МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Индустриально-педагогический колледж

Отделение автоматизации информационных и технологических процессов

В.И. ПАРХОМА, Г.В. ПОГАДАЕВА

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2008

УДК 621.3.011.71(076.5)
ББК 31.211я 7
П18

Рецензент
кандидат технических наук, доцент С.В. Митрофанов

Пархома, В.И.

П18 **Методика изучения линейных электрических цепей постоянно го тока:методические указания занятиям / В.И. Пархома Г.В. Пога даева. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. 31 стр.**

В методических указаниях излагается основной материал по изучению линейных электрических цепей. Указания предназначены для студентов колледжей технических специальностей. Даются лекционные и практические занятия. Методические указания разработаны с целью формирования у студентов умение применять полученные знания по математике в электротехнике при решении конкретных задач.

ББК 31.211я7

Содержание

Введение

Действие электрического тока проявляется в нагреве и механическом действии токоведущих элементов цепи электротехнического устройства. Это влияет на долговечность и надежность работы. Сильный нагрев токоведущих частей ведёт за собой износ изоляции. В конечном итоге, если механические действия на проводник превышает допустимые значения, то проводник разрушается. Первым этапом в расчете электротехнического устройства – расчёт тока в проводниках. Общие законы позволяющие рассчитать любую электрическую цепь, являются законы Ома и Кирхгофа. Число уравнений, для расчёта цепи определяется числом ветвей схемы и может быть большим. Сократить число уравнений можно, если воспользоваться методом узловых потенциалов или методом контурных токов.

Целесообразность выбора метода определяется конфигурацией схемы. Упростить вычисление, а в некоторых случаях и снизить трудоемкость расчёта, возможно с помощью эквивалентных преобразований схемы. Преобразуют параллельные и последовательные соединения элементов, соединение «звезда»- в эквивалентный «треугольник» и наоборот. Осуществляют замену источника тока эквивалентным источником ЭДС. Методом эквивалентных преобразований можно рассчитать любую цепь и при этом использовать простые вычислительные средства. Однако, ввиду большого числа промежуточных вычислений возможны ошибки. Это ограничивает область применения этого метода.

Развитие вычислительной техники на первый взгляд снимает необходимость снижения порядка системы уравнений. Однако, процесс составления системы независимых уравнений в сильно разветвленных цепях сложен и требует знания специальных разделов математики (теории множеств, матриц, графов). Поэтому с методологической точки зрения студенту данной специальности знание всех перечисленных методов расчёта электрических цепей необходимо.

1 Линейные электрические цепи постоянного тока

1.1 Электротехнические устройства постоянного тока

Термином *электротехническое устройство* принято называть промышленное изделие, предназначенное для определенной функции при решении комплексной проблемы производства, распределения, контроля, преобразования и использования электрической энергии. Электротехнические устройства постоянного тока весьма разнообразны, например, аккумулятор, линия передачи энергии, амперметр, реостат. Постоянный ток применяется при электрохимическом получении алюминия, на городском и железнодорожном электротранспорте, в электронике, медицине и других областях науки и техники.

1.2 Элементы электрической цепи постоянного тока

Электрическая цепь, или, просто, цепь постоянного тока в общем случае содержит источники электрической энергии, приемники электрической энергии, измерительные приборы, коммутационную аппаратуру, соединительные линии и провода.

В *источниках электрической энергии* осуществляется преобразование в электрическую энергию каких-либо других форм энергии, например, энергии химических процессов в гальванических элементах и аккумуляторах.

В *приемниках электрической энергии* электрическая энергия преобразуется, например, в механическую (двигатели постоянного тока), тепловую (электрические печи), химическую (электролизные ванны).

Коммутационная аппаратура, линии и измерительные приборы служат для передачи электрической энергии от источников, распределения ее между приемниками и контроля режима работы всех электротехнических устройств.

На рисунке 1 в качестве примера приведено эскизное изображение электротехнических устройств и способа их соединения в простейшей цепи постоянного тока. При замыкании рубильника *1* к лампе накаливания *2* — приемнику электрической энергии — подключается источник электрической энергии постоянного тока — аккумуляторная батарея *3*. Для контроля режима приемника энергии включены амперметр *4* и вольтметр *5*.

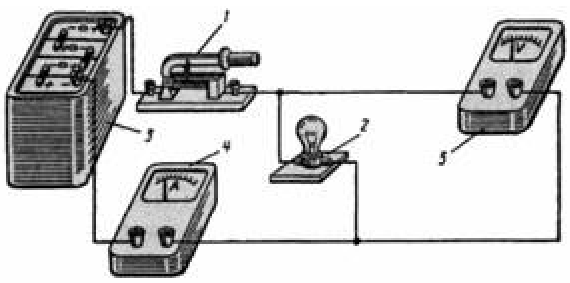


Рисунок 1 - Эскизное изображение электротехнических устройств и способа их соединения в простейшей цепи

Изображение цепи можно упростить, если каждое электротехническое устройство заменить (по правилам стандарта) его условным обозначением (рисунок 2). Такие графические изображения цепей называются *принципиальными схемами*. Принципиальная схема показывает назначение электротехнических устройств и их взаимодействие, но неудобна при расчетах режима работы цепи.

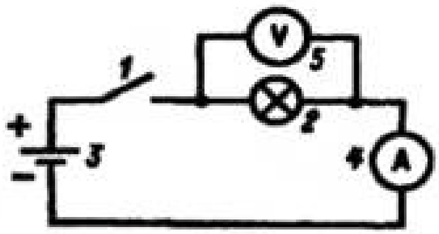


Рис. 1.2

Рисунок 2 - Условные обозначения электротехнических устройств.

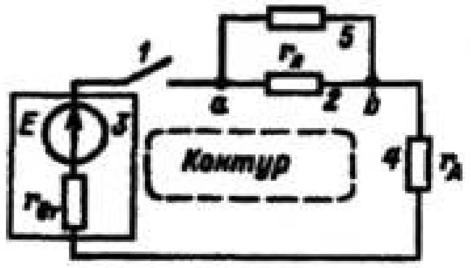


Рис. 1.3

Рисунок 3 - Схема замещения электротехнических устройств

Для того чтобы выполнить расчет, необходимо каждое из электротехнических устройств представить его схемой замещения.

Схема замещения электрической цепи состоит из совокупности различных идеализированных элементов, выбранных так, чтобы можно было с заданным или необходимым приближением описать процессы в цепи.

Конфигурация схемы замещения цепи определяется следующими геометрическими (топологическими) понятиями: *ветвь, узел, контур*.

Ветвь схемы состоит из одного или нескольких последовательно соединенных элементов, каждый из которых имеет два вывода, начало и конец.

В *узле* схемы соединяются три или большее число ветвей.

Контур — замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям так, что ни одна ветвь и ни один узел не встречается больше одного раза.

Схема замещения (рисунок 3) цепи, показанной на рисунке 1, содержит три ветви, причем две состоят из одного элемента каждая, а третья — из трех элементов. На рисунке указаны параметры элементов: $r_Л$ — сопротивление цепи лампы, r_V — сопротивление цепи вольтметра, r_A — сопротивление цепи амперметра, E — ЭДС аккумулятора и $r_{ВТ}$ - его внутреннее сопротивление.

1.3 Понятие об электрическом токе и напряжении

Постоянный ток в проводящей среде представляет собой упорядоченное движение положительных и отрицательных зарядов под действием электрического поля, например, в электролитах и газах движутся навстречу друг другу ионы с положительными и отрицательными зарядами. Принято считать направлением тока I направление движения положительных зарядов, т. е. направление, обратное направлению движения электронов в проводнике под действием электрического поля.

Постоянный ток I, A, можно записать формулой

$$I = \frac{Q}{t},$$

где t – время, равномерного перемещения суммарного заряда, с;

Q – Количество электричества, Кл, проходящее через поперечное сечение рассматриваемого участка цепи.

Основная единица тока в международной системе единиц (СИ) — *ампер* (А), заряда — *кулон* (Кл), время — *секунда* (с).

Величина тока в цепи измеряется прибором — амперметром. Чтобы через него прошел полный ток цепи амперметр включают последовательно, т. е. в разрыв цепи.

Электрическое напряжение U, В, на концах участка цепи — это разность потенциалов между концами этого участка:

$$U = \varphi_a - \varphi_b,$$

или

$$U = \frac{A}{q},$$

где A - работа электрического поля при перемещении положительного заряда вдоль участка проводника;

φ_a и φ_b — потенциалы однородного постоянного электрического поля в поперечных сечениях a и b участка проводника.

Основная единица напряжения в системе СИ — *вольт* (В), напряженности электрического поля — *вольт на метр* (В/м).
Напряжение измеряется прибором — вольтметром, который в цепь включается параллельно.

1.4 Резистивные элементы

Столкновения свободных электронов в проводниках с атомами кристаллической решетки тормозят их поступательное (дрейфовое) движение. Это противодействие направленному движению свободных электронов, т. е. постоянному току, составляет физическую сущность *сопротивления* проводника.

Для участка цепи с сопротивлением r ток и напряжение связаны простым соотношением — *законом Ома*:

$$U_{ab} = rI_{ab} \text{ или } U = rI \tag{1}$$

Величина, обратная сопротивлению, называется *проводимостью*:

$$g = \frac{1}{r}$$

Основная единица сопротивления в системе СИ — *ом* (Ом),
проводимости — *сименс* (См).

Сопротивление проводника зависит от его длины, поперечного сечения и материала, из которого изготовлен проводник. Эта зависимость выражается формулой:

$$r = \frac{\rho_V l}{S},$$

где r — сопротивление проводника, Ом;

ρ_v— удельное сопротивление, Ом-м;

l — длина проводника, м;

S — площадь поперечного сечения проводника, м^2

Сопротивление проводника постоянному току зависит также от температуры. Но при изменениях температуры в относительно узких пределах (примерно 200 °С), выражается формулой:

$$r_2 = r_1[1 + \alpha(\Theta_2 - \Theta_1)]$$

где r_1 и r_2 — сопротивления соответственно при температурах Θ_1 и Θ_2;

α — температурный коэффициент сопротивления, равный изменению сопротивления при изменении температуры на 1 °С.

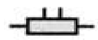
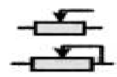
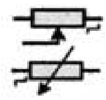
В таблице 1 приведены значения удельного сопротивления и температурного коэффициента сопротивления материалов.

Таблица 1- Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления некоторых проводниковых материалов

Материал	Объемное удельное сопротивление при 20 °С, 1 10^{-6} Ом·м	Температурный коэффициент сопротивления (на 1°)
Серебро	0,016	0,0035
Медь техническая	0,0172-0,0182	0,0041
Алюминий	0,0295	0,0040
Сталь	0,125-0,146	0,0057
Железо	0,09-0,11	0,0060
Чугун	0,15	0,001
Свинец	0,218-0,222	0,0039
Вольфрам	0,0503	0,0048
Уголь	10-60	0,005
Манганин (сплав: Cu - 85%, Mn – 12%)	0,040-0,52	0,00003
Константин	0,44	0,00005
Нихром (сплав: Cr – 20%, Ni – 80%)	1,02-1,12	0,00001

Электротехническое устройство, обладающее сопротивлением и применяемое для ограничения тока, называется *резистором*. Регулируемый резистор называется *реостатом*. Условные обозначения различных типов резисторов даны в таблице 2

Таблица 2 - Условные графические изображения различных типов резисторов

Наименование	Условное изображение
Резистор: постоянный с отводами	 
переменный (реостат) с разрывом цепи без разрыва цепи переменный (реостат) со ступенчатым регулированием саморегулирующийся нелинейно, например, в зависимости от параметра внешней среды II	   

Резистивными элементами называются идеализированные модели резисторов и любых других электротехнических устройств или их частей, оказывающих сопротивление постоянному току независимо от физической природы этого явления

Линейный резистивный элемент является схемой замещения любой части электротехнического устройства, в которой ток пропорционален напряжению. Его параметром служит сопротивление $r = const$.

Если зависимость тока от напряжения нелинейная, то схема замещения содержит *нелинейный резистивный элемент*, который задается нелинейной вольтамперной характеристикой $I(U)$. На рисунке 4 приведены вольтамперные характеристики (ВАХ) линейного и нелинейного резистивных элементов (линии *а*, *б*), а также условные обозначения их на схемах замещения.

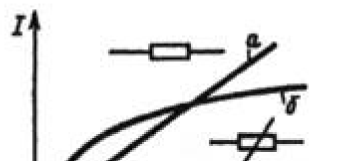


Рисунок 4 - Вольтамперные характеристики (ВАХ) линейных и нелинейных резистивных элементов

1.5 Источники электрической энергии постоянного тока

Рассмотрим источник энергии на примере гальванического элемента. Один из типов гальванических элементов (рисунок 5 а) представляет собой две пластины —

из меди *Cu* и из цинка *Zn*, помещенные в раствор серной кислоты. Чистая кислота не проводит электрического тока. При растворении ее в дистиллированной воде она распадается на положительно заряженные ионы H^+ и отрицательно заряженные ионы SO^-.

Раствор кислоты, щелочи или соли в дистиллированной воде или другом растворители называют *электролитом*.

Между разноименно заряженными пластинами возникает однородное электрическое поле с напряженностью E, которое препятствует направленному движению ионов в растворе. При некотором значении напряженности поля $E = E_0$ накопление зарядов на пластинах прекращается. Напряжение или разность потенциалов между пластинами, при которой накопление зарядов прекращается, служит количественной *мерой сторонней силы* (в данном случае химической природы), стремящейся к накоплению заряда.

Количественную меру сторонней силы принято называть *электродвижущей силой* (ЭДС).

Для гальванического элемента ЭДС:

$$E = eQd = U_{abx},$$

где d — расстояние между пластинами;

$U_{abx} = \varphi_{ax} - \varphi_{bx}$ — напряжение, равное разности потенциалов между выводами пластин в режиме холостого хода, т. е. при отсутствии тока.

Если к выводам гальванического элемента подключить приемник, например резистор, то в замкнутой цепи возникнет ток. Направленное движение ионов в растворе кислоты сопровождается их взаимными столкновениями, что создает *внутреннее сопротивление* гальванического элемента постоянному току. Прохождение тока через раствор электролита сопровождается химическим процессом, называемым *электролизом*.

Гальванический элемент, эскизное изображение которого дано на рисунке 5 а, а изображение на принципиальных схемах — на рисунке 5 б, можно представить схемой замещения (рисунок 5 в). Которая состоит из последовательно включенных источника ЭДС (Е) и резистивного элемента с сопротивлением $r_{ВТ}$, равным его внутреннему сопротивлению.

Схема замещения на рисунке 5 в справедлива для любых других источников электрической энергии постоянного тока, которые отличаются от гальванического элемента физической природой ЭДС и внутреннего сопротивления.

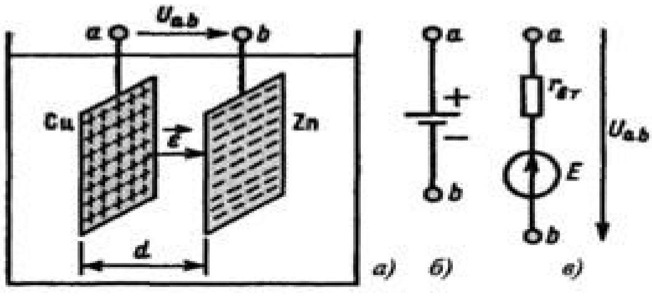


Рисунок 5 - Эскизное изображение гальванического элемента

Электролиз, являющийся принципом действия гальванических элементов и аккумуляторов, применяются для покрытия одних металлов тонким слоем других: золочение, серебрение (для придания изделиям декоративного вида), хромирование, никелирование, оцинковывание (для защиты от коррозии).

Известно, что при электролизе на электродах выделяются различные вещества. Зависимость их количества от протекающего через электролит тока I и времени его протекания t определяется законом Фарадея.

В различных электролитах один и тот же ток за одинаковое время выделят на электродах различное количество вещества.

Количество вещества, выделяемое на электроде током в 1А в течение 1с, называется *электрохимическим эквивалентом*.

По закону Фарадея:

$$M = \alpha I t$$

где M — количество вещества, кг;

α — электрохимический эквивалент;

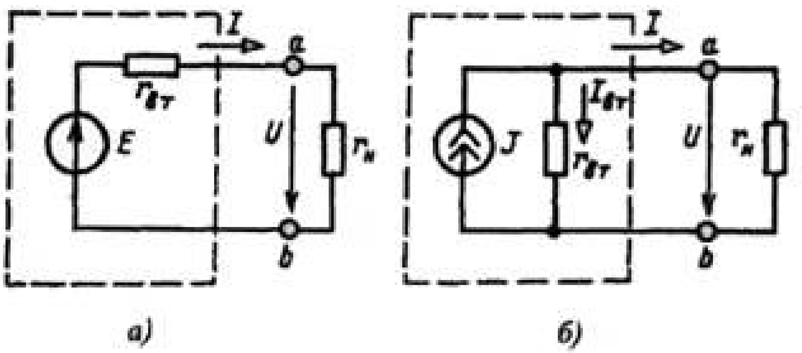
I — ток, А;

t — время, с.

1.6 Источник ЭДС и источник тока

Рассмотрим процессы в цепи, состоящей из источника электрической энергии, подключенного к резистору с сопротивлением нагрузки r_H.

Представим источник электрической энергии схемой замещения на рисунке 5 *в*, а всю цепь — схемой на рисунке 6 *а*.



а - источник ЭДС; б - источник тока

Рисунок 6

Свойства источника электрической энергии определяет *вольтамперная характеристика* или *внешняя характеристика* — зависимость напряжения между его выводами $U_{ab} = U$ от тока / источника, т. е. $U(I)$:

$$U = E - r_{BT} I = U_x - r_{BT} I \qquad (2)$$

которой соответствует прямая на рисунке 7 *а*. Уменьшение напряжения источника при увеличении тока объясняется увеличением падения напряжения на его внутреннем сопротивлении r_{BT}.

Во многих случаях внутреннее сопротивление источника электрической энергии мало по сравнению с сопротивлением r_H и справедливо неравенство $r_{BT} I << E$. В этих случаях напряжение между выводами источника электрической энергии практически не зависит от тока, т. е. $U \sim E = const$.

Источник электрической энергии с малым внутренним сопротивлением можно заменить идеализированной моделью, для которой $r_{вт} = 0$.

Такой идеализированный источник электрической энергии называется *идеальным источником* ЭДС с одним параметром $E = Ux = U$. Напряжение между выводами идеального источника ЭДС не зависит от тока, а его внешняя характеристика определяется выражением:

$$U = E = const \tag{3}$$

которому соответствует прямая на рисунке 7 *б*. Такой источник называется также источником напряжения. В ряде специальных случаев, в частности в цепях с полупроводниковыми приборами и электронными лампами, внутреннее сопротивление источника электрической энергии может быть во много раз больше сопротивления нагрузки r_H (внешней по отношению к источнику части цепи). При выполнении условия $r_{вт} >> r_H$ в таких цепях ток источника электрической энергии:

$$I \approx E / r_{BT} = I_K = J = const$$

т. е. практически равен току короткого замыкания источника. Источник электрической энергии с большим внутренним сопротивлением можно заменить идеализированной моделью, у которой $r_{вт} \to \infty$ и $E \to \infty$ и для которой справедливо равенство $E/r_{вт} = J$. Такой идеализированный источник электрической энергии называется идеальным источником тока с одним параметром $J = I_K$. Ток источника тока не зависит от напряжения между его выводами, а его внешняя характеристика определяется выражением:

$$I = J = const \tag{4}$$

которому соответствует прямая на рисунке 7 *в*. На этом же рисунке дано изображение источника тока на схемах.

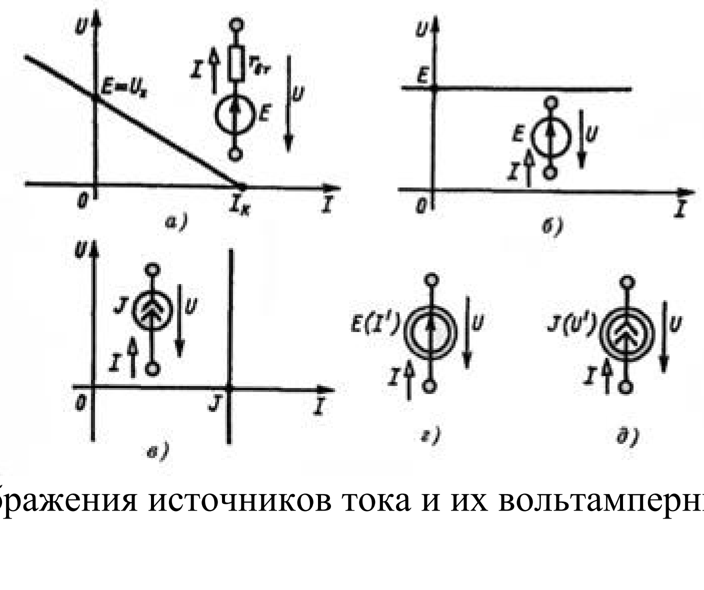


Рисунок 7 -Изображения источников тока и их вольтамперные характеристики

Отметим, что представление реальных источников электрической энергии в виде двух схем замещения является эквивалентным представлением относительно внешнего участка цепи: в обоих случаях одинаковы напряжения между выводами источника.

1.7 Первый и второй законы Кирхгофа

Два закона Кирхгофа, называемые иногда правилами Кирхгофа, — основные законы электрических цепей.

Согласно *первому закону Кирхгофа* (закону Кирхгофа для токов) *алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \tag{5}$$

где со знаком плюс записываются токи с положительными направлениями от узла, а со знаком минус — с положительными направлениями к узлу, или наоборот. Иначе: сумма токов, направленных от узла, равна сумме токов, направленных к узлу. Например, для узла цепи на рисунке 8:

$$-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = \sum_{k=1}^{5} I_k = 0$$

или

$$I_3 + I_5 = I_1 + I_2 + I_4$$

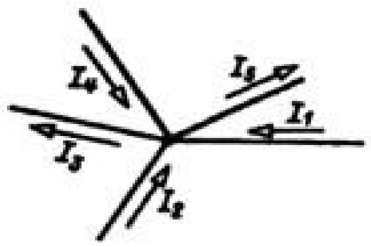


Рисунок 8 - Входящие и выходящие токи

Этот закон является следствием того, что в узлах цепи постоянного тока заряды не могут накапливаться. В противном случае изменялись бы потенциалы узлов и токи в ветвях.

Согласно второму закону Кирхгофа (закону Кирхгофа для напряжений) *алгебраическая сумма напряжений участков любого контура электрической цепи равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{m} U_k = 0, \tag{6}$$

где m — число участков контура.

В формуле (6) со знаком плюс записываются напряжения, положительные направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, и со знаком минус — противоположно направленные, или наоборот.

В частности, для контура схемы замещения цепи, содержащего только источники ЭДС и резистивные элементы, алгебраическая сумма напряжений на резистивных элементах равна алгебраической сумме ЭДС:

$$\sum_{k=1}^{m} U_{rk} = \sum_{k=1}^{m} r_k I_k = \sum_{k=1}^{m} E_k, \tag{7}$$

где m — число резистивных элементов;

n — число ЭДС в контуре.

В формуле (7) со знаком плюс записываются ЭДС и токи, положительные направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, и со знаком минус — противоположно направленные, или наоборот. Для контуров, содержащих источники тока, например контура *1*, показанного штриховой линией на рисунке 9, допустима запись второго закона Кирхгофа только в виде формулы (6), но не в виде формулы (7):

$$-U_1 + U_2 - U_3 = 0,$$

для контура 2 по (7):

$$\sum_{k=1}^{4} r_k I_k = -r_1 I_1 + r_2 I_2 + r_4 I_4 + r_3 I_3 = \sum_{k=1}^{3} E_k = -E_1 + E_2 + E_3.$$

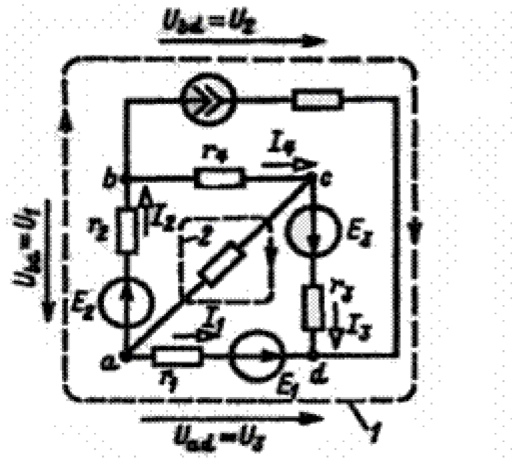


Рисунок 9 - Контуры в электрической схеме

1.8 Способы соединения резисторов

Резисторы в электрической цепи могут быть соединены между собой последовательно, параллельно и смешано. Рассмотрим эти способы на примере соединения трех резисторов, сопротивление которых обозначим r_1, r_2 и r_3.

Если конец первого резистора соединить с началом второго, а конец второго — с началом третьего, то такое соединение называется *последовательным*, рисунок 10.

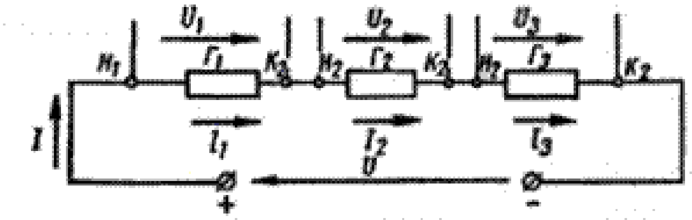


Рисунок 10 - Последовательное соединение резисторов

При таком соединении сила тока во всех резисторах одинакова:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

Сумма падений напряжений на резисторах равна напряжению, подведенному к цепи:

$$U = I_1 r_1 + I_2 r_2 + I_3 r_3 = I(r_1 + r_2 + r_3)$$

Напряжение, подведенное к цепи,

$$U = Ir,$$

где *r* — общее сопротивление всей цепи, следовательно,

$$Ir = I(r_1 + r_2 + r_3)$$

Сократив обе части равенства на *I*, получаем:

$$r = r_1 + r_2 + r_3$$

Если начала всех резисторов соединить в одну точку, а концы этих резисторов в другую точку, то такое соединение называется *параллельным*, рисунок 11.

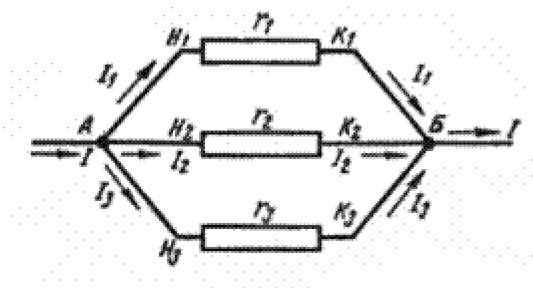


Рисунок 11 - Параллельное соединение резисторов

Напряжение на каждом из резисторов равно напряжению, приложенному к узлам цепи *А* и *В*:

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_{AB}$$

По первому закону Кирхгофа для узла *А*:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Но по закону Ома каждый из этих токов определяют по формулам:

$$I = U/r; I_1 = U_1/r_1; I_2 = U_2/r_2; I_3 = U_3/r_3$$

Тогда первый закон Кирхгофа:

$$U/r = U_1/r_1 + U_2/r_2 + U_3/r_3 \; или \; U/r = U(1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3)$$

Сократив обе части равенства на U, получаем:

$$1/r = 1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3$$

Учитывая, что $g = 1/r$, имеем:

$$g = g_1 + g_2 + g_3$$

Таким образом, общее сопротивление меньше наименьшего из параллельно соединенных резисторов. Для двух параллельно соединенных резисторов:

$$1/r = 1/r_1 + 1/r_2 \text{ или } r = r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$$

Параллельно соединенные n одинаковых резисторов $r_1 = r_2 = \ldots r_n$, составляют общее сопротивление $r_{общ} = \sum\ r/n$.

Если в электрической цепи имеются как последовательно, так и параллельно соединенные резисторы, то такое соединение называют *смешанным*.

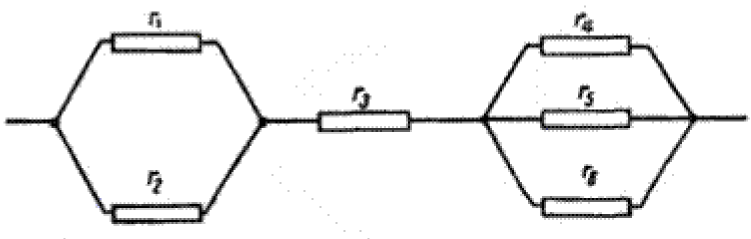


Рисунок 12 - Смешанное соединение резисторов

При расчете таких цепей вначале определяют общее сопротивление параллельно или последовательно соединенных групп, после чего определяют общее сопротивление всей цепи.

Рассмотрим схему, изображенную на рисунке 12.

Учитывая, что r_1, и r_2 соединены параллельно:

$$r_{12} = r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$$

Но r_4, r_5, r_6 также соединены параллельно, поэтому, преобразуя зависимость

$$1/r_{456} = 1/r_4 + 1/r_5 + 1/r_6$$

получаем

$$r_{456} = r_4 r_5 r_6 / (r_4 r_5 + r_4 r_6 + r_5 r_6)$$

Резисторы r_{12}, r_3 и r_{456} соединены между собой последовательно, отсюда $r_{общ} = r_{12} + r_3 + r_{456}$

1.9 Применение закона Ома и законов Кирхгофа для расчетов электрических цепей

В общем случае схема цепи имеет *В* ветвей, из которых *Bj* ветвей содержат источники тока и *У* узлов.

Рассмотрим расчет режима в цепи без источников тока, т. е. при *Bj = 0*. Ее расчет сводится к нахождению токов в *В* ветвях. Для этого необходимо составить *У - 1* независимых уравнений по первому закону Кирхгофа и *К = В - У +1* независимых уравнений по второму закону Кирхгофа.

Число независимых уравнений по первому закону Кирхгофа на единицу меньше числа узлов потому, что ток каждой ветви входит с разными знаками в уравнения для соединяемых ею узлов. Сумма слагаемых уравнений всех узлов тождественно равна нулю.

В качестве примера рассмотрим расчет цепи, схема замещения которой показана на рисунке 13 и которая содержит *У = 2* узла и *В = 3* ветви, т. е. *К = В - У + 1 = 3 - 2 + 1 = 2* независимых контура (*1* и *2*, или *1* и *3*, или *2* и *3*).

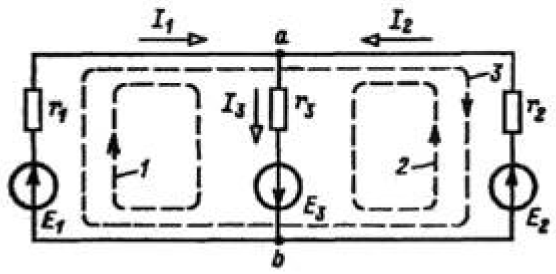


Рисунок 13 - Сложная электрическая цепь

Произвольно выбираем положительные направления токов ветвей I_1 ,I_2, I_3 . По первому закону Кирхгофа можно составить одно (*У - 1 = 2 - 1 = 1*) независимое уравнение, например, для узла *a*:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \qquad (8\ а)$$

и по второму закону Кирхгофа — два (*К = 2*) независимых уравнения, например, для контуров *1* и *2*.

$$r_1 I_1 + r_3 I_3 = E_1 + E_3 \qquad (8\ б)$$

$$r_2 I_2 + r_3 I_3 = E_2 + E_3 \qquad (8\ в)$$

Решение системы трех уравнений (1.8) с тремя неизвестными токами, например, методом подстановок, определяет токи ветвей I_1, I_2, I_3.

При расчете схем замещения с источниками тока возможны упрощения. Действительно, токи *Bj* ветвей с источниками тока известны. Поэтому число независимых контуров (без источников тока), для которых необходимо составить уравнения по второму закону Кирхгофа, равно *К=В – B j - У + 1*.

При помощи законов Ома и Кирхгофа можно рассчитать режим работы любой электрической цепи. Однако порядок системы уравнений может быть большим. Для упрощения вычислений применяют различные расчетные методы: контурных токов, узловых потенциалов, межузлового напряжения, эквивалентного источника и т. д.

1.10 Метод эквивалентного преобразования схем

В ряде случаев расчет сложной электрической цепи упрощается, если в ее схеме замещения заменить группу резистивных элементов другой эквивалентной группой, в которой резистивные элементы соединены иначе. Взаимная эквивалентность заключается в том, что после замены режим работы остальной части цепи не изменится.

1.10.1 Смешанное соединение резистивных элементов

При наличии в цепи одного источника внешнюю по отношению к нему часть схемы можно в большинстве случаев рассматривать как смешанное (последовательно-параллельное) соединение резистивных элементов.

Для расчета такой цепи удобно преобразовать ее схему замещения в эквивалентную схему с последовательным соединением резистивных элементов. Например, в цепи на рисунке 14, а между узлами *a* и *b* включены три резистивных элемента с сопротивлениями r_2, r_3 и r_4, т. е. проводимостями

$$g_2 = 1/r_2,\ g_3 = 1/r_3,\ g_4 = 1/r_4;$$

эквивалентная проводимость:

$$g_э = 1/r_2 + 1/r_3 + 1/r_4 \qquad (9)$$

После замены параллельного соединения резистивных элементов эквивалентным резистивным элементом с сопротивлением $r_э = 1/g_э$ получается эквивалентная схема с последовательным соединением двух резистивных элементов r_1 и $r_э$ (рисунок 14 *б*).

Ток в неразветвленной части:

$$I_1 = U/(r_1 + r_э)$$

токи в параллельных ветвях:

$$I_2 = U_{ab}/r_2; I_3 = U_{ab}/r_3; I_4 = U_{ab}/r_4 \ при U_{ab} = r_э I_1 \qquad (10)$$

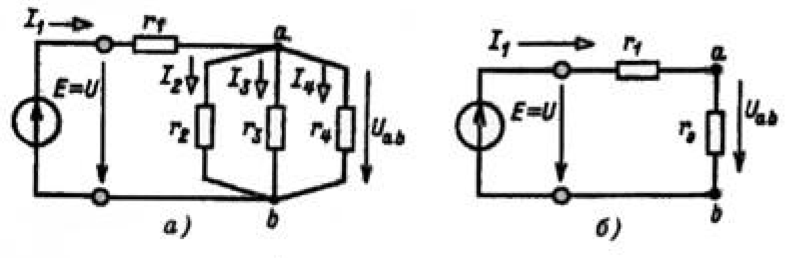


Рисунок 14 - Эквивалентное преобразование электрических схем

1.10.2 Соединение резистивных элементов по схеме звезды и треугольника

В общем случае схему замещения цепи по схеме *n* - лучевой звезды из резистивных элементов можно заменить эквивалентной схемой в виде *n* - стороннего многоугольника. Обратное преобразование возможно в ограниченном числе случаев. Такое преобразование применяется при расчетах сложных цепей постоянного тока и цепей трехфазного тока.

Эквивалентность схем в виде треугольника и звезды (рисунок 15) получается приравниванием значений сопротивлений или проводимостей между одноименными узлами этих схем, отсоединенных от остальной части цепи.

Найдем сопротивление между узлами *A* и *B*.

Проводимость между узлами *A* и *B* для схемы треугольника на рисунке 15 а:

$$\frac{1}{r_{AB}}+\frac{1}{(r_{BC}+r_{CA})}=\frac{(r_{AB}+r_{BC}+r_{CA})}{(r_{AB}r_{AC}+r_{CA}r_{AB})}$$

Сопротивление между узлами *A* и *B* — величина, обратная проводимости между этими узлами, т. е.

$$\frac{1}{r_{AB}}+\frac{1}{(r_{BC}+r_{CA})}=\frac{(r_{AB}+r_{BC}+r_{CA})}{(r_{AB}r_{AC}+r_{CA}r_{AB})}$$

Для схемы звезда на рисунке 15 *б* сопротивление между теми же узлами *A* и *B* равно сумме сопротивлений двух ветвей: $r_A + r_B$.

Согласно условию эквивалентности должно выполняться равенство

$$r_A+r_B=\frac{(r_{AB}r_{BC}+r_{CA}r_{AB})}{(r_{AB}+r_{BC}+r_{CA})}=\frac{(r_{AB}r_{BC}+r_{CA}r_{AB})}{\sum r_{\Delta}} \qquad (11)$$

здесь $\sum r_{\Delta}$ — сумма сопротивлений всех ветвей для треугольника.

Структуры треугольника и звезды по отношению к узлам симметричны. Поэтому уравнения равенства сопротивлений между узлами *B* и *C* и между узлами *C* и *A* можно получить из уравнения (11) простой циклической перестановкой индексов:

$$r_B + r_C = \frac{(r_{BC}r_{CA} + r_{AB}r_{BC})}{\sum r_\Delta} \qquad (12)$$

$$r_C + r_A = \frac{(r_{CA}r_{AB} + r_{BC}r_{CA})}{\sum r_\Delta} \qquad (13)$$

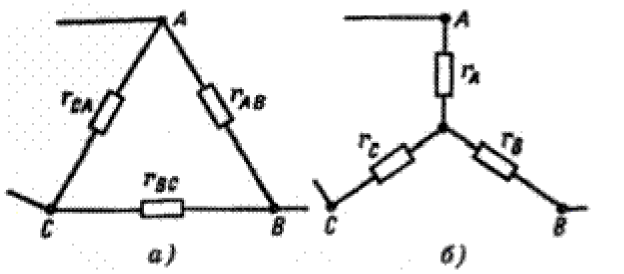


Рисунок 15 - Изображение схемы треугольника и ее эквивалентное преобразование в схему звезда

Чтобы определить сопротивление r_A звезды, сложим уравнения (11) и (13) и вычтем из этой суммы уравнение (12), разделив последнее на 2, найдем:

$$r_A = r_{AB}r_{CA} \Big/ \sum r_\Delta \qquad (14)$$

Сопротивления других ветвей звезды получим путем циклической перестановки индексов:

$$r_B = r_{BC}r_{AB} \Big/ \sum r_\Delta \qquad (15)$$

$$r_C = r_{CA}r_{BC} \Big/ \sum r_\Delta \qquad (16)$$

В случае равенства сопротивлений ветвей треугольника ($r_{AB} = r_{BC} = r_{CA} = r_\Delta$) сопротивления ветвей эквивалентной звезды тоже одинаковы:

$$r_y = r_\Delta / 3 \qquad (17)$$

Возможно обратное преобразование звезды из резистивных элементов в эквивалентный треугольник.

Для этого перемножим попарно выражения (14) — (16) и сложим полученные произведения:

$$r_Ar_B + r_Br_C + r_Cr_A = \frac{r_{AB}r_{BC}r_{CA}}{(r_{AB} + r_{BC} + r_{CA})}$$

Последнее уравнение разделим на выражение (17) и определим сопротивление ветви треугольника:

$$r_{AB} = \frac{r_A + r_B + r_Ar_B}{r_C} \qquad (18)$$

Путем циклической перестановки индексов в формуле (17) найдем выражения для сопротивлений двух других ветвей:

$$r_{BC} = \frac{r_B + r_C + r_B r_C}{r_A} \qquad (19)$$

$$r_{CA} = \frac{r_C + r_A + r_C r_A}{r_B} \qquad (20)$$

Примером упрощения расчетов может служить преобразование мостовой схемы соединения резистивных элементов (рисунок 16 *а*). После замены одного из треугольников эквивалентной звездой всю цепь (рисунок 16 *б*) можно рассматривать как смешанное соединение резистивных элементов.

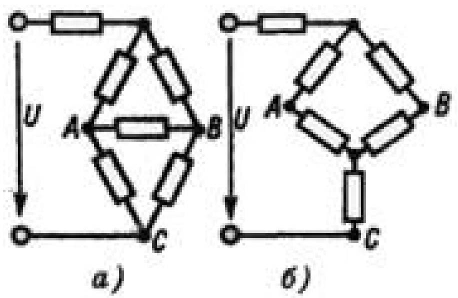


Рисунок 16 - Мостовая схема соединения резистивных элементов и ее эквивалентная схема звездой

1.11 Метод узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов позволяет уменьшить число совместно решаемых уравнений до *У- 1*, где *У* — число узлов схемы замещения цепи. Метод основан на применении первого закона Кирхгофа и заключается в следующем:

1) один узел схемы цепи принимаем базисным с нулевым потенциалом;

2) для остальных *У - 1* узлов составляем уравнения по первому закону Кирхгофа, выражая токи ветвей через потенциалы узлов;

3) решением составленной системы уравнений определяем потенциалы *У - 1* узлов относительно базисного, а затем токи ветвей по закону Ома.

Рассмотрим применение метода на примере расчета цепи по рисунку 17, содержащей *У = 3* узла. Узел *3* принимаем базисным, т. е. $\varphi 3 = 0$. Для узлов *1* и *2* уравнения по первому закону Кирхгофа:

узел *1*

$$I_1 + I_3 + J_1 = 0$$

узел *2*

$$I_2 - I_3 - J_2 = 0$$

где

$$\begin{cases} I_1 = (\varphi_1 - \varphi_3)/r_1 = \varphi_1/r_1 \\ I_2 = (\varphi_2 - \varphi_3)/r_2 = \varphi_2/r_2 \\ I_3 = (\varphi_1 - \varphi_2 + E)/r_3 \end{cases}$$

т.е. после подстановки

$$\begin{cases} (1/r_1 + 1/r_3)\varphi_1 - (1/r_3)\varphi_1 = -J_1 - E/r_3 \\ -(1/r_3)\varphi_1 + (1/r_2 + 1/r_3)\varphi_2 = J_2 + E/r_3 \end{cases} \quad (21)$$

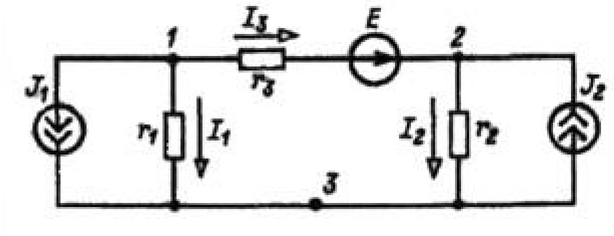


Рисунок 17 - Схема соединения элементов с тремя контурами

Из записи формулы (20) очевиден принцип составлений уравнений по методу узловых потенциалов. В левой части уравнений коэффициент при потенциале рассматриваемого узла положителен и равен сумме проводимостей сходящихся к нему ветвей. Коэффициенты при потенциалах узлов, соединенных ветвями с рассматриваемым узлом, отрицательны и равны проводимостям соответствующих ветвей.

Правая часть уравнений содержит алгебраическую сумму токов ветвей с источниками токов и токов короткого замыкания ветвей с источниками ЭДС, сходящихся к рассматриваемому узлу, причем слагаемые берутся со знаком плюс (минус), если ток источника тока и ЭДС направлены к рассматриваемому узлу (от узла).

1.12 Метод контурных токов

Метод контурных токов позволяет уменьшить число совместно решаемых уравнений до $К = В – Bj – У + 1$ и основан на применении второго закона Кирхгофа.

Рассмотрим сущность метода сначала для расчета схемы цепи без источников тока, т. е. при $Bj = 0$:

1) выбираем $К = В - У + 1$ независимых контуров и положительных направлений так называемых контурных токов, каждый из которых протекает по всем элементам соответствующего контура;

2) для $К$ независимых контуров составляем уравнения по второму закону Кирхгофа, совместное решение которых определяет все контурные токи;

3) ток каждой ветви определяем по первому закону Кирхгофа как алгебраическую сумму контурных токов в соответствующей ветви.

В качестве примера рассмотрим расчет цепи приведенной на рисунке 18 (слева) с числом ветвей $В = 6$, узлов $У = 4$, независимых контуров $К = В – У + 1 = 6 – 4 + 1 = 3$. Выберем независимые контуры 1-3 и положительные направления контурных токов в них I_{11}, I_{22} и I_{33} (рисунок 18 справа). В отличие от токов ветвей каждый контурный ток обозначим двойным индексом номера контура.

Уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} \text{контур}\mathbf{1} \\ (r_1 + r_4 + r_6)I_{11} - r_6 I_{22} + r_4 I_{33} = E_1 - E_4; \\ \text{контур}\mathbf{2} \\ -r_6 I_{11} + (r_2 + r_5 + r_6)I_{22} + r_5 I_{33} = E_2; \\ \text{контур}\mathbf{3} \\ r_4 I_{11} + r_5 I_{22} + (r_3 + r_4 + r_5)I_{33} = E_3 - E_4. \end{cases} \qquad (22)$$

Токи ветвей (рисунок 18) находим по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 = I_{11}; \\ I_2 = I_{22}; \\ I_3 = I_{33}; \\ I_4 = -I_{11} - I_{33}; \\ I_5 = I_{22} + I_{33}; \\ I_6 = I_{11} - I_{22}. \end{cases}$$

Из уравнения (21) очевиден принцип составления уравнений по методу контурных токов. В левой части уравнений коэффициент при контурном токе рассматриваемого контура положителен и равен сумме сопротивлений его ветвей.

Коэффициенты при контурных токах в контурах, имеющих общие ветви с рассматриваемым контуром, равны сумме сопротивлений общих ветвей со знаком плюс (минус), если направления контурных токов в общих ветвях совпадают (противоположны).

Правая часть уравнений содержит алгебраическую сумму ЭДС ветвей рассматриваемого контура, причем слагаемое записывается со знаком плюс (минус), если направления ЭДС и положительное направление контурного тока совпадают (противоположны).

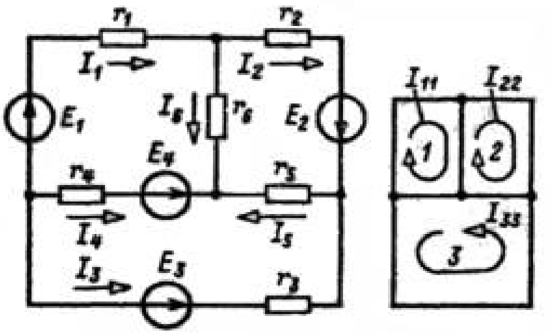


Рисунок 18 - Схема соединения элементов тремя контурами и изображение контурных токов ветвей

1.13 Принцип и метод наложения (суперпозиции)

Для линейных электрических цепей справедлив принцип наложения: ток в любой ветви равен алгебраической сумме токов в этой ветви (частичных токов) при действии каждого источника в отдельности, если остальные источники заменяются резисторами с сопротивлениями, равными внутренним сопротивлениям соответствующих источников.

На основе принципа наложения для расчетов линейных цепей применяется метод *наложения* (суперпозиции).

В схеме замещения с B ветвями ток каждой k-й ветви равен алгебраической сумме частичных токов от действия каждой из ЭДС E_i ветви i и каждого источника тока J_i ветви j.

Для схемы без источников тока метод наложения определяется выражением:

$$I_k = g_{k1}E_1 + g_{k2}E_2 + \ldots + g_{kk}E_k + \ldots + g_{ki}E_i + \ldots g_{kB}E_B, \qquad (23)$$

где $g_{kk} = I_k^{E(k)} \big/ E_k$ — собственная проводимость ветви k, равная отношению частичного тока ветви к ЭДС источника этой ветви при условии, что ЭДС остальных источников равны нулю;

$g_{ki} = I_k^{E(i)} \big/ E_i$ — взаимная проводимость ветвей k и i, равная отношению частичного тока ветви k к ЭДС источника ветви i при условии, что ЭДС остальных источников равны нулю.

Собственная проводимость ветви имеет положительное значение, так как положительное направление ее тока и ЭДС источника выбираются одинаковыми. Взаимная проводимость двух ветвей может иметь положительное и отрицательное значения, причем:

$$g_{ki} = g_{ik} \qquad (24)$$

что означает выполнение принципа взаимности.

В качестве примера рассмотрим расчет методом наложения цепи на рисунке 19 *а*. Токи ветвей равны сумме частичных токов в схемах на рисунке 20 *б*, *в*:

$$I_1 = \bar{I}_1 + \bar{I}_1 = g_{11}E_1 + g_{12}E_2 = ((r_1 + r_3)/r^2)E_1 - (r_3/r_2)E_2;$$

$$I_2 = \bar{I}_2 + \bar{I}_2 = g_{12}E_1 + g_{22}E_2 = -(r_3/r^2)E_1 - ((r_1 + r_3/r^2)E_2;$$

$$I_3 = \bar{I}_3 + \bar{I}_3 = g_{31}E_1 + g_{22}E_2 = (r_2/r^2)E_1 - (r_1/r^2)E_2,$$

где собственные проводимости ветвей g_{11} и g_{22} имеют положительные значения, взаимные проводимости ветвей $g_{12} = g_{21}$ — отрицательные значения, а g_{31} g_{32} — положительные значения и обозначено

$$r = \sqrt{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$$

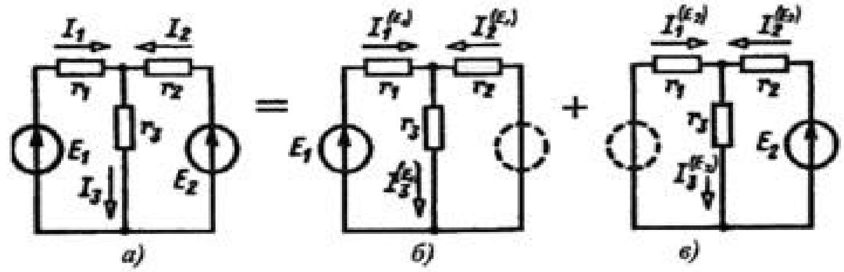


Рисунок 19 - Нахождение токов цепи методом наложения

В схемах замещения с источниками тока частичные токи ветвей определяются от каждого из них при исключении остальных источников тока в результате разрыва содержащих их ветвей.

1.14 Принцип компенсации

Различают принципы компенсации напряжения и компенсации тока.

Принцип компенсации напряжения заключается в том, что участок $a - b$ схемы с напряжением U_{ab} можно заменить эквивалентным источником ЭДС $E = U_{ab}$, направление действия которого противоположно положительному направлению напряжения U_{ab}. Доказательство принципа следует из второго закона Кирхгофа, в котором любое слагаемое суммы напряжений участков можно перенести с противоположным знаком в правую часть уравнения, что эквивалентно замене соответствующего участка источником ЭДС. Например, уравнения контуров цепи на рисунке 21 *а*:

$$U_{ab} - U_1 + U_2 + U_3 = 0,$$

и на рисунке 20, *б*:

$$-U_1 + U_2 + U_3 = -E,$$

эквивалентны, если $E = U_{ab}$.

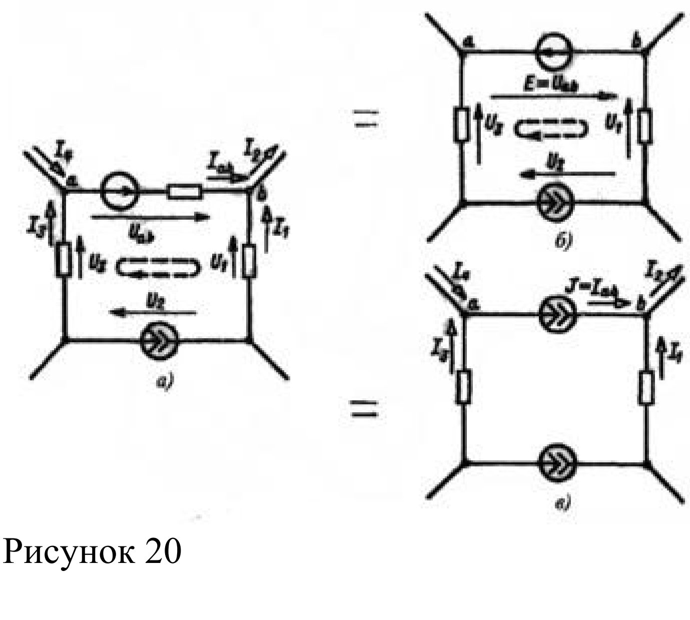


Рисунок 20

Принцип компенсации тока заключается в том, что участок a - b схемы с током I_{ab} можно заменить эквивалентным источником тока $J = I_{ab}$, направление которого совпадает с положительным направлением тока I_{ab}. Уравнения по первому закону Кирхгофа, для узлов a и b цепей, на рисунке 20 *а* и *в* будут одинаковы, если в последней ветвь ab заменена источником тока $J = I_{ab}$

1.15 Работа и мощность электрического тока. Энергетический баланс

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении положительного заряда Q вдоль неразветвленного участка $a – b$ электрической цепи, не содержащего источников электрической энергии, равна произведению этого заряда на напряжение $U_{ab} = U$ между концами участка: $A = QU$. При равномерном движении заряда в течение времени t, т. е. при постоянном токе $I_{ab} = I$, заряд:

$$Q = It$$

и работа:

$$A = UIt$$

Для оценки энергетических условий важно знать, сколь быстро совершается работа, т. е. определить мощность:

$$P = UI \tag{25}$$

Основная единица работы в системе СИ — *джоуль* (Дж), мощности — *ватт* (Вт).

Для резистивных элементов выражение можно преобразовать, воспользовавшись законом Ома $U = rI$:

$$P_r = UI = rI^2 = gU^2 \tag{26}$$

1.16 Тепловое действие электрического тока

При протекании электрического тока по металлическим проводникам электроны тока сталкиваются с двигающимися молекулами проводника. Это приводит к выделению тепла в проводнике. Электрическая энергия превращается в тепловую.

Количество выделившегося при этом тепла было определенно русским академиком Э. Х. Ленцем и английским физиком Д. П. Джоулем одновременно и независимо друг от друга.

При прохождении электрического тока по проводнику количество тепла, выделяемое проводником прямо пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени протекания этого тока.

Математически закон *Джоуля-Ленца* выражается формулой:

$$Q = I^2 rt,$$

где Q - тепловая энергия, выделяемая током, Дж;
I- сила тока, протекающего по проводнику, А;
r - сопротивление проводника, Ом;
t - время протекания тока по проводнику, с.

2. Примеры решения задач.

Задача 1.

Найти токи в схеме (Рисунок 21) при помощи метода контурных токов. Обозначим контурные токи I_{11}, I_{22} и I_{33} по часовой стрелке.

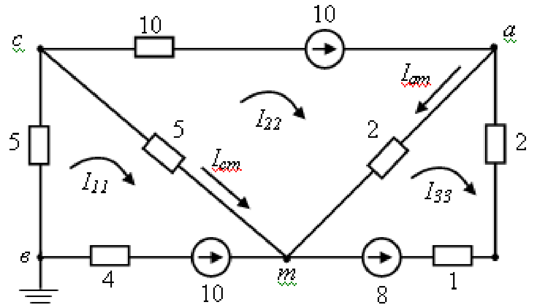


Рисунок 21 - Схема с тремя контурными токами

Определяем общее сопротивление резисторов входящих в первый контур

R_{11}=5+5+4=14 Ом;

Определяем общее сопротивление резисторов входящих во второй контур

R_{22}=5+10+2=17 Ом;

Определяем общее сопротивление резисторов входящих в третий контур

R_{33}=2+2+21=5 Ом;

Определяем общее сопротивление резисторов входящих в первый и второй контур

$R_{12}= R_{21}$=-2 Ом;

Определяем общее сопротивление резисторов входящих в первый и третий контур

$R_{13}= R_{31}$=0;

Определяем общее сопротивление резисторов входящих во второй и третий контур

$R_{23}= R_{32}$=-2 Ом;

Определяем общее ЭДС в первом втором и третьем контуре

E_{11}=-10 В; E_{22}=10 В; E_{33}=-8 В.

Записываем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} = E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} = E_{22} \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} = E_{33} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 14I_{11} - 5I_{22} \qquad\quad &= -10 \\ -5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} &= 10 \\ -2I_{22} + 5I_{33} &= -8 \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы
$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009.$$

Находим контурные токи:

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0.635A$$

$$I_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -10 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{227}{1009} = 0.225A$$

$$I_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -5 & -10 \\ -5 & 17 & 10 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-1535}{1009} = -1.52A$$

Переходим от контурных токов к токам в ветвях:
$I_{cm}=I_{11}-I_{22}$=-0,635-0,225=-0,86 А;
$I_{am}=I_{22}-I_{33}$=0,225+1,52=1,745 А;
Ток $I_{bc}=I_{bm}=I_{11}$=-0,635 А;
Ток $I_{ca}=I_{22}$=0,225 А;
Ток $I_{am}=I_{33}$=-1,52 А.

Задача 2.

Два источника питания с эдс $E_1=60$ *В* и $E_2=75$ В включены в дифференциальную схему, как показано на рисунке 22 *б*. Найти ток общей ветви, если сопротивление резисторов $R_1=2$ *Ом*; $R_2=3$ *Ом*; $R_3=5$ *Ом*.

Рисунок 22 - Дифференциальная схема цепи постоянного тока

Решение.

На примере данной задачи рассмотрим основные методы расчета цепей постоянного тока.

1 Метод наложения.

Для нахождения оков ветвей, создаваемых источником эдс E_1, проводим расчет вспомогательной схемы на рисунке 23, *а*. Эквивалентное сопротивление в данном случае $R_{экв1} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 3{,}875$ *Ом*. Токи ветвей соответственно равны

$I_{11} = \frac{E_1}{R_{экв}} = 15{,}5$ *А;* $I_{12} = I_{11}\frac{R_3}{R_2 + R_3} = 9{,}6$ *А;* $I_{13} = I_{11} - I_{12} = 5{,}9$ *А.*

Для нахождения токов ветвей, создаваемых источником эдс E_2, проводим расчет вспомогательной схемы на рисунке 23 *б*. Эквивалентное сопротивление

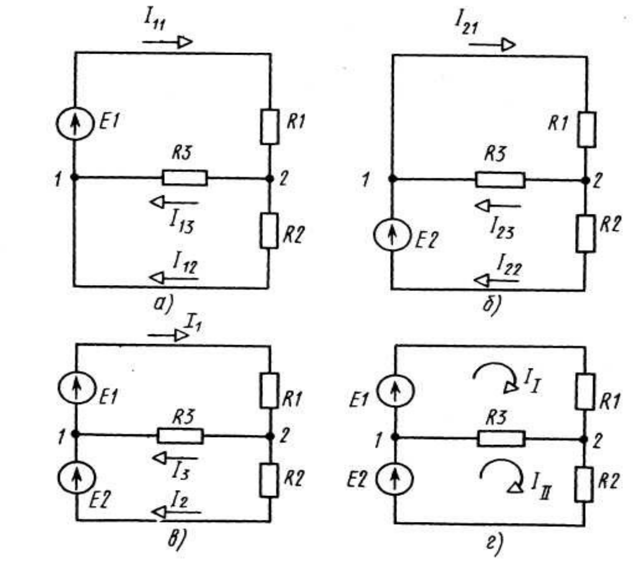


Рисунок 23 - Вспомогательные схемы к задаче 2

$R_{экв} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 4{,}4$ *Ом*. Токи ветвей соответственно равны:

$I_{22} = \frac{E_2}{R_{экв2}} = 17$ *А;* $I_{23} = I_{22}\frac{R_1}{R_1 + R_3} = 4{,}9$ *А;* $I_{21} = I_{22} - I_{23} = 12{,}1$ *А.*

Учитывая направления токов, указанными на рисунке 23 *а, б,* определяем искомые токи, как алгебраические суммы $I_1=I_{11}+I_{21}=27{,}6$ *А;* $I_2=I_{12}+I_{22}=26{,}6$ *А;* $I_3=I_{13}$-*м*$I_{23}=1$ *А.*

2 Использование законов Кирхгофа.

Задаваясь направлениями токов, указанными на рисунке 23 *в*, составляем уравнения для одного узла и двух контуров цепи:

$$\begin{cases} I_2 + I_3 - I_1 = 0; \\ E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3; \\ E_2 = -I_3 R_3 + I_2 R_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ 2I_1 + 5I_3 = 60; \\ 3I_2 - 5I_3 = 75. \end{cases}$$

Исключая один из токов $I_3=I_1-I_2$, получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 7I_1 - 5I_2 = 60; \\ -5I_1 + 8I_2 = 75. \end{cases}$$

Решением этой системы являются значения токов $I_1= 27{,}6$ *А;* $I_2= 26{,}6$ *А. Ток* $I_3= 1$ *А.*

3 Метод контурных токов.

Выделим на исходной схеме два контура (рисунок 23, *г*) и составим для них уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} 60 = 2I_1 + (I_1 - I_{11}) \cdot 5; \\ 75 = (I_{11} - I_1) \cdot 5 + 3I_{11}. \end{cases}$$

После несложных преобразований получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 7I_1 - 5I_{11} = 60; \\ -I_1 + 8I_{11} = 75, \end{cases}$$

которая уже была решена в предыдущем случае, т.е. $I_1= 27{,}6$ *А* и $I_{11}= 26{,}6$ *А*. В соответствии с принятыми обозначениями токов $I_1=I_1= 27{,}6$ *А*; $I_2=I_{11}= 26{,}6$ А; $I_3=I_1-I_{11}= 1$ А.

4 Метод узловых напряжений

Воспользовавшись формулой $U_{12} = \dfrac{E_1Y_1 - E_2Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$, находим напряжение между узлами *1* и *2*:

$$U_{21} = \frac{60/2 - 75/3}{1/2 + 1/3 + 1/5} = -4{,}8 \text{ В.}$$

Токи ветвей соответственно равны $I_1 = (E_1 - U_{21})/R_1 = 27{,}6$ *А;* $I_2 = (E_2 + U_{21})/R_2 = 26{,}6$ *А;* $I_3 = U_{21}/R_3 = 1$ *А.*

Список использованных источников

1 **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. – 5-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2005. Ч. 1 – 288 с.: ил. – ISBN 5-8112-1170-8.

2 **Соловейчик, И.Л.** Сборник задач по математике с решениями для техникумов / И.Л. Соловейчик, В.Т. Лисичкин. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Мир и Образование», 2003. – 464 с.: ил. – ISBN 5-329-00902-2 (ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век») - ISBN 5-94666-121-3 (ООО «Издательство «Мир и Образование»).

3 **Касаткин, А.С.** Электротехника: учебник для вузов / А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 8-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 544 с. – ISBN 5-7695-1037-4.

4 **Немцов, М.В.** Электротехника / М.В. Немцов, И.И. Светлакова. – Ростов-н/Д: Феникс, 2004. – 567 с. – (Серия «Учебники, учебные пособия») - ISBN 5-222-03691-X.

5 Сборник задач по общей электротехнике: учебное пособие для студентов неэлектротех. специальностей вузов / В.С. Пантюшин [и др.]. - 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1983. – 280с.

6 **Раскатов, А.И.** Задачник по электротехнике, электрическим измерениям, электрическим машинам и электрооборудованию / А.И.Раскатов. Всесоюзное учебно-педагогическое издательство Профтехиздат. – М.: Профтехиздат, 1982. – 520 с.

7 **Новиков, А.П.** Задачник по электротехнике: учебное пособие для сред. проф образования/ А.П. Новиков- М.: Профобриздат, 2001. – 336 с.: ил.