МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра общей физики

Е.В.ЦВЕТКОВА, Е.В.ШАБУНИО

МАЯТНИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ ПО МЕХАНИКЕ № 112

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов.

Оренбург 2006

УДК 531.53 (07)
ББК 22.213 я7
Ц 27

Рецензенты:
Старший преподаватель Михайличенко А.В., старший преподаватель Чакак А.А.

Цветкова Е.В.
Ц 27 Маятники: методические указания к лабораторной работе №112 по механике/Е.В.Цветкова, Е.В.Шабунио - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. – 8 с.

Методические указания предназначены для студентов дневного, вечернего и заочного отделений технических специальностей для выполнения лабораторной работы № 112 ″МАЯТНИКИ″.

ББК 22.213 я7

Содержание

1 Лабораторная работа № 112. Маятники

Цель работы:

1 Познакомиться с теоретическим описанием колебаний математического и физического маятников.
2 Экспериментально установить связь между периодом и длиной математического маятника.
3 Определить приведенную длину физического маятника.

Введение

Еще в первой половине XVII века Галилей исследовал колебания математического маятника и установил, что их период пропорционален корню квадратному из длины маятника. Полное же решение задачи о маятниках выполнено Гюйгенсом в 1673 году. Решение этой задачи имело не только исключительное значение для практики изготовления точных часов. Оно в сильной степени способствовало также уяснению принципов динамики, формировавшихся в тот же период.

Мы остановимся на рассмотрении двух частных примеров: математический и физический маятники.

Рассмотрим сначала колебание физического маятника. Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси. Точка пересечения оси качания с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс тела, называется точкой подвеса маятника. На рисунке 1 схематически изображен физический маятник. Точка подвеса обозначена буквой О. Положение маятника в любой момент времени t можно охарактеризовать углом отклонения его из положения равновесия φ.

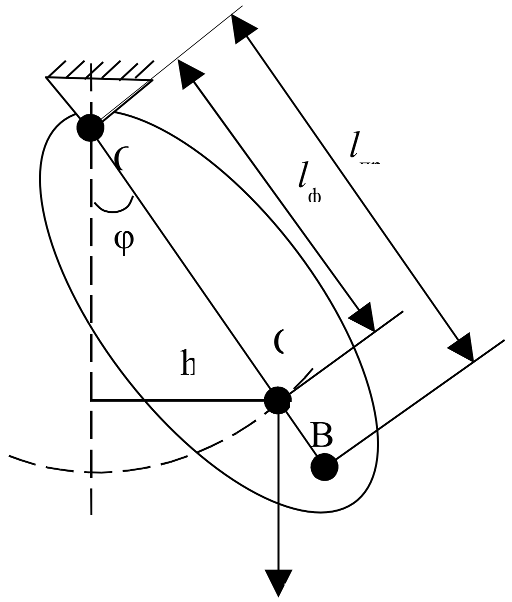

Рисунок 1

Выведем закон колебания физического маятника, основываясь на уравнении динамики вращательного движения:

$$M_z = J\cdot\varepsilon \qquad (1)$$

связывающим между собой момент силы M_z относительно неподвижной оси OZ с угловым ускорением ε и моментом инерции J тела относительно этой же оси. Оно применимо и для физического маятника, качающегося вокруг неподвижной оси. В этом случае M_z создается силой тяжести $m\vec{g}$, приложенной в центре масс C. Момент силы относительно оси качания M_z равен произведению силы тяжести на плечо h – кратчайшее расстояние от оси качания до направления линии действия силы тяжести (см. рисунок 1):

$$M_z = m\vec{g}\,h = m\vec{g}\,l_ф \sin\varphi, \tag{2}$$

где $l_ф$ называют длиной физического маятника, и она равна расстоянию от точки подвеса O до центра масс C. Угловое ускорение ε, по определению, равно второй производной от угла поворота φ по времени t:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{3}$$

Подставив формулы (2) и (3) в (1) получим:

$$-mg\,l_ф \sin\varphi = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{4}$$

Знак минус здесь поставлен потому, что сила тяжести стремится отклонить маятник в направлении, которое противоположно углу отклонения φ маятника от положения равновесия.

При малых углах отклонения ($\varphi<5^0$) можно принять, что $\sin\varphi\approx\varphi$, если φ выразить в радианах. Ограничиваясь в дальнейшем только малыми углами отклонения, перепишем (4) в виде:

$$mg\,l_ф \sin\varphi = -J\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl_ф}{J}\varphi = 0 \tag{5}$$

Введем обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl_ф}{J} \tag{6}$$

Тогда дифференциальное уравнение (5) можно записать так:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0 \tag{7}$$

Уравнение такого вида называется уравнением гармонического осциллятора. Оно имеет решение в виде:

$$\varphi = \varphi_0\cos(\omega_0 t+\alpha) \tag{8}$$

Из этого следует, что угол отклонения маятника от положения равновесия изменяется по гармоническому закону с круговой частотой ω_0, достигая наибольшего (амплитудного) значения φ_0. Из формулы (6) следует, что:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl_ф}{J}} \tag{9}$$

Напомним, что круговая частота ω_0 связана с частотой ν – числом колебаний в единицу времени – соотношением $\omega_0 = 2\pi\nu$.

Выражение $(\omega_0 t+\alpha)$ - называется фазой колебания. Оно определяет величину φ в любой момент времени. В частности, при t=0, фаза равна α и называется начальной фазой.

Период колебаний физического маятника T – время одного полного колебания – выражается через ω_0, как $T = 2\pi/\omega_0$. Подставив сюда выражение для ω_0, получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_ф}} \tag{10}$$

Итак, при малых углах отклонения период колебания физического маятника прямо пропорционален корню квадратному из отношения момента инерции J к длине физического маятника $l_ф$.

Величину $J/ml_ф$ обозначают $l_{пр}$ и называют приведенной длиной физического маятника, т.е. $l_{пр}=\dfrac{J}{ml_ф}$. Это обозначение позволяет придать формуле (10) такой вид:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}} \tag{11}$$

Математический маятник является частным случаем физического маятника. Математическим маятником называется маятник, вся масса которого практически сосредоточена в одной точке – центре масс. Примером математического маятника может служить небольшой шарик (т.е. шарик можно принять за материальную точку), подвешенный на невесомой нерастяжимой нити. Для такого маятника момент инерции J относительно оси качания равен произведению массы шарика m на квадрат длины нити l^2, то есть $J = ml^2$. Кроме того, для него $l_ф = l$. Подставив в уравнение (11) выражения для $l_ф$ и J, получим, что период качания математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{12}$$

Итак, период колебаний математического маятника прямо пропорционален $\sqrt{l}$. График зависимости Т от $\sqrt{l}$ при этом должен получиться в виде прямой линии, проходящей через начало координат. Угловой коэффициент К этой линии зависит лишь от g и запишется, как:

$$K = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \tag{13}$$

Сравнивая выражения (11) и (12), можно приведенной длине физического маятника $l_{пр}$ придать наглядный смысл. Приведенная длина физического маятника $l_{пр}$ численно равна длине l такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебания физического маятника.

Если на рисунке 1 вдоль отрезка ОС отложить $l_{пр}$, то получится точка В, называемая точкой качания физического маятника. Отличительной особенностью этой точки является то, что периоды колебания физического маятника около оси, перпендикулярной ОС и проходящей через О или В одинаковы. Физический маятник, имеющий две оси качания, проходящие через точки качания, называется оборотным. Для такого маятника очень легко определять приведенную длину: она равна расстоянию между осями качания.

Экспериментальная часть

Часть I. Подтвердите на опыте справедливость формулы (12). С этой целью определите период Т колебания математического маятника для шести различных длин l, начиная с 0,25 метров, увеличивая каждую следующую длину на 0,20 метров. Полученные результаты занести в таблицу 1. С целью более точного определения найдите для каждой длины маятника время t двадцати полных колебаний и вычислите T=t/20. За длину маятника приближенно возьмите расстояние от точки подвеса до центра (стального) шарика.

Результаты измерений и вычислений для математического маятника занесите в таблицу 1.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6
l_i, м						
$\sqrt{l}_i$, м$^{1/2}$						
t_i, с						
T_i, с						

Согласно полученным данным постройте зависимость Т от $\sqrt{l}$. Для этого отложите на поле графика экспериментальные точки и проведите между ними прямую, расположенную в среднем ближе всего к ним (см. рисунок 2). Определите значение углового коэффициента проведенной прямой. Его можно обозначить К и назвать средним значением углового коэффициента прямой пропорциональной зависимости Т от $\sqrt{l}$.

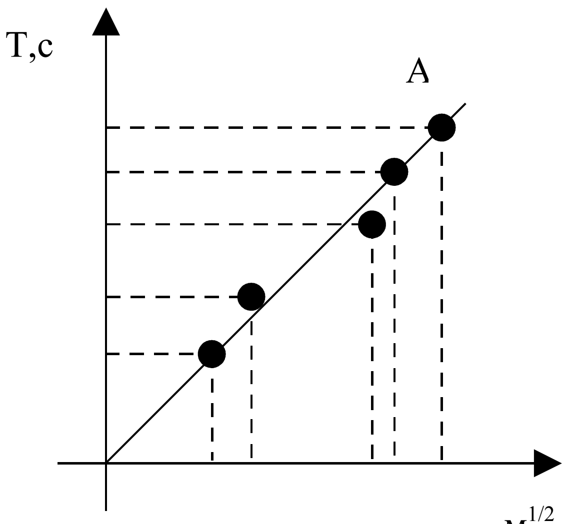

Рисунок 2

Выберите произвольную точку А подальше от начала координат. Найдите ее координаты $T_А$ и $\sqrt{l}_А$, вычислите $\hat{Ê} = T_А/\sqrt{l}_А$.

Сравните значение К, следующее из теоретически выведенной формулы (13), с найденным вами из графика зависимости Т от $\sqrt{l}_А$. Запишите в лабораторном отчете общий вывод по первой части работы.

Часть 2. Определите приведенную длину физического маятника. В соответствии с теоретическим введением приведенную длину физического маятника можно определить двумя способами.

Первый способ. Постепенно изменяйте длину математического маятника до тех пор, пока периоды колебания физического и математического маятников не совпадут. Периоды можно считать одинаковыми, если оба маятника, отклоненные на одинаковый угол и одновременно отпущенные, не обнаружат заметного расхождения в фазах в течение 8 полных колебаний. Соответствующая этому условию длина математического маятника и принимается за приведенную длину ($l_{пр}$).

Второй способ. Определите время t двадцати полных колебаний физического маятника, вычислите $T_ф$=t/20. Затем подставьте полученное значение $T_ф$ в формулу (11) и вычислите $l_{пр}$, полагая g=9,81 м/с^2. Сравните значения $l_{пр}$, полученные по первому и второму способу. Они должны быть примерно одинаковыми.

Контрольные вопросы

1 Поясните цель работы, экспериментальную реализацию цели, проведите обсуждение полученных вами результатов.
2 Математический маятник: определение, физические величины, характеризующие колебания математического маятника и связь между ними.
3 Физический маятник: определение, составление дифференциального уравнения колебаний и его решение; физические величины, характеризующие колебания маятника и связь между ними.
4 Оборотный маятник и его свойства.

Список использованных источников:

1 **Савельев, И.В.** Курс физики: учебник / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1992. – 304 с.

2 **Трофимова, Т.И.** Курс физики: учебник / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1990. – 478 с.

3 **Яворский, Б.М.** Справочное руководство по физике / Б.М. Яворский, Ю.А. Селезнев.– М.: Наука, 1989. – 576 с.