О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ ПОСРЕДСТВОМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ (НЕРАВЕНСТВА) ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Сикорская Г.А.
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

Концепция инварианта является одной из важнейших в математике, поскольку изучение инварианта непосредственно связано с задачами классификации объектов того или иного типа. По существу, целью всякой математической классификации является построение некоторой полной системы инвариантов (по возможности, наиболее простой), то есть такой системы, которая разделяет любые два неэквивалентных объекта из рассматриваемой совокупности.[4]

В современной математике важную роль играет понятие инвариантности, т.е. неизменности математического объекта (числового множества, выражения, функции, уравнения и т.д.) относительно некоторых преобразований. В рамках этой статьи предлагаем обсудить применение инвариантности в школьной математике. Некоторые определения и результаты фактически связаны с понятием инвариантности, хотя сам термин инвариантность в школьной математике не используется. Например, чётная функция (заданная на всей числовой прямой) может быть определена как функция, которая инвариантна относительно замены x на (−x).

Заметим, что свойство инвариантности помогает серьезно облегчить процесс решения ряда задач с параметрами.

К примеру, рассмотрим подробное решение задач с параметром, предложенных на ЕГЭ по математике профильного уровня.

Задача. Найти все значения a, при каждом, из которых уравнение $x^2-|x+3+a|=|x-a-3|-(a+3)^2$ имеет единственный корень.

Решение: перепишем исходное уравнение в виде

$$x^2+(a+3)^2=|x+a+3|+|x-a-3|$$

Заменим x на $(-x)$: $(-x)^2+(a+3)^2=|-x+a+3|+|-x-a-3|$

Упростив, получим: $x^2+(a+3)^2=|-x+a+3|+|x+a+3|$

Таким образом, уравнение не изменилось при замене x на $-x$, что означает, что если $x -$ корень, то и $-x$ также корень. Повторимся, инвариантность уравнения означает, что уравнение не чувствительно к замене x на другое выражение. В нашем случае уравнение инвариантно относительно замены x на $-x$.

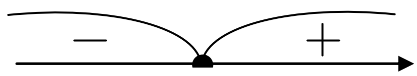
По условию задачи, необходим единственный корень, следовательно, нас устраивает только $x=0$.

При $x=0$, имеем

$0^2+(a+3)^2=|a+3|+|a+3|$

$(a+3)^2=2|a+3|$.

Раскрываем модуль $|a+3|$ на промежутках.



На левом промежутке:

$(a+3)^2 = -2(a+3)$

$a+3 = -2 \Rightarrow a = -5.$

На правом промежутке:

$(a+3)^2 = 2(a+3)$

$a+3 = 2 \Rightarrow a = -1.$

При $a = -3$:

$$x^2 = |-x| + |x|, \quad x^2 + 2|x| = 0$$

$x < 0, \quad x(x+2) = 0,$

$x = 0$ *или* $x = -2$ (по усл. $x < 0$ устраивает)

$x \geq 0, \quad x^2 - 2x = 0, \; x(x-2) = 0,$

Получаем два корня: $x = 0, \qquad x = 2.$

То есть, при $a = -3$ получится три корня $x = 0, \; x = \pm 2$ (не подходит)

Ответ: $a = -1, a = -5$

Следующий пример решения системы уравнений с параметром с использованием свойства инвариантности.

Задача. Найти все значения a, при каждом, из которых система уравнений
$\begin{cases} a(x^4+1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственный корень.

Решение: Очевидно, предложенная система инвариантна относительно замены $x \to -x$. Таким образом, если (x_0, y_0) – решение, то и $(-x_0, y_0)$ так же решение.

Поскольку условие единственности решения, то потребуем, чтобы x_0 был равен нулю, т.е. $(0, y_0)$ - решение.

И так $x = 0$: $\begin{cases} a(0^4+1) = y + 2 - |0| \\ 0^2 + y^2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} a = y + 2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$

Таким образом, $a = 0, a = 4$

Теперь проверим полученные значения параметра на условие единственности.

1) $a = 0$

$\begin{cases} 0(x^4+1) = y + 2 - |x| \\ 0^2 + y^2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} 0 = y + 2 - |x| \\ y^2 = 4 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x| = y + 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} |x| = y + 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{array} \right.$

Имеем совокупность четырех систем:

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

т.е. получаем три решения: (4, 2), (-4, 2), (0, -2)

2) $a = 4$

$$\begin{cases} 4(x^4+1) = y + 2 - |x| \\ x^4 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$4x^4 + 4 = y + 2 - |x|;\ \ y = 4x^4 + |x| + 2$

Сложим графики функций $y = 4x^4$ и $y = |x|$ (рис.1):

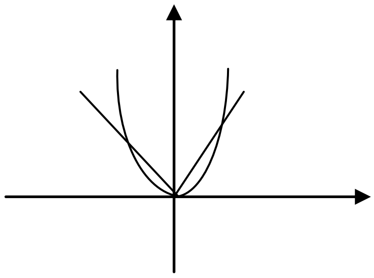


Рис.1

Далее, график, полученной функции $y = 4x^4 + |x|$ перемещаем параллельным переносом по оси OY на 2 единицы вверх (рис.2):

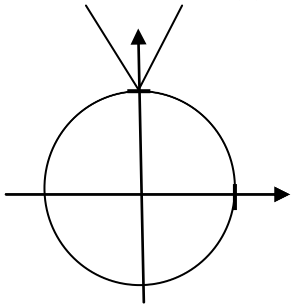


Рис.2

Получаем единственное решение (0;2).

Таким образом, при $a = 4$ исходная система уравнений имеет единственное решение.

Ответ: $a = 4$.

Приведем примеры задач с параметром, уравнения, системы уравнений, а также неравенства, в которых инвариантны относительно замены x на $-x$.

1. Найти все значения параметра а, при которых уравнение

$x^2 - 2\arcsin(cosx) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

В данном уравнении переменная x входит через две четные функции ($y = x^2$ и $y = cosx$), поэтому оно не изменится, если x заменить на (−x). То есть уравнение инвариантно относительно замены x на $-x$.

(Ответ: a = 0; a = 2 sin 1)

2. Найти все значения параметра а, при которых уравнение

$\left|\frac{x(2^x-1)}{(2^x-1)} + 2a\right| = a^2 + 1$ имеет нечетное число решений.

Это уравнение также инвариантно при замене x на −x. Действительно, если мы заменим x на −x, то получим уравнение,

$\left|\frac{(-x)(2^{-x}-1)}{(2^{-x}+1)} + 2a\right| = a^2 + 1,$

которое после умножения числителя и знаменателя дроби в левой части на 2^x превращается в исходное:

$\left|-\frac{x(1-2^x)}{(1+2^x)}+2a\right|=a^2+1$ или $\left|\frac{x(2^x-1)}{(2^x+1)}+2a\right|=a^2+1$

(Ответ: a = 1, a = −1).

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Рассматриваемая система инвариантна при замене x на (−x) поскольку, если мы заменим x на (−x) (а y оставим без изменений), то исходная система примет вид: $\begin{cases} 3\cdot 2^{|-x|}+5|-x|+4=3y+5(-x)^2+3a, \\ (-x)^2+y^2=1 \end{cases}$

Но, $|-x|=x, (-x)^2=x^2$, следовательно, эта система тождественна исходной. А значит, если (x, y) - решение системы, то и (−x, y) тоже будет решением. Таким образом, если система имеет единственное решение, то это решение имеет вид (0, y).

(Ответ: a = $\frac{4}{3}$)

4. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$cosx - 2\sqrt{x^2+9} \leq -\frac{x^2+9}{a+cosx} - a$ имеет единственное решение.

Данное неравенство также инвариантно относительно преобразования $x \rightarrow (-x)$. Поэтому, как и в предыдущих задачах если неравенство имеет единственное решение x_0, то $x_0 = 0$.

(Ответ: $a = 2$)

В заключение, приведем пример задачи с параметром, уравнение в котором инвариантно относительно иного преобразования неизвестной.

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$2^{\frac{2x}{1+x^2}}+a\cdot\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)+a^2-\frac{5}{4}=0$ имеет единственное решение.

В отличие от предыдущих задач, уравнение задачи 5. не сохраняется при замене x на −x. Однако, нетрудно видеть, что это уравнение не изменится при замене x на $\frac{1}{x}$. Действительно, $\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{2x}{1+x^2}$ и $\frac{(\frac{1}{x})^2-1}{(\frac{1}{x})}=-\frac{x^2-1}{x}$.

Поэтому, если x_0 – решение уравнения, то $\frac{1}{x_0}$. также будет решением. А из этого уже следует, что x_0 может быть только 1 или −1.

(Ответ: a = $-\frac{3}{2}$).

Список литературы

1. Высоцкий В.С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ. М.: Научный мир, 2011.-.316 с: ил. ISBN978-5-91522-257.

2. *Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. -48с. – (Готовимся к ЕГЭ). ISBN 978-5-91724-075-6.*

3. *В.Л. Попов Инвариант// Математическая – М: Советская энциклопедия. 1979. – Т2. – С.526*

4. *Сикорская Г.А. Профильная школа. Элективные курсы. Часть II. Математика : учебное пособие в трех частях / Г.А. Сикорская. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ ; РАО ЮУ НОЦ. – Часть II. – 2008. – 369 с.*

5. *Сикорская Г.А. Математика. Задачи с параметром : учебное пособие для поступающих в вузы / Г.А. Сикорская. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. – 104 с.*

6. *Фалигин Г.И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ / Г.А. Фалин, А.И. Фалин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 367с.: ил. – (Поступаем в вуз) ISBN 5-94774-451-1*