МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

И.К. ЗУБОВА, О.В. ОСТРАЯ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет" в качестве учебного пособия для студентов всех специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования.

Оренбург 2006

УДК 517(07)
З91
ББК 22.161 я7

Рецензенты
кандидат физико-математических наук, доцент Л.М. Невоструев,
кандидат физико-математических наук И.В. Игнатушина

Зубова И.К.
З91 Введение в математический анализ: учебное пособие/И.К. Зубова, О.В. Острая – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006 – 117с

ISBN

В пособии излагается введение в курс математического анализа. Вводятся основные понятия теории множеств, даются определения переменной величины, последовательности, функции. Предлагается схема проведения практических занятий, на которых отрабатываются такие базовые понятия математического анализа, как предел числовой последовательности, предел функции, непрерывность функции в точке.

Учебное пособие предназначено для преподавателей и студентов всех специальностей.

З $\frac{1602070000}{}$ ББК 22.161 я7

ISBN**….**

Содержание

1 Лекция №1. Введение

Приступая еще в школьном курсе математики к изучению математического анализа, мы начинаем знакомиться с элементами высшей математики. До этого момента на уроках алгебры и геометрии изучается элементарная математика, т.е. математика постоянных величин. И только в старших классах ученик получает начальные сведения о переменной величине, которая, в отличие от постоянной, принимает различные числовые значения.

Областью изменения переменной называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений.

Если переменная принимает любые значения из своей области изменения независимо ни от каких других переменных, она называется независимой переменной. Если значения некоторой переменной находятся в какой-либо зависимости от значений одной или нескольких независимых переменных, то такая переменная называется функцией одной или нескольких независимых переменных (аргументов).

Математический анализ – это область математики, в которой изучаются переменные величины и функциональные зависимости. Относительно этих величин вводятся, во-первых, операции, известные из арифметики и элементарной алгебры – сложение, вычитание, умножение и деление. Во-вторых, появляются две новые операции – дифференцирование и интегрирование.

Таким образом, модели, применяющиеся в математическом анализе – это аналитические выражения (формулы), составленные из символов переменных величин и знаков, обозначающих алгебраические операции и операции дифференцирования и интегрирования.

1.1 Множества. Операции над множествами

Множество – это совокупность объектов, обладающих некоторым общим свойством. Числовое множество – это некоторая совокупность чисел. Обозначим буквой X некоторое числовое множество. Элемент множества, то есть число, входящее в это множество, будем обозначать буквой x.

Выражение $x \in X$ означает, что число x принадлежит множеству X, или число x является элементом множества X.

Множество X, состоящее из конечного числа элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ можно обозначить так: $X = \{x_1, x_2, .., x_n.\}$. Если множество состоит из бесконечного числа элементов, то его можно обозначить так: $X = \{x_1, x_2, .., x_n, .. \}$.

Пусть X и Y - два множества. Если все элементы множества X содержатся во множестве Y, то говорят, что множество X является подмножеством множества Y и пишут: $X \subset Y$.

Пусть $P(x)$ - некоторое свойство, которым обладает элемент x множества X. Множество всех элементов, обладающих этим свойством, обозначается так: $\{X \mid P(x)\}$, или так: $\{X : P(x)\}$.

Пример 1.1.

Пусть $a \in X$, $b \in X, a < b$.

$\{X \mid a \le x \le b\} = [a, b]$ - отрезок $[a, b]$

$\{X \mid a < x < b\} = (a, b)$ - интервал (a, b)

$\{X \mid a \le x < b\} = [a, b)$ - полуинтервал $[a, b)$

$\{X \mid a < x \le b\} = (a, b]$ - полуинтервал $(a, b]$

$\{X \mid a < x\} = (a, +\infty)$ - полупрямая

$\{X \mid x < b\} = (-\infty, b)$ - полупрямая

$\{X \mid -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, +\infty)$ - вся числовая ось

$\{X \mid a \le x\} = [a, +\infty)$ - луч

$\{X \mid x \le b\} = (-\infty, b]$ - луч

Все эти множества – отрезки, интервалы и полуинтервалы – называются промежутками. Промежутки $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) называются конечными. Остальные промежутки называются бесконечными.

Все вещественные числа изображаются точками на координатной прямой, поэтому множество всех вещественных чисел называется числовой прямой, а числа точками.

Для конечных промежутков точки a и b будут концами, или граничными точками.

Множество, содержащее все свои граничные точки, называется замкнутым (отрезок). Множество, не содержащее ни одной своей граничной точки, называется открытым (интервал).

Общепринятыми являются следующие обозначения:

N - множество всех натуральных чисел.

Z - множество всех целых чисел

Q - множество всех рациональных чисел.

I - множество всех иррациональных чисел.

R - множество всех вещественных чисел.

C - множество всех комплексных чисел.

Вспомним, что известно об этих множествах из школьного курса.

Натуральными называются числа 1,2,3,…, используемые для счета предметов. Натуральные числа, числа, противоположные натуральным и число 0 составляют множество целых чисел.

Рациональным называется число, которое можно представить в виде $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, причем $q \neq 0$. Всякое такое число либо является целым, либо может быть представлено конечной десятичной дробью или периодической бесконечной десятичной дробью.

Числа, которые представляются только непериодической бесконечной десятичной дробью, например, число π = 3,1415926536… называются иррациональными.

Рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество действительных или вещественных чисел.

Задание комплексного числа определяется заданием пары вещественных чисел a и b, для которых вводятся следующие понятия:

1) Равенство. Пары (a,b) и (c,d) считаются равными тогда и только тогда, когда a = c и $b = d$.

2) Нуль. Нулем называется такое комплексное число, сумма которого с любым комплексным числом z равна этому числу: z + 0 = z.

3) Сумма. Суммой комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a,b)$, такое, что $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$.

4) Произведение. Произведением комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a,b)$, такое, что $a = a_1 a_2 - b_1 b_2$, $b = a_1 b_2 + a_2 b_1$.

Рассмотрим числа $z_1 = (0{,}1)$ и $z_2 = (0{,}1)$. Найдем их произведение, или квадрат комплексного числа (0,1): $a = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$,

$b = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$,

$z = (-1{,}0) = -1$.

Комплексное число (0,1) называется мнимой единицей и обозначается символом i.

Всякое действительное число a можно считать парой (a ,0) и рассматривать как комплексное число.

Пусть a - вещественное число, изображающееся произвольной точкой числовой прямой. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется ε - окрестностью точки a (см. рисунок 1).

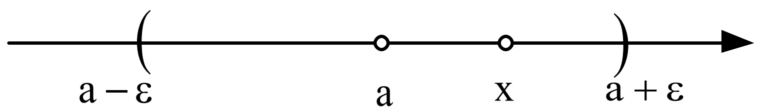


Рисунок 1

ε - окрестность точки a обозначается $U_\varepsilon(a)$ или $U(a, \varepsilon)$.

Утверждение $|x - a| < \varepsilon$ равносильно утверждению $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, которому принадлежат все элементы первого множества и все элементы второго множества. Обозначается: $C = A \cup B$ (см. рисунок 2).

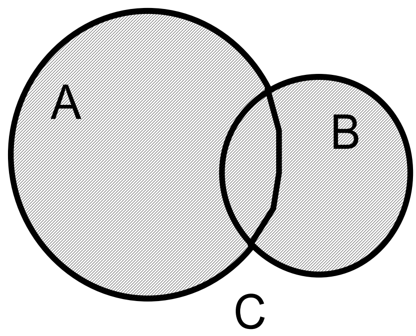


Рисунок 2

Пересечением двух множеств A и B называется множество D, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B. Обозначается: $D = A \cap B$ (см. рисунок 3).

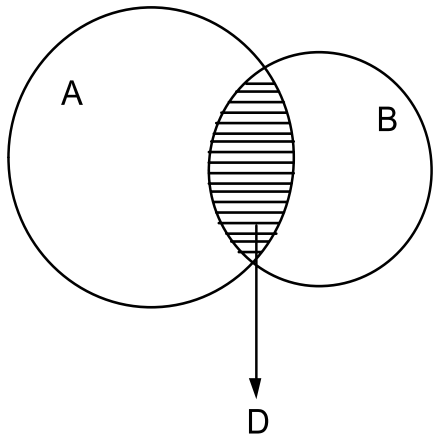


Рисунок 3

Разностью двух множеств A и B называется множество E, состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B. Обозначается: $E = A \setminus B$ (см. рисунок 4).

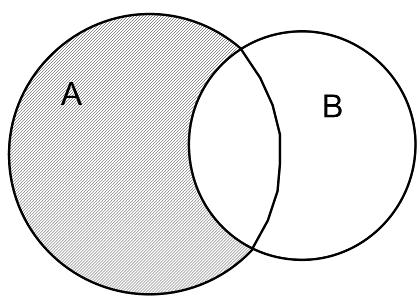


Рисунок 4

Если множество B содержится во множестве A, тогда разность $A \setminus B$ называется дополнением множества B до множества A. Обозначается: $\overline{B}_A$ (см. рисунок 5).

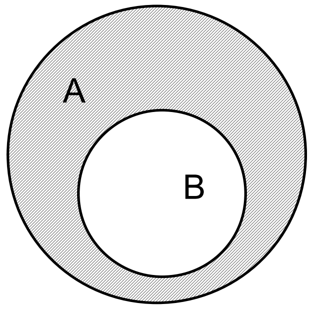


Рисунок 5

1.2 Ограниченность и счетность множеств. Точная верхняя и точная нижняя грани множества

Если a и b - фиксированные числа, где a < b, то множество $X = [a, b]$ можно записать так: $X = \{x : a \le x \le b\}$.

Число b - a называется длиной отрезка $[a, b]$. Это же число будет и длиной интервала (a, b),полуинтервала $[a, b)$, полуинтервала $(a, b]$.

Если a и $b \in \mathbf{R}$, то число $|a - b|$ называется расстоянием между точками a и b.

Определение 1.2.1. Множество X действительных чисел x называется ограниченным сверху, если существует такое число b, что $x \le b$ для всех $x \in X$. В этом случае говорят, что число b ограничивает сверху множество X. Число b тогда называется верхней границей или мажорантой множества X.

Определение 1.2.2. Множество X действительных чисел x называется ограниченным снизу, если существует такое число a, что $x \ge a$ для всех $x \in X$. В этом случае говорят, что число a ограничивает снизу множество X. Число a называется тогда нижней границей или минорантой множества X.

Определение 1.2.3. Множество X действительных чисел, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным. Другими словами, множество X действительных чисел x называется ограниченным, если существуют такие числа a и b, что $a \le x \le b$ для всех $x \in X$.

Для ограниченного множества существуют различные числа, ограничивающие это множество сверху и снизу, например, любое число $x \ge 5$ ограничивает сверху множество $X = (0{,}5)$, любое число $x \le 0$ ограничивает это множество снизу. Таким образом, у ограниченного сверху множества существует множество верхних границ, или мажорант. У ограниченного снизу множества существует множество нижних границ или минорант.

Среди чисел, ограничивающих сверху данное множество (мажорант), выделяют наименьшее и называют точной верхней гранью множества.

Среди чисел, ограничивающих данное множество снизу (минорант), выделяют наибольшее и называют точной нижней гранью множества.

Кроме этих словесных определений можно дать следующие более математически строгие определения точной верхней и точной нижней граней множества.

Определение 1.2.4. Число M называется точной верхней гранью числового множества X, если:

1) $x \le M \ \forall x \in X$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > M - \varepsilon$.

Точная верхняя грань множества X обозначается $\sup X$ или $\sup\limits_{x \in X} x$ (supremum).

Например, для отрезка $X = [1,2]$ $\sup X = 2$ для интервала $X = (2,3)$ $\sup X = 3$.

Определение 1.2.5. Число m называется точной нижней гранью множества X, если: 1) $x \ge m \ \forall x \in X$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Точная нижняя грань множества X обозначается $\inf X$ или $\inf\limits_{x \in X}$ (infimum).

Например, если $X = (4,5)$, то $\inf X = 4$; если $X = [6,7]$, то $\inf X = 6$.

Приведенные примеры показывают, что верхняя и нижняя грани могут принадлежать, а могут и не принадлежать множеству.

Если множество X не ограничено сверху (снизу), то его точной верхней (нижней) гранью считается символ $+\infty$ $(-\infty)$.

Слово «supremum» означает «наивысший», а слово «infimum» - «наинизший». Эта терминология не особенно удачна, поскольку, например, $\sup X$ - не всегда наивысший элемент множества X. Если множество ($X \subset \mathbf{R}$) конечно, т.е. состоит из конечного количества чисел $x_1, x_2, \ldots, x_p$, то среди них всегда есть наименьшее и наибольшее числа, которые обозначаются соответственно: $m' = \min X = \min\limits_{x \in X}\{x\}^*$,

$M' = \max X = \max\limits_{x \in X}\{x\}$.

Если же множество X - бесконечное, то это не всегда так, именно поэтому и возникает вопрос о введении для произвольного множества X чисел, по возможности заменяющих M' и m'. Такими числами (конечными и бесконечными) и являются числа $M = \sup\limits_{x \in X}\{x\}$ и $m = \inf\limits_{x \in X}\{x\}$.

Вернемся к определению 1.2.3 ограниченного множества. Его можно дать и в таком варианте:

---

* $\{\}$ – обозначение для множества.

Определение 1.2.3'. Множество X ограничено, если существует число $M > 0$, такое, что $\forall x \in X \ |x| \le M$.

Очевидно, что последнее неравенство эквивалентно неравенствам $-M \le x \le M$, а значит, определение 1.2.3' равносильно определению 1.2.3.

Если множество не является ограниченным, его называют неограниченным. Дадим определение неограниченного множества, построив отрицание логической формулы определения 1.2.3'.

Определение 1.2.6. Множество $X \subset R$ неограниченно, если для любого положительного числа M существует $x_0 \in X$, такое, что $|x_0| > M$.

Например: отрезок $[a, b]$ - ограниченное множество, интервал (a, b) - ограниченное множество, если a и b - конечные числа.

Если $a = -\infty$ или $b = +\infty$, то такие интервалы будут неограниченными множествами.

Определение 1.2.7. Множество X называется бесконечным, если для всякого натурального числа n во множестве X имеются элементы, количество которых больше n.

Определение 1.2.8. Два множества A и B называют эквивалентными (A ~ B), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Другими словами: два множества называются эквивалентными, если существует такое правило, по которому всякому элементу множества A ставится в соответствие вполне определенный элемент множества B. При этом в силу этого правила двум разным элементам $a_1, a_2 \in A$ соответствуют два разных элемента $b_1, b_2 \in B$, и каждый элемент множества B соответствует некоторому элементу множества A.

Например, пусть A - множество точек окружности радиуса r, а B - множество точек окружности радиуса R $(R > r)$; эти множества эквивалентны (см. рисунок 6).

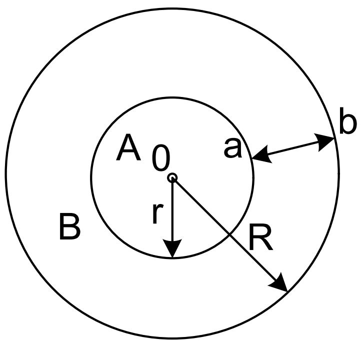


Рисунок 6

Определение 1.2.9. Если множество X эквивалентно множеству **N**, то множество X называется счетным. (Тогда элементы множества X можно перенумеровать с помощью натуральных чисел).

1.3 Практическое занятие №1. Множества. Операции над множествами. Ограниченность множества

Упражнение 1.1. Перечислить элементы множества.

а) множество всех целых положительных степеней числа 3, меньших, чем 250.

Ответ: $A = \{3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5\}$;

б) множество всех целых положительных чисел, кратных 5 и меньших, чем 47.

Ответ: $B = \{5,10,15,20,25,30,35,40,45\}$.

Упражнение 1.2. Записать множество, перечислив его элементы.

$M = \{x : x^3 + 5x^2 + 6x = 0, \ \ x \in Z\}$

Элементами данного множества являются корни следующего уравнения:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

$$x(x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$x_1 = 0 \ \text{ или } \ x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_2 = -3;$$

$$x_3 = -2.$$

Ответ: $M = \{-3; -2; 0\}$.

Упражнение 1.3. Найти множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям.

а) $(x^2 - 4)(y^2 - 9) = 0$;

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x+2)(x-2)(y-3)(y+3) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ x-2=0, \\ y-3=0, \\ y+3=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=2, \\ y=3, \\ y=-3. \end{array}\right.$$

Ответ: Множество точек, принадлежащих прямым $x = 2$, $x = -2$ $y = 3$, $y = -3$.

б) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = -2$

Такому множеству не удовлетворяет ни одна точка действительной плоскости.

Ответ: Ø (пустое множество).

Упражнение 1.4. Изобразить множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим системам неравенств:

а) $\begin{cases} x > 1, \\ y \le 2. \end{cases}$

Изобразим прямые на координатной плоскости (см. рисунок 7)

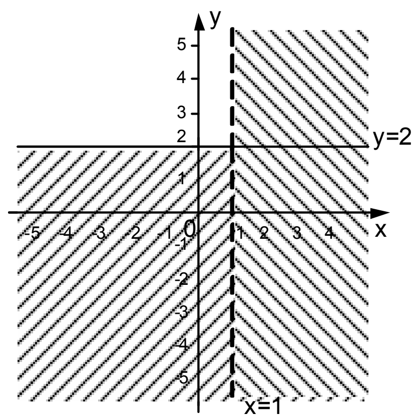


Рисунок 7

Ответ: Данному множеству принадлежат точки, лежащие ниже прямой $y = 2$ и точки, лежащие правее прямой $x = 1$, причем точки самой прямой множеству не принадлежат.

б) $\begin{cases} x + y < 1, \\ x - y \ge 2. \end{cases}$

Для отыскания границ множеств запишем и решим вспомогательную систему уравнений:

$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 - x, \\ y = x - 2. \end{cases}$

Изобразим прямые на координатной плоскости (см. рисунок 8):

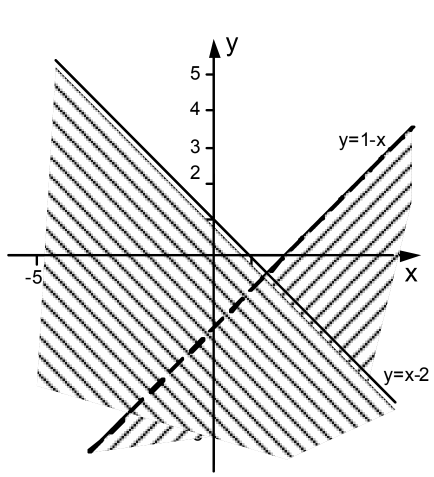


Рисунок 8

Ответ: Множеству принадлежат все точки плоскости, лежащие ниже прямой $y = 1 - x$ и ниже прямой $y = x - 2$.

Упражнение 1.5. Пусть множество А – множество всех положительных целых чисел, делящихся на 3, а В – множество всех положительных чисел, сумма цифр которых делится на 3. В каком соответствии находятся данные множества?

Т.к. все целые числа, сумма цифр которых делится на 3, делятся на 3 без остатка, то данные множества совпадают.

Ответ: А = В.

Упражнение 1.6. Пусть А – множество всех положительных чисел, а В – множество всех положительных чисел, делящихся на 6. В каком соответствии находятся данные множества?

Поскольку не все положительные целые числа делятся на 6, множество В содержится во множестве А.

Ответ: $B \subset A$.

Упражнение 1.7. Изобразить с помощью кругов Эйлера-Венна* соотношения следующих множеств: А – множество четных натуральных чисел, В – множество однозначных натуральных чисел, С - множество натуральных чисел, кратных 4.

Ответ: см. рисунок 9.

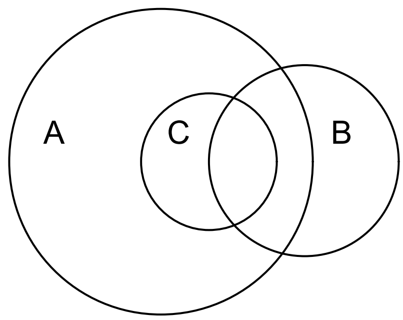


Рисунок 9

Упражнение 1.8. Пусть $A = \{x : x^2 > 4, \ \ x \in R\}$;

$$B = \{x : x^2 - 2 > 3, \ \ x \in R\};$$

---

* Леонард Эйлер (1707-1783) – швейцарский математик, физик, механик, астроном, академик Петербургской академии наук, впервые применил эти диаграммы в труде «Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях» в 1768 году.

Джон Венн (1834-1923) – английский логик.

Диаграммами Эйлера-Венна схематично обозначаются множества. Считается, что часть плоскости, ограниченная окружностью с произвольным радиусом, содержит все элементы иллюстрируемого множества.

$$C=\{x : x<2,\ \ x\in R\}.$$

Найти: а) $(A\cup B)\cap C$;

б) $(\overline{A}\cup\overline{B})$;

в) $A\cap B\cap\overline{C}$.

$A=\{x : x<-2\ \text{ или }\ x>2\}$

$B=\{x : x<-\sqrt{5}\ \text{ или }\ x<\sqrt{5}\}$

$C=\{x : x<2\}$

а) Изобразим множества на координатной оси: см. рисунки 10-14.

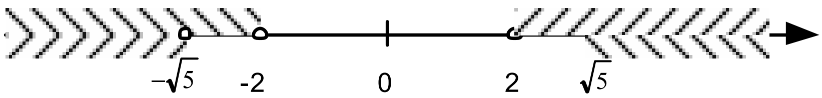


Рисунок 10

$A\cup B=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$;

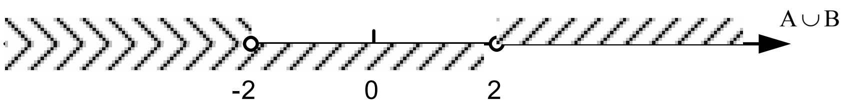


Рисунок 11

$(A\cup B)\cap C=\{x : x\in(-\infty;-2)\}$;

б) Найдем отрицание множеств А и В:

$\overline{A}=\{x : x\in[-2;2]\},\quad \overline{B}=\{x : x\in[-\sqrt{5};\sqrt{5}]\}$;

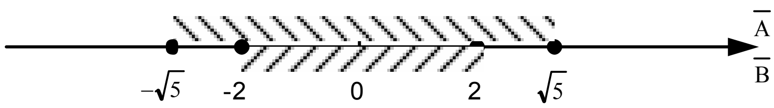


Рисунок 12

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{x : x\in[-\sqrt{5};\sqrt{5}]\}$;

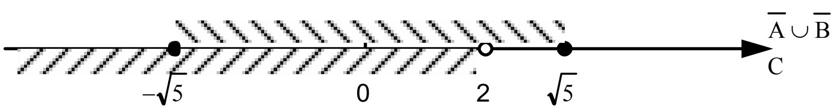


Рисунок 13

$\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap C = \left\{x : x \in \left(-\sqrt{5};2\right)\right\}$;

в) $A \cap B = \left\{x : x \in \left(-\infty;-\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5};+\infty\right)\right\}$;
$\overline{C} = \{x : x \geq 2\}$;

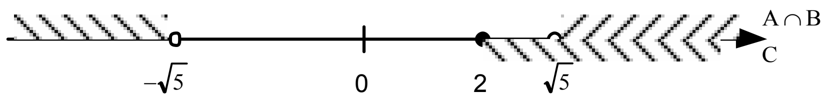


Рисунок 14

$A \cap B \cap \overline{C} = \left\{x : x \in \left(\sqrt{5};+\infty\right)\right\}$.

Ответ: $(A \cup B) \cap C = \left\{x : \quad x \in (-\infty;-2)\right\}$,

$\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap C = \left\{x : \quad x \in \left(-\sqrt{5};2\right)\right\}$,

$A \cap B \cap \overline{C} = \left\{x : \quad x \in \left(\sqrt{5};+\infty\right)\right\}$.

Упражнение 1.9. В Мировом океане известно 19 глубоководных впадин, глубина которых превышает 7 километров, из них 16 находятся в Тихом и Индийском океанах, а 4 – в Индийском и Атлантическом. Сколько в каждом океане глубоководных впадин?

Пусть A – множество глубоководных впадин в Тихом и Индийском океанах, B – множество глубоководных впадин в Индийском и Атлантическом океанах. По условию число элементов в этих множествах обозначим $m(A) = 16$, $m(B) = 4$. Известно также, что $m(A \cup B) = 19$. Глубоководные впадины Индийского океана образуют множество $A \cap B$. Для отыскания числа элементов этого множества используем формулу

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B),$$

согласно которой

$$m(A \cap B) = 16 + 4 - 19 = 1.$$

Таким образом, в Индийском океане одна глубоководная впадина, а потому в Тихом океане их 15, а в Атлантическом – 3.

Отметим, что данную задачу можно было бы решить и традиционным алгебраическим методом. Если x, y и z – число глубоководных впадин соответственно в Тихом, Индийском и Атлантическом океанах, то

$$\begin{cases} x + y + z = 19, \\ x + y = 16, \\ y + z = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x = 15,\ \ y = 1,\ \ z = 3$, что и является ответом задачи.

Ответ: в Тихом океане 15 глубоководных впадин, в Индийском одна и в Атлантическом – 3.

Упражнение 1.10. Является ли ограниченным снизу множество $A = \{x:\ \ x^2 + 1 > 0,\ \ x \in R\}$?

Неравенство $x^2 + 1 > 0$ выполняется при любом $x \in (-\infty; +\infty)$, т. е. не существует числа m такого, что $\forall x \in A$ выполнялось бы неравенство $x \geq m$. Следовательно, множество A не является ограниченным снизу.

Ответ: множество A не ограничено снизу.

Упражнение 1.11. Ограничено ли сверху множество точек полуинтервала $[2;\ 10)$?

Ограничено, т. к. $x < 10$ для $\forall x \in [2;\ 10)$.

Ответ: ограничено.

Упражнение 1.12. Какие из указанных ниже множеств ограничены?

$A_1 = \{x:\ \ 0 < x < 1\}$; $A_4 = \{x:\ \ x \in [1;\ 3]\}$;

$A_2 = \{x:\ \ x \in N\}$; $A_5 = \{x:\ \ x \in [1;\ 2] \cup [1;\ +\infty)\}$;

$A_3 = \{x:\ \ |x| > 1\}$; $A_6 = \{x:\ \ x \in [-3;\ 8] \cup (-1;\ 9]\}$.

Множества A_1, A_4, A_6 ограничены. Действительно, для множества A_1 существует число c (например, c = 1) такое, что $|x| < c\ \ \forall x \in A_1$. Для множества A_4 таким числом будет, например, число c = 3, т. к. $|x| \leq 3\ \ \forall x \in A_4$. Для множества A_6 число c = 9, т. к. $|x| \leq 9\ \ \forall x \in A_6$.

Множества $A_2,\ \ A_3,\ \ A_5$ не ограничены.

Ответ: ограничены множества A_1, A_4, A_6.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти множество решений уравнений.

1) $2 + |x| = |x + 2|$;

2) $\sin x - 4 = 0$.

2. Найти множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$.

3. Какие из множеств конечны или бесконечны?

1) $M = \{(x, y): 2x - 3y + 1 = 0\}$;

2) множество прямых, проходящих через две данные точки;

3) множество прямоугольников с периметром P = 20.

4. Даны множества: $A = \{x : x^2 - 8x + 15 < 0\}$;

$B = \{x : |x - 3| \le 4\}$;

$C = \{x : |x - 2| \ge 3\}$.

Найти: а) $(A \cup B) \cap \overline{C}$; б) $B \setminus A$.

5. Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными?

$C_1 = \{x : \ |x| > 2\}$;

$C_2 = \{x : \ -x^2 + 2x + 8 < 0\}$;

$C_3 = \left\{x : \ x = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}, \ n \in N\right\}$;

$C_4 = \{x : \ x = 2^n, \ n \in N\}$;

$C_5 = \{x : \ |x| \le 1\}$;

$C_6 = \{x : \ x \in (-1; \ 10)\}$;

$C_7 = \{x : \ x \in (4; \ 6]\}$.

2 Лекция №2. Числовая последовательность

2.1 Понятие числовой последовательности и ее предела

Пусть каждому натуральному числу $n = 1,2,3\ldots$ по некоторому правилу поставлено в соответствие действительное или комплексное число x_n.

Тогда говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$, или что переменная x пробегает значения последовательности $\{x_n\}$.

Отдельные числа, составляющие последовательность, называются ее членами или элементами. Элементы последовательности с разными номерами, x_n и x_m, где $n \neq m$, считаются разными членами последовательности, даже если они численно равны.

Правило, по которому можно найти любой член последовательности, обычно задается формулой, которая называется формулой общего члена последовательности.

Пример 2.1.1. Пусть общий член последовательности задан формулой $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Тогда эту последовательность можно обозначить так: $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$.

Если все члены последовательности равны между собой, то она называется постоянной.

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если каждый ее последующий член больше (меньше) предыдущего, т.е., если $x_{k+1} > x_k \left(x_{k+1} < x_k\right)\ \forall k \in \mathbf{N}^*$

Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если каждый последующий ее член не меньше (не больше) предыдущего, т.е. если $x_{k+1} \geq x_k \left(x_{k+1} \leq x_k\right) \forall k \in \mathbf{N}$.

Возрастающая, убывающая, невозрастающая и неубывающая последовательности называются монотонными.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если все члены ее меньше (больше) некоторого числа, то есть если $x_n < M$ $(x_n > m)$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, то есть, если $m < x_n < M\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Все члены ограниченной последовательности $\{x_n\}$ по своей абсолютной величине меньше некоторого числа, то есть $\exists A > 0^*: |x_n| < A\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

---

* $\forall$ - квантор всеобщности, означающий «для любого».

Знак $\exists$ (квантор существования) означает «существует».

Поскольку вещественному числу геометрически соответствует точка на числовой оси, будем считать, что последовательности вещественных чисел соответствует последовательность точек на этой оси.

Покажем геометрическое изображение некоторых последовательностей на рисунках 15-17.

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

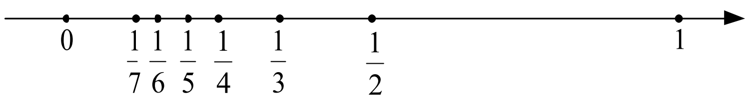


Рисунок 15

2) $\left\{2^{(-1)^n}\right\}$

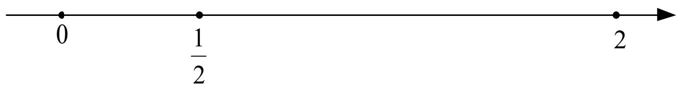


Рисунок 16

3) $\left\{(-1)^n \cdot n\right\}$

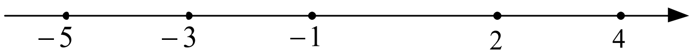


Рисунок 17

Видно, что все точки первой последовательности находятся на полуинтервале (0, 1]. Членам второй последовательности соответствуют только точки $\frac{1}{2}$ и 2. Членам третьей последовательности соответствуют точки, расположенные на всей числовой оси.

Две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются равными, если каждый член одной последовательности равен соответствующему члену другой, т.е. $a_n = b_n$.

Пример 2.1.2.

Рассмотрим последовательности:

1) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$;

2) $\left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \ldots\right\} = \left\{2^{(-1)^n}\right\}$;

3) $\left\{1,2,\frac{1}{3},4,\frac{1}{5},\ldots\right\}=\left\{n^{(-1)^n}\right\}$;

4) $\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots\right\}=\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$;

5) $\{2,5,10,17,\ldots\}=\{n^2+1\}$;

6) $\{-1,2,-3,4,\ldots\}=\{(-1)^n\cdot n\}$.

Последовательности 1, 2, 4 являются примерами ограниченных последовательностей, 3 – последовательность, ограниченная снизу числом 0 и неограниченная сверху, 5 – последовательность, ограниченная снизу числом 2 и неограниченная сверху, 6 – последовательность, неограниченная как сверху, так и снизу.

Переменную величину будем рассматривать как упорядоченное числовое множество, т.е. как множество чисел, расположенных в известной последовательности.

Определение 2.1.1. (словесное) Число a называется пределом переменной x, если абсолютное значение $|x_n - a|$ для всех ее значений x_n, следующих за некоторым значением x_0, будет меньше любого заранее данного положительного числа ε, как бы мало оно ни было.

Определение 2.1.2. (геометрическое) Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такое число $N\in\mathbf{R}$, зависящее от окрестности $U(a)$, что для всякого номера $n>N$ $x_n\in U(a)$. (См. рис. 18.)

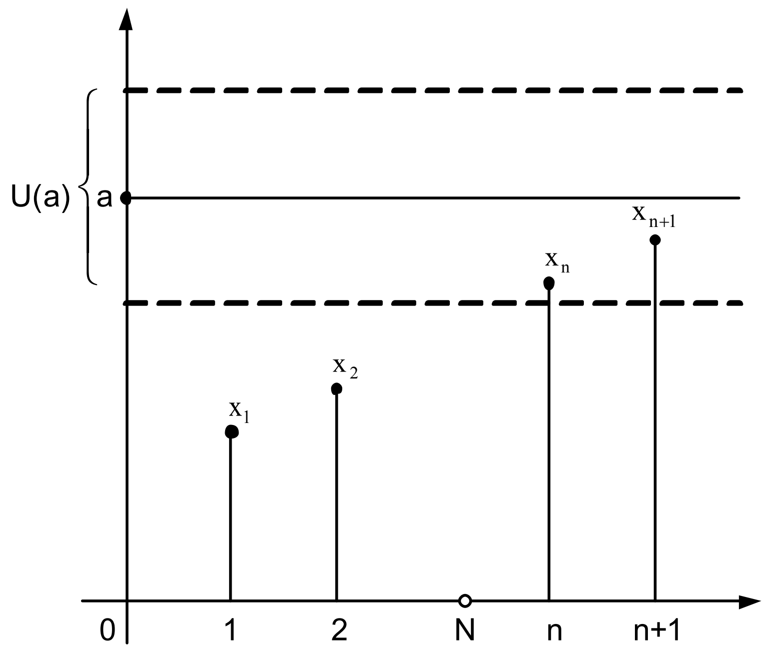


Рисунок 18

Определение 2.1.3. (символьное) [*]: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon):$
$$\forall n \in N \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

Вернемся к примеру 2.1.2 пункт 1. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Будем доказывать это, пользуясь определением предела, по следующей схеме:

а) Выберем произвольное $\varepsilon > 0$.

б) Выясним, для каких членов последовательности выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Предполагаемый предел в нашем примере a = 0, значит, нужно выяснить, для каких членов последовательности выполняется неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, или $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, или $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Отсюда $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

в) Находим n_0 для выбранного ε. В нашем примере $n_0 = \max\left\{1; \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$. Запись $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ означает целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

г) Делаем вывод:

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists n_0 = \max\left\{1; \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}: \forall n \in N \wedge n > n_0\ \ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Рассмотрим теперь переменную из примера 2.1.2 пункт 4, где $x_n = \frac{n-1}{n}$.

Докажем, что предел этой переменной равен 1.

а) Выберем произвольное $\varepsilon > 0$.

б) Выясним, для каких членов последовательности выполняется неравенство $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Значит, неравенство выполняется для всякого $\varepsilon > 0$, если $n > n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$.

в) $n_0 = \max\left\{1; \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$.

---

[*] Знак $\Rightarrow$ означает «следовательно» или «следует»;

знак $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ означает «по определению тогда и только тогда»;

знак $\wedge$ означает союз «и».

г) $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=\max\left\{1;\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}:\forall n\in N\wedge n>n_0\ \left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon\overset{def}{\Leftrightarrow}\lim\frac{n-1}{n}=1$.

Определение 2.1.4. Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся. Если число a является пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n\to\infty$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a и пишут: $\{x_n\}\to a$.

Расходящейся называется последовательность, предел которой равен бесконечности, или последовательность, не имеющая предела.

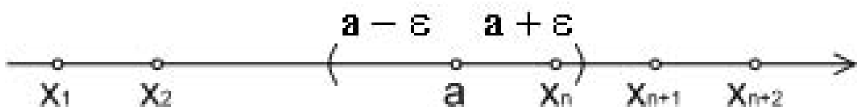
Пример последовательности, не имеющей предела: $\{1;-1;1;-1;\ldots\}=\{(-1)^n\}$.

Определение 2.1.3'. (отрицание к определению 2.1.3). Число a не есть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ тогда и только тогда, когда для любого $n_0\in\mathbf{N}$. найдется такое $n>n_0$, что $|x_n-a|\ge\varepsilon$.

В рассмотренном примере можно взять любое число a принадлежащее отрезку $[-1;1]$ и показать, что оно будет удовлетворять определению 2.1.3'.

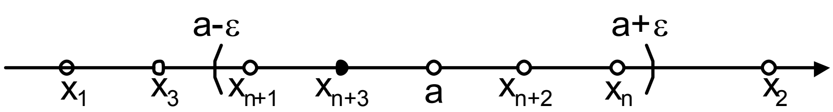
Определение 2.1.2'. (отрицание к определению 2.1.2). Число a не есть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ тогда и только тогда, когда существует такая ε - окрестность точки a $U(a)$, что $\forall n_0\in\mathbf{N}$ найдется $n\ge n_0$, такое, что $x_{n_0}\notin U(a)$.

На рисунке 19 изображена последовательность, предел которой не равен a, а на рисунке 20 – последовательность, предел которой равен a.



$a\ne\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

Рисунок 19



$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

Рисунок 20

Докажем, что последовательность $\{2^{(-1)^n}\}$, заданная в примере 3.2 пункт 2), не стремится ни к какому пределу (т.е. не имеет предела).

Доказательство:

Изобразим эту последовательность геометрически на рисунке 21.

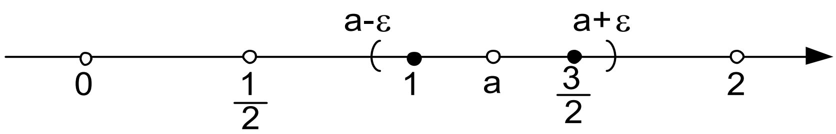


Рисунок 21

Допустим, что эта последовательность имеет предел, равный a. Рассмотрим некоторую ε - окрестность этой точки, например $\left(a-\frac{1}{3};a+\frac{1}{3}\right)$. Длина ее равна $\frac{2}{3}$. Очевидно, что эта окрестность не может одновременно содержать точки $\frac{1}{2}$ и 2, поскольку расстояние между этими точками равно $\frac{3}{2}$ $\left(\frac{3}{2}>\frac{2}{3}\right)$. Для определенности будем считать, что точка 2 не принадлежит к построенной окрестности. Но $x_n = 2$ для $n = 2; 4; 6; 8;\ldots$, т.е. вне этой окрестности имеется бесконечное число элементов последовательности. Таким образом, точка a не может быть пределом последовательности, а так как эта точка произвольна, последовательность не имеет предела. Все сказанное можно, в частности, отнести и к случаю a=2 или a=$\frac{1}{2}$. Проведите соответствующие рассуждения самостоятельно.

2.2 Практическое занятие №2. Числовая последовательность. Свойства последовательностей. Действия над последовательностями

Упражнение 2.1. Написать первые четыре члена последовательности x_n, если:

1) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

2) x_n - n-ый знак в десятичной записи числа e;

3) $x_1 = 1,\ \ x_n = x_{n-1} + 2$.

1) Подставляя поочередно n = 1, 2, 3, 4 в формулу для общего члена последовательности, найдем: $x_1 = -1,\ \ x_2 = \frac{1}{2},\ \ x_3 = -\frac{1}{3},\ \ x_4 = \frac{1}{4}$.

2) Поскольку e = 2,71828…, то $x_1 = 2,\ \ x_2 = 7,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = 8$.

3) В соответствии с формулой $x_n = x_{n-1} + 2$ получим: $x_2 = x_1 + 2 = 3$, $x_3 = x_2 + 2 = 5,\ \ x_4 = x_3 + 2 = 7$.

Упражнение 2.2. Зная несколько первых элементов числовой последовательности $\{x_n\}$, написать формулу его общего члена:

1) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},...;$

2) $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},...;$

3) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,...$.

1) Заметим, что знаменатели числовой последовательности представляют собой члены арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и $d = 2$, значит

$$a_n = a_1 + d\cdot(n-1) = 1 + 2\cdot(n-1) = 1 + 2\cdot n - 2 = 2\cdot n - 1 \Rightarrow$$

$$a_n = 2\cdot n - 1 \Rightarrow x_n = \frac{1}{2\cdot n - 1}.$$

2) Знаменатели дробей есть квадраты натуральных чисел 1, 2, 3, 4 и т.д. Значит $x_n = \frac{1}{n^2}$.

3) Заметим, что члены последовательности с нечетными номерами отрицательные, а с четными номерами положительные, значит $x_n = (-1)^n \cdot n$.

Упражнение 2.3. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$,[*] где $n \in \mathbf{N}$, строго убывает, начиная с $n = 2$.

Рассмотрим отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n} = \frac{2}{n+1}$. Очевидно, что при $n \ge 2$ справедливо $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{2}{3} < 1$. Следовательно, $x_{n+1} < x_n$ при $n \ge 2$, т. е. данная последовательность убывает, начиная с n = 2.

Упражнение 2.4. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху? Ограничены снизу? Ограничены?

1) 2, 4, 6, 8,…;

2) -1, -4, -9, -16, …;

3) $\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{3^3},...;$

4) -2, 4, -8, 16… .

1) Данная последовательность, состоящая из всех четных положительных чисел, ограничена снизу, но не ограничена сверху.

[*] Символом n! (читается «эн факториал») обозначают для краткости произведение первых n чисел натурального ряда. Поэтому $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, а $(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot(n+1) = n!(n+1)$.

2) Последовательность ограничена сверху $\left(x_n = -n^2 < 0,\ \ n = 1,\ 2,\ 3...\right)$, но не ограничена снизу.

3) Последовательность ограничена, т.к. она ограничена снизу и сверху: $0 < x_n = \dfrac{1}{3^n} < 1.$

4) Последовательность $\left\{(-2)^n\right\}$ не ограничена, т.к. для любого $M > 0$ можно найти номер n, что $|x_n| = 2^n > M.$

Упражнение 2.5. Доказать, что последовательность $x_n = 2^{n(-1)^n}$ не ограничена.

В силу определения неограниченной последовательности нужно показать, что $\forall M > 0\ \exists n \in \mathbf{N}$, для которого $|x_n| > M$. Зададим произвольное $M > 0$ и возьмем любое четное число n, удовлетворяющее неравенству $n > \log_2 M$. Для такого n имеем $x_n = 2^n > 2^{\log_2 M} = M$, что и требовалось доказать.

Упражнение 2.6. Пусть $\{x_n\} = \{n\},\ \ \{y_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ - две последовательности. Найти последовательности $\{x_n + y_n\},\ \{x_n - y_n\},\ \{x_n \cdot y_n\},\ \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$.

Имеем: $\{x_n + y_n\} = \left\{n + \dfrac{1}{n}\right\} = \left\{2,\ 2\dfrac{1}{2},\ 3\dfrac{1}{3},...\right\};$

$\{x_n - y_n\} = \left\{n - \dfrac{1}{n}\right\} = \left\{0,\ \dfrac{3}{2},\ 2\dfrac{2}{3},...\right\};$

$\{x_n \cdot y_n\} = \left\{n \cdot \dfrac{1}{n}\right\} = \{1\} = \{1,\ 1,\ 1,...\};$

$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{n : \dfrac{1}{n}\right\} = \left\{n^2\right\} = \{1, 4, 9,...\}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = 2^{n+1}$;

2) $x_1 = 2,\ \ x_n = |x_{n-1} - 2|$;

3) $x_n = (-1)^n + 1$;

4) x_n - n-ый знак в десятичной записи числа $\dfrac{2}{7}$;

$$5)\ x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2 - 1} & \text{при } n \text{ четном;} \\ \dfrac{n-1}{n} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

2. Зная несколько первых элементов числовой последовательности $\{x_n\}$, написать формулу его общего члена:

1) $2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,...\ ;$

2) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,...\ ;$

3) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{11},....$

3. Найти последовательности $\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n$, если:

1) $x_n = n,\ y_n = 3 \cdot n,\ \alpha = 2,\ \beta = -1;$

2) $x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n,\ y_n = 1 \cdot n,\ \alpha = \sqrt{2},\ \beta = -5.$

3 Лекция №3. Предел последовательности

3.1 Основные теоремы о пределах

Теорема 3.1.1. (о единственности предела последовательности). Если последовательность имеет предел, то этот предел единственный.

Доказательство (от противного):

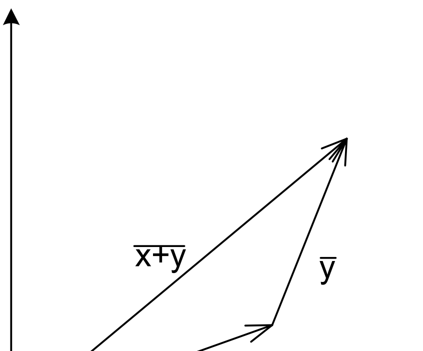
Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$, $b = \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$, $a \neq b$. Изобразим точки a и b на числовой прямой и построим непересекающиеся окрестности этих точек (рисунок 22).

Рисунок 22

Мы не сможем найти такого числа N, чтобы все x_n, где $n > N$, попали одновременно в два непересекающихся множества. Значит, предположение о существовании двух пределов у одной последовательности неверно.

Теорема 3.1.2. (об ограниченности последовательности, имеющей предел). Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена. То есть, если существует $a = \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$, то существует $c > 0$, такое, что $|x_n| \le c$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

Для доказательства этой и некоторых других теорем нам потребуется так называемое неравенство треугольника: $|x + y| \le |x| + |y|$. В справедливости этого неравенства легче всего убедиться, считая, что $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – векторы, $(\bar{x} + \bar{y})$ – их сумма, а $|\bar{x}|$, $|\bar{y}|$, $|\bar{x} + \bar{y}|$ – соответственно длины этих векторов. Вспомним, как производится сложение векторов, рассмотрев рисунки 23 и 24:



или

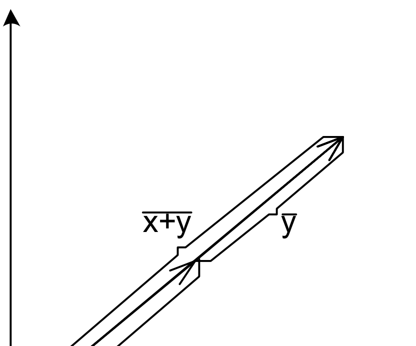
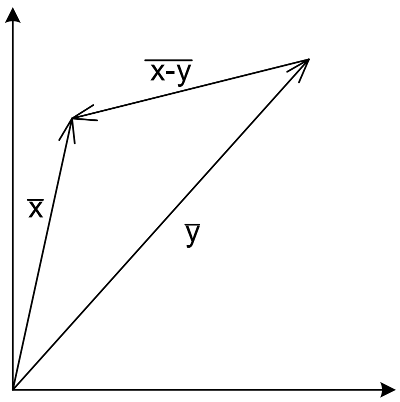


Рисунок 23

Рисунок 24

Легко увидеть, что $|x+y| \le |x| + |y|$.

Рассмотрим теперь разность векторов (см. рисунки 25 и 26).



или

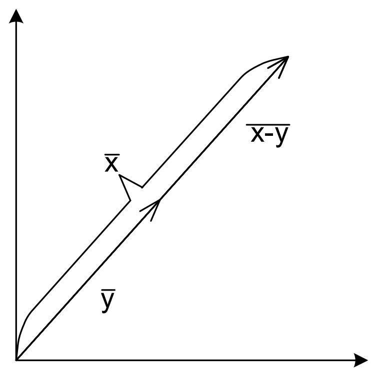


Рисунок 25 Рисунок 26

Видно, что $|x-y| \ge |x| - |y|$.

Доказательство теоремы 3.1.2:

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = a$. Зададим $\varepsilon = 1$ и подберем по нему $n_0 \in \mathbf{N}$ $(n_0 = n_0(1))$ так чтобы выполнялось $|x_n - a| < 1$ при всех $n > n_0$. Но поскольку $|x_n| - |a| \le |x_n - a|$, тогда $|x_n| - |a| < 1$ и $|x_n| < 1 + |a|$ $\forall n > n_0$. Пусть M – наибольшее среди чисел $1+|a|,\ |x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|$. Тогда очевидно, что $M \ge |x_n|$. Теорема доказана.

Теорема 3.1.3. (о стабилизации знака). Если переменная x_n имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ a \ne 0$, то существует такое n_0, что $\forall n > n_0$ $|x_n| > \frac{|a|}{2}$. Более того, при указанных n, если $a > 0$, то $x_n > \frac{a}{2}$, а если $a < 0$, то $x_n < \frac{a}{2}$. То есть, начиная с некоторого номера значения x_n сохраняют знак a.

Доказательство: $x_n \to a$ при $n \to \infty$; Возьмем $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Для этого ε найдется такое n_0, что $\forall n > n_0$ $|a - x_n| < \frac{|a|}{2}$ (на основании определения предела это неравенство также будет верно), но $|a - x_n| \ge |a| - |x_n|$ (неравенство треугольника).

$$\frac{|a|}{2} > |a - x_n| \ge |a| - |x_n| \quad \forall n > n_0;$$

$$|a| - |x_n| < \frac{|a|}{2};$$

$$|a| - \frac{|a|}{2} < |x_n|; \qquad (3.1.1)$$

$$\frac{|a|}{2} < |x_n| \quad \forall n > n_0.$$

Первое утверждение теоремы доказано. Теперь рассмотрим неравенство $\frac{|a|}{2} > |x_n - a|$. Оно эквивалентно следующим двум неравенствам:

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2} \qquad (3.1.2)$$

Тогда, если $a > 0$, то $x_n > a - \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ $\forall n > n_0$, а если $a < 0$, то $x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ $\forall n > n_0$, и этим доказано второе утверждение теоремы.

Теорема 3.1.4. (о переходе к пределу в неравенстве). Если для всех значений двух переменных x_n и y_n выполняется неравенство $x_n \le y_n$ $\forall n \in N$ и существуют $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то $a \le b$.

Доказательство проводится от противного:

Допустим, что $b < a$. Зададим $\varepsilon > 0$, пусть $\varepsilon < \frac{a-b}{2}$, тогда $0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$. Подберем по этому ε числа N_1 и N_2 так, чтобы $\forall n > N_1$, выполнялось неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, и $\forall n > N_2$ выполнялось неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$. Это можно сделать, поскольку $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Сделав это, мы сможем написать:

$$a - \varepsilon < x_n, \forall n > N_1;$$

$$y_n < b + \varepsilon, \ \forall n > N_2.$$

Если $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$, то очевидно, $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$, $\forall n > n_0$. ($b < a$ по предположению).

Мы пришли к противоречию, так как по условию $x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Следствие: Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ принадлежат отрезку $[a, b]$, то ее предел также принадлежит отрезку $[a, b]$.

Теорема 3.1.5. (о двойном неравенстве или промежуточной последовательности). Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ стремятся к одному и тому же пределу a, и для всех значений трех последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ выполняются неравенства $x_n \le y_n \le z_n$ $\forall n \in$ **N**, то последовательность $\{z_n\}$ так же стремится к пределу a (см. рисунок 27).

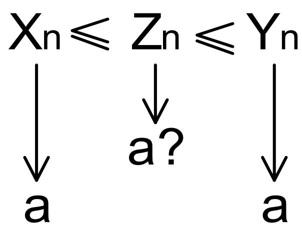


Рисунок 27

Доказательство:

Задав любое $\varepsilon > 0$, можно найти по нему такие N_1 и N_2, что $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \forall n > N_1$, $-\varepsilon < y_n - a < \varepsilon \quad \forall n > N_2$, так как $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Возьмем неравенства $a - \varepsilon < x_n \quad \forall n > N_1$ и $y_n < a + \varepsilon \quad \forall n > N_2$. Пусть $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$, тогда для всех $n > n_0$ выполняются оба неравенства. Поэтому $a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon$. Отсюда $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \quad \forall n > n_0$, то есть $|z_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \quad |z_n - a| < \varepsilon$, то есть $a = \lim\limits_{n\to\infty}\{z_n\}$.

В условиях этой теоремы оказывается, что значения последовательности $\{z_n\}$ постоянно «зажаты» между значениями последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, которые, стремясь к одному пределу, «увлекают» к этому пределу последовательность $\{z_n\}$. Поэтому доказанная теорема носит шуточное название «теоремы о двух милиционерах» или «теоремы о сэндвиче».

Теорема 3.1.6 (о пределе модуля). Если $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\{|x_n|\} = |a|$.

Доказательство:

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a$, $\forall \varepsilon > 0$ можно подобрать такое N, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Но $|x_n - a| > |x_n| - |a|$ по равенству треугольника, которое можно записать и в таком варианте: $|x_n - a| \ge \big||x_n| - |a|\big|$. Значит, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in R : \forall n > N \ \ \big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon$, что и означает $\lim\limits_{n\to\infty}\{|x_n|\} = |a|$.

Теорема доказана.

3.2 Практическое занятие № 3. Предел числовой последовательности

Упражнение 3.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

1) $a_n = \dfrac{3 \cdot n - 2}{n}$, $a = 3$.

а) Выберем произвольное $\varepsilon > 0$.

б) Выясним, для каких членов последовательности выполняется неравенство

$$\left|\frac{3\cdot n-2}{n}-3\right|<\varepsilon.$$

$$\left|\frac{3\cdot n-2}{n}-3\right|=\left|\frac{3\cdot n-2-3\cdot n}{n}\right|=\left|\frac{-2}{n}\right|=\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

Значит, неравенство выполняется для всякого $\varepsilon>0$, если $n>n_0=\frac{2}{\varepsilon}$.

в) $n_0=\max\left\{3;\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$.

г) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0=\max\left\{3;\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right\}:\forall n\in\mathbf{N}\wedge n>n_0\quad \left|\frac{3\cdot n-2}{n}-3\right|<\varepsilon\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot n-2}{n}=3$.

2) $a_n=4-\frac{1}{3^n},\ \ a=4$.

а) Выберем произвольное $\varepsilon>0$.

б) Выясним, для каких членов последовательности выполняется неравенство

$$\left|4-\frac{1}{3^n}-4\right|<\varepsilon.$$

$$\left|4-\frac{1}{3^n}-4\right|=\left|-\frac{1}{3^n}\right|=\frac{1}{3^n}<\varepsilon.$$

Значит, неравенство выполняется для всякого $\varepsilon>0$, если $n>n_0=\log_3\frac{1}{\varepsilon}$.

в) $n_0=\max\left\{4;\left[\log_3\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$.

г) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0=\max\left\{4;\left[\log_3\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}:\forall n\in\mathbf{N}\wedge n>n_0\quad \left|4-\frac{1}{3^n}-4\right|<\varepsilon\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{1}{3^n}\right)=4$.

3) $a_n=\frac{n-1}{n^2+2},\ \ a=0$.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим модуль разности

$$\left|\frac{n-1}{n^2+2}-0\right|=\left|\frac{n-1}{n^2+2}\right|=\frac{n-1}{n^2+2}.$$

В соответствии с определением предела последовательности мы должны указать номер n_0 такой, что $\forall n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{n-1}{n^2+2} < \varepsilon$. Для отыскания номера n_0 решим последнее неравенство относительно n. Получим

$$n - 1 < \varepsilon \cdot (n^2 + 2)$$

$$\varepsilon \cdot n^2 - n + (2 \cdot \varepsilon + 1) > 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot \varepsilon \cdot (2 \cdot \varepsilon + 1) = 1 - 8 \cdot \varepsilon^2 - 4 \cdot \varepsilon$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8 \cdot \varepsilon^2 - 4 \cdot \varepsilon}}{2 \cdot \varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1 + \sqrt{1 - 8 \cdot \varepsilon^2 - 4 \cdot \varepsilon}}{2 \cdot \varepsilon}.$$

(Мы взяли n_1, т. к. число n_0 должно быть положительным.)

Из последнего неравенства следует, что в качестве n_0 можно взять целую часть числа $\frac{1 + \sqrt{1 - 8 \cdot \varepsilon^2 - 4 \cdot \varepsilon}}{2 \cdot \varepsilon}$; $n_0 = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 8 \cdot \varepsilon^2 - 4 \cdot \varepsilon}}{2 \cdot \varepsilon} \right]$.

В самом деле, если $n > n_0$, то справедливо неравенство $n > \frac{1 + \sqrt{1 - 8 \cdot \varepsilon^2 - 4 \cdot \varepsilon}}{2 \cdot \varepsilon}$, а значит, $\forall n > n_0$ выполняется и неравенство $\frac{n-1}{n^2+2} < \varepsilon$.

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ мы указали такой номер $n_0 = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 8 \cdot \varepsilon^2 - 4 \cdot \varepsilon}}{2 \cdot \varepsilon} \right]$, что $\forall n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{n-1}{n^2+2} < \varepsilon$.

Тем самым доказано, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-1}{n^2+2} = 0$.

Ответ: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-1}{n^2+2} = 0$.

Упражнение 3.2. С помощью определения предела последовательности показать, что число b не является пределом последовательности $\{b_n\}$ $\left(b \neq \lim\limits_{n \to \infty} b_n \right)$ и пояснить это геометрически.

По определению предела последовательности $b = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0 : |b_n - b| < \varepsilon$. Пользуясь правилом построения отрицаний, получаем: $b \neq \lim\limits_{n \to \infty} b_n$, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall n_0 \ \exists n > n_0 : |b_n - b| \geq \varepsilon$.

Более подробно это можно записать так:

$b \neq \lim\limits_{n \to \infty} b_n$, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что

для $n_0 = 1 \ \exists n_1 > 1 : \left| b_{n_1} - b \right| \geq \varepsilon$,

для $n_0 = 2 \ \exists n_2 > 2 : \left| b_{n_2} - b \right| \geq \varepsilon$,

…

для $n_0 = 100$ $\exists n_{100} > 100 : \left| b_{n_{100}} - b \right| \geq \varepsilon$,

…

Таким образом, $b \neq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, если $\exists \varepsilon > 0$ и последовательность номеров $\{n_{n_0}\}$ $(n_0 = 1,2,3,...)$ таких, что $n_{n_0} > n_0$ и $\left| b_{n_{n_0}} - b \right| \geq \varepsilon$.

Геометрическая интерпретация этого определения: $b \neq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, если существует некоторая ε - окрестность точки b, вне которой находится бесконечно много членов последовательности.

Упражнение 3.3. Доказать, что последовательность $x_n = n$ является расходящейся.

Допустим противное: предположим, что последовательность $x_n = n$ сходится и ее предел равен числу a, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$. Пусть натуральное число N превосходит a: $N > a$. При любом $n > N$ имеем $|x_n - a| = |n - a| = n - a > n - N \geq 1$, что противоречит определению предела, т.к. при всех ε, в том числе при $\varepsilon > 1$ должно выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Упражнение 3.4. Найти предел последовательности с общим членом $a_n = \dfrac{5n^2 + 3n + 2}{2n^2 - n + 1}$.

В этой задаче требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2 + 3n + 2}{2n^2 - n + 1}$. Преобразуем выражение $\dfrac{5n^2 + 3n + 2}{2n^2 - n + 1}$, поделив почленно числитель и знаменатель на n^2. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 3n + 2}{2n^2 - n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2 + 3n + 2}{2n^2 - n + 1} = \dfrac{5}{2}$.

В данном упражнении мы воспользовались тем, что пределы последовательностей $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ равны нулю (см. 3.3)

Упражнение 3.5. Найти предел последовательности с общим членом $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$.

В этой задаче требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$. Очевидно, что $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot(n+1)-n!}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot(n+1-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

1) $a_n=1-\frac{1}{2^n}$, $a=1$;

2) $a_n=\frac{(-1)^n}{5^n}$, $a=5$;

3) $a_n=\frac{3n-2}{2n}$, $a=\frac{3}{2}$.

2. Доказать, что последовательность $x_n=n^2$ является расходящейся.

3. Найти пределы последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^3+15n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

4 Лекция №4. Предел последовательности (продолжение)

4.1 Теоремы об арифметических свойствах предела последовательности

Пусть x_n и y_n обозначают переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда по определению сумма $(x_n + y_n)$, разность $(x_n - y_n)$, произведение $(x_n \cdot y_n)$ и частное $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ есть переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1,2,...$

Если $x_n = c$ для $n = 1,2,...$, то в этом случае пишут $\{c \pm y_n\}$, $\{c \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{c}{y_n}\right\}$ вместо $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

Теорема 4.1.1. Если существуют конечные пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то существуют также пределы их суммы, разности, произведения и частного (при $y_n \neq 0$), и при этом справедливы равенства:

$$\lim\{x_n \pm y_n\} = \lim\{x_n\} \pm \lim\{y_n\}, \tag{4.1.1}$$

$$\lim\{x_n \cdot y_n\} = \lim\{x_n\} \cdot \lim\{y_n\}, \tag{4.1.2}$$

$$\lim\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \frac{\lim\{x_n\}}{\lim\{y_n\}}, \text{ если } \lim\{y_n\} \neq 0. \tag{4.1.3}$$

Доказательство:

Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем n_0 так, чтобы выполнялись неравенства $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > n_0$. Тогда $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, и равенство (4.1.1) доказано.

Чтобы доказать равенство (4.1.2), заметим, что

$$\begin{aligned} &|x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n + a \cdot y_n - a \cdot y_n - a \cdot b| \leq |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n| + \\ &+ |a \cdot y_n - a \cdot b| < |y_n| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b|. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Так как y_n имеет предел, последовательность $\{y_n\}$ ограничена (по теореме 3.1.2), то есть существует положительное число M такое, что

$$|y_n| \leq M (n = 1,2,...). \tag{4.1.5}$$

Пусть

$$a < M. \tag{4.1.6}$$

Подберем число n_0 так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M},\ |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}\ \ \forall n > n_0. \qquad (4.1.7)$$

Тогда $|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot M} + M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot M} = \varepsilon$

Этим доказано равенство (4.1.2).

Докажем равенство (4.1.3). Пусть теперь к условию, что $x_n \to a$ и $y_n \to a$ добавляется условие, что $b \neq 0$. Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n \cdot b - y_n \cdot b - a \cdot b + a \cdot b}{y_n \cdot b}\right| =$$

$$= \frac{|(x_n - a) \cdot b + (b - y_n) \cdot a|}{|y_n| \cdot |b|} \le \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n| \cdot |a|}{|y_n| \cdot |b|} \qquad (4.1.8)$$

Теперь используем теорему о стабилизации знака из предыдущего параграфа, в силу которой

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}\ \ \forall n > N_1. \qquad (4.1.9)$$

Для достаточно большого N_1 зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N_2 и N_3 такие, чтобы выполнялись неравенства

$$|x_n - a| < \frac{|b| \cdot \varepsilon}{4}\ \ \forall n > N_2, \qquad (4.1.10)$$

$$|a| \cdot |y_n - a| < \frac{b^2 \cdot \varepsilon}{4}\ \ \forall n > N_3. \qquad (4.1.11)$$

Тогда, положив $n_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, в силу (4.1.8)-(4.1.11) получим $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right| < \dfrac{\varepsilon \cdot |b|}{4} \cdot \dfrac{2}{|b|} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ (\forall n > n_0)$, что доказывает равенство (4.1.3).

Заметим, что пределы переменных, стоящие в левых частях равенств (4.1.1)-(4.1.3), могут существовать без того, чтобы существовали отдельно пределы (x_n) и (y_n). Например, если $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{y_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$, то $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ не имеют пределов, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty}(\{x_n + y_n\}) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\{x_n \cdot y_n\}) = -1$.

4.2 Бесконечно малая и бесконечно большая последовательности

Последовательность $\{\alpha_n\}$, имеющая предел, равный нулю, называется бесконечно малой последовательностью.

Таким образом, из определения предела следует, что величина $\{\alpha_n\}$ есть бесконечно малая, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |\alpha_n| < \varepsilon\ \forall n > N$.

Теорема 4.2.1. Для того, чтобы переменная x_n имела предел, равный а, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $x_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая. (Докажите ее самостоятельно.)

Последовательность $\{b_n\}$ называется бесконечно большой, если

$$\forall M > 0\ \exists N : |b_n| > M\ \forall n > N \qquad (4.2.1)$$

При этом пишут: $\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = \infty$ или $b_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ и говорят, что $\{b_n\}$ стремится к бесконечности.

Если бесконечно большая величина b_n, начиная с некоторого n_0, принимает только положительные или только отрицательные значения, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \text{ или } b_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty \qquad (4.2.2)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \text{ или } b_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty \qquad (4.2.3)$$

Пример переменной $\{(-1)^n \cdot n\}$ показывает, что может иметь место соотношение (4.2.1), в то время как не имеет места ни (4.2.2), ни (4.2.3).

Отметим следующие очевидные свойства:

1) если переменная x_n ограничена, а y_n - бесконечная большая, то $\dfrac{x_n}{y_n} \to 0$;

2) если абсолютная величина x_n ограничена снизу положительным числом, а y_n - не равная нулю бесконечно малая, то $\dfrac{x_n}{y_n} \to \infty$.

Докажем только второе свойство. Дано, что для некоторого числа $a > 0$ имеет место неравенство $|x_n| > a, n = 1,2,...$, и для всякого $\varepsilon > 0$ существует N:

$$|y_n| < \varepsilon,\ \ y_n \neq 0\ \ (\forall n > N). \qquad (4.2.4)$$

Тогда $\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right| > \dfrac{a}{\varepsilon} = M(n > N)$.

Зададим произвольное $M > 0$ и подберем по нему ε так, чтобы $M = \dfrac{a}{\varepsilon}$, а по ε подберем такое N, чтобы имело место свойство (4.2.4). Тогда $\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right| > M(n > N)$, что и требовалось доказать.

Из этих двух утверждений следует: $\lim\limits_{y_n\to\infty}(\dfrac{c}{y_n}) = 0$, $\lim\limits_{y_n\to 0}(\dfrac{c}{y_n}) = \infty$ ($c = \text{Const}, c \neq 0$).

Замечания:

1) если последовательность $\{x_n\}$ неограничена, то она не обязательно бесконечно большая. Например: $\{n^{(-1)^n}\} = \{1, 2, \dfrac{1}{3}, 4,...\}$ не ограничена, но в ней имеются сколь угодно малые члены со сколь угодно большим нечетным номером.

Любая не равная нулю постоянная не является бесконечно малой. Из всех постоянных величин бесконечно малой является только одна – равная нулю.

Теорема 4.2.2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

Запишем формулировку теоремы в символах. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=0$ и $\exists M : |y_n| \le M \ \forall n \in \mathbf{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n \cdot y_n\}=0$.

Доказательство:

Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем по нему N так, чтобы выполнялось неравенство $|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} \ \forall n > N$. Тогда $|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n \cdot y_n| =$

$= |x_n| \cdot |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \ \forall n > N$, что и доказывает теорему.

4.3 Монотонная последовательность

Определения монотонных последовательностей уже вводились в §3. Введем их еще раз в более подробном варианте.

Определение 4.3.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если $\forall n \in \mathbf{N} \ \ x_n < x_{n+1}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей, если $\forall n \in \mathbf{N}$ $x_n > x_{n+1}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется невозрастающей, если $\forall n \in \mathbf{N}$ $x_n \ge x_{n+1}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей, если $\forall n \in \mathbf{N}$ $x_n \le x_{n+1}$.

Все эти последовательности называются монотонными, а две первые – строго монотонными.

Теорема 4.3.1. Если последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху числом M, то существует действительное число a, не превышающее M, к которому эта последовательность стремится как к своему пределу: $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a \le M$. Для невозрастающей и ограниченной снизу числом M последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ существует действительное число a, такое, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a \ge M$.

Доказательство этой теоремы требует привлечения лемм, связанных со свойствами действительных чисел. Не будем приводить этого доказательства здесь, отсылая читателя к учебнику «Дифференциальное и интегральное исчисление» Я. С. Бугрова и С. М. Никольского.

4.4 Практическое занятие № 4. Арифметические свойства пределов последовательностей. Монотонные последовательности. Вычисление пределов

Упражнение 4.1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, а последовательность $\{z_n\}$ расходится. Доказать, что последовательность $\{z_n \cdot y_n\}$ расходится.

Доказательство:

Обозначим $x_n = z_n \cdot y_n$. Докажем расходимость последовательности $\{x_n\}$ методом от противного. Предположим, что $\{x_n\}$ сходится. Так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, по теореме 4.1.1 последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = z_n$ определена, начиная с некоторого номера, и сходится. Но это противоречит условию. Следовательно, $\{x_n\}$ расходится.

Упражнение 4.2. Какие из следующих последовательностей монотонные, а какие строго монотонные:

1) $x_n = 2 \cdot n + 1;$

2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n};$

3) $x_n = \frac{1}{n^2};$

4) $x_n = \left[\sqrt{n}\right]$ (целая часть $\sqrt{n}$);

5) -1, -1, -2, -2, -3, -3, …?

1) Данная последовательность строго возрастает, т.к. $x_{n+1} = 2 \cdot (n+1) + 1 =$
$= 2 \cdot n + 3 > 2 \cdot n + 1 = x_n$ для $\forall n \in \mathbf{N}.$

2) Последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}, ...\right\}$ не является ни монотонной, ни строго монотонной, т.к., например $x_1 < x_2$, но $x_2 > x_3$.

3) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\} = \left\{1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9}, ...\right\}$ - убывающая последовательность, т.к. $x_n = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} = x_{n+1}$, n = 1, 2, 3,… .

4) Последовательность $\left\{\left[\sqrt{n}\right]\right\} = \{1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2, ...\}$ - неубывающая, т.к. $x_{n+1} = \left[\sqrt{n+1}\right] \geq \left[\sqrt{n}\right] = x_n$, n = 1, 2, 3,… и к тому же, например, $x_1 = x_2$.

5) Данная последовательность невозрастающая, т.к. $x_n \leq x_{n+1}$, n = 1, 2, 3,… и некоторые (например, x_1 и x_2) числа этой последовательности равны между собой.

Упражнение 4.3. Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n}-$ -

$-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=1-1=0.$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n-1}\right)=0.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{4n+1}\cdot\frac{n^2-3n+1}{5n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n-1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+1}\times$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+1}{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(4+\frac{1}{n}\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\infty=\infty.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{4n+1}\cdot\frac{n^2-3n+1}{5n+1}\right)=\infty.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n+3)\cdot(n+5)}{1-3n^2+4n^4}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)\cdot}{n^4\cdot\left(\frac{1}{n^4}-\frac{3}{n^2}+4\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)\cdot}{\left(\frac{1}{n^4}-\frac{3}{n^2}+4\right)}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n+3)\cdot(n+5)}{1-3n^2+4n^4}=\frac{1}{4}.$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+3+...+n}.$

Сумма арифметической прогрессии: $S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+3+...+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n}{\frac{1+n}{2}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1+\frac{1}{n}}=2.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+3+...+n}=2$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$.

Сумма геометрической прогрессии: $S=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1\cdot\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}}=\frac{4}{3}$$ (т.к. $\frac{1}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$ и $\frac{1}{3^n}\to 0$ при $n\to\infty$).

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}=\dfrac{4}{3}$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!\left((n+3)(n+4)-1\right)}{(n+2)!(n+3)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7n+11}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{7}{n}+\frac{11}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{7}{n}+\frac{11}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}=\infty.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}=\infty$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^n-2}=5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3^n}}=5$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=5$.

Упражнение 4.4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+3^4+...+n^4}{n^5}$.

Обозначим $S=1^4+2^4+3^4+...+n^4$. Будем искать S_n в виде $S_n=A\cdot n^5+B\cdot n^4+C\cdot n^3+D\cdot n^2+E\cdot n+F$. Тогда $S_{n+1}-S_n=A\cdot\left[(n+1)^5-n^5\right]+$ $+B\cdot\left[(n+1)^4-n^4\right]+C\cdot\left[(n+1)^3-n^3\right]+D\cdot\left[(n+1)^2-n^2\right]+E\cdot[(n+1)-n]$. Отсюда для всякого $n\in\mathbf{N}$ имеем $(n+1)^4=5An^4+(10A+4B)n^3+(10A+6B+3c)n^2+$ $(5A+4B+3C+2D)n+A+B+C+D+E$.

Приравнивая коэффициенты при равных степенях n в левой и правой частях равенства, получим:

$5\cdot A=1$

$10\cdot A+4\cdot B=4$

$10\cdot A+6\cdot B+3\cdot C=6$

$10\cdot A+6\cdot B+3\cdot C+2\cdot D=4$

$A+B+C+D+E=1$

Отсюда $A=\dfrac{1}{5}$, $B=\dfrac{1}{2}$, $C=\dfrac{1}{3}$, $D=0$, $E=-\dfrac{1}{30}$. Таким образом, для $\forall\ n\in\mathbf{N}$ имеем $S_n=\dfrac{1}{5}\cdot n^5+\dfrac{1}{2}\cdot n^4+\dfrac{1}{3}\cdot n^3-\dfrac{1}{30}\cdot n+F$. Полагая $n=1$, получим $1=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{30}+F$. Отсюда $F=0$. Следовательно,

$S_n=1^4+2^4+3^4+...+n^4=\dfrac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+3^4+...+n^4}{n^5}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n^2}-\dfrac{1}{30n^4}\right)=\dfrac{1}{5}$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+3^4+...+n^4}{n^5}=\dfrac{1}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какие из следующих последовательностей монотонные? Строго монотонные? Ограниченные?

1) $x_n = n - \frac{1}{n}$;

2) $x_n = \cos\frac{\pi n}{2}$;

3) $x_n = -\frac{n^2+1}{n^2}$;

4) $x_n = -\sqrt{n}$;

5) $x_n = \left(-\sqrt{3}\right)^{2n}$.

2. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2-n}{n+1} - \frac{n\cdot 2^{-n}}{n+2}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-3)\cdot(n+5)}{2n^2+3n-5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+4}{2n^2-1} - \frac{n-3}{3n+5}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n} - n\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+n}\right)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n+1)!+(n+2)!}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

3. Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

5 Лекция №5. Предел последовательности (окончание)

5.1 Принцип вложенных отрезков

Теорема 5.1.1. Пусть задана последовательность отрезков $\sigma_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1,2,...)$, вложенных друг в друга, то есть таких, что $\sigma_{n+1} \in \sigma_n$ $(n = 1,2,...)$, с длинами, стремящимися к нулю, то есть $d_n = (b_n - a_n) \to 0$ при $n \to \infty$ (см. рисунок 28).

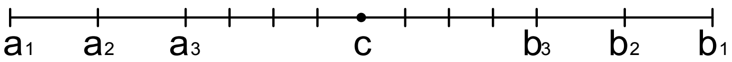


Рисунок 28

Тогда существует, и притом единственная, точка с, одновременно принадлежащая всем отрезкам σ_n, то есть $c \in \sigma_n$, $(n = 1,2,...)$.

Доказательство:

Очевидно, что $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le b_m$ при любом заданном натуральном m. Это показывает, что последовательность чисел $\{a_n\}$ не убывает и ограничена сверху числом b_m $\forall m \in \mathbf{N}$. По теореме предыдущего параграфа, существует такое число с, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = c$, причем $a_n \le c \le b_m$. Так как в этих неравенствах натуральные n и m произвольные, значит, в частности, $a_n \le c \le b_n$ $(n = 1,2,...)$. Следовательно, $c \in \sigma_n$, каково бы ни было $n \in \mathbf{N}$.

Теперь докажем, что найденная точка с – единственная. Допустим, что существует другая точка $c_1 \in \sigma_n$ $\forall n$. Тогда $a_n \le c$, $c_1 \le b_n$, откуда $b_n - a_n \ge |c_1 - c| > 0$ $\forall n$, но это противоречит тому, что $(b_n - a_n) \to 0$. Отметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n + a_n - a_n) = \lim[(\underset{\downarrow 0}{b_n - a_n}) + \underset{\downarrow c}{a_n}] = c$.

Замечание: В теореме существенно, что рассматриваются отрезки $[a_n, b_n]$, а не интервалы.

Рассмотрим интервалы $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2,...)$. Они будут вложены друг в друга, их длины $d_n = \dfrac{1}{n} - 0 = \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, но нет ни одной точки, принадлежащей всем этим интервалам.

В самом деле, любая точка $c \le 0$ не принадлежит ни одному интервалу из $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2,...)$. Если же $c > 0$, то $\exists n : \dfrac{1}{n} < c,\ c \notin \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

5.2 Теорема Больцано-Вейерштрасса*

Пусть дана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\}$. Выберем из нее бесконечное множество элементов с номерами $n_1 < n_2 < \ldots$. Тогда получим новую последовательность $\{x_{n_k}\}$, которая называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Таких подпоследовательностей можно выделить из последовательности бесконечно много.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$, то и любая ее подпоследовательность также имеет предел, причем тот же, что и исходная последовательность. Последовательность $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$ – это пример не сходящейся последовательности чисел. Но эта последовательность содержит в себе сходящуюся подпоследовательность: $\{1, 1, 1, \ldots\}$. Она сходится к единице. Всякая ли последовательность действительных чисел содержит в себе подпоследовательность, имеющую предел? Ответ на этот вопрос дают следующие теоремы.

Теорема 5.1.1. Из всякой последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, имеющую предел. Этим пределом может быть либо конечное число, либо $+\infty$, либо $-\infty$.

Доказательство:

В случае, когда последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху (снизу), она, очевидно, содержит в себе подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$, или соответственно, к $-\infty$, что доказывает теорему. Если же последовательность ограничена, то теорема 5.1.1 сводится к теореме 5.1.2.

Теорема 5.1.2 (Больцано-Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу.

Доказательство:

Так как последовательность точек $\{x_n\}$ ограничена, то все они принадлежат некоторому отрезку $[a, b]$, который обозначим через σ_0. Разделим σ_0 на два равных отрезка и обозначим через σ_1 – самый правый из них, содержащий в себе бесконечное число элементов x_n. Выберем из них элемент $x_{n_1} \in \sigma_1$. Если правее σ_1 есть точки x_n, то их конечное число.

---

* Бернард Больцано (1781-1848) – чешский математик, философ, богослов, профессор истории религии Пражского университета. Занимался теорией множеств, математическим анализом, механикой, физикой, математической логикой.

Карл Вейерштрасс (1815-1897) – немецкий математик, профессор Берлинского университета. Внес большой вклад в развитие математического анализа, теории функций, линейной алгебры, дифференциальных уравнений.

Разделим σ_1 на два равных отрезка и обозначим через σ_2 самый правый из них, содержащий в себе бесконечное число элементов x_n. Выберем из них элемент $x_{n_2} \in \sigma_2$ с номером $n_2 > n_1$. Если правее σ_2 есть точки x_n, то их конечное число.

Продолжим этот процесс по индукции. В результате получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $\sigma_k = [a_k, b_k]$, длины которых $(b_k - a_k) \to 0$, и подпоследовательность точек нашей последовательности, таких, что $x_{n_k} \in \sigma_k$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$. При этом правее каждого из отрезков имеется не более, чем конечное число элементов x_n.

На основании принципа вложенных отрезков существует, и притом единственная, точка с, принадлежащая любому из отрезков σ_k. Очевидно, что последовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет своим пределом с, то есть $(x_{n_k} \to c)$.

Теорема доказана.

5.3 Условие Коши* сходимости последовательности

Пусть задана последовательность действительных чисел $\{x_n\}$, сходящаяся к конечному пределу a: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Это значит, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$, такое, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > N$. В это неравенство можно было подставить вместо n натуральное число m: $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall m > N$. Тогда $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall n, m > N$.

Мы получили следующее утверждение: если переменная $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то для нее выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) : |x_m - x_n| < \varepsilon\ \ \forall n, m > N. \tag{5.3.1}$$

Последовательность чисел, удовлетворяющая условию Коши, называется фундаментальной.

Справедливо и обратное утверждение: если последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ фундаментальная, то есть удовлетворяет условию Коши, то она имеет предел, то есть существует конечное число a, такое, что $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Поэтому условие Коши называют критерием сходимости последовательности.

Доказательство:

---

* Огюстен Луи Коши (1789-1857) – французский математик, механик, инженер, профессор Парижской Политехнической школы, один из основателей современного математического анализа.

Докажем, что фундаментальная последовательность ограничена. В самом деле, положим $\varepsilon = 1$ и подберем по нему, согласно условию Коши, число n_0 так, что $|x_n - x_m| < 1 \; \forall n, m > n_0$, откуда $1 > |x_n - x_m| \ge |x_n| - |x_m|$ или $1 + |x_m| \ge |x_n| \; \forall n, m > n_0$ (10.1).

Зафиксируем $m > n_0$ и обозначим $M = \max\{1 + |x_m|, |x_n|\}, \; n \le n_0$, то есть наибольшее из всех чисел $|x_n|$, где $n \le n_0$, и числа $(1 + |x_m|)$. Тогда, в силу (10.1) $M \ge |x_n|, \forall n \in \mathbf{N}$. Ограниченность последовательности $\{x_n\}$ доказана.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому конечному числу a, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$. Покажем, что не только эта подпоследовательность, но и вся последовательность имеет предел, равный a:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. В самом деле, согласно условию Коши (5.3.1), которому удовлетворяет наша последовательность:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n, m > n_0 \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.3.2}$$

С другой стороны, в силу того, что $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$, можно указать такое k_0, что $\left|x_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall k > k_0$.

Учитывая, что $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, можно найти такое $k_1 > k_0$, что $n_{k_1} > n_0$. Поэтому

$$\left|x_{n_{k_1}} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.3.3}$$

В силу (5.3.2), где надо положить $m = n_{k_1}$, и (5.3.3) имеем:

$$|x_n - a| = \left|x_n - x_{n_{k_1}} + x_{n_{k_1}} - a\right| \le \left|x_n - x_{n_{k_1}}\right| + \left|x_{n_{k_1}} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \; \forall n > n_0.$$

Мы доказали, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a.

Таким образом, доказана теорема, которую мы назовем критерием Коши существования предела.

Сформулируем еще раз теорему Коши. Для того, чтобы последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, то есть чтобы для нее выполнялось условие Коши (5.3.1).

5.4 Практическое занятие №5. Бесконечно малая и бесконечно большая последовательности. Условие Коши сходимости последовательности

Упражнение 5.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < a < 1, \\ +\infty, & \text{если } a > 1. \end{cases}$

Доказательство:

1) Пусть постоянная a есть правильная положительная дробь $0 < a < 1$. Тогда с увеличением n переменная $f(n) = a^n$ будет монотонно убывать, т.е. каждое следующее ее значение будет меньше предыдущего. Докажем, что, начиная с определенного значения $n = n_0$ и для всех следующих значений $n > n_0$, значение функции a^n будет меньше любого заданного положительного числа ε.

Полагая $a^{n_0} < \varepsilon$, найдем исходное значение n_0. Логарифмируя обе части неравенства, получим $n_0 \lg a < \lg \varepsilon$, откуда найдем $n_0 > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg a}$. (Знак неравенства изменился, так как при $0 < a < 1$ $\lg a < 0$.)

Следовательно, значение функции a^n при $n = n_0$ и все последующие ее значения при $n > n_0$ будут меньше ε, как бы мало оно ни было, т.е. доказано, что при $0 < a < 1$ и при $n \to \infty$ функция a^n является бесконечно малой величиной, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

2) Пусть $a > 1$. Тогда с увеличением n переменная a^n будет монотонно возрастать. Докажем, что начиная с определенного значения $n = n_0$ и для всех последующих значений $n > n_0$ значения функции a^n будут больше любого заданного положительного числа N.

Полагая $a^{n_0} > N$, найдем $n_0 > \dfrac{\lg N}{\lg a}$. Следовательно, для всех значений $n \ge n_0$ значения функции a^n будут больше N, как бы велико оно ни было, т.е. доказано, что при $a > 1$ и при $n \to +\infty$ функция a^n является положительной бесконечно большой величиной, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

Упражнение 5.2. Сформулировать на языке «$\varepsilon - n_0$» отрицание того, что последовательность является бесконечно большой. Дать геометрическую интерпретацию этого отрицания.

Согласно определению бесконечно большой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если $\forall M > 0\ \exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ $|x_n| > M$. Пользуясь правилом построения отрицаний, получаем, что последовательность $\{x_n\}$ не является бесконечно большой, если $\exists M>0$ такое, что $\forall n_0 \ \exists n>n_0: |x_n| \le M$. С геометрической точки зрения это означает, что найдется некоторая окрестность нуля, в которой находится бесконечно много членов последовательности.

Упражнение 5.3. Пусть $x_n = n^{(-1)^n}$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$: а) неограниченная; б) не является бесконечно большой.

Доказательство:

а) Докажем, что $\{x_n\}$ удовлетворяет определению неограниченной последовательности. В самом деле, $\forall M>0$ член последовательности с номером $n = 2([M]+1)$ больше M. Это и означает по определению, что $\{x_n\}$ - неограниченная последовательность.

б) Докажем, что последовательность $\{x_n\}$не является бесконечно большой. Действительно, в интервале $(-2;2)$ находятся, очевидно, все члены последовательности с нечетными номерами, а значит, в этом интервале находится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Отсюда следует, что $\{x_n\}$ не является бесконечно большой.

Упражнение 5.4. Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся, а $\{y_n\}$ - бесконечно большая последовательность. Доказать, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ удовлетворяет определению бесконечно большой, т.е. $\forall M>0 \ \exists N$ такое, что $\forall n>N$ выполняется $|y_n| > M + A$. Из того, что $|x_n| < A$ и $|y_n| > M + A$ получаем, что $\forall n>N$ выполняется неравенство $|x_n + y_n| \ge |y_n| - |x_n| > M + A - A = M$, что и требовалось доказать.

Упражнение 5.5. Найдите предел а последовательности $\{x_n\}$, которая определяется рекуррентным соотношением $x_{n+1} = x_n(2 - x_n) \quad \forall n \ge 1$, где x_1 - произвольное число, удовлетворяющее неравенству

$$0 < x_n < 1 \qquad (*).$$

Доказательство:

Для x_1 неравенства (*) выполняются по условию. Допустим, что неравенства (*) имеют место для номера n, и докажем, что тогда они будут справедливы для номера $n+1$. Запишем рекуррентное соотношение в виде $x_{n+1} = 1 - (1 - x_n)^2$. Из неравенства (*) следует, что $0 < (1 - x_n)^2 < 1$, поэтому $0 < x_{n+1} < 1$. Тем самым неравенства (*) доказаны для $\forall n$.

Докажем теперь, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. Так как $x_n < 1$, то $2 - x_n > 1$. Разделив рекуррентное соотношение на x_n, получим $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - x_n > 1$. Отсюда следует, что $x_{n+1} > x_n \quad \forall n$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, который обозначим a. Для отыскания a перейдем к пределу в рекуррентной формуле. Получим $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(2 - x_n)$, или $a = a\cdot(2-a)$. Отсюда $a = 0$ или $a = 1$; так как $x_1 > 0$ и последовательность $\{x_n\}$ возрастающая, $a = 1$.

Упражнение 5.6. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^2} = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2}$*.

Доказательство:

В силу критерия Коши достаточно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Для этого оценим $\left|x_n - x_{n+p}\right|$. Имеем $\left|x_n - x_{n+p}\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{k^2}\right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}$. Так как $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, то

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Поэтому для $\forall n$, $p \in \mathbf{N}$ имеем $\left|x_n - x_{n+p}\right| < \frac{1}{n}$. Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тогда $\forall n > N$ выполняется неравенство $n \ge \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Следовательно, $\forall n > N$ и любого натурального p, используя неравенство $\left|x_n - x_{n+p}\right| < \frac{1}{n}$, получаем $\left|x_n - x_{n+p}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Это доказывает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что заданные последовательности бесконечно малые:

1) $x_n = n^k (k > 0)$;

2) $x_n = \frac{n}{2n^3 + 1}$.

2. Докажите, что заданные последовательности бесконечно большие:

---

* Знак $\sum\limits_{k=1}^{n}$ означает здесь сумму n первых членов последовательности.

1) $x_n = n^k (k > 0)$;

2) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$.

3. Докажите, что последовательность $\{(1+(-1)^n)\cdot n\}$ неограниченная, однако не является бесконечно большой.

4. Докажите сходимость и вычислите предел последовательности $\{x_n\}$, если она определяется рекуррентным соотношением: x_1 - произвольное отрицательное число, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \forall n \geq 1, \ a > 0.$

5. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$;

2) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$.

6 Лекция №6. Понятие о функции

6.1 Функции одного аргумента и ее основные характеристики

Функция в математике – это способ выражения зависимости одних переменных величин от других. Существуют различные математические определения функции. Остановимся на следующем:

Функция одной переменной задана, если каждому элементу множества А по некоторому правилу ставится в соответствие элемент другого множества В.

При задании функции одной переменной всегда следует указывать:

1) множество А значений, которые может принимать независимая переменная, т. е. область определения функции;

Область определения функции f(x) обычно обозначается $A = Df(x)$.

2) правило, по которому каждому значению независимой переменной из множества А сопоставляется значение функции. Множество В всех таких значений называется областью значений функции (см. рисунок 29).

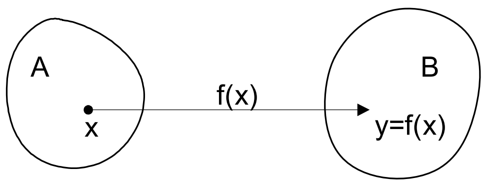


Рисунок 29

Переменную, принимающую значения членов последовательности, можно рассматривать как функцию натурального аргумента, т.е. функцию, для которой $A = \mathbf{N}$.

Когда правило, по которому каждому элементу $x \in A$ ставится в соответствие определенный элемент $y \in B$ известно, функция задана явно и обозначается так: $y=f(x)$. Иногда такое правило в явном виде не сформулировано. Известно, что переменная y является функцией аргумента x, а также задано соотношение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – функция двух переменных. Тогда говорят, что функция y(x) задана неявно. Введем понятие функции двух переменных.

Если каждой упорядоченной паре значений двух переменных $x, y \in A$ по некоторому правилу сопоставляется определенный элемент множества В, то задана функция двух аргументов $Z = f(x,y)$.

Функция одной независимой переменной может быть также задана через вспомогательную переменную (параметр t).

Пусть известно, что t принимает все значения в отрезке $[\alpha, \beta]: \alpha \leq t \leq \beta$.

Пусть также заданы функции $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,а зависимость переменной y от x существует, но не выражена явно. В этом случае говорят, что функция y(x) задана параметрически.

Функцию, значение которой получается из значений x и постоянных величин при помощи четырех действий арифметики и предельных переходов, называют аналитически представимой или изобразимой. В частности, все элементарные функции относятся к аналитически представимым.

Кроме аналитического, существуют другие способы задания функций (табличный, графический и др.).

При задании функции $f(x)$ аналитически, т.е. с помощью некоторых формул, под областью определения функции $Df(x)$ понимают множество всех тех действительных значений аргумента, при которых выражение, определяющее функцию, имеет смысл. Область определения при этом называется областью существования функции или областью допустимых значений аргумента.

Пусть на множестве A задана функция y = f(x). Рассмотрим область значений этой функции – множество B. Зададим на множестве B функцию g(y). Каждому элементу y из множества B по некоторому правилу соответствует некоторый элемент z множества C.

Но таким образом каждому элементу x множества A мы поставим в соответствие некоторый элемент z множества C: z = g(y) = g(f(x)). Z есть сложная функция от x, являющаяся суперпозицией (или композицией) функций y = f(x) и z = g(y) (см. рисунок 30). Сложная функция может получаться в результате суперпозиции трех и более функций.

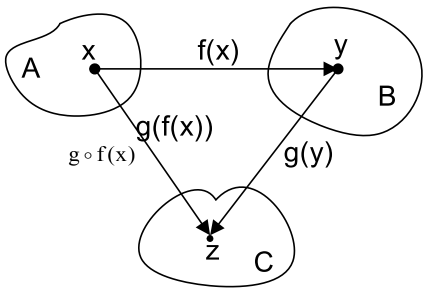


Рисунок 30

Суперпозицию функций f(x) и g(y) иногда обозначают так: $f \circ g$.

Пример 6.1.1.

$z = \sin^2(\ln\ x)$ - суперпозиция трех функций (объясните, каких).

Графиком функции $y = f(x)$, определенной на множестве A, называется совокупность точек плоскости XOY, абсциссы которых принадлежат A, а ординаты являются соответствующими значениями функции.

$$\Gamma = \{(x,\ f(x)),\ \ x \in A\}$$

Множество Г - это геометрический образ функции $y = f(x)$ (линия на плоскости).

Геометрическим образом функции двух независимых переменных будет некоторая поверхность в трехмерном пространстве

$$\Gamma = \{(x,\ y,\ f(x,y))\ \ x, y \in D\}.$$

Г здесь – множество точек трехмерного пространства; x и y – абсцисса и ордината точки поверхности, $z = f(x, y)$ - аппликата; D – проекция участка поверхности на плоскость X0Y (см. рисунок 31).

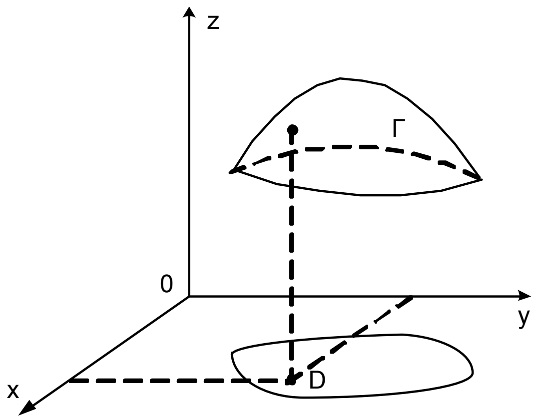


Рисунок 31

Введем еще несколько определений, относящихся к функциям одной независимой переменной.

Определение 6.1.1. Функция $y = f(x)$ называется четной или нечетной, если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки и обладает на нем свойством $f(-x) = f(x)$ или, соответственно, $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции, очевидно, симметричен относительно начала координат.

Приведите самостоятельно примеры известных Вам четных и нечетных функций. Изобразите их графики.

Нетрудно заметить, что произведение двух четных функций есть четная функция. Произведение двух нечетных функций – также четная функция. Произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция. Докажите это самостоятельно.

Определение 6.1.2. Функция называется возрастающей на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$, где $x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$. Если для любых $x_1, x_2 \in A$, где $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется неубывающей на множестве A.

Функция называется убывающей на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$, где $x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$. Если для любых $x_1, x_2 \in A$, где $x_1 < x_2, f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется невозрастающей на множестве A.

Все эти четыре вида функций являются монотонными функциями.

На рисунке 32 представлен график немонотонной функции на [a, b]; на отрезке [c, b] она будет монотонно возрастать.

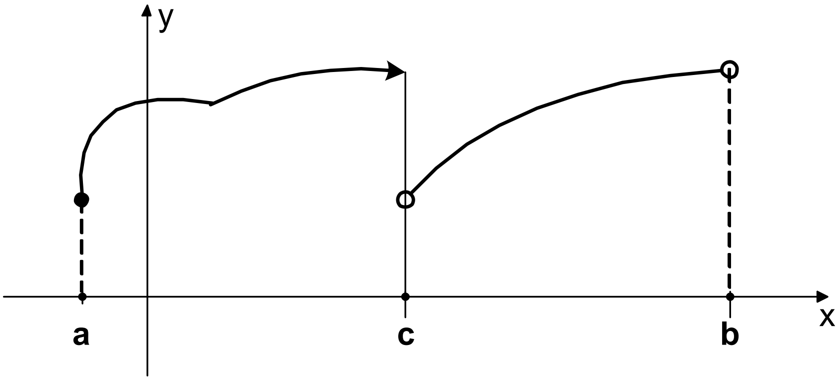


Рисунок 32

Определение 6.1.3. Пусть f(x) – функция, заданная на некотором множестве значений аргумента. Если существует положительное число M такое, что $|f(x)| \leq M$ для всех допустимых значений аргумента, то f(x) называется ограниченной в ее области определения.

График ограниченной функции целиком расположен в полосе $-M \leq y \leq M$.

Пример 6.1.2.

$y = \sin x$. Эта функция ограничена на всей оси x и $|\sin x| \leq 1$ (см. рисунок 33).

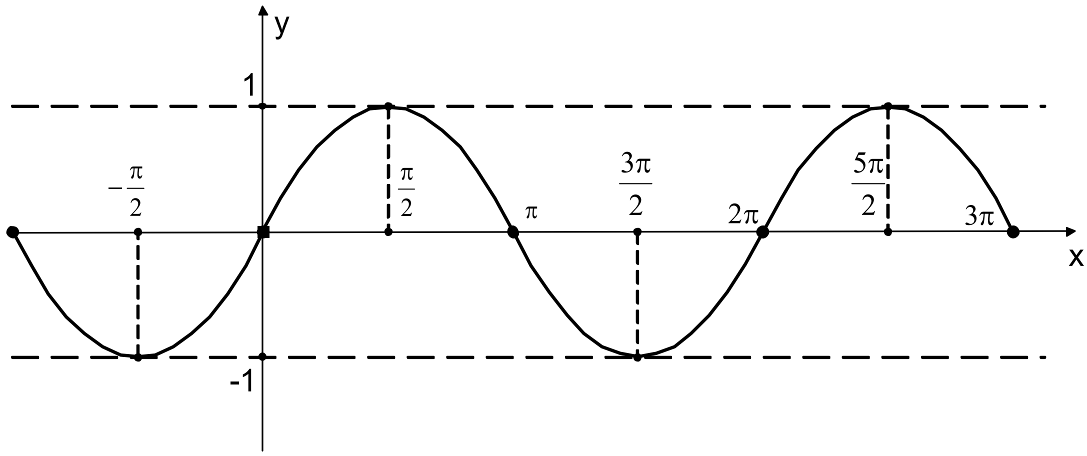


Рисунок 33

Пример 6.1.3.

Является ли ограниченной функция $y = \operatorname{tg} x$, график которой представлен на рисунке 34?

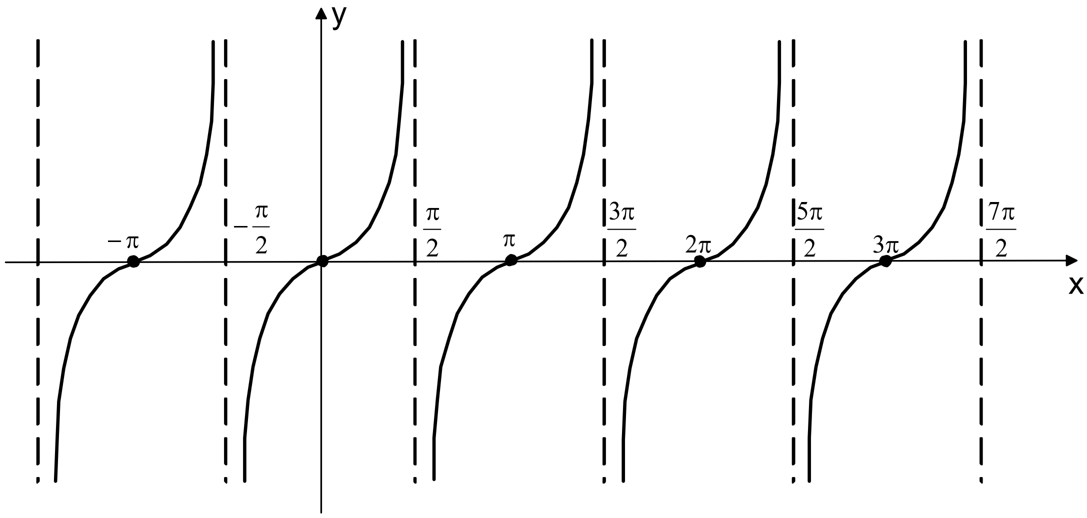


Рисунок 34

Нет, функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена на интервале-периоде $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

О том, что обе эти функции являются периодическими, хорошо известно из школьного курса математики.

Определение 6.1.4. Функция f(x) называется периодической, если существует некоторое число T, такое, что для любого x из области определения D_f этой функции справедливо равенство $f(x) = f(x + nT),\ n \in \mathbf{Z},\ x + nT \in A$.

$$\exists T \in \mathbf{R}:\ \forall x \in D_f,\ (x + nT) \in D_f\ \forall n \in \mathbf{Z},\ f(x + nT) = f(x).$$

6.2 Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна в своей области определения A. Пусть B – область значений этой функции. Тогда различным значениям x соответствуют различные значения функции y. Возьмем y $\in$ B. Поставим ему в соответствие тот x из множества A, которому этот y раньше соответствовал (см. рисунок 35).

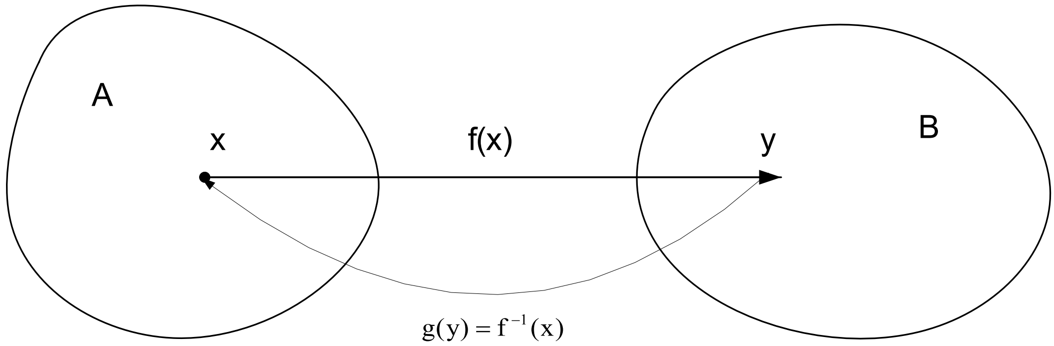


Рисунок 35

Новую функцию g(y), заданную на множестве B, будем называть обратной функцией по отношению к функции f(x).

Пример 6.2.1.

В качестве f(x) возьмем функцию $y = x^3$. Обратной для нее будет функция g(y): $x = \sqrt[3]{y}$. Примем обычные для аргумента и функции обозначения: $y = \sqrt[3]{x}$.

Свойства обратной функции

1. Областью определения обратной функции является область значений исходной функции, и наоборот, областью значений обратной функции будет область определения исходной.

2. Если функция f(x) возрастающая (убывающая), то обратная по отношению к ней функция g(y) также будет возрастающей (убывающей).

3. $f(g(y)) = y,\ y \in B$.

4. $g(f(x)) = x,\ x \in A$.

5. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Пример 6.2.2

Рассмотрим взаимно обратные функции: $y = e^x$ и $y = \ln\ x$. Изобразим их графики (см. рисунок 36).

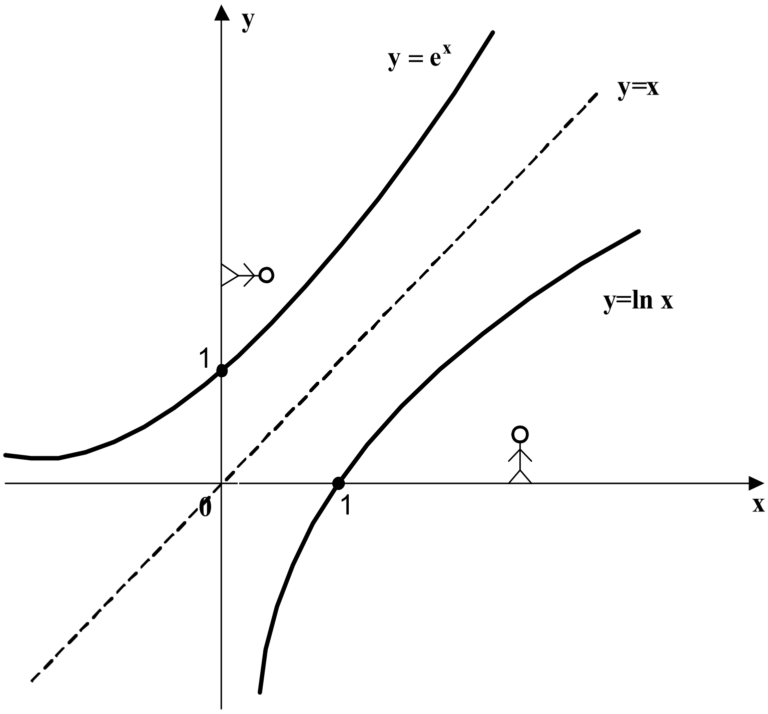


Рисунок 36

На рисунке 36 Федя идет по оси X в положительном направлении, а Жора идет по оси Y также в положительном направлении. Графики взаимно обратных функций выглядят для них одинаково.

В случае, когда данная функция не является монотонной, обратная функция неоднозначна. Рассмотрим функции: $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$ (рисунок 37).

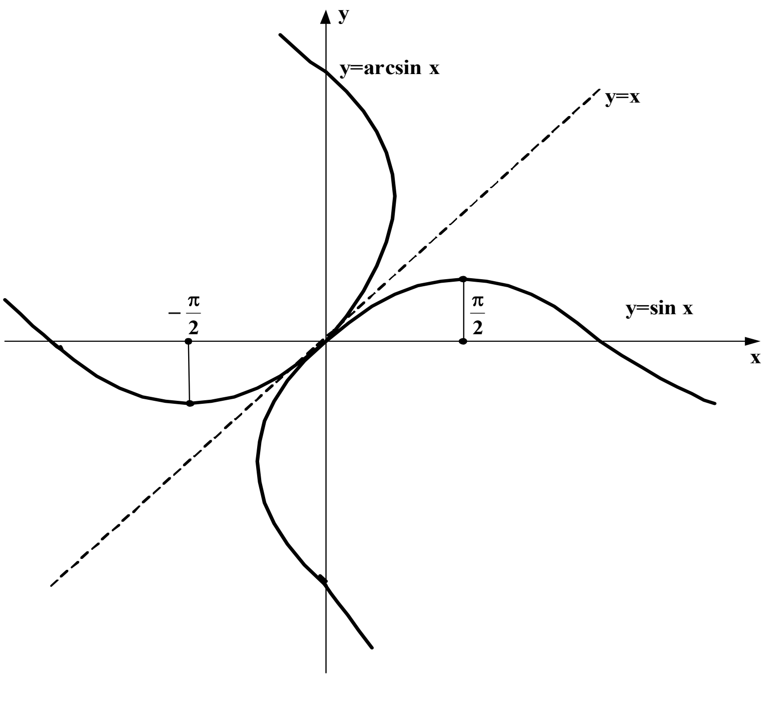


Рисунок 37

Для того чтобы найти обратную функцию к данной, достаточно решить уравнение y = f(x) относительно x. Тогда мы получим x = g(y). Затем следует поменять местами x и y.

Пример 6.2.3.

Найдем обратную функцию для $y = \sqrt[3]{x^5 + 1}$.

$y^3 = x^5 + 1 \Rightarrow x^5 = y^3 - 1;\ \ x = \sqrt[5]{y^3 - 1} \Rightarrow$ обратная функция $y = \sqrt[5]{x^3 - 1}$.

6.3 Практическое занятие №6. Функция. Основные характеристики функции. Обратная функция

Упражнение 6.1. Найти область определения функции.

1) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$.

Дробь $\dfrac{3x+1}{x^2-1}$ определена, если ее знаменатель не равен нулю. Поэтому область определения данной функции находится из условия $x^2 - 1 \neq 0$, т.е. $x \neq \pm 1$. Таким образом, $D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

Ответ: $D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2) $f(x) = \sqrt{5-3x}$.

Данная функция определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $5 - 3x \geq 0$. Отсюда $x \leq \dfrac{5}{3}$, и значит, $D(f) = \left(-\infty; \dfrac{5}{3}\right]$.

Ответ: $D(f) = \left(-\infty; \dfrac{5}{3}\right]$.

3) $f(x) = \ln(x+2)$.

Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, поэтому функция $\ln(x+2)$ определена в том и только в том случае, когда $x + 2 > 0$, т.е. $x > -2$. Значит $D(f) = (-2;+\infty)$.

Ответ: $D(f) = (-2;+\infty)$.

4) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin\dfrac{x+2}{3}$.

Функция a^x, $a > 0$ определена при всех действительных значениях x, поэтому функция $2^{\frac{1}{x}}$ определена в точности при тех значениях x, при которых имеет смысл выражение $\dfrac{1}{x}$, т.е. при $x \neq 0$.

Далее, область определения второго слагаемого находится из двойного неравенства $-1 \leq \dfrac{x+2}{3} \leq 1$. Отсюда $-3 \leq x + 2 \leq 3$, т.е. $-5 \leq x \leq 1$.

Область определения функции $f(x)$ есть пересечение областей определения обоих слагаемых, отсюда $D(f)=[-5;0)\cup(0;1]$.

5) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}}-7\cdot\cos 2x$.

Функция $7\cdot\cos 2x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$ - лишь при тех значениях x, при которых $2x-x^2\neq 0$, т.е. при $x\neq 0,\ \ x\neq 2$.

Таким образом, $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.

Упражнение 6.2. Найти множества значений функций.

1) $f(x)=x^2+4x+1$

Т.к $x^2+4x+1=(x+2)^2-3$, а $(x+2)^2\geq 0\ \ \forall x$, то $f(x)\geq -3\ \ \forall x$. Поскольку к тому же функция $(x+2)^2$ принимает все значения от 0 до ∞, то $E(f)=[-3;+\infty)$.

Ответ: $E(f)=[-3;+\infty)$.

2) $f(x)=2^{x^2}$

$E(x^2)=[0;+\infty)$, поэтому множество значений функции 2^{x^2} совпадает с множеством значений функции 2^x при $x\geq 0\Rightarrow E(f)=[1;+\infty)$.

Ответ:

3) $f(x)=3-5\cos x$

$E(\cos x)=[-1;1]\Rightarrow E(-5\cos x)=[-5;5]$. Т.к. $f(x)=3-5\cos x$, то $E(f)=[-2;8]$.

Упражнение 6.3. Для функции $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$ найти значения в заданных точках.

1) $f(0)=\dfrac{0+3}{0^2-1}=-3$;

2) $f(-2)=\dfrac{-2+3}{2-1}=\dfrac{1}{3}$;

3) $f\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+3}{2-1}=\sqrt{2}+3$;

4) $f(-x)=\dfrac{-x+3}{(-x)^2-1}=\dfrac{3-x}{x^2-1}$;

$$5)\, f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}+3}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{3x^2+x}{1-x^2};$$

$$6)\ f(a+1)=\frac{(a+1)+3}{(a+1)^2-1}=\frac{a+4}{a^2+2a};$$

$$7)\, f(a)+1=\frac{a+3}{a^2-1}+1=\frac{a^2+a+2}{a^2-1};$$

$$8)\, f(2x)=\frac{2x+3}{(2x)^2-1}=\frac{2x+3}{3x^2-1}.$$

Упражнение 6.4. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие общего вида?

$$1)\ f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$,и, стало быть, область определения функции симметрична относительно начала координат.

Кроме того, $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x^3}{x^2+1}=-f(x)\Rightarrow f(x)$ - нечетная.

Ответ: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ - нечетная функция.

2) $f(x)=x^4-5\cdot|x|$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$ и $f(-x)=(-x)^4-5\cdot|-x|=x^4-5\cdot|x|=f(x)$. Следовательно $f(x)$ - четная.

Ответ: $f(x)=x^4-5\cdot|x|$ - четная функция.

3) $f(x)=e^x-2e^{-x}$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$ и $f(-x)=e^{-x}-2e^x\neq\pm f(x)$, т.е. $f(x)$ - функция общего вида.

Ответ: $f(x)=e^x-2e^{-x}$ - функция общего вида.

$$4)\ f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$$

$D(f)=(-1;1)$, т.е. область определения симметрична относительно нуля. К тому же $f(-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)\Rightarrow f(x)$ - нечетная.

Ответ: $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ - нечетная функция.

Упражнение 6.5. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует.

1) $f(x) = \sin 4x$.

Областью определения функции $f(x) = \sin 4x$ является множество $D(f) = (-\infty;+\infty)$, и, стало быть, область определения функции симметрична относительно начала координат. Кроме того, наименьшим положительным периодом функции $\sin x$ является число 2π. Покажем, что наименьший положительный период $\sin 4x$ - число $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Действительно, $\sin 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 2\pi) = \sin 4x$, т.е. $T = \frac{\pi}{2}$ - период данной функции. С другой стороны, если $T_1 > 0$ - какой-либо другой период этой функции, то $\sin 4(x + T_1) = \sin 4x,\ \ x \in R$. Отсюда следует, что $4T_1$ - период функции $\sin t$, где $t = 4x$, и, значит $4T_1 \geq 2\pi$, т.е. $T_1 \geq \frac{\pi}{2}$.

Таким образом $T = \frac{\pi}{2}$ - наименьший положительный период функции $\sin 4x$.

Ответ: $f(x) = \sin 4x$ - периодическая функция, $T = \frac{\pi}{2}$.

2) $f(x) = \cos^2 5x$.

Поскольку $\cos^2 5x = \frac{1 + \cos 10x}{2}$, период данной функции совпадает с периодом функции $\cos 10x$. Рассуждая как в пункте 1), легко показать, что наименьший положительный период функции $\cos 10x$ равен $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$. Таким образом, наименьший положительный период функции f(x) равен $\frac{\pi}{5}$.

Ответ: $f(x) = \cos^2 5x$ - периодическая функция, $T = \frac{\pi}{5}$.

3) $f(x) = x^2$.

При $x > 0$ функция определена и возрастает, поэтому не может быть периодической. Значит, и на интервале $(-\infty;+\infty)$ функция не является периодической.

Ответ: $f(x) = x^2$ - не периодическая функция.

Упражнение 6.6. Найти сложные функции $f \circ g$ и $g \circ f$, где:

1) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2$

По определению композиции функций имеем:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \quad x \geq 0$

2) $f(x) = x^3, \quad g(x) = 2x - 1$

Аналогично,

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x - 1)^3$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x^3 - 1$

Упражнение 6.7. Найти функцию обратную для данной.

1) $y = x - 1$.

Функция $y = x - 1$ возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$, а значит, для любых $x_1 \neq x_2$ имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$. Отсюда следует, что на $(-\infty;+\infty)$ эта функция имеет обратную. Для того, чтобы найти эту обратную функцию, разрешим уравнение $y = x - 1$ относительно x, откуда $x = y + 1$. Записывая полученную формулу в традиционном виде (т.е. меняя x и y местами), найдем окончательно: $y = x + 1$ - обратная функция к исходной.

Ответ: $y = x + 1$.

2) $y = \dfrac{2}{x+3}$.

Функция убывает на множестве $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$, являющемся областью определения. Поэтому у нее есть обратная, которую найдем, разрешая уравнение $y = \dfrac{2}{x+3}$ относительно x.

Отсюда получим, что функция $y = \dfrac{2}{x} - 3$ - обратная к исходной.

Ответ: $y = \dfrac{2}{x} - 3$.

Упражнение 6.8. Доказать, что функция $y = x^2$ не имеет обратной на интервале $(-\infty;+\infty)$.

Доказательство:

Для $\forall y_0 > 0$ уравнение $y_0 = x^2$ имеет два решения $x_1 = \sqrt{y_0}$ и $x_2 = -\sqrt{y_0}$ (т.е. каждая горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = x^2$ в двух точках). Но функция имеет обратную только в том случае, если такое решение единственно. Значит, данная функция действительно не имеет обратной на интервале $(-\infty;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область определения функций:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^3+1}$;

2) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-7x+10}$;

3) $f(x)=x^2+\operatorname{tg} x$;

4) $f(x)=\arccos(x-2)-\ln(x-2)$.

2. Найти множества значений функций:

1) $f(x)=x^2-8x+20$;

2) $f(x)=-3^{x^2}$;

3) $f(x)=2\sin x-7$.

3. Для функции $f(x)=x^3\cdot 2^x$ найти:

1) $f(1)$; 5) $f(3x)$;

2) $f(-3)$; 6) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

3) $f\left(-\sqrt[3]{5}\right)$; 7) $\dfrac{1}{f(x)}$;

4) $f(-x)$; 8) $f(b-2)$.

4. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие общего вида?

1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

2) $f(x)=x^5+3x^3+x$;

3) $f(x)=\sqrt{x}$;

4) $f(x)=x\cdot e^x$.

5. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует.

1) $f(x)=\cos\dfrac{x}{4}$;

2) $f(x)=|x|$;

3) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg} x$.

6. Найти сложные функции $f\circ g$ и $g\circ f$, где:

1) $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$;

2) $f(x)=3x+1$, $g(x)=2x-5$;

3) $f(x) = |x|, \quad g(x) = \cos x.$

7. Найти обратную функцию для данной.

1) $y = 3x + 5;$

2) $y = x^3 - 2;$

3) $y = \dfrac{x-2}{x}.$

7 Лекция №7. Предел функции

7.1 Определения предела функции

Определение 7.1.1. (на языке окрестностей, или на языке ε – δ, или определение по Коши). Число A называется пределом функции f(x) в точке a, если функция f(x) определена на некоторой δ - окрестности точки a, кроме, может быть, самой этой точки, и если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in Df(x)$, если выполняется неравенство $0 < |x - a| < д$, то выполняется и неравенство $|f(x) - A| < е$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x \to a}{\to} A$ при $x \to a$.

Примечание: Окрестностью точки a называется, как известно, любое открытое множество, содержащее точку a. Пересечение нескольких окрестностей точки a также будет окрестностью этой точки. Пусть U(a) – окрестность точки a. Множество U(a)\a называется проколотой окрестностью точки a и обозначается $\overset{\circ}{U}(a)$.

Определение 7.1.2. (на языке последовательностей или определение по Гейне*). Число A называется пределом функции в точке a, если функция определена на некоторой окрестности точки a, кроме, может быть, самой этой точки (на некоторой проколотой окрестности точки a), и если предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен A, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к точке a и такая, что $x_n \neq a$ для всех n.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x_n \left. \begin{array}{l} x_n \to a \\ x_n \in D_f(x) \\ x_n \neq a \end{array} \right\} \Rightarrow \{f(x_n)\} \to A .$$

Эти определения эквивалентны. Докажем сначала, что если число A является пределом функции f(x) в точке a в смысле первого определения, то это число есть предел функции f(x) в точке a в смысле второго определения.

Пусть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле первого определения. Пусть также задана переменная x_n, не равная a ни при каком значении n, но стремящаяся к a.

Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем по нему δ так, как это сказано в первом определении, то есть чтобы если выполняются неравенства $0 < |x_n - a| < \delta$, выполнялось и неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Затем подберем $n_0 \in \mathbf{N}$ так, чтобы $|x_n - a| < \delta\ \forall n > n_0$.

---

* Генрих Эдуард Гейне (1821 – 1881) – немецкий математик, работавший над обоснованием математического анализа.

Но тогда $\left|f(x_n)-A\right|<\varepsilon \quad \forall n>n_0$. А это значит, что $\{f(x_n)\}\to A$ при $n\to\infty$, и так как это свойство верно для всякой сходящейся к а последовательности $\{x_n\}$, лишь бы $x_n\neq a$ и все x_n принадлежали бы области определения $f(x)$, доказано, что из первого определения следует второе.

Докажем теперь, что из второго определения следует первое.

Пусть функция f(x) имеет предел, равный А в смысле второго определения. Допустим, что при этом она не имеет предела в смысле первого определения. Это значит, что существует хотя бы одно ε, которое мы обозначим через ε_0, для которого нельзя подобрать нужное δ, т.е. для любого δ среди x, удовлетворяющих соотношениям $0<|x-a|<\delta$ должно найтись хотя бы одно $x=x(\delta)$, такое, что для него $\left|f(x(\delta))-A\right|\geq\varepsilon_0$.

В качестве δ берем все числа вида $\delta=\dfrac{1}{k}$, $(k=1,2,...)$ и для каждого из них находим точку $x_k=x(\delta)$, для которой $0<|x_k-a|<\dfrac{1}{k}$, $(x_k\neq a)$ и $\left|f(x_k-A)\right|\geq\varepsilon_0$, $(k=1,2,...)$.

Из этих соотношений видно, что $x_k\to a$,$(x_k\neq a)$, в то время как $f(x_k)\not\to A$. Таким образом, допущение, что из второго определения предела не следует первое, приводит к противоречию с самим вторым определением.

Эквивалентность двух определений доказана.

Определение 7.1.3. Число А называется пределом функции f(x) в точке а справа, если функция определена на некотором полуинтервале $(a,b]$ и для полуинтервала любой сходящейся к а последовательности точек существует $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x_n>a}} f(x_n)=A$.

Обозначается: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A.$

Аналогично определяется предел функции f(x) в точке а слева (определить самостоятельно).

Обозначается: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A.$

Предел f(x) в точке а существует и равен А тогда и только тогда, когда у функции f(x) в точке а существуют и левый и правый пределы, и оба они равны А.

Определение 7.1.4. Будем писать $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ и говорить, что число А есть предел функции f(x) при x стремящемся к бесконечности, если f(x) определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>k$ при некотором $k>0$, и для любого $\varepsilon>0$ можно найти число $M>k$ такое, что $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$.

Можно доказать, что это определение эквивалентно следующему:

Определение 7.1.5. Число A есть предел функции f(x) при $x \to \infty$, если функция f(x) определена для всех x, где $|x| > M$ при некотором $M > 0$ и $\lim\limits_{x_n \to \infty} \{f(x_n)\} = A$.

Доказательство эквивалентности этих двух определений проводится так же, как для случая предела f(x) в конечной точке a.

Свойства функции f(x), имеющей предел при $x \to a$, где a – либо конечное число, либо $\pm\infty$, аналогичны свойствам последовательности, имеющей предел.

Вспомним эти свойства и сформулируем их для функций.

1. Если у функции f(x) существует предел в точке a, то этот предел единственный.

2. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где A – конечное число, то на некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ функция f(x) ограничена (то есть существует такое M>0, что $|f(x)| \le M \ \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$).

3. (Теорема о стабилизации знака). Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $A \ne 0$ - конечное число, то существует такая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$, что $|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$ $(x \in \overset{\circ}{U}(a))$.

Более того, для указанных x $f(x) > \dfrac{A}{2}$, если $A > 0$ и $f(x) < \dfrac{A}{2}$, если $A < 0$.

4. (Теорема о переходе к пределу в неравенстве). Если для двух функций f(x) и g(x), имеющих общую область определения D и для любого $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, а также если существуют $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то $A \le B$.

5. (Теорема о двойном неравенстве). Если три функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ заданы на одном множестве D и $\forall x \in D$ выполняются неравенства $f(x) \le g(x) \le h(x)$ и если кроме того $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A$, то и функция g(x) также стремится к пределу, равному A при $x \to a$.

Доказательства этих теорем аналогичны доказательствам соответствующих теорем для последовательностей.

Провести их самостоятельно.

7.2 Бесконечно малые функции и их основные свойства

Определение 7.2.1. Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ или при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Из этого определения следует, что если, например, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то это значит, что для любого наперед заданного сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $|x-a|<\delta$, то $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Пример 7.2.1.

1) функция $\alpha=(x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x\to 1$: $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$;

2) функция $\alpha=\dfrac{1}{x}$ есть бесконечно малая при $x\to\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Теорема 7.2.1. Предел функции $y = f(x)$ равен числу b тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде суммы числа b и бесконечно малой $\alpha(x)$.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=b+\alpha(x), \text{ где } \lim_{x\to a}\alpha(x)=0. \tag{7.2.1}$$

Доказательство:

Пусть выполняется равенство (7.2.1). Из него следует, что $|y-b|=|\alpha(x)|$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Но последнее утверждение означает, что при произвольном $\varepsilon>0$ все значения α, начиная с некоторого, удовлетворяют соотношению $|\alpha|<\varepsilon$, следовательно, для всех значений y, начиная с некоторого, будет выполняться неравенство $|y-b|<\varepsilon$. А это и значит, что $\lim\limits_{x\to a} y=b$.

Докажем, что верно и обратное.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$, или $|y-b|<\varepsilon$ начиная с некоторого значения y. Но если обозначим $y - b = \alpha(x)$, то, следовательно, для всех значений $\alpha(x)$, начиная с некоторого, будет выполняться неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$, а это и значит, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$.

Пример 7.2.2.

$y=\dfrac{1}{x}+1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=1$.

Переменную y можно представить в виде суммы $y=1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$.

$\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to\infty$. Рисунок 38 представляет собой иллюстрацию к этому примеру.

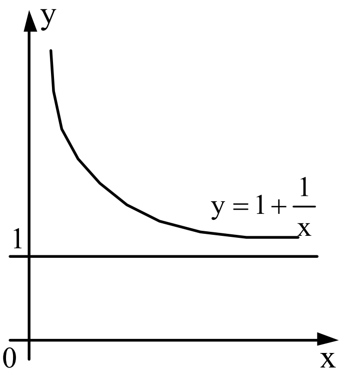


Рисунок 38

Теорема 7.2.2. Если $\alpha = \alpha(x)$ стремится к нулю при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) и не обращается в нуль, то переменная $y = \frac{1}{\alpha(x)}$ стремится к бесконечности при $x \to a$ (или при $x \to \infty$).

Доказательство:

При любом сколь угодно большом $M > 0$ будет выполняться неравенство $\frac{1}{|\alpha|} > M$, если только будет выполняться неравенство $|\alpha| < \frac{1}{M}$. Но такое неравенство будет выполняться для всех значений α, начиная с некоторого, поскольку $\alpha(x)$ – бесконечно малая.

Определение 7.2.2. Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\beta(x)| > M$ или $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = \infty$.

Таким образом, теорему 7.2.2 можно сформулировать так:

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ будет бесконечно большой при $x \to a$.

Теорема 7.2.3. Алгебраическая сумма двух, трех и любого конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Доказательство:

Доказательство проведем для суммы двух бесконечно малых.

Пусть $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$.

Докажем, что при произвольном сколь угодно малом $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что при условии, что выполняется неравенство $|x - a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|\gamma(x)| < \varepsilon$.

Так как $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 : \ |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\beta(x) \underset{x \to a}{\to} 0$ при $x \to a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0: \ |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда если выполняется неравенство $|x - a| < \delta$, то одновременно выполняются неравенства $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;

$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 7.2.4. (второе свойство бесконечно малых). Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая.

Доказательство:

Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0.$

Пусть также z(x) – ограниченная функция в некоторой окрестности точки α, т.е. существует $M > 0$ такое, что для всякого x, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - a| < \delta_1$ выполняется неравенство $|z(x)| \le M$.

Поскольку $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_2 > 0$, такое, что $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всякого x, такого, что $|x - a| < \delta$, будут выполняться неравенства $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ и $|z(x)| \le M$, а значит, и неравенство $|z(x)| \cdot |\alpha(x)| = |z(x) \cdot \alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$, а это и означает, что $\alpha \cdot z$ - бесконечно малая при $x \to a$.

При $x \to \infty$ доказательство проводится аналогично.

Следствие 1. Бесконечно малая функция является ограниченной, поэтому произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение бесконечной малой функции на постоянную есть бесконечно малая функция.

Теорема 7.2.5. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \ne 0$, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ есть ограниченная функция при $x \to a$.

Доказательство:

Из условия теоремы следует, что при произвольном $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности точки x = a будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, или $\big||f(x)| - |b|\big| < \varepsilon$, или $|b| - \varepsilon < |f(x)| < \varepsilon + |b|$.

Из последнего неравенства следует: $\frac{1}{|b|-\varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b|+\varepsilon}$, а это и значит, что функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена.

Теорема 7.2.6. (третье свойство бесконечно малых). Частное $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию $\beta(x)$, предел которой отличен от нуля, есть функция бесконечно малая.

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}\beta(x)=b,\ b\neq 0.$ Но тогда функция $\frac{1}{\beta(x)}$ - ограничена при $x\to a$.

$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\alpha(x)\cdot\frac{1}{\beta(x)}$ - произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая функция, по предыдущей теореме. Итак, $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в условиях теоремы есть бесконечно малая функция, что и требовалось доказать.

7.3 Теоремы об арифметических свойствах пределов функций.

Эти теоремы уже доказаны нами для пределов последовательностей. Докажем их для пределов функций другим способом, используя свойство конечного предела (теорему 1 предыдущего параграфа) и свойства бесконечно малых.

Теорема 7.3.1. Предел алгебраической суммы определенного числа функций, имеющих пределы, равен сумме этих пределов.

$\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)+\lim\limits_{x\to a}f_2(x)+...+\lim\limits_{x\to a}f_n(x)$ (a может быть равно $\pm\infty$).

Доказательство:

Проведем его для двух слагаемых, так как для любого конечного числа слагаемых оно проводится так же.

Пусть $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=b_1,\ \lim\limits_{x\to a}f_2(x)=b_2$. Тогда по теореме 7.2.1:

$$f_1(x)=b_1+\alpha_1(x),\ \text{где}\ \alpha_1(x)\underset{x\to a}{\to}0,$$

$$f_2(x)=b_2+\alpha_2(x),\ \text{где}\ \alpha_2(x)\underset{x\to a}{\to}0.$$

Значит, $f_1(x)+f_2(x)=b_1+b_2+\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$, но $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)\underset{x\to a}{\to}0$ по теореме 7.2.3.

Следовательно, $f_1(x)+f_2(x)=b_1+b_2+\gamma(x)$, где $\gamma(x)\underset{x\to a}{\to}0$, и по теореме 7.2.1 отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=b_1+b_2$.

Теорема 7.3.2. Предел произведения определенного числа функций, имеющих конечные пределы, равен произведению этих пределов.

Доказательство:

Проведем его для двух сомножителей.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$.

Тогда $f_1(x) = b_1 + \alpha_1(x)$, где $\alpha_1(x) \underset{x\to a}{\to} 0$,

$f_2(x) = b_2 + \alpha_2(x)$, где $\alpha_2(x) \underset{x\to a}{\to} 0$;

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = [b_1 + \alpha_1(x)]\cdot[b_2 + \alpha_2(x)] = b_1 b_2 + b_1\alpha_2(x) + b_2\alpha_1(x) + $$
$$+ \alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x).$$

$b_1\cdot\alpha_2(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, $b_2\cdot\alpha_1(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ по следствию 2 из теоремы 7.2.4. $\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ по следствию 1 из той же теоремы. А сумма этих трех бесконечно малых равна бесконечно малой по теореме 7.2.3.

Итак, $f_1(x)\cdot f_2(x) = b_1 b_2 + \gamma(x)$, где $\gamma(x) = b_1\alpha_2(x) + b_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x)$, $\gamma(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, значит, по теореме 7.2.1 $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot f_2(x) = b_1 b_2 = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Действительно, если

$\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$, а $C = \mathrm{const}$, то $\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f_1(x)) = \lim\limits_{x\to a} C\cdot \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f_1(x)$.

Теорема 7.3.3. Предел частного от деления двух функций, имеющих пределы, равен частному этих пределов, если предел знаменателя отличен от нуля: если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$, $b_2 \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1 \Rightarrow f_1(x) = b_1 + \alpha_1(x)$, где $\alpha_1(x) \underset{x\to a}{\to} 0$;

$\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2 \Rightarrow f_2(x) = b_2 + \alpha_2(x)$, где $\alpha_2(x) \underset{x\to a}{\to} 0$.

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{b_1 + \alpha_1(x)}{b_2 + \alpha_2(x)} = \frac{b_1}{b_2} + \left(\frac{b_1 + \alpha_1(x)}{b_2 + \alpha_2(x)} - \frac{b_1}{b_2}\right) = \frac{b_1}{b_2} + \frac{\alpha_1(x)\cdot b_2 - \alpha_2(x)\cdot b_1}{b_2(b_2 + \alpha_2(x))}$$

$\dfrac{b_1}{b_2}$ - число, равное отношению пределов данных функций.

$\gamma(x) = \dfrac{\alpha_1(x)\cdot b_2 - \alpha_2(x)\cdot b_1}{b_2(b_2 + \alpha_2(x))}$ - бесконечно малая при $x \to a$, так как числитель этой дроби – бесконечно малая величина, а $\lim\limits_{x\to a} b_2(b_2 + \alpha_2(x)) = b_2^2 \neq 0$, следовательно, $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{b_1}{b_2} + \gamma(x)$, где $\gamma(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, а это значит, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

Теорема 7.3.4. (о пределе степени с целым показателем). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$; $k \in \mathbf{Z}$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^k = b^k$.

Доказательство:

Поскольку $[f(x)]^k = f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)$ - произведение k сомножителей, то применив для этого произведения теорему 7.3.2, получим: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^k = \underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{k} = b^k$.

7.4 Практическое занятие №7. Предел функции. Вычисление пределов

Упражнение 7.1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5$.

а) Выберем $\varepsilon > 0$.

б) Выясним, для каких значений аргумента $x \in D_f$ выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon$$
$$|2x + 3 - 5| < \varepsilon$$
$$|2x - 2| < \varepsilon$$
$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

в) Значит, неравенство выполняется для всякого $\varepsilon > 0$, если $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

г) Вывод: $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} : \forall x \in D_f \wedge 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5$.

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{3}{5}$.

Доказательство:

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется найти число $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in D_f$, $0 < |x - 2| < \delta$, выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \dfrac{3}{5}\right| < \varepsilon$. Учитывая, что для любых a и b справедливы соотношения $|ab| = |a|\cdot|b|$, $|a + b| \le |a| + |b|$, имеем

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|=\left|\frac{5x^2-5-3x^2-3}{5\left(x^2+1\right)}\right|=\left|\frac{2x^2-8}{5\left(x^2+1\right)}\right|=\left|\frac{2\left(x^2-4\right)}{5\left(x^2+1\right)}\right|=\left|\frac{2(x-2)(x+2)}{5\left(x^2+1\right)}\right|<\varepsilon;$$

$$\frac{2|(x-2)(x+2)|}{5\left(x^2+1\right)}<\frac{2|(x-2)(x+2)|}{5}<2|(x-2)(x+2)|=2|x-2|\cdot|x+2|=$$

$$=2|x-2|\cdot|(x-2)+2+2|=2|x-2|\cdot|(x-2)+4|\le 2|x-2|\cdot(|x-2|+4)<\varepsilon.$$

Обозначим $\alpha=x-2$. Из уравнения $2\alpha(\alpha+4)=\varepsilon$, или $2\alpha^2+8\alpha-\varepsilon=0$ находим $\alpha_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+2\varepsilon}}{2}$. Полагая $\delta=\alpha_1=\dfrac{-4+\sqrt{16+2\varepsilon}}{2}$.

Покажем, что полученное $\delta=\dfrac{-4+\sqrt{16+2\varepsilon}}{2}$ - искомое. Действительно, если $0<|x-2|<\delta=\dfrac{-4+\sqrt{16+2\varepsilon}}{2}$, то $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-\dfrac{3}{5}\right|\le 2|x-2|\cdot(|x-2|+4)<$

$$<2\delta(\delta+4)=2\cdot\frac{-4+\sqrt{16+2\varepsilon}}{2}\cdot\left(\frac{-4+\sqrt{16+2\varepsilon}}{2}+4\right)=\left(-4+\sqrt{16+2\varepsilon}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{-4+\sqrt{16+2\varepsilon}+8}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-4+\sqrt{16+2\varepsilon}\right)\cdot\left(4+\sqrt{16+2\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}(-16+16+2\varepsilon)=$$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon$. Следовательно, найдено число $\delta=\dfrac{-4+\sqrt{16+2\varepsilon}}{2}$ такое, что $\forall x:$ $0<|x-2|<\delta$, и $\forall\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right|<\varepsilon$. Итак, доказали, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}.$$

Упражнение 7.2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^n}=\infty$ ($n\in\mathbf{N}$).

Доказательство:

Для доказательства следует для произвольно заданного числа $M>0$ найти число $\delta>0$ такое, что $\forall x:$ $0<|x|<\delta$, выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right|>M$. Из этого неравенства находим $\dfrac{1}{\left|x^n\right|}>M$, $\left|x^n\right|<\dfrac{1}{M}$, $|x|<\dfrac{1}{\sqrt[n]{M}}$. Если положить $\delta=\dfrac{1}{\sqrt[n]{M}}$, то $\forall x:$ $0<|x|<\delta=\dfrac{1}{\sqrt[n]{M}}$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right|>M$, или, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^n}=\infty$.

Упражнение 7.3. Доказать, исходя из определения предела, что .

Доказательство:

Пусть ε - любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое , что для всех x, удовлетворяющих неравенству , будет выполняться неравенство .

Если , то и .

Следовательно, для выполнения неравенства достаточно найти k из условия , т.е. . Итак, для любого ε найдено такое k, что из неравенства следует неравенство , т.е. доказано, что .

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

Если функция является элементарной, и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, ибо предел элементарной функции при x, стремящемся к значению a, которое входит в область определения, равен значению функции при x = a, т.е. .

Упражнение 7.4. Найти пределы:

1) ;

Ответ: .

Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

Путем таких исследований, основанных на свойствах пределов, получены следующие часто встречающиеся пределы:

(постоянная)

1. .

2. .

3. .

4. .

5. .

6. .

7.

8.

9.

10.

11. (x есть радианная мера угла).

12. .

Этими простейшими пределами можно пользоваться как формулами.

Более сложные случаи нахождения предела функции, связанные с неопределенностями видов: рассматриваются далее каждый в отдельности.

2)

.

Ответ: .

3)

.

Ответ: .

В примерах 2) и 3) произведено домножение до разности квадратов и суммы кубов, сделано это для того, чтобы раскрыть неопределенность .

Случай, когда при или функция f(x) представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай).

Этот случай нахождения предела функции имеет особенно важное значение. Как будет выяснено впоследствии, нахождение предела отношения бесконечно малого изменения функции к бесконечно малому изменению аргумента является одним из основных средств для изучения функций.

4)

(разлагаем знаменатель и числитель на множители и сокращаем дробь на)

.

Ответ: .

5)

(сократим дробь, разделив на числитель и знаменатель в отдельности)

.

Вообще, если ищется предел дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль в точке , то согласно теореме Безу[*] оба многочлена разделятся без остатка на , т.е. такую дробь всегда можно сократить на , и каким образом избавится от неопределенности.

[*] Этьенн Безу (1730 - 1783) – французский математик, занимавшийся исследованиями в области алгебры и доказавший одну из ее основных теорем.

Ответ: .

6)

(разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на)

.

Ответ: .

7)

(домножим числитель до разности квадратов, а затем сократим дробь на ())

.

Ответ: .

8)

(домножим числитель и знаменатель на произведение , затем сократим дробь на 1 - x)

.

Иначе можно решить эту задачу путем замены переменной. Полагая, что , получаем , когда и

.

Ответ: .

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать по определению, что .

1) $\boxed{}$;

2) $\boxed{}$;

3) $\boxed{}$.

2. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{1-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}$.

8 Лекция №8. «Замечательные» пределы

8.1 Первый «замечательные» предел

Первым «замечательным пределом» называют равенство:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \qquad (8.1.1)$$

Докажем его геометрически. Рассмотрим круг единичного радиуса (рисунок 39).

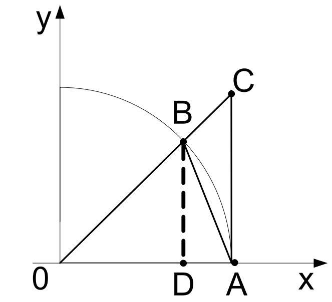


Рисунок 39

В точке пересечения его окружности с горизонтальной осью проведем касательную к окружности. Она будет параллельна вертикальной оси. Построим прямоугольный треугольник OAC. Острый угол AOC обозначим через x. Рассмотрим также сектор AOB и треугольник AOB. Сравним их площади. S_1 - площадь треугольника AOB; S_2 - площадь сектора AOB; S_3 - площадь треугольника OAC. Ясно, что $S_1 < S_2 < S_3$.

$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot DB, \quad$ а $\quad DB = \sin x, \quad$ и $\quad OA = 1$;

$S_2 = \frac{L \cdot R}{2} = \frac{x}{2}$; (L – длина дуги AB). Если дуга окружности радиуса R содержит n^0, а ее длина равна 4, то площадь сектора $S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} = \frac{L \cdot R}{2}$; в нашем случае R = 1, L = X.

$S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot AC, \quad$ а $\quad AC = \mathrm{tg}\ x$.

$\boxed{\quad\quad\quad}$ Поскольку $\boxed{\quad}$ разделив все члены этого неравенства на $\boxed{\quad}$ получим $\boxed{\quad\quad}$ или $\boxed{\quad\quad}$ При $\boxed{\quad\quad}$ Значит по теореме о двойном неравенстве, $\boxed{\quad}$ при $\boxed{\quad}$.

Равенство (8.1.1) доказано для случая $0 < x < \frac{\pi}{2}$; для случая $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ доказательство остается в силе, поскольку функция $\frac{\sin x}{x}$ - четная.

Рассмотрим примеры применения первого «замечательного предела».

Примеры:

8.1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg } x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1;$

8.1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{2\cdot 3x} = \lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha=3x}}\frac{3\cdot\sin\alpha}{2\alpha} = \frac{3}{2};$

8.1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{ax\cdot\sin ax}{ax}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{bx\cdot\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}.$

8.2 Второй «замечательный» предел

Прежде, чем переходить ко «второму замечательному пределу», рассмотрим сумму $S_{n+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$. Докажем, что эта сумма при безграничном возрастании числа ее слагаемых стремится к определенному пределу.

Так как $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} < \frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} < \frac{1}{2^3}$; …; $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}}$, можно заключить, что $S_{n+1} < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Слагаемые правой части этого неравенства, начиная со второго, представляют последовательные члены убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен единице, и знаменатель которой равен .

Прибавим к правой части неравенства сумму и этим усилим неравенство.

Тогда

Суммируем бесконечно убывающую прогрессию, входящую в правую часть этого неравенства. .

.

Итак, данная сумма при возрастании числа ее членов всегда остается меньше трех, но она возрастает с возрастанием числа слагаемых, так как все ее слагаемые положительны.

Следовательно, она стремится к некоторому пределу, не большему, чем число 3 (ограниченная возрастающая последовательность имеет предел, не больший чем число, ограничивающее ее сверху).

Этот предел обозначим буквой e и напишем условное равенство:

(8.2.1)

.

Число e является иррациональным. Иррациональные числа разделяют на два класса:

1) числа, которые являются корнями алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Их называют алгебраическими иррациональными числами;

2) числа, которые этим свойством не обладают. Они называются трансцендентными.

Примеры.

8.2.1) - алгебраическое иррациональное число. Оно является корнем уравнения ;

8.2.2) - число трансцендентное;

8.3.3) e – также трансцендентное число; e = 2, 718281828459045... (чтобы быстро написать такое количество знаков после запятой, нужно помнить, что после 2,7 два раза последует год рождения Л. Н. Толстого, затем последние две цифры года окончания Великой Отечественной войны, затем нужно 45 умножить на два и снова написать 45...).

Теперь запишем равенство, которое называется «второй замечательный предел».

(8.2.2)

Можно записать его и в таком варианте:

(8.2.3)

Докажем равенство (8.2.2), предполагая, что n – целое и положительное. Вспомним формулу бинома Ньютона*.

,

* Исаак Ньютон (1643 - 1727) – великий английский математик, физик, механик. Основоположник современной механики, один из создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Знаменитая формула бинома впервые появилась в письме Ньютона к секретарю Лондонского Королевского Общества в 1676 году.

где .

обозначается k! (ка-факториал).

Применим эту формулу для :

.

Второе слагаемое в правой части этого равенства равно единице. Остальные же слагаемые можно преобразовать следующим образом:

;

;

Поэтому,

(8.2.4)

Подставим в равенство (8.2.2) (n + 1) вместо n. Тогда

(8.2.5)

В разложении (8.2.5) слагаемых на одно больше, чем в разложении (8.2.4); кроме того, слагаемые правой части разложения (8.2.5), начиная с третьего, больше соответствующих слагаемых из правой части разложения (8.2.4), так как ; ;...; .

Следовательно, , т.е. при возрастании n функция возрастает.

Но из равенства (8.2.2) видно, что , или, как видно из равенства (8.2.1), .

Таким образом, - возрастающая функция, ограниченная сверху числом e. Значит, эта функция стремится к пределу, не превышающему число e.

С другой стороны, если p – определенное целое число, меньшее n, то, пользуясь разложением (16.4), получим:

(8.2.6).

Правая часть этого неравенства содержит p+1 членов и при $n \to \infty$ стремится к сумме .

Из равенства (8.2.6) следует, что .

Можно записать двойное неравенство . Но разность может быть сделана меньше любого данного числа посредством надлежащего выбора числа p.

Значит, по теореме о двойном неравенстве . Это заключение остается справедливым и тогда, когда n не обязательно целое, а просто действительное число.

Второй «замечательный предел» используется для раскрытия так называемой неопределенности вида , т.е. при отыскании предела , где , а .

Пример 8.2.4.

. Здесь мы видим, что , показатель же степени стремится к бесконечности. Выделим из дроби целую часть делением числителя на знаменатель:

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 + 5x + 4 & x^2 - 3x + 7 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2 - 3x + 7} & 1 \\
\quad 8x - 3 &
\end{array}
$$

, поэтому мы получим «второй замечательный предел»:

, где .

Пример 8.2.5.

; ; .

Представим tg x = 1 + α; при . Тогда получим:

$$\operatorname{tg}\ 2x = \frac{2\operatorname{tg}\ x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \frac{2(1+\alpha)}{1-(1+\alpha)^2} = \frac{2(1+\alpha)}{1-1-2\alpha-\alpha^2} = -\frac{2(1+\alpha)}{2\alpha-\alpha^2} = -\frac{2(1+\alpha)}{\alpha(\alpha+2)}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}\ x\right)^{\operatorname{tg}\ 2x} = \lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{-\frac{2(1+\alpha)}{\alpha(\alpha+2)}} = \lim_{\alpha\to 0}\left[\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-\frac{2(1+\alpha)}{\alpha+2}} = e^{\lim\limits_{\alpha\to 0} -\frac{2(1+\alpha)}{\alpha+2}} = e^{-1}.$$

8.3 Практическое занятие №8. Применение первого и второго «замечательных» пределов к решению задач

Упражнение 8.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем дробь и воспользуемся замечанием о пределе степенной функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Упражнение 8.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Полагаем $t=\operatorname{arctg} x$, где $t\to 0$ при $x\to 0$. Тогда $x=\operatorname{tg} t$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\operatorname{tg} t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{\operatorname{tg} t}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos t}{\frac{\sin t}{t}}=1$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

Упражнение 8.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

Записывая произведение $x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ в виде $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ и полагая

$\dfrac{1}{x}=t$ $(t\to 0$ при $x\to\infty)$, получим $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=2\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=2$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=2$.

Упражнение 8.4. Найти .

Имеем неопределенность . Заменим в числителе дробь на и

преобразуем разность по формуле тригонометрии:

.

Обозначим , где при , тогда

.

Ответ: .

Упражнение 8.5. Найти .

Имеем неопределенность . Полагаем , где при .

Преобразуем дробь под знаком предела, учитывая, что . Тогда

.

Используя формулу приведения , получим

Ответ: .

Упражнение 8.6. Найти

Так как то получим

Ответ:

Упражнение 8.7. Найти

При дробь , дробь Так как то

при Таким образом,

Ответ: .

Упражнение 8.8. Найти

Имеем неопределенность . Преобразуем функцию под знаком

предела: , тогда

Ответ:

Упражнение 8.9. Найти

.

Ответ:

Упражнение 8.10. Найти

Ответ:

Упражнение 8.11. Найти

Рассмотрим

Получаем

Ответ:

Задачи для самостоятельного решения.

Найти пределы:

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

8)

9)

10)

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{2x^2}}$.

9 Лекция №9. Сравнение бесконечно малых. Непрерывность функции

9.1 Сравнение бесконечно малых. Таблица основных эквивалентных бесконечно малых

Определение 9.1.1. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ имеет конечный и отличный от нуля предел, т.е. если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = A \neq 0$, а следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dfrac{1}{A} \neq 0$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка.

Пример 9.1.1.

$$\underset{x\to 0}{\underset{\alpha\to 0}{\alpha(x) = x}}, \quad \underset{x\to 0}{\underset{\beta\to 0}{\beta(x) = \sin 2x}}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = 2$, значит при $x \to 0$, x и sin2x – бесконечно малые одного порядка.

Определение 9.1.2. Если отношение двух бесконечно малых стремится к нулю, например, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty\right)$, то бесконечно малая $\beta(x)$ называется бесконечно малой величиной высшего порядка, чем бесконечно малая $\alpha(x)$. Соответственно, $\alpha(x)$ в этом случае – бесконечно малая низшего порядка по сравнению с $\beta(x)$.

Определение 9.1.3. Бесконечно малая $\beta(x)$ называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой $\boxed{\quad}$, если бесконечно малые $\boxed{\quad}$ и $\boxed{\quad}$ одного порядка, т.е. если $\boxed{\qquad\qquad}$.

Определение 9.1.4. Если отношение двух бесконечно малых при $\boxed{\quad}$ величин стремится к единице при $\boxed{\quad}$, т.е. $\boxed{\qquad\qquad}$, то эти бесконечно малые называются эквивалентными: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ «$\alpha(x)$ равносильно $\beta(x)$ при $\boxed{\quad}$».

Теорема 9.1.1. Для того, чтобы две бесконечно малые функции были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка по отношению к каждой из них.

Доказательство:

Необходимость. Пусть $\boxed{\qquad\qquad}$. Рассмотрим предел отношения разности этих величин к одной из них.

$\boxed{\quad}$, что и означает, что разность $\boxed{\quad}$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\boxed{\quad}$. Доказав аналогично, что $\boxed{\quad}$, покажем, что эта разность есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Достаточность. Пусть $\boxed{\quad}$, тогда $\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$, или $\boxed{\quad}$, т.е. $\alpha \sim \beta$.

Если $\boxed{\quad}$, то $\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$, значит, $\alpha \sim \beta$, что и требовалось доказать.

Теорема 9.1.2. Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если эти бесконечно малые заменить эквивалентными им величинами. (Доказать самостоятельно).

Составим таблицу основных эквивалентных бесконечно малых.

1. Учитывая первый «замечательный предел» $\boxed{\quad}$, можно заметить, что $\sin x \sim x$, и вообще, если при некотором предельном переходе функция $\boxed{\quad}$ бесконечно малая, то $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$.

2. Используя первый «замечательный предел», найдем предел отношения $\boxed{\quad}$ и x при $\boxed{\quad}$:

$\boxed{\quad}$. Следовательно если при некотором предельном переходе $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, то $\mathrm{tg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$.

3. Чтобы найти предел $\boxed{\quad}$, следует сделать замену $\arcsin x = \alpha$, $\alpha \to 0$ при $x \to 0$. Тогда искомый предел равен пределу $\boxed{\quad}$, значит, когда при некотором предельном переходе $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, $\alpha(x) \sim \arcsin \alpha(x)$.

4. Аналогично, если при некотором предельном переходе $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, то $\alpha(x) \sim \mathrm{arctg}\, \alpha(x)$. (Доказать самостоятельно.)

5. Запишем второй «замечательный предел» в виде: . Его можно записать и так: . Тогда , или .

Отсюда , или . Значит, если при некотором предельном переходе α(x) – бесконечно малая, то α(x) ~ .

6. Запишем еще раз второй «замечательный предел»: . Прологарифмируем обе части этого равенства: , или , т.е. . Значит, , т.е. когда α(x) есть бесконечно малая при некотором предельном переходе, α(x) ~ ln(1 + α(x)).

7. Следствие из эквивалентности (5): ~ , когда при некотором предельном переходе α(x) есть бесконечно малая. (Доказать самостоятельно.)

Приведем примеры применения таблицы эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов.

Пример 9.1.2.

Найти , при - бесконечно малая, sin(x - 3)~ (x-3) при $x \to 3$.

Так как при замене бесконечно малой функции sin (x - 3) на эквивалентную ей бесконечно малую (x - 3) предел не изменится, можно написать:

.

Пример 9.1.3.

Найти .

Воспользуемся формулой: . Получим

.

Воспользуемся эквивалентностями: $\sin 3x \sim 3x$, $\sin x \sim x$, $\arcsin 3x \sim 3x$. Заменим бесконечно малые эквивалентными им величинами:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot x}{(3x)^2} = -\frac{2}{3}.$$

9.2 Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва

Определение 9.2.1. (определение непрерывности функции в точке на языке приращений). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f\left(x_0+\Delta x\right) - f(x_0)\right] = 0$. (См. рисунок 40, на котором изображен график функции, непрерывной в точке x_0).

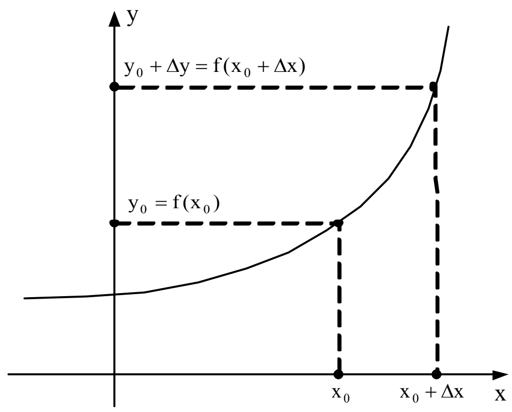


Рисунок 40

Если это условие нарушается, то в точке x_0 функция терпит разрыв (см. рисунок 41).

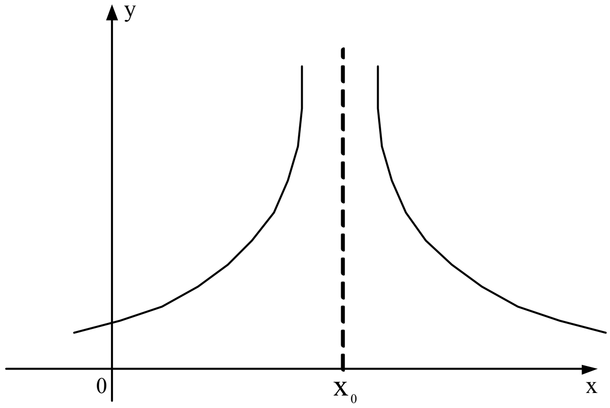


Рисунок 41

Разрыв, изображенный на последнем рисунке, бесконечный. Но функция в точке $\boxed{}$ может терпеть и конечный разрыв (см. рисунок 42).

Рисунок 42

Определение 9.2.2. (равносильное первому, на языке пределов). Функция $\boxed{}$ называется непрерывной в точке $\boxed{}$, если:

1) она определена в этой точке;

2) существует $\boxed{}$. (Если в точке $\boxed{}$ односторонние пределы функции существуют и равны, то предел функции в этой точке существует и равен обоим односторонним пределам.);

3) этот предел равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то функция терпит разрыв в точке x_0. Точка x_0 называется в этом случае точкой разрыва функции $f(x)$.

9.3 Практическое занятие №9. Сравнение бесконечно малых

Упражнение 9.1. Сравнить бесконечно малые функции $\alpha(x) = 1 - \cos 4x$ и $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Учитывая, что sin2x ~ 2x при $x \to 0$, получим $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot 4x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 8x = 0$.

Следовательно, функция $\alpha(x) = 1 - \cos 4x$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с функцией $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Найдем предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot 4x^2}{x^2} = 8$. Так как полученный предел конечен и не равен нулю, то функция $\alpha(x) = 1 - \cos 4x$ - бесконечно малая второго порядка по сравнению с функцией $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Ответ: $\alpha(x)$ - бесконечно малая второго порядка по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to 0$.

Упражнение 9.2. Сравнить бесконечно малые функции $y_1 = \dfrac{1-x}{1+x}$ и при .

Учитывая, что , найдем

.

Следовательно, бесконечно малые функции и эквивалентны при .

Ответ: и эквивалентны.

Упражнение 9.3. Сравнить бесконечно малые функции и при .

Так как ~, ~ при , то

, т.е - бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с . Найдем этот порядок путем подбора. Вычислим

.

Следовательно, бесконечно малая имеет порядок по сравнению с бесконечно малой при .

Ответ: - имеет порядок по сравнению с бесконечно малой при .

Упражнение 9.4. Определить порядок бесконечно малой функции по сравнению с функцией при .

Найдем число k такое, чтобы .

Учитывая, что ~ при , запишем: ~ . Подбором определяем .

Действительно, . Следовательно, функция имеет порядок по сравнению с функцией при .

Ответ: имеет порядок по сравнению с при .

Упражнение 9.5. Найти .

В данном случае и числитель, и знаменатель дроби являются бесконечно малыми функциями при . Так как при замене бесконечно малой функции на эквивалентную ей при функцию искомый предел отношения не изменится, то .

Ответ: .

Упражнение 9.6. Найти .

Воспользуемся соотношением эквивалентности ~ при .

Запишем числитель в виде . Так как при , то ~ при . Учитывая, что ~ при , получим:

.

Ответ: .

Упражнение 9.7. Найти .

Заменяя в числителе дроби единицу на ln e и преобразуя числитель, имеем

.

Ответ: .

Упражнение 9.8. Вычислить .

Учитывая, что ~ , ~ при , найдем .

Ответ: .

Задачи для самостоятельного решения

1. Сравнить бесконечно малые функции и при .

2. Определить порядок k функции по сравнению с функцией при .

3. Сравнить бесконечно малые функции и при .

4. Сравнить бесконечно малые функции и при .

5. Найти пределы:

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) .

10 Лекция №10. Непрерывность и точки разрыва функции

10.1 Классификация точек разрыва

Посмотрим, каким образом может нарушаться какое-либо условие определения 9.2.2, если в точке x_0 наблюдается разрыв функции $f(x)$. От того, какое именно условие нарушается, зависит тип разрыва.

Классификация точек разрыва:

1. а) Функция $f(x)$ не определена в точке x_0, но в этой точке у функции есть односторонние пределы и они совпадают: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = QP$. Данный случай изображен на рисунке 43.

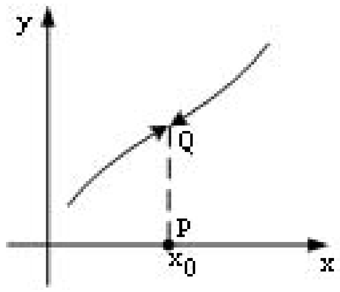


Рисунок 43

б) Функция в точке определена, но ее значение не равно пределу функции в этой точке (рисунок 44).

Рисунок 44

;

.

В этих случаях разрыв называется устранимым. Для устранения разрыва надо доопределить функцию в точке или изменить ее значение в этой точке так, чтобы было равно .

2. Если   не существует, но существуют оба односторонних предела в точке , которые не равны друг другу, то разрыв в точке   называется разрывом первого рода, скачком или конечным разрывом.

Величиной скачка будет называться разность   (рисунок 45).

Рисунок 45

, , , - величина скачка.

3. Если хотя бы один из односторонних пределов функции   в точке   не существует, в частности, равен бесконечности, то разрыв в этой точке называется разрывом второго рода или бесконечным разрывом (рисунок 46).

Рисунок 46

Разрывы первого и второго рода не являются устранимыми.

Функция называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна во всех точках этого множества.

Все элементарные функции непрерывны во всей своей области определения, т.е. область непрерывности элементарной функции полностью совпадает со своей областью определения.

Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, и не может быть разрывной во всех точках некоторого интервала.

Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена, при условии, что она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки в сколь угодно близких к ней точках.

Если функции $\boxed{\quad}$ и $\boxed{\quad}$ непрерывны в точке $\boxed{\quad}$, то в этой точке также будут непрерывны и функции $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ при условии, что $\boxed{\qquad}$. (Это следует из теоремы об арифметических свойствах пределов).

Суперпозиция двух непрерывных функций есть непрерывная функция.

Если функция $U = \varphi(x)$ - непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(U)$ - непрерывна в точке $U_0 = \varphi(x_0)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ - непрерывна в точке x_0.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, и у нее существует обратная функция $x = g(y)$, то функция $g(y)$ также непрерывна.

10.2 Примеры исследования функций на непрерывность

Пример 10.2.1.

Исследуем на непрерывность функцию $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Функции sin x и x непрерывны в любой точке. Значит, их частное - непрерывная функция во всех точках, кроме x = 0. В этой точке функция не определена, и поэтому разрывная.

Установим характер разрыва.

Существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, значит, разрыв в точке $x_0 = 0$ устранимый.

Доопределим функцию в точке $x_0 = 0$.

Пусть f(0) = 1. Новое задание функции: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ График функции представлен на рисунке 47:

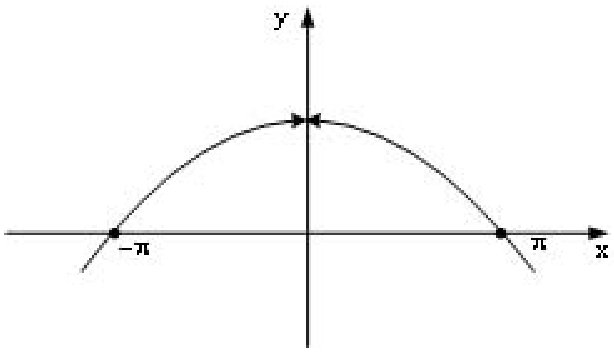


Рисунок 47

Пример 10.2.2.

.

Эта функция определена при . Во всей области определения эта функция непрерывна, как и всякая элементарная функция. Она не определена в точках и , но определена вблизи них. В этих точках функция терпит разрыв. Найдем ее односторонние пределы в этих точках:

;

;

- бесконечный разрыв;

;

;

в точке - бесконечный разрыв.

График функции изображен на рисунке 48.

Рисунок 48

Пример 10.2.3.

.

Эта функция элементарная. Она определена, а следовательно, и непрерывна на всей числовой оси кроме точки . В этой точке она имеет разрыв, поскольку определена в любой ее окрестности, за исключением самой точки . Найдем односторонние пределы функции в этой точке.

Предварительно вспомним, как выглядит график функции и изобразим его (рисунок 49).

Рисунок 49

В точке x = 0 функция имеет скачок, т.е. конечный разрыв, который равен -π.

График функции представлен на рисунке 50.

Рисунок 50

Пример 10.2.4.

Эта функция определена на всей оси, кроме точки x = 3. Из этого следует, что в точке x = 3 функция имеет разрыв.

Исследуем его.

Разрыв конечный первого рода.

. Величина скачка равна двум.

График функции изображен на рисунке 51.

Рисунок 51

Пример 10.2.5.

Эта функция определена и непрерывна для всех значений x, которые удовлетворяют неравенству

Во всех точках отрезка функция не определена. Но точками разрыва являются только точки x = -3 и x = 0.

В этих граничных точках функция также не определена, но она определена в точках, слева сколь угодно близких к точке x = -3 и справа в сколь угодно близких к точке x = 0.

Внутренние точки отрезка точками разрыва не являются, потому что вблизи каждой из них функция не определена.

График функции представлен на рисунке 52.

Рисунок 52

Пример 10.2.6.

Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции

;

Решение: Функция определена для всех значений x. Если x>-1, то x+1>0, в этом случае

Поэтому функция непрерывна (многочлен первой степени).

Аналогично при функция принимает вид и непрерывна.

Исследуем точку

Односторонние пределы существуют, но не равны между собой. В точке x = -1 функция имеет разрыв первого рода

.

График функции изображен на рисунке 53.

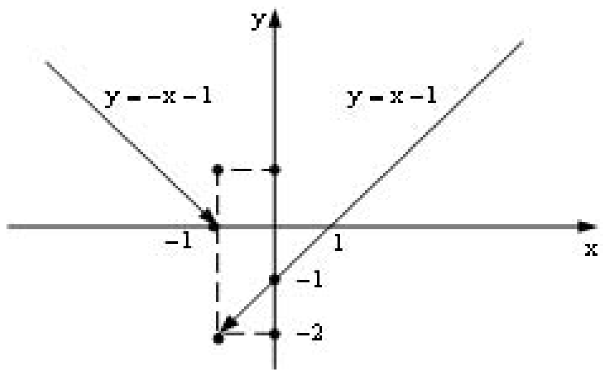


Рисунок 53

10.3 Практическое занятие №10. Односторонние пределы функции в точке. Непрерывность функции

Упражнение 10.1. Найти пределы функции $y = \dfrac{5}{2-x}$ 1) при $x \to 2-0$ и 2) при $x \to 2+0$. Пояснить решение таблицами и построить график функции.

1) Если x будет стремится к 2 слева, оставаясь меньше, чем 2, то $2-x$ будет положительная бесконечно малая, а $\frac{5}{2-x}$ будет положительная бесконечно большая, т.е., если $x \to 2-0$, то $(2-x) \to +0$, а $\frac{5}{2-x} \to +\infty$, или $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{5}{2-x} = +\infty$.

Поведение переменных x, $2-x$ и $\frac{5}{2-x}$ поясняется таблицей 1.

Таблица 1.

x	1	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	…..
2-x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…..
	5	50	500	5000	50000	500000	…..

2) Если $x \to 2+0$, то $(2-x) \to -0$, а $\frac{5}{2-x} \to -\infty$, или $\lim\limits_{x \to 2+0} = -\infty$. Таблица 2 соответствующих значений переменных x, $2-x$ и $\frac{5}{2-x}$ наглядно показывает их поведение.

Таблица 2.

x	3	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	…..
2-x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	…..
$\frac{5}{2-x}$	-5	-50	-500	-5000	-50000	-500000	…..

Эскиз графика функции представлен на рисунке 54.

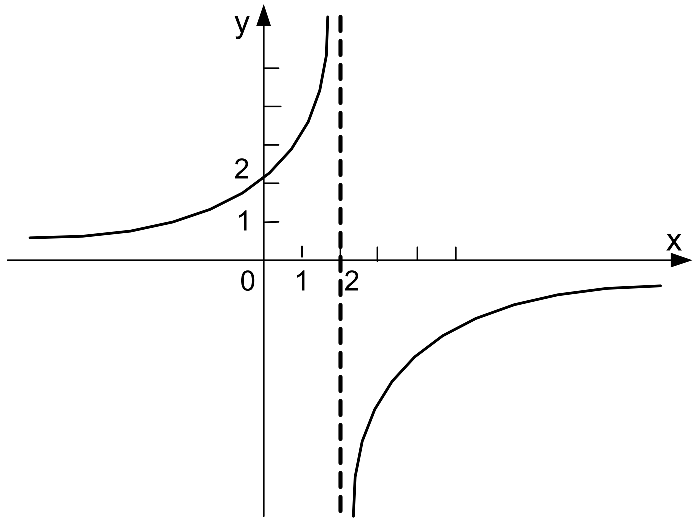


Рисунок 54

При .

Упражнение 10.2. Найти пределы функции при x, стремящемся к нулю 1) слева, 2) справа и 3) произвольным способом.

Решение:

1) Если переменная x будет стремится к нулю слева, оставаясь отрицательной, т.е. если x будет отрицательной бесконечно малой, то будет отрицательной бесконечно большой и .

2) Если , то и .

3) Если x будет стремится к нулю произвольным образом, не оставаясь с одной стороны от нуля, то будет стремится к бесконечности, принимая значения разных знаков. Вследствие этого при функция не имеет предела, не будучи при этом и бесконечно большой величиной, поэтому не существует.

Эскиз графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ представлен на рисунке 55.

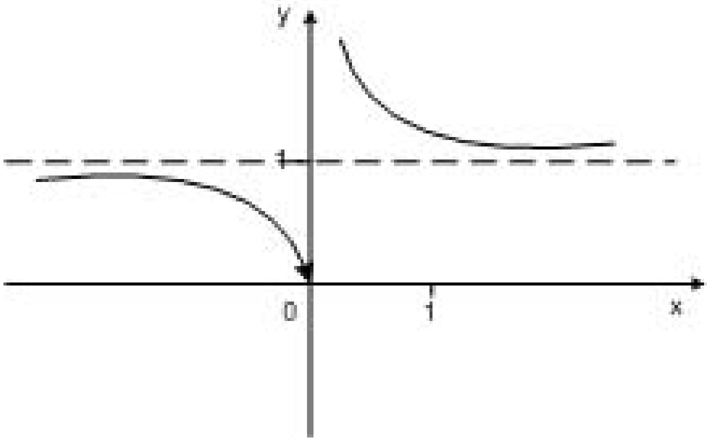


Рисунок 55

Упражнение 10.3. Найти односторонние пределы в точке $x_0 = 1$ функции $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x \le 1; \\ 3x+2, & 1 < x < 3. \end{cases}$

Найдем правый предел функции f(x) в точке $x_0 = 1$, т.е. при $x \to 1$ и $x > 1$. Имеем $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} (3x+2) = 5$.

Для левого предела f(x) в точке $x_0 = 1 (x \to 1, \quad x > 1)$ получим $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (x+1) = 2$.

Упражнение 10.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x > 0; \\ 2, & x < 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Функции $y_1 = x^3 + 2$ и $y_2 = 2$ непрерывны при любом x. Единственной точкой, в которой функция f(x) может иметь разрыв, является точка $x = 0$. Вычислим односторонние пределы функции f(x) в этой точке.

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \left(x^3 + 2\right) = 2;$$

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} 2 = 2.$$

Так как $f(0) = 1 \ne 2$, то $x = 0$ - точка разрыва первого рода данной функции.

Упражнение 10.5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Данная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 0$. Рассмотрим $\lim\limits_{x \to +0} \sin\frac{1}{x}$. Так как $\frac{1}{x} \to +\infty$ при $x \to +0$ и значения функции f(x) колеблются между -1 и 1, не приближаясь к какому-либо определенному значению, то

$\lim\limits_{x\to+0}\sin\frac{1}{x}$ не существует. Аналогично, не существует и $\lim\limits_{x\to-0}=\sin\frac{1}{x}$. Следовательно, $x=0$ - точка разрыва второго рода.

Упражнение 10.6. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$.

Данная рациональная функция непрерывна всюду, кроме точек, где знаменатель обращается в нуль. Следовательно, функция терпит разрыв в точках $x_1=2$ и $x_2=-2$. Найдем односторонние пределы данной функции в этих точках:

$$\lim_{x\to2+0}\frac{x}{x^2-4}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to2-0}\frac{x}{x^2-4}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x}{x^2-4}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x}{x^2-4}=-\infty.$$

Точки $x_1=2$ и $x_2=-2$ - точки разрыва второго рода. Эскиз графика функции $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ представлен на рисунке 56.

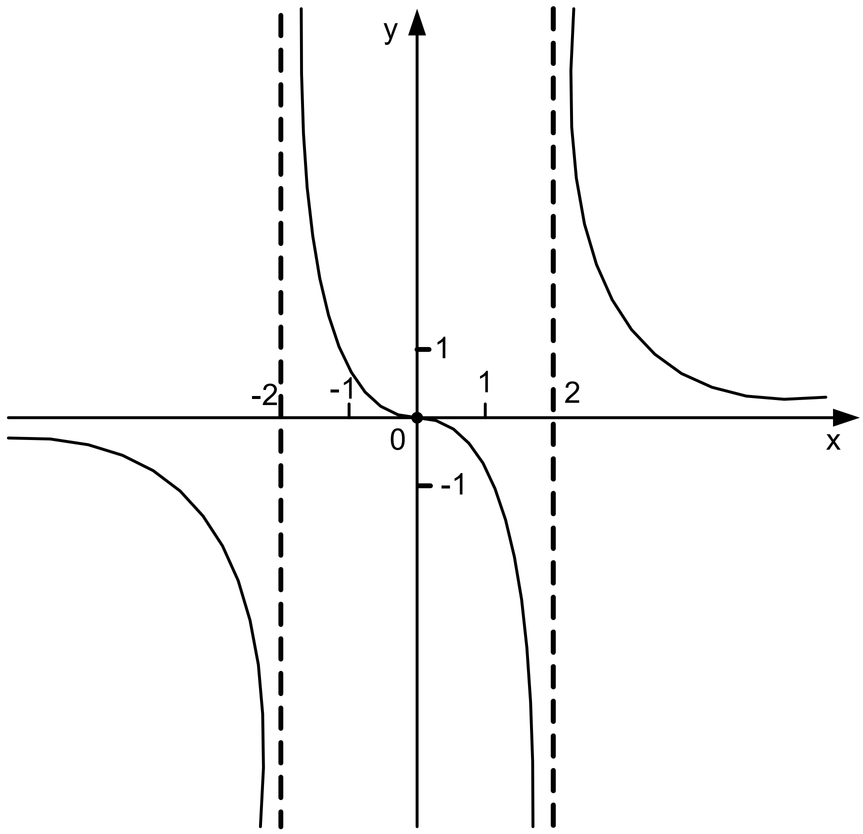


Рисунок 56

Упражнение 10.7. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases} x^2, & -1 \le x < 2; \\ 2x-1, & 2 \le x \le 3. \end{cases}$

Функция f(x) определена всюду на отрезке $[-1;3]$, непрерывна на полуинтервале $[-1;2)$ и на отрезке $[2;3]$. Единственной точкой, в которой возможен разрыв функции f(x), является точка $x_0 = 2$. Вычислим односторонние пределы функции f(x) в этой точке:

$$\lim_{x \to 2-0} x^2 = 4,$$

$$\lim_{x \to 2+0} (2x-1) = 3.$$

Односторонние пределы конечны и различны. Следовательно, $x_0 = 2$ - точка разрыва первого рода. Скачок функции в точке $x_0 = 2$ равен -1. График функции представлен на рисунке 57.

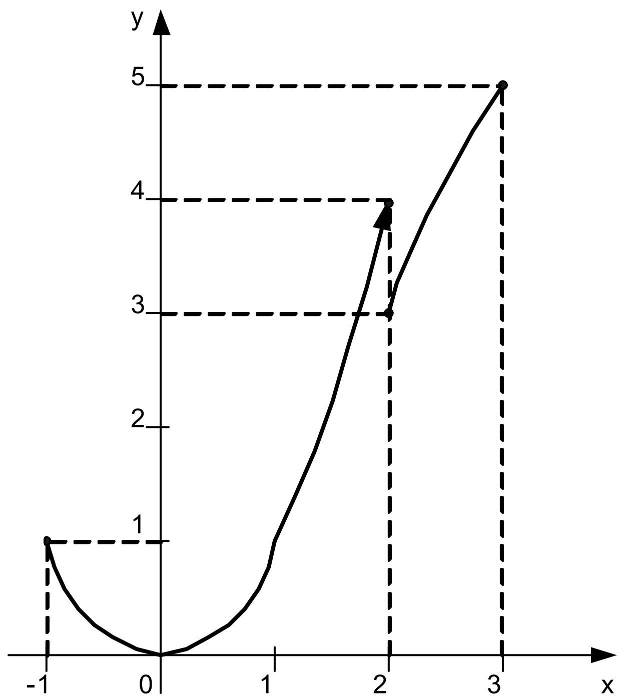


Рисунок 57

Упражнение 10.8. Исследовать на непрерывность функцию $\boxed{}$.

Данная функция непрерывна всюду, кроме точек $\boxed{}$ и $\boxed{}$, так как в точке $\boxed{}$ не определена дробь $\boxed{}$, в точке $\boxed{}$ знаменатель $\boxed{}$

исходной дроби равен нулю. Найдем односторонние пределы данной функции в точках $\boxed{\quad}$ и $\boxed{\quad}$.

При $\boxed{\qquad}$ и $\boxed{\qquad}$ дробь $\boxed{\qquad\qquad}$ и $\boxed{\qquad\qquad}$. При $\boxed{\qquad}$ и $\boxed{\qquad}$ дробь $\boxed{\qquad\qquad}$ и $\boxed{\qquad\qquad}$. Так как в точке $x_1 = 0$ односторонние пределы конечны и различны, то x_1 - точка разрыва первого рода.

При $x \to 1$ и $x > 1$ дробь $\frac{1}{x} < 1$, $2^{\frac{1}{x}} < 2$, разность $2 - 2^{\frac{1}{x}} \to 0$, оставаясь положительной. Поэтому $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{2 - 2^{1/x}} = +\infty$. При $x \to 1$ и $x < 1$ дробь $\frac{1}{x} > 1$, $2^{\frac{1}{x}} > 2$, разность $2 - 2^{\frac{1}{x}} \to 0$, оставаясь отрицательной, и $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{2 - 2^{1/x}} = -\infty$. Следовательно, $x_2 = 1$ - точка разрыва второго рода.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти односторонние пределы функций:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+12} - 3}{x^2 - 9}$ в точке $x_0 = -3$;

2) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-2}}$ в точке $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \mathrm{arcrg}\dfrac{1}{x-5}$ в точке $x_0 = 5$.

2. Исследовать на непрерывность функции:

1) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$;

2) $f(x) = \dfrac{|x|}{x - x^2}$;

3) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0. \end{cases}$;

4) $f(x) = \sqrt[x]{2} - 1$.

11 Лекция №11. Функции, непрерывные на отрезке

11.1 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение 11.1.1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если эта функция непрерывна в каждой внутренней точке этого отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Уточним, что значит «непрерывна справа в точке a».

Это означает, что правый предел функции в точке a равен значению функции в этой точке. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$.

Аналогично, функция непрерывна слева в точке b, если $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Рассмотрим некоторые свойства таких функций.

Теорема 11.1.1. Если функция непрерывна на отрезке , то она ограничена на нем, т.е. существует постоянная , такая, что выполняется неравенство (рисунок 58).

Рисунок 58

Заметим, что если функция непрерывна на интервале или полуинтервале, то она обязательно ограничена на нем. Например, функция непрерывна на полуинтервале , но не ограничена на нем.

Доказательство:

Допустим, что не ограничена на отрезке . Тогда для каждого натурального числа n найдется точка , такая, что

. (11.1.1)

Поскольку a и b – конечные числа, то последовательность ограничена, т.к. целиком находится в отрезке. Из нее, по теореме Больцано-Вейерштрасса, можно выделить подпоследовательность , сходящуюся к некоторому пределу, равному числу α. , так как (теорема о двойном неравенстве).

Но в точке α функция $\boxed{}$ непрерывна (при α = a непрерывна справа, при α = b непрерывна слева).

Поэтому $\boxed{}$. (11.1.2)

Свойства (11.1.1) и (11.1.2) противоречат друг другу. Значит, функция $\boxed{}$ может быть только ограниченной на отрезке $\boxed{}$.

Теорема 11.1.2. (Вейерштрасса). Если функция $\boxed{}$ непрерывна на отрезке $\boxed{}$, то она достигает на этом отрезке своих минимума и максимума, то есть существуют такие точки α и β, $\boxed{}$ и $\boxed{}$, что $\boxed{}$ для всех $\boxed{}$.

Иначе говоря, $\boxed{}$. (См. рисунок 52).

Заметим, что если функция разрывна на отрезке $\boxed{}$, то она может и не иметь наибольшего и наименьшего значения, или и того и другого вместе (см. рисунок 59; в точках $\boxed{}$ и $\boxed{}$ функция имеет устранимый разрыв).

Рисунок 59

Если функция непрерывна не на отрезке, а на интервале, то она также может не иметь наибольшего и наименьшего значения, как показано на рисунке 60.

Рисунок 60

Теорема 11.1.3. Если функция $\boxed{\quad}$ непрерывна на отрезке $\boxed{\quad}$ и принимает на его концах значения разных знаков (например, $\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$), то среди внутренних точек отрезка имеется по крайней мере одна точка c, такая, что $\boxed{\quad}$ (как показано на рисунке 61, где таких точек три).

Рисунок 61

Доказательство:

Обозначим отрезок $\boxed{\quad}$ через $\boxed{\quad}$. Разделим $\boxed{\quad}$ на две равные части. Если в середине $\boxed{\quad}$ функция равна нулю, то теорема доказана. Если в середине этого отрезка функция не равна нулю, то одна из половинок $\boxed{\quad}$ такова, что на ее концах функция принимает значения разных знаков.

Обозначим эту половинку через $\boxed{\quad}$ и разделим ее на две равные части. Если в середине $\boxed{\quad}$ функция равна нулю, то теорема доказана. Если нет, то обозначим через $\boxed{\quad}$ ту половинку $\boxed{\quad}$, на концах которой функция принимает значения разных знаков.

Продолжая рассуждать по индукции, мы либо на очередном этапе этих рассуждений встретим точку $\boxed{\quad}$, в которой $\boxed{\quad}$, и тогда теорема доказана, либо получим бесконечную последовательность вложенных друг друга отрезков $\boxed{\quad}$, на концах каждого из которых функция имеет значения разных знаков. Тогда существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам $\boxed{\quad}$, следовательно, и отрезку $\boxed{\quad}$.

Очевидно, что $\boxed{\quad}$, потому что, если допустить, что например, $\boxed{\quad}$, то нашлась бы окрестность U(c) точки c, такая, что $\boxed{\quad}$ $\boxed{\quad}$; но этого не может быть, потому что при достаточно большом n отрезок $\boxed{\quad}$, а функция не сохраняет знак на $\boxed{\quad}$. Теорема доказана.

Два следствия из теорем о функциях, непрерывных на отрезке.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и $f(a)=A$, $f(b)=B$, $(A \neq B)$, а C – произвольное число, находящееся между числами A и B, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка c, для которой $f(c) = C$.

Это утверждение можно сформулировать и так:

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка $[a, b]$.

Геометрический смысл (см. рисунок 62).

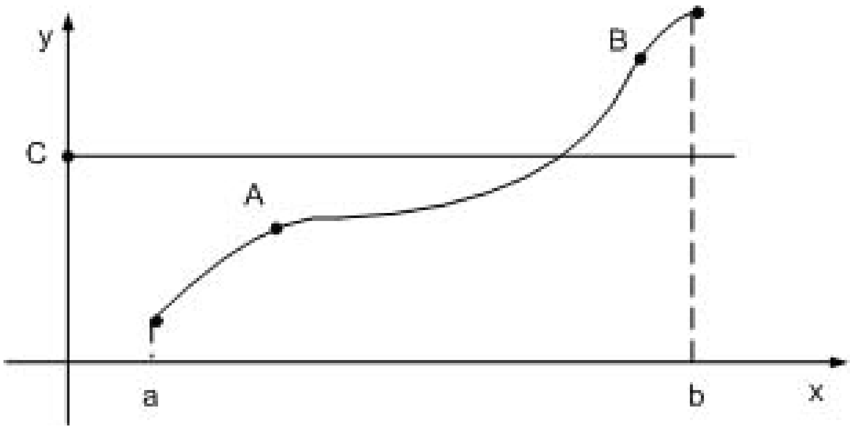


Рисунок 62

График функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, имея точку A под прямой $y = C$ и точку B над этой прямой, непременно пересечет прямую $y = C$ хотя бы в одной точке.

Доказательство:

Введем новую функцию $F(x) = f(x) - C$, где C – константа, число, находящееся между A и B. Так как $f(x)$ - функция непрерывная на отрезке $[a, b]$, функция F(x) будет также непрерывна на отрезке $[a, b]$.

При этом очевидно, что F(x) принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков. Тогда по теореме 11.1.3 на интервале (a, b) существует хотя бы одна точка c, в которой $F(c) = 0$, или $f(x) - C = 0$, т.е. $f(c) = C$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее наименьшим и наибольшим значениями, которые существуют по теореме 11.1.2.

Доказательство:

Достаточно применить следствие 1 к отрезку $[\alpha, \beta]$, где α, β – точки, в которых функция f(x) достигает своих наименьшего и наибольшего значений.

Пример 11.1.1.

Уравнение $x - \cos x = 0$ имеет корень на интервале $(0, \pi)$.

В самом деле, функция $f(x) = x - \cos x$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и на концах его принимает значения разных знаков: $f(0) = -1$, $f(\pi) = \pi + 1$.

11.2 Практическое занятие №11. Контрольная работа «Пределы числовой последовательности и функции»

Вариант 1.

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}$, $a = \dfrac{3}{4}$.

2. Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n-15}\right)^{n+2}$;

6) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.

Вариант 2.

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

2. Вычислить пределы.

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) ;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\operatorname{tg}x}$.

Первая, вводная глава курса математического анализа, таким образом, заканчивается свойствами функций, непрерывных на отрезке. Вторая глава будет называться «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Прежде чем переходить к ней, мы проводим коллоквиум по вопросам, освещенным в первой главе. Ниже предлагается перечень этих вопросов.

12 Вопросы к I главе курса «Математический анализ»

1 Понятие множества. Основные операции над множествами. Перечислите известные вам числовые множества.

2 Какие множества называются: открытыми, замкнутыми, ограниченными, счетными?

3 Точная верхняя и точная нижняя грани множества. Бесконечные множества. Эквивалентные множества.

4 Определение числовой последовательности. Монотонная, ограниченная, сходящаяся последовательности.

5 Определение предела последовательности.

6 Теорема о единственности предела.

7 Теорема об ограниченности последовательности, имеющей предел.

8 Теорема о предельном переходе в неравенстве.

9 Теорема о двойном неравенстве.

10 Теорема о стабилизации знака.

11 Теорема об арифметических свойствах предела.

12 Бесконечно малая и бесконечно большая последовательность и связь между ними.

13 Теорема о сходимости монотонной и ограниченной последовательности.

14 Принцип вложенных отрезков.

15 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

16 Условие Коши сходимости последовательности.

17 Понятие функции. Определение функции одной или нескольких переменных. Геометрический образ функций одной и двух переменных.

18 Четность, нечетность и периодичность функций.

19 Монотонные функции.

20 Обратная функция и ее свойства.

21 Два определения предела функции в точке. Доказательство их эквивалентности.

22 Предел функции f(x) при .

23 Односторонние пределы функции в точке и их связь с пределом функции в этой точке.

24 Бесконечно малые функции и их свойства.

25 Представимость функции, имеющей конечный предел в точке а, в виде суммы этого предела и бесконечно малой при .

26 Первый и второй «замечательные» пределы.

27 Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые.

28 Таблица основных эквивалентностей.

29 Определение непрерывности функции в точке.

30 Классификация точек разрыва.

31 Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Перечисленные вопросы войдут и в программу экзамена за I семестр.

При подготовке к коллоквиуму и экзамену рекомендуется обращаться к тем учебникам и сборникам задач, которые будут использованы и при работе над последующими разделами курса. Список наиболее популярных учебников и задачников приведен ниже.

Список используемых источников

1) **Бугров Я.С.** Дифференциальные и интегральные исчисления/Я.С. Бугров, С.М. Никольский – М.: Наука, 1980.

2) **Данко П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. учебное пособие для вузов/П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Д. Кожевникова – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»; Мир и Образование, 2003.

3) **Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов**: учеб. пособие для студентов высших технических учебных заведений/Г.С. Бараненков, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002.

4) **Запорожец Г.И**. Руководство к решению задач по математическому анализу/Г.И.Запорожец – М.: Высшая школа, 1965.

5) **Ильин В.А.**, Позняк И.Г. Основы математического анализа/В.А. Ильин, И.Г. Позняк – М.: Наука, 1982.

6) **Кудрявцев Л.Д.** Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учеб. пособие/Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабулин; под ред. Л.Д. Кудрявцева – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

7) **Кудрявцев Л.Д**. Курс математического анализа./Л.Д. Кудрявцев - М.: Высшая школа, 1981.

8) **Кузнецов Л.А.** Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие/Л.А. Кузнецов – СПб.: Издательство «Лань», 2005.

9) **Математический анализ в вопросах и задачах**: учеб. пособие/В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин; под ред. В.Ф. Бутузова – М.: Физико-математическая литература, 2001.

10) **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление/Н.С**.** Пискунов – М.: Наука, 1978.

11) **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т.1./Г.М. Фихтенгольц; под ред. и прим. А.А. Флоренского – М.: ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория знаний, 2003.

12) Основы математического анализа. Часть 1/Г.М. Фихтенгольц – СПб.: Издательство «Лань», 2002.

13) **Шипачев В.С.** Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов/ В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998.