2)$$

Только в нем роль линейного ускорения играет угловое ускорение, роль силы – момент силы относительно оси вращения, а роль массы – момент инерции вращающегося тела.

Таким образом, с физической точки зрения момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Его значение можно определить как теоретически, так и экспериментально.

Теоретическое определение сводится к тому, что тело мысленно разбивается на большое число n материальных точек массой Δm_i. Определяется момент инерции J_i каждой материальной точки относительно оси вращения тела, затем находится момент инерции тела J, как сумма моментов инерции всех материальных точек, т.е.

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i \qquad (3)$$

Момент инерции i-ой материальной точки массой Δm_i относительно оси OO′ – скалярная величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от точки до оси вращения OO′ (см. рисунок 1):

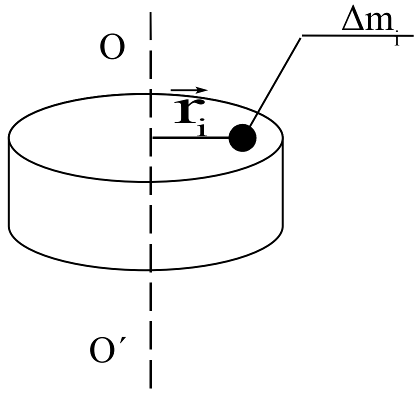


Рисунок 1

$$J_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \qquad (4)$$

Следовательно, момент инерции любого твердого тела согласно формуле (3) и (4) найдется так:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot r_i^2 \qquad (5)$$

Если же тело разбили на очень большое число кусочков, то суммирование в выражении (5) превращается в интегрирование и выражение (5) принимает вид:

$$J = \int_0^m r^2 dm \qquad (6)$$

Если вокруг оси вращается система тел с моментами инерции J_1, J_2,…J_n , то общий момент инерции системы тел будет равен сумме моментов инерции отдельных тел системы:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n$$

Рассмотрим расчет момента инерции тела правильной геометрической формы (диска или цилиндра) относительно оси OO′, совмещенной с осью Z и проходящей через центр симметрии (см. рисунок 2).

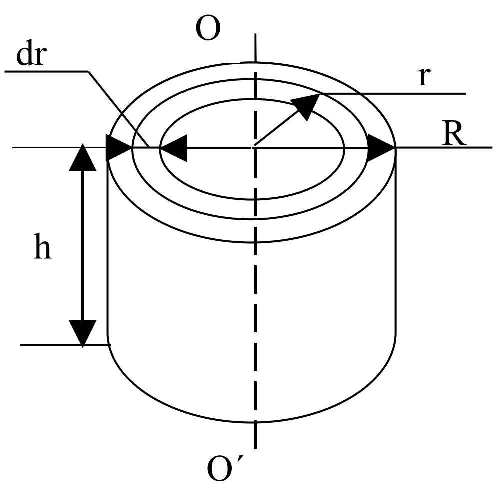


Рисунок 2

Разобьем диск на элементарные участки, представляющие собой очень тонкие кольца, толщина которых dr. Если высота диска h, радиус кольца r, а плотность вещества диска ρ, то масса такого кольца $dm=\rho \cdot h \cdot 2\pi r \cdot dr$, а его момент инерции будет равен $r^2 \cdot dm$. Момент инерции диска относительно OO′ равен сумме моментов инерции всех колец, на которые разбили диск:

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^R r^2\, 2\pi r h\rho\cdot dr = 2\pi h\rho\int_0^R r^3 dr = 2\pi h\rho\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi h\rho\frac{R^4}{4} = 2\pi h\rho\frac{R^4}{2} \qquad (7)$$

Величина $\pi R^2 h$ – объем диска, значит $\rho\pi R^2 h$ – масса диска m. Следовательно,

$$J = \frac{mR^2}{2} \qquad (8)$$

Аналогично можно рассчитать моменты инерции кольца, тороида и других тел. Идея определения момента инерции тела в данной работе основана на зависимости периода крутильных колебаний от момента инерции колеблющегося тела относительно оси колебания.

На рисунке 3 (а и б) показаны две разновидности применяемых для этого установок.

Схематически изображенная на рисунке 3а установка представляет собой массивное основание 1. На нем установлена вертикально стойка 2 с кронштейном 3. Отрезок стального упругого провода 4 называемый упругим подвесом жестко крепится одним концом к кронштейну 3, а другим – к стальной дугообразной пластине 5. Последняя в свою очередь прикреплена к диску 6. На диск можно поместить исследуемое тело (например, как на рисунке - цилиндр 7).

Установка на рисунке 3б отличается тем, что здесь вместо диска с пластиной используется стальная рамка 7, а проволочный подвес состоит из двух отрезков стального упругого провода 4 и 4′. Подвесы 4 крепятся к верхнему кронштейну 3 и рамке 7, а 4′ к нижнему кронштейну 3′ и рамке 7. На рамке имеются специальные винты, не показанные на рис. 3б, с помощью которых исследуемое тело можно закрепить на рамке. Для общности рассуждений будем в дальнейшем диск с пластиной (рисунок 3а) и рамку с крепежными винтами (рисунок 3б) называть общим словом платформа.

Повернем платформу на небольшой угол (несколько градусов вокруг оси проволочного подвеса) и отпустим ее. Она начнет совершать свободные затухающие колебания. Период этих колебаний обозначим через T_0. Его значение определяется жесткостью подвеса k и моментом инерции платформы J_0 относительно оси колебания:

$$\grave{O}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{k}} \qquad (9)$$

Поставим теперь на платформу исследуемое тело (цилиндр), момент инерции которого относительно оси симметрии мы желаем определить. Вновь повернем платформу на небольшой угол φ вокруг оси колебания и отпустим. Она начнет совершать свободные затухающие крутильные колебания с периодом T, удовлетворяющему уравнению:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J + J_0}{k}} \qquad (10)$$

Здесь $J + J_0$ суммарный момент инерции тела (цилиндра) и платформы относительно оси колебания. Простыми преобразованиями – возведением в квадрат и исключением k из формул (9) и (10) можно получить расчетную формулу для момента инерции исследуемого тела:

$$J = J_0\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right) \qquad (11)$$

Зная значение момента инерции платформы J_0 и определив опытным путем T_0 и T, по формуле (11) вычисляют момент инерции исследуемого тела.

Остановимся теперь на выводе формулы (9). Для этого направим вдоль оси подвеса ось Z. В проволочном подвесе возникает упругая деформация кручения. Она создает момент силы M_z, относительно оси колебания, препятствующий повороту платформы, стремящийся повернуть ее в положение равновесия. Опыт показывает, что в области упругой деформации кручения момент силы M_z прямо пропорционален углу поворота φ:

$$M_z = -k\varphi \qquad (12)$$

Знак ″–″ в этом выражении означает, что M_z стремится повернуть платформу в направлении, противоположном направлению поворота на угол φ. Коэффициент k называется жесткостью подвеса.

Согласно основному закону динамики вращательного движения уравнение (11) перепишем в виде:

$$J^*\cdot\varepsilon = -k\varphi, \qquad (13)$$

Или $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{J^*} = 0$, так как $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Обозначив в последнем выражении k/J^* через ω^2, получим уравнение в виде уравнения гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \qquad (14)$$

где φ - угол, на который повернута платформа в момент времени t,

J^* – полный момент инерции платформы и исследуемого тела ($J^* = J_0+J$),

ω - собственная круговая (или циклическая) частота крутильных колебаний.

Уравнение (13) имеет решение в виде $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$,

где φ_0 – наибольший угол закручивания, совпадающий с углом поворота диска в момент отпускания (с этого момента идет отсчет времени).

По определению период колебаний Т и циклическая частота связаны соотношением:

$$\grave{O} = 2\pi/\omega \tag{15}$$

Учитывая, что $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{J^*}}$, выражению (14) можно придать вид:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J^*}{k}} \tag{16}$$

Для периода T_0 собственных колебаний платформы без тела уравнение (15) запишется как:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{k}} \tag{17}$$

Если на платформе установлено исследуемое тело, то период Т колебания такой системы тел (платформа с телом) согласно (16) можно найти по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J + J_0}{k}} \tag{18}$$

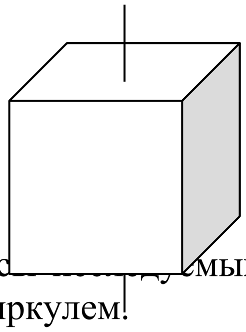
В данной работе методом крутильных колебаний определяется момент инерции одного из тел: цилиндра или прямоугольного параллелепипеда.

В лабораторной работе момент инерции исследуемого тела относительно оси симметрии определяется не только методом крутильных колебаний, но и расчетом по формуле, в которую входят только геометрические размеры тела и его масса. Для тел в виде цилиндра и прямоугольного параллелепипеда, формулы имеют вид:

$$J = \frac{1}{2} mR^2,$$

где m – масса цилиндра, кг;

R – радиус цилиндра, м.



$$J = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2),$$

где m – масса параллелепипеда, кг;
a и b – длины ребер, перпендикулярных оси вращения, м.

Массы исследуемых тел заданы, а геометрические размеры измеряются штангенциркулем.

Экспериментальная часть

Определение момента инерции тела методом крутильных колебаний.

1 Определяют 10 раз (n=10) период полного колебания пустой платформы T_i, т.е. без исследуемого тела на платформе. Результаты измерений вносят в таблицу 1 и обрабатывают по алгоритму обработки результатов прямых измерений, содержащих случайную ошибку. В итоге получают значение периода крутильных колебаний платформы без груза в виде $T_0 = \overline{T}_0 \pm \Delta T_0$. Заполняют таблицу 1.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_{oi}, c										

$n = 10$

$$\bar{t}_0 = \frac{t_1 + t_2 + \ldots t_{10}}{10} = \ldots \text{ c}$$

$\sigma_{пр} = 0{,}01$ c

$$\Delta t_0 = \sigma = \sqrt{\sigma_{пр}^2 + \frac{(t_1 - \bar{t})^2 + (t_2 - \bar{t})^2 + \ldots + (t_{10} - \bar{t})^2}{n(n-1)}}$$

$$\overline{T}_0 = \bar{t}_0/10$$

$$\Delta T_0 = \Delta t_0/10$$

$$T_0 = \overline{T}_0 \pm \Delta T_0 = (\ldots \pm \ldots), \text{ c}$$

$$t_0 = \bar{t}_0 \pm \Delta t_0$$

Здесь t_0 – средняя длительность 10 колебаний пустой платформы (без тела), а T_0 - средний период колебаний пустой платформы.

2 Устанавливают на платформу исследуемое тело (цилиндр или параллелепипед). Вновь десять раз измеряют период одного полного колебания T_i, но теперь уже платформы с исследуемым телом. Полученные результаты измерений вписывают в таблицу 2 и обрабатывают по алгоритму обработки результатов прямых измерений, содержащих случайную ошибку.

Получают значение периода крутильных колебаний платформы с исследуемым телом в виде $T=T \pm \Delta T$. Заполняют таблицу 2.

Таблица 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_{01}, с										

$n = 10$

$$\bar{t}_{01} = \frac{t_1 + t_2 + ...t_{10}}{10} = \dots \text{ с}$$

$\sigma_{пр} = 0{,}01$ с

$$\Delta t_{01} = \sigma = \sqrt{\sigma_{\text{ïð}} + \frac{(t_1 - \bar{t})^2 + (t_2 - \bar{t})^2 + ... + (t_{10} - \bar{t})^2}{n(n-1)}}$$

$$t_{01} = \bar{t}_{01} \pm \Delta t_{01}$$

$$\bar{T}_{01} = \bar{t}_0/10$$

$$\Delta T_{01} = \Delta t_{01}/10$$

$T_{01} = \bar{T}_{01} \pm \Delta T_{01} = (\dots\pm\dots)$, с

3 Пользуясь формулами (1) и (2) вычисляют момент инерции исследуемого тела J_1 и абсолютную ошибку измерений ΔJ_1:

$$J_1 = \bar{J}_0 \frac{\bar{T}_{01}^2 - \bar{T}_0^2}{\bar{T}_0^2} = \bar{J}_0 \left(\frac{\bar{T}_{01}^2}{\bar{T}_0^2} - 1 \right) \tag{19}$$

$$\Delta J_1 = \varepsilon \cdot \bar{J}_1 \tag{20}$$

Относительная ошибка ε вычисляется по формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta J_0}{J_0} \right)^2 + \left(\frac{2\bar{T}_{01}^2 \cdot \Delta T_0}{\bar{T}_0(\bar{T}_{01}^2 - \bar{T}_0^2)} \right)^2 + \left(\frac{2\bar{T}_{01}\Delta T_{01}}{\bar{T}_{01}^2 - \bar{T}_0^2} \right)^2} \tag{21}$$

где: $\Delta J_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2; $\bar{J}_0 = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2.

4 В зависимости от формы измеряемого тела выберите соответствующую формулу для расчета его момента инерции. Измерьте входящие в нее геометрические размеры тела и вычислите момент инерции J исследуемого тела.

Для цилиндра:

$$J_1 = \frac{mR^2}{2}, \qquad \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta R}{R}\right)^2}$$

$\Delta J_1 = \varepsilon \cdot \bar{J}_1$; $\Delta m = 0{,}01$ кг; $\Delta R = 1 \cdot 10^{-4}$ м.

Для прямоугольного параллелепипеда:

$$\bar{J} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2),$$

где m – масса параллелепипеда, b и a – длины ребер, перпендикулярных оси вращения.

$$\Delta J = \frac{1}{12}\sqrt{\left[(a^2 + b^2)\cdot \Delta m\right]^2 + 4m^2\left[(\bar{a}\cdot \Delta a)^2 + (\bar{b}\cdot \Delta b)^2\right]^2}$$

$\bar{m} =$ 1,96 кг; $\Delta m = 0{,}02$ кг; $\bar{a} = 0{,}05$ м; $\bar{b} = 0{,}1$ м;

$\Delta a = \Delta b = 0{,}001$ м.

Результат запишите в виде:

$$J = \bar{J} \pm \Delta J = (\ldots \pm \ldots) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Сравните значения момента инерции тела, найденные методом крутильных колебаний и расчетным путем. Если доверительные интервалы полученных значений момента инерции перекрываются, то можно сказать, что в пределах ошибки измерения оба метода дали одинаковые значения момента инерции тела. Сделайте вывод.

Контрольные вопросы

1. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Поясните физический смысл величин, входящих в этот закон.
2. Что называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения?
3. Как теоретически определить момент инерции твердых тел относительно оси вращения?
4. От чего зависит момент инерции тела?
5. Крутильные колебания: определение, составление уравнения крутильных колебаний и его решение.
6. Какая связь существует между моментом инерции и периодом крутильных колебаний?
7. В чем суть экспериментального метода определения моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний?
8. Как находится момент инерции системы твердых тел?
9. Поясните цель, порядок выполнения работы и прокомментируйте полученные результаты.

Список использованных источников:

1 **Савельев, И.В.** Курс физики: учебник / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1992. – 304 с.

2 **Трофимова, Т.И.** Курс физики: учебник / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1990. – 478 с.

3 **Яворский, Б.М.** Справочное руководство по физике / Б.М. Яворский, Ю.А. Селезнев.– М.: Наука, 1989. – 576 с.