МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

Е.М. КРИПАК, О.Г. ГАБДУЛЛИНА, Е.В. БУТ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОМУ ПРАКТИКУМУ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения высшего профессионального
образования "Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2006

УДК 33.7:519.86
ББК 65.292+65.290-2
К 82

Рецензент
кандидат экономических наук, доцент С.В. Дьяконова

Крипак Е. М.
К 82 **Моделирование поведения потребителей: методические указания к лабораторному практикуму и самостоятельной работе студентов/ Е.М. Крипак, О.Г. Габдуллина, Е.В. Бут. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. – 25 с.**

Методические указания предназначены для проведения лабораторного практикума и самостоятельной работы студентов специальностей 080116 – Математические методы в экономике, 080601 – Статистика, 010502 – Прикладная информатика (в экономике), а также других экономических специальностей при изучении экономико-математических моделей.

ББК 65.292

Содержание

Введение

В условиях рыночной экономики коммерческий успех любого предприятия зависит от глубокого и всестороннего изучения конъюнктуры рынка. Изучение рынка осуществляется с позиций его характерных особенностей, потребностей и возможностей, степени насыщенности, состояния конкуренции, вероятности появления товаров-аналогов. Но начальным пунктом всего цикла предпринимательской активности должно стать изучение поведения потребителей, так как спрос на товары и услуги является определяющим фактором организации производства. Важным направлением деятельности современного предприятия является маркетинг, ориентированный на потребителя. В этом случае деятельность предприятия нацелена на удовлетворение потребностей, непосредственно исходящих от рынка. Основными задачами являются - изучение потенциальных потребностей, поиск рыночной ниши, оценка объема спроса и его эластичности, в соответствии с которыми определяются стратегия и тактика организации производства.

При моделировании поведения потребителей и построении функций спроса используется два основных подхода. При первом подходе, который является предметом рассмотрения данной работы, основой является построение функции полезности и карты безразличия, а при втором – устанавливается регрессионная зависимость между спросом, доходами и ценами.

Теоретическую базу первого подхода составляет теория поведения потребителя – составная часть математической экономики, изучающая вопросы распределения доходов при покупке товаров и услуг. Основной постулат данной теории состоит в том, что потребители стремятся максимизировать полезность, или степень удовлетворения, получаемую от расходования фиксированного дохода. При этом возникает два взаимосвязанных вопроса. Первый касается определения оптимального потребительского набора при фиксированных ценах и доходе, а второй – изменения выбора при изменении дохода или цен.

1 Описание лабораторной работы

Начальным пунктом любого производственного процесса является исследование поведения потребителей, от предпочтений которых зависит принятие управленческих решений в сфере производства. В лабораторной работе №1 «Моделирование поведения потребителей» рассматривается задача потребительского выбора. Предполагается, что рационально ведущий себя потребитель осуществляет выбор, максимизируя собственную функцию полезности с учетом сложившейся структуры цен и располагаемого дохода.

Требуется определить оптимальный выбор потребителя (потребительский набор), построить функции спроса на приобретаемые товары и провести их анализ в случае изменения дохода и цен.

Целью лабораторной работы является освоение теоретических положений потребительского выбора и приобретение навыков построения и анализа функции спроса на основе теории поведения потребителя.

Выполнение лабораторной работы включает следующие этапы:

1) изучение теоретического материала по тематике работы;
2) построение математической модели;
3) исследование модели с помощью пакетов прикладных программ (Mathcad или Excel) и аналитических расчетов;
4) подготовку письменного отчета;
5) защиту лабораторной работы.

2 Постановка задачи

Предпочтения потребителя описываются функцией полезности $U(x_1, x_2)$, доход равен *I*, а цены товаров p=(p_1, p_2). Полагая, что поведение потребителя рационально (то есть он выбирает такие количества каждого блага из товарного набора, которые позволяют ему максимально удовлетворить свои потребности при наличии ограниченного дохода) требуется:

1) определить оптимальный набор товаров **A**, который выберет потребитель при фиксированном доходе и заданном векторе цен, а также достигнутый уровень полезности. Проиллюстрировать на графике взаимное расположение кривой безразличия и бюджетной прямой в оптимальной точке;

2) определить оптимальный набор товаров **B**, если цена второго блага повысилась на Δp_2 денежных единиц, также компенсационное изменение дохода для сохранения прежнего уровня полезности и соответствующий потребительский набор **C**;

3) привести геометрическую интерпретацию пунктов 1 и 2: построить в пространстве товаров исходную бюджетную линию B0, бюджетную линию B1, после изменения цены 2 товара и B2 при наличии компенсации; построить кривые безразличия U0 и U1, соответствующие первому и второму

оптимальному набору (B0 и B1); указать первый оптимальный набор потребителя **A**, второй оптимальный набор потребителя **B** (в случае изменения цены без компенсации), а также набор **C**, который является оптимальным в случае компенсационного изменения дохода**.**

4) построить аналитические функции спроса, как функции дохода и вектора цен;

5) провести анализ функций спроса, используя показатели эластичности по доходу и цене. Рассчитать действие эффекта замены, используя уравнение Слуцкого.

Пример 0 варианта задания

№ варианта	Функция полезности	Цены		Изменение (увеличение) цены p2	Доход
	$U(x_1,x_2)$	p_1	p_2	Δp_2	I
0	$(x_1-2)^{3/4}\cdot(x_2-1)^{4/5}$	50	120	10	10000

3 Порядок выполнения работы

Построим математическую модель задачи потребительского выбора:

$$U(\bar{x}) = (x_1-2)^{3/4}\cdot(x_2-1)^{4/5} \to max;$$
$$50x_1 + 120x_2 \le 10000;$$
$$x_1 \ge 2\,, x_2 \ge 1,$$

где n=2 – число потребляемых товаров или благ, $\bar{x} = (x_1, x_2)$ – потребительский набор, $U(\bar{x})$–функция полезности потребителя.

Набор, который является решением задачи потребительского выбора, называется оптимальным потребительским набором, или точкой локального рыночного равновесия потребителя. Поставленная задача – задача потребительского выбора – является задачей нелинейного программирования.

Рассмотрим возможности построения и исследования модели потребительского выбора с использованием ППП MathCad и «MS Excel». Применяя MathCad, откроем рабочий лист, определим целевую функцию и ограничения, зададим начальные условия и в решающем блоке под ключевым словом «Given» сформулируем задачу и применим функцию «Maximize», реализующую метод сопряженных градиентов. При использовании для расчетов ЭТ «MS Excel» применяется модуль «Поиск решения», предназначенный для решения задач нелинейного программирования.

Для инициации процесса решения следует внимательно подойти к выбору начальных значений искомых переменных. В общем случае учитываются особенности требований применяемого метода и наличие априорной информации. Исследовав свойства рассматриваемой функции полезности, представленной функцией Стоуна, в данном случае в качестве начального приближения может быть взята любая точка из области допустимых решений, удовлетворяющая условию $x_1^0 \geq 2, x_2^0 \geq 1$.

Процесс решения представлен на рисунках 1 и 2. Анализируя результаты, можно сделать вывод, что потребитель выберет первое благо в количестве x_1=97 единиц, второе благо в количестве x_2=43 единицы, при этом полезность набора составит $U(\overline{x^*})$=600,23.

Ôóíêöèÿ ïîëåçíîñòè: $U(x1, x2) := (x1 - 2)^{\frac{\ }{4}} \cdot (x2 - 1)^{\frac{\ }{5}}$

Íà÷àëüíûå çíà÷åíèÿ íàáîðà òîâàðîâ (áëàã):

$x1 := 18$

$x2 := 90$

Given

Î ãðàíè÷åíèÿ ìîäåëè:

$50x1 + 120x2 = 10000$

$x1 \geq 2 \qquad x2 \geq 1$

$$\begin{pmatrix} xx1 \\ xx2 \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(U, x1, x2)$$

Îïòèìàëüíûé íàáîð òîâàðîâ (áëàã):

$$\begin{pmatrix} xx1 \\ xx2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96.645 \\ 43.065 \end{pmatrix} \qquad U(xx1, xx2) = 604.236$$

Рисунок 1 – Решение задачи потребительского выбора в системе «MathCad»

	A	B	C	D	E	F
1	**Обозначения**	**X1**	**X2**	**P1**	**P2**	**Co**
2	**Искомые значения**	**96,64516137**	**43,0645**	**50**	**120**	**10000**
3	**Нижняя граница**	**2**	**1**			
4	**Верхняя граница**	-	-			
5	**Ограничения**	**10000**				
6	**Целевая функция**	**604,2359069**				

Рисунок 2 – Решение задачи потребительского выбора в ЭТ «MS Excel»

На представленном ниже рисунке 3 изображено взаимное расположение кривой безразличия и бюджетной прямой в точке локального рыночного равновесия потребителя.

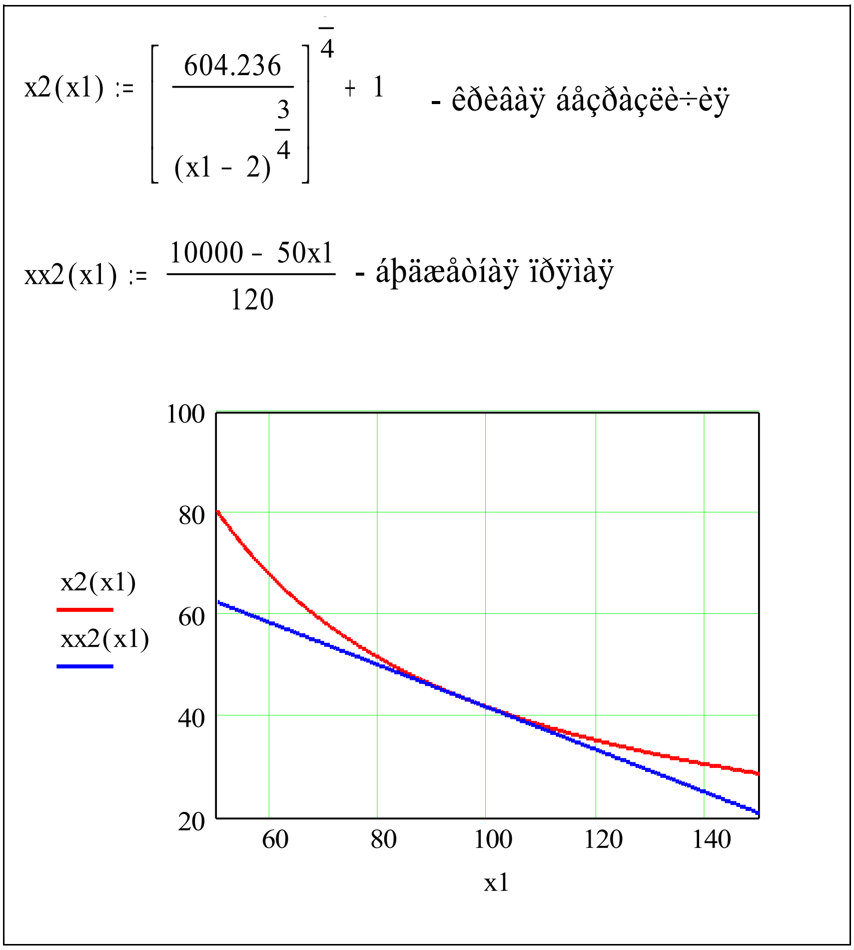

Рисунок 3 – Геометрическая интерпретация решения задачи потребительского выбора

Предположим, что цена второго блага повысилась на 10 единиц и стала равна 130 единицам. Решение задачи представлено на рисунке 4.

В этом случае оптимальным выбором будет набор **B**, в котором x_1=97, x_2=40, а полезность составляет 565,86 единиц. В результате уровень полезности будет снижен, для сохранения которого возможно предусмотреть компенсацию дохода.

С любой задачей математического программирования связана двойственная с ней задача. В математической экономике исходят из того, что индивиды максимизируют свою полезность при заданном бюджетном ограничении. Это и есть исходная задача потребителя. Двойственной к ней задачей является задача минимизация расходов, которые необходимо сделать потребителю для того, чтобы достичь некоторого заданного уровня полезности.

	A	B	C	D	E	F	G
	Обозначения	X1	X2	P1	P2	Co	
	Искомые значения	96,5483871	39,7891	50	130	10000	
	Нижняя граница	2	1				
	Верхняя граница	-	-				
	Ограничения	10000					
	Целевая функция	565,8589556					

Рисунок 4 – Решение задачи при увеличении цены второго товара в ППП ЭТ «MS Excel»

Задача минимизации расходов при заданном уровне полезности $U(x^*)$ имеет следующий вид:

$$I = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to min$$
$$U(x_1, x_2) = U(x^*)$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Таким образом, для определения величины компенсации следует решить двойственную задачу, которая для рассматриваемого примера будет иметь вид:

$$I = 50x_1 + 130x_2 \to min$$
$$(x_1 - 2)^{3/4} \cdot (x_2 - 1)^{4/5} = 604.236$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Решим полученную задачу оптимизации в ППП «Mathcad» и ЭТ «MS Excel», аналогично решению задачи потребительского выбора (рисунки 5 и 6).

Таким образом, если цена 2 товара повысилась и стала равной 130 ед., то доход должен достичь величины 10422 ед. При этом потребление первого блага возрастет на 4 единицы, а потребление второго блага снизится на 2 единицы.

Öåëåâàÿ ôóíêöèÿ : $I(x1, x2) := 50x1 + 130x2$

Íà÷àëüíûå çíà÷åíèÿ íàáîðà òîâàðîâ (áëàã): $x1 := 90$

$x2 := 40$

Given

Î ãðàíè÷åíèÿ ìîäåëè: $$(x1 - 2)^{\frac{3}{4}} \cdot (x2 - 1)^{\frac{4}{5}} = 604.236$$

$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0$

$$\begin{pmatrix} xx1 \\ xx2 \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(I, x1, x2)$$

Îïòèìàëüíûé íàáîð òîâàðîâ (áëàã): $\begin{pmatrix} xx1 \\ xx2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100.569 \\ 41.493 \end{pmatrix}$ $I(xx1, xx2) = 10422.496$

Рисунок 5 – Решение двойственной задачи в ППП «Mathcad»

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Обозначения**	**X1**	**X2**	**P1**	**P2**	**Uo**	
2	**Искомые значения**	**100,6365965**	**41,4662**	**50**	**130**	**604,23**	
3	**Нижняя граница**	**2**	**1**				
4	**Верхняя граница**	-	-				
5	**Ограничения**	**604,229999**					
6	**Целевая функция**	**10422,43258**					
7							
8							

Рисунок 6 – Решение двойственной задачи в ППП ЭТ «MS Excel»

Графическая интерпретация решения представлена на рисунке 7.

На рисунке 8 проиллюстрировано расположение бюджетных линий и кривых безразличия для трех, описанных выше случаев, а также указаны: первый оптимальный набор потребителя **A**, второй оптимальный набор потребителя **B** (в случае изменения цены без компенсации), набор **C**, который является оптимальным в случае компенсационного изменения дохода**.**

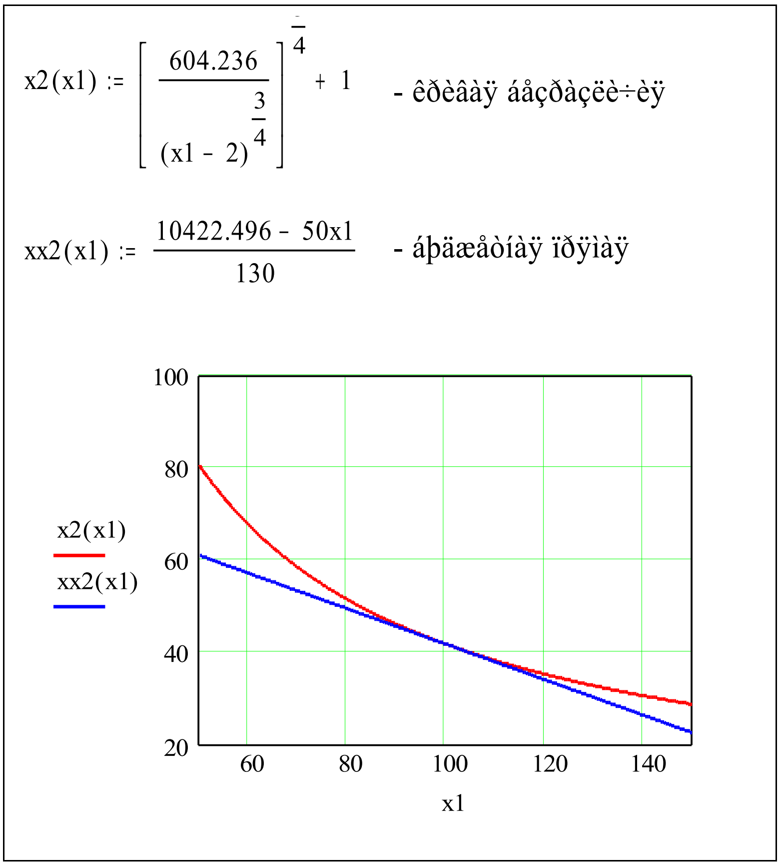

Рисунок 7 – Геометрическая интерпретация решения двойственной задачи

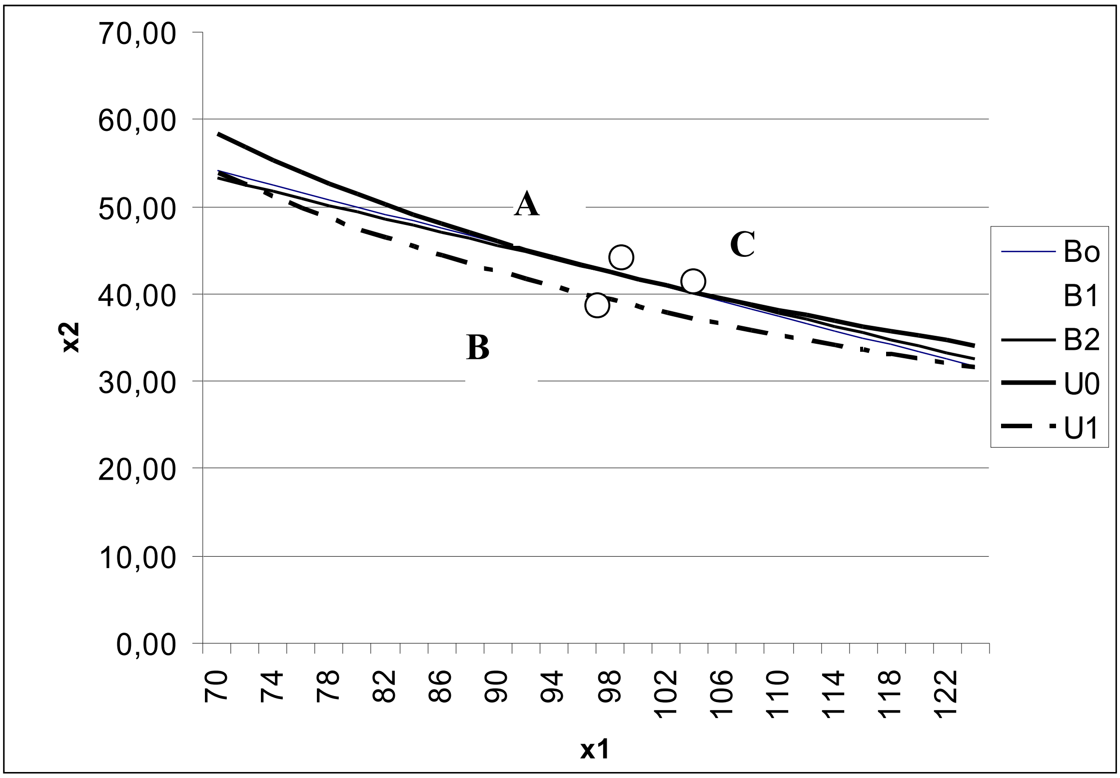

Рисунок 8 – Общая геометрическая интерпретация решения задачи потребительского выбора для трех случаев

Перейдем к вопросу построения функции спроса.

Оптимальный потребительский набор – точка локального рыночного равновесия потребителя – получен при фиксированных ценах и доходе, следовательно, при изменении дохода или цен изменится и оптимальный выбор потребителя. Множество координат решения задачи потребительского выбора есть функция дохода и цен, называемая функцией спроса:

$$\begin{cases} x_1^* = f_1(I,\overline{p}), \\ x_2^* = f_2(I,\overline{p}). \end{cases}$$

Таким образом, для табличного представления функции спроса найдем множество точек локального рыночного равновесия, полученных при решении задачи потребительского выбора в случае изменения дохода и цен в анализируемом диапазоне.

Рассмотрим следующее изменение переменных: $p_1 \in [10;130]$; $p_2 \in [20;140]$; $I \in [8000;10400]$.

Результаты решения соответствующих задач представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Спрос на товары при изменении дохода и цен

№	Цена 1 товара	Цена 2 товара	Доход	Спрос, x_1	Спрос, x_2
1	2	3	4	5	6
1	10	20	8000	387,1613	206,4194
2	15	25	8100	261,5161	167,0903
3	20	30	8200	198,6935	140,871
4	25	35	8300	161	122,1429
5	30	40	8400	135,871	108,0968
6	35	45	8500	117,9217	97,17204
7	40	50	8600	104,4597	88,43226
8	45	55	8700	93,98925	81,28152
9	50	60	8800	85,6129	75,32258
10	55	65	8900	78,75953	70,2804
11	60	70	9000	73,04839	65,95853
12	65	75	9100	68,21588	62,2129
13	70	80	9200	64,07373	58,93548
14	75	85	9300	60,48387	56,04364
15	80	90	9400	57,34274	53,47312
16	85	95	9500	54,57116	51,17317
17	90	100	9600	52,10753	49,10323
18	95	105	9700	49,90323	47,23041
19	100	110	9800	47,91935	45,52786
20	105	115	9900	46,12442	43,97335
21	110	120	10000	44,49267	42,54839

Продолжение таблицы 1.

1	2	3	4	5	6
22	115	125	10100	43,00281	41,23742
23	120	130	10200	41,6371	40,0273
24	125	135	10300	40,38065	38,90681
25	130	140	10400	39,22084	37,86636

На основе табличного представления будем строить аппроксимацию функции спроса как трехфакторную функцию дохода и цен.

На начальном этапе аппроксимации функции спроса необходимо выбрать спецификацию функции. Эмпирические исследования показывают, что спрос на потребительские товары эффективно аппроксимируется степенными функциями дохода и цен.

Будем строить функцию спроса на первый товар в следующем виде:

$$x_1 = \beta_0 \cdot p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_1} I^{\beta_3}.$$

Для оценки параметров **методом наименьших квадратов** проведем предварительно линеаризацию данных путем логарифмирования обеих частей уравнения (таблица 2):

$$\ln(x_t) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(p_{1t}) + \beta_2 \ln(p_{2t}) + \beta_3 \ln(I_t).$$

Таблица 2 – Результаты логарифмирования

№	Ln(p_1)	Ln(p_2)	Ln(I)	Ln(x_1)	Ln(x_2)
1	2	3	4	5	6
1	2,302585	2,995732	8,987197	5,958841	5,32991
2	2,70805	3,218876	8,999619	5,566496	5,118535
3	2,995732	3,401197	9,011889	5,291764	4,947844
4	3,218876	3,555348	9,024011	5,081404	4,805191
5	3,401197	3,688879	9,035987	4,911706	4,683027
6	3,555348	3,806662	9,047821	4,77002	4,576483
7	3,688879	3,912023	9,059517	4,648801	4,482237
8	3,806662	4,007333	9,071078	4,54318	4,397919
9	3,912023	4,094345	9,082507	4,449836	4,32178
10	4,007333	4,174387	9,093807	4,366399	4,252493
11	4,094345	4,248495	9,10498	4,291122	4,189026
12	4,174387	4,317488	9,11603	4,222677	4,130562
13	4,248495	4,382027	9,126959	4,160034	4,076443
14	4,317488	4,442651	9,13777	4,102377	4,026131

Продолжение таблицы 2.

1	2	3	4	5	6
15	4,382027	4,49981	9,148465	4,049046	3,979179
16	4,442651	4,553877	9,159047	3,999505	3,935215
17	4,49981	4,60517	9,169518	3,953309	3,893925
18	4,553877	4,65396	9,179881	3,910086	3,855038
19	4,60517	4,70048	9,190138	3,869519	3,818324
20	4,65396	4,744932	9,20029	3,831343	3,783584
21	4,70048	4,787492	9,21034	3,795324	3,750642
22	4,744932	4,828314	9,220291	3,761265	3,719346
23	4,787492	4,867534	9,230143	3,728992	3,689562
24	4,828314	4,905275	9,239899	3,698351	3,661169
25	4,867534	4,941642	9,249561	3,669208	3,634063

Для нахождения параметров $\beta_i, i = \overline{0,3}$ воспользуемся пакетом «MathCad». Сформируем матрицу X, вектор Y, и найдем параметры функции спроса, используя метод наименьших квадратов: $\bar{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \bar{Y}$.

Результаты расчетов параметров функции спроса на первый товар представлены на рисунке 9.

X =

	0	1	2	3
0	1	2.303	2.996	8.987
1	1	2.708	3.219	9
2	1	2.996	3.401	9.012
3	1	3.219	3.555	9.024
4	1	3.401	3.689	9.036
5	1	3.555	3.807	9.048
6	1	3.689	3.912	9.06
7	1	3.807	4.007	9.071
8	1	3.912	4.094	9.083
9	1	4.007	4.174	9.094
10	1	4.094	4.248	9.105
11	1	4.174	4.317	9.116
12	1	4.248	4.382	9.127

Y =

	0
0	5.959
1	5.566
2	5.292
3	5.081
4	4.912
5	4.77
6	4.649
7	4.543
8	4.45
9	4.366
10	4.291
11	4.223
12	4.16

$$b := \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \qquad b = \begin{pmatrix} -1.051 \\ -1.002 \\ 4.608 \times 10^{-3} \\ 1.035 \end{pmatrix}$$

Рисунок 9 – Диалоговое окно нахождения параметров функции спроса на первый товар

Таким образом, функция спроса на первый товар примет вид:

$$x_1(I,p_1,p_2) = 0.35 \cdot p_1^{-1.002} \cdot p_2^{0.00468} \cdot I^{1.035}.$$

Определим среднюю относительную погрешность аппроксимации по формуле:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_a - x_t}{x_t} \right|}{n},$$

где x_a – значения, рассчитанные с помощью построенной функции, x_t –значения, заданные таблично.

Средняя относительная погрешность аппроксимации для спроса на первый товар равна 0,0003687 %. Следовательно, построенная функция хорошо аппроксимирует исходные данные, и может использоваться для анализа значений результативного признака.

Аналогичные действия проделаем и для второго товара (рисунок 10).

X =

	0	1	2	3
0	1	2.303	2.996	8.987
1	1	2.708	3.219	9
2	1	2.996	3.401	9.012
3	1	3.219	3.555	9.024
4	1	3.401	3.689	9.036
5	1	3.555	3.807	9.048
6	1	3.689	3.912	9.06
7	1	3.807	4.007	9.071
8	1	3.912	4.094	9.083
9	1	4.007	4.174	9.094
10	1	4.094	4.248	9.105
11	1	4.174	4.317	9.116
12	1	4.248	4.382	9.127

Y =

	0
0	5.33
1	5.119
2	4.948
3	4.805
4	4.683
5	4.576
6	4.482
7	4.398
8	4.322
9	4.252
10	4.189
11	4.131
12	4.076

$$b := \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \qquad b = \begin{pmatrix} -0.343 \\ 1.792 \times 10^{-3} \\ -1.004 \\ 0.965 \end{pmatrix}$$

Рисунок 10 – Диалоговое окно нахождения параметров функции спроса на второй товар

Функция спроса на второй товар имеет вид:

$$x_2(I,p_1,p_2) = 0.709 \cdot p_1^{0.00179} \cdot p_2^{-1.004} \cdot I^{0.965}.$$

Средняя относительная погрешность аппроксимации составила величину 0,0003375 %. Следовательно, построенная функция спроса на второй товар также хорошо аппроксимирует исходные данные, и может использоваться для анализа значений результативного признака.

Замечание. В ряде случаев, например, если функция полезности является неоклассической, возможно аналитическое построение функции спроса.

Для построения функции спроса запишем задачу потребительского выбора в общем виде:

$$U(\bar{x}) = (x_1 - 2)^{3/4} \cdot (x_2 - 1)^{4/5} \to max;$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 \le I;$$
$$x_1 \ge 2,\, x_2 \ge 1.$$

Согласно теории полезности отношение предпочтения обладает свойствами сравнимости, транзитивности, рефлексивности, непрерывности, строгой выпуклости. Представляющая это отношение предпочтения функция полезности является непрерывной, возрастающей, строго квази-вогнутой и дифференцируемой во всех точках. Потребитель может потреблять только неотрицательные количества каждого блага. Кроме того, бюджетное множество является ограниченным, замкнутым, непустым и выпуклым, следовательно, предпосылка о строгой выпуклости отношения предпочтения позволяет переписать бюджетное ограничение - неравенство в виде равенства:

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = I.$$

Экономически это означает, что поскольку функция полезности является возрастающей, то потребитель максимизируя полезность, будет вынужден расходовать весь свой доход на покупку товаров и услуг.

Для решения задачи (построения аналитических функций спроса) с ограничением в форме равенств запишем функцию Лагранжа:

$$L(x_1,x_2,\lambda) = (x_1 - 2)^{3/4} \cdot (x_2 - 1)^{4/5} - \lambda \cdot (p_1x_1 + p_2x_2 - I) \to max.$$

Необходимым условием максимума функции Лагранжа является равенство нулю ее частных производных по благам x_1, x_2 и неопределенному множителю λ. Найдя частные производные и приравнивая их к нулю, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 3/4 \cdot (x_1 - 2)^{-1/4} \cdot (x_2 - 1)^{4/5} - \lambda \cdot p_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4/5 \cdot (x_1 - 2)^{3/4} \cdot (x_2 - 1)^{-1/5} - \lambda \cdot p_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I) = 0. \end{cases}$$

Решая систему относительно x_1 и x_2, получим следующие функции спроса:

$$x_1(I, p_1, p_2) = \frac{1}{31} \cdot \frac{(15I - 15p_2 + 32p_1)}{p_1};$$

$$x_2(I, p_1, p_2) = \frac{1}{31} \cdot \frac{(16I + 15p_2 - 32p_1)}{p_2}.$$

Для функции полезности Стоуна $U(x_1, x_2) = (x_1 - a_1)^{\alpha 1} \cdot (x_2 - a_2)^{\alpha 2}$ денежные расходы на покупку каждого из благ, входящих в товарный набор, составляют постоянную долю от дохода, которая определяется предпочтениями потребителя в отношении этих благ. Так, на покупку первого блага потребитель всегда будет расходовать $\frac{\alpha 1}{\alpha 1 + \alpha 2}$ часть своего дохода, а на покупку второго блага: $\frac{\alpha 2}{\alpha 1 + \alpha 2}$ часть своего дохода, независимо от цен этих благ.

Такого рода функции называются функциями некомпенсированного спроса потребителя. Их также называют функциями маршаллианского спроса в честь великого английского экономиста Альфреда Маршалла.

Далее проведем анализ построенных функций.

Исследуем влияние изменения дохода.

$$\frac{\partial x_1}{\partial I} = 0.362 p_1^{-1.002} \cdot p_2^{0.00468} \cdot I^{0.035} > 0;$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial I} = 0.684 \cdot p_1^{0.00179} \cdot p_2^{-1.004} \cdot I^{-0.035} > 0,$$

следовательно, товары являются *ценными*, и спрос на них возрастает по мере увеличения дохода. В этом случае определяют коэффициенты эластичности спроса по доходу, что позволит классифицировать товары.

Эластичность спроса по доходу определяется по формуле:

$$E_I(x_i) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial I}\right) \cdot \frac{I}{x_i}.$$

$$E_I(x_1) = \frac{0.362 p_1^{-1.002} \cdot p_2^{0.00468} \cdot I^{0.035} \cdot I}{x_1(I, p_1, p_2)}; \quad E_I(x_1) = 1{,}035.$$

$$E_I(x_2) = \frac{0.684 \cdot p_1^{0.00179} \cdot p_2^{-1.004} \cdot I^{-0.035} \cdot I}{x_2(I, p_1, p_2)}; \quad E_I(x_2) = 0{,}965.$$

В оптимальной точке эластичность спросу по доходу на блага первого вида будет равна 1,035, на блага второго вида 0,965, что соответствует товарам со среднеэластичным спросом по доходу, или товарам второй необходимости. Это означает, что увеличение дохода на 1 % приведет к увеличению спроса также приблизительно на 1 %.

Анализируя влияние изменения цены можно сделать вывод, что рассматриваемые товары относятся к группе *традиционных*, спрос на которые с ростом цены падает:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -0.351 \cdot p_1^{-2.002} \cdot p_2^{0.00468} \cdot I^{1.035} = -1{,}965 < 0,$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial p_2} = -0.712 \cdot p_1^{0.00179} \cdot p_2^{-2.004} \cdot I^{0.965} = -0{,}354 < 0$$

Эластичность спроса по цене определяется по формуле:

$$E_{pij} = (\partial x_i / \partial p_j)/(x_i / p_j).$$

При $i=j$ имеем прямую эластичность по цене, при $i \neq j$ – перекрестную эластичность.

$$E_{p11} = -1{,}002 \qquad E_{p22} = -1.004$$
$$E_{p12} = 0{,}00468 \qquad \mathrm{E}_{\mathrm{p}21} = 0{,}00179$$

На основе изучения величин эластичностей по цене можно заключить, что оба товара являются среднеэластичными по цене и представляют необходимые блага. Так как все перекрестные коэффициенты эластичности положительны, но мало отличаются от нуля, то можно заключить, что блага x_1 и x_2 являются не конкурирующими благами.

Рассчитаем действие эффекта замены, используя уравнение Слуцкого, которое позволяет отразить действие эффекта замены и эффекта дохода на результирующее изменение спроса.

Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x_i}{\partial I}\right) \cdot x_j,$$

где первое слагаемое правой части показывает эффект замены, а второе – эффект дохода

Выпишем уравнение Слуцкого для рассмотренной выше задачи потребительского выбора с функцией полезности $U(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^{3/4} \cdot (x_2 - 1)^{4/5}$, если *i=1,j=2*:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x_1}{\partial I}\right) \cdot x_2.$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\right)_{comp} = 0{,}004 + 0{,}0.429 = 0.433$$

$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 0{,}004$, $\frac{\partial x_1}{\partial I} = 0.01 > 0$ – спрос на благо x_1 растет при росте дохода. Поэтому, согласно уравнению Слуцкого спрос на благо x_1 будет расти больше при наличии компенсации $\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2} < \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\right)_{comp}\right)$.

Так как, $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 0{,}004 > 0$, и $\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\right)_{comp} > 0$, то товары 1 и 2 взаимозаменяемы, но представляются независимыми без учета компенсации.

Поскольку $\alpha 1 = \frac{3}{4}$, а $\alpha 2 = \frac{4}{5}$, то на покупку первого блага потребитель всегда будет расходовать 0.484 часть своего дохода, а на покупку второго блага: 0.516 часть своего дохода, независимо от цен этих благ. Т.к. $\alpha 1 < \alpha 2$, то потребитель второй товар предпочитает первому.

Замечание. Решение задачи минимизации расходов при заданном уровне полезности $U(x^*)$ дает возможность построить функции компенсированного спроса потребителя. Так, при построении модели минимизации расходов мы исходили из предпосылки, что цены благ и требуемый уровень полезности являются постоянными величинами. Однако с течением времени цены на рынке растут или падают, а желаемый уровень полезности также может измениться. В зависимости от этого будет меняться и количество каждого из благ, которые потребитель приобретает на рынке. Поэтому если решить систему уравнений в общем виде (не приписывая ценам и требуемому уровню полезности конкретные числовые значения), то оптимальные количества каждого блага предстанут как функции от цен и желаемого потребителем уровня полезности: $x_i^* = h_1(p_1, p_2, U), i = 1,2.$ Эти функции также являются функциями спроса на блага, так как отражают зависимость между количеством благ, приобретаемых потребителем на рынке, и другими факторами.

Заметим, однако, что в отличие от функций спроса, полученных при решении задачи максимизации полезности, когда количество приобретаемых товаров зависело от цен и от дохода, функции спроса, полученные при решении задачи минимизации расходов, отражают зависимость количества приобретаемых товаров от цен на эти товары, а также от некоторого фиксированного уровня полезности, на котором должен оставаться потребитель, потребляя тот или иной набор благ. Такие функции называются функциями компенсированного спроса, или хиксианскими, в честь знаменитого экономиста Джона Хикса.

В целом анализ потребительского спроса дает возможность правильно классифицировать товары с целью последующей разработки оптимальной ценовой и товарной стратегии.

4 Содержание письменного отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется на листах формата А4 и должен иметь следующую структуру:

1) Постановка задачи
2) Краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач
3) Математические модели и результаты применения ППП для решения задач
4) Анализ полученных результатов и выводы.

5 Вопросы к защите

1) Дайте определение функции полезности.
2) Как содержательно трактуются значения показателей эластичности?
3) Что такое функции спроса? В чем состоит условие их однородности нулевой степени, его экономический смысл?
4) Поясните утверждение: в точке оптимума полезности приращения благ, приходящиеся на одну затрачиваемую денежную единицу, равны между собой.
5) Приведите геометрическую интерпретацию решения задачи потребительского выбора.
6) Каким свойствам должна удовлетворять функция полезности?

7) Почему в точке оптимума ЗПВ бюджетное ограничение выполняется как равенство.
8) Поясните на примерах (графически и аналитически) особые случаи оптимального выбора потребителя, если функция полезности является линейной, с постоянными пропорциями.
9) Какая функция спроса называется маршаллианской?
10) Какая функция спроса называется хиксианской?

6 Варианты для индивидуальных заданий

Варианты для индивидуальных заданий приведены в приложениях А в таблице А1.

7 Литература, рекомендуемая для изучения темы

7.1 Замков, О.О. Математические методы в экономике: учебник. / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, издательство «ДИС», 1998. – 368 с.

7.2 Интриллигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор/Пер. с англ. Г.И. Жуковой. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с.

7.3 Колемаев, В.А. Математическая экономика: учебник для вузов/ В.А. Колемаев. – ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.

7.4 Монахов, А.В. Математические методы анализа экономики/ А.В. Монахов. – СПб: Питер, 2002. – 176с.

Приложение А
(обязательное)
Исходные данные к задаче потребительского выбора

Таблица А.1 Варианты для индивидуальных заданий

№ варианта	Функция полезности $U(x_1,x_2)$	Цены		I	Δp_2
		p_1	p_2		
1	2	3	4	5	6
1а	$(x_1-2)^{1/5}(x_2-3)^{4/5}$	35	80	11000	15
1б	$3x_1+5x_2$	15	25	1500	5
2а	$(x_1-1)^{2/5}(x_2-3)^{1/2}$	50	120	10000	25
2б	$min\{3x_1; 2x_2\}$	30	20	1000	4
3а	$(x_1-2)^{2/3}(x_2-1)^{3/5}$	40	100	12000	10
3б	$min\left\{\frac{x_1}{5}; \frac{x_2}{15}\right\}$	15	45	1600	12
4а	$(x_1-2)^{1/5}(x_2-4)^{4/5}$	60	170	10000	17
4б	$(x_1-4)^2+(x_2-20)^2$	5	20	900	6
5а	$(x_1-1)^{2/5}(x_2)^{4/5}$	40	200	10000	15
5б	$(x_1-5)^2+(x_2-7)^2$	10	5	800	2
6а	$(x_1-2)^{1/4}(x_2)^{4/5}$	70	250	11000	25

Продолжение таблицы А1

1	2	3	4	5	6
6б	$10x_1 + x_2$	50	20	5000	7
7а	$(x_1)^{1/2}(x_2 - 4)^{2/3}$	50	100	11500	10
7б	$12x_1^2 + 5x_2^2$	20	15	2500	4
8а	$(x_1 - 1)^{1/4}(x_2 - 3)^{4/5}$	60	160	10000	17
8б	$2x_1 + 16x_2$	10	26	1200	5
9а	$(x_1 - 1)^{1/3}(x_2 - 4)^{2/5}$	40	180	10000	20
9б	$min\left\{\frac{x_1}{12}; \frac{x_2}{8}\right\}$	20	12	5400	2
10а	$2x_1^{1/2}x_2^{1/3}$	90	240	10000	25
10б	$min\{6x_1; 4x_2\}$	12	8	800	2
11а	$(x_1 - 1)^{1/4}(x_2 - 3)^{4/5}$	60	110	12000	10
11б	$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2$	5	10	500	3
12а	$(x_1 - 3)^{1/4}(x_2)^{4/5}$	60	170	13000	20
12б	$(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 4)^2$	12	16	1550	4
13а	$(x_1 - 2)^{1/3}(x_2 - 5)^{1/2}$	80	170	10000	20
13б	$x_1^2 + 6x_2^2$	10	16	1000	4

Продолжение таблицы А1

1	2	3	4	5	6
14а	$(x_1)^{2/3}(x_2-5)^{1/2}$	70	190	10000	10
14б	$min\left\{\frac{x_1}{2};\frac{x_2}{3}\right\}$	9	12	450	3
15а	$(x_1-2)^{3/4}(x_2)^{1/6}$	50	100	10000	10
15б	$2x_1^2+12x_2^2$	15	18	2500	5
16а	$(x_1-6)^{1/4}(x_2-3)^{2/5}$	75	180	12500	17
16б	$min\{x_1;3x_2\}$	20	15	1200	4
17а	$(x_1-1)^{1/4}(x_2-3)^{4/5}$	80	210	10000	20
17б	$min\left\{\frac{x_1}{10};\frac{x_2}{25}\right\}$	20	40	6000	10
18а	$3x_1^{1/2}x_2^{2/3}$	30	250	12200	25
18б	$x_1^2+x_2^2$	20	25	4000	8
19а	$(x_1-3)^{1/5}(x_2-3)^{4/5}$	50	150	10000	25
19б	$min\{10x_1;2x_2\}$	25	50	1000	9
20а	$x_1^{1/4}x_2^{3/5}$	60	40	13200	20
20б	$0.5x_1+4x_2$	40	10	1000	4
21а	$(x_1-6)^{1/4}(x_2-2)^{1/5}$	55	185	10000	10

Окончание таблицы А1

1	2	3	4	5	6
21б	$x_1^2 + 16x_2^2$	25	16	2600	5
22а	$x_1^{1/4}x_2^{1/2}$	50	150	10000	12
22б	$(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 25)^2$	50	45	10000	15
23а	$(x_1 - 1)^{1/3}(x_2 - 1)^{1/2}$	80	120	10000	14
23б	$min\left\{\frac{x_1}{2}; \frac{x_2}{4}\right\}$	32	40	1100	12
24а	$(x_1 - 3)^{2/5}(x_2)^{1/2}$	40	140	12000	16
24б	$min\{x_1; 5x_2\}$	20	30	1200	9
25а	$4(x_1)^{1/5}(x_2 - 4)^{3/5}$	25	85	14000	10
25б	$4x_1 + 7x_2$	20	25	1700	6