МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

Д.В. ДОМАШОВА, Е.Н. СЕДОВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОМУ ПРАКТИКУМУ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2008

УДК 519.615.7(075.6)
ББК 22.19я7
Д 66

Рецензент
кандидат экономических наук, доцент К.И. Майстренко

Домашова Д.В.
Д 66 **Численные методы решения задач нелинейного программирования [Текст]: методические указания к лабораторному практикуму и самостоятельной работе студентов/ Д.В. Домашова, Е.Н. Седова. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. – 23 с.**

Методические указания содержат описания лабораторных работ по нахождению оптимумов функций нескольких переменных с помощью методов условного градиента, проекции градиента, а также внешних и внутренних штрафных функций.

Методические указания предназначены студентам специальностей 080116 «Математические методы в экономике и студентам всех специальностей, изучающим дисциплины «Математические методы и модели исследования операций», «Методы оптимизации» и другие курсы, связанные с численной реализацией алгоритмов решения задач условной нелинейной оптимизации.

ББК 22.19я7

Содержание

Введение

Для приближенного решения задачи условной минимизации разработано много различных методов, которые в целом можно подразделить на две группы:

1. методы спуска, основанные на движении из одной допустимой точки, где выполнены все ограничения, к другой допустимой точке с лучшим значением целевой функции – **методы возможных направлений**;
2. методы, использующие преобразование задачи условной оптимизации в последовательность задач безусловной оптимизации путем введения в рассмотрение вспомогательных функций – **методы последовательной безусловной оптимизации**.

Наиболее часто используемые методы спуска для решения задач безусловной оптимизации определяются выбором направления минимизации (спуска) и способом выбора длины шага спуска. В задачах условной оптимизации выбор направления спуска усложняется тем, что направление должно быть возможным, т.е. не выводить за рамки множества допустимых решений. К методам первой группы относятся *метод проекции градиента*, в котором проблема допустимости получаемых точек решается за счет операции проектирования, и *метод условного градиента*, в котором на каждом итерационном шаге решается задача условной минимизации линейной функции. Таким образом, проблема допустимости получаемых точек в методах группы возможных направлений сопряжена с решением на каждом шаге некоторой экстремальной задачи. Последнее обстоятельство приводит к тому, что метод проекции градиента применяют для множеств такого вида, что задача отыскания проекции некоторой точки на это множество является достаточно простой с точки зрения ее численной реализации, а метод условного градиента применяют в основном для задач с линейными ограничениями, т.е. для множеств простой структуры.

В связи с ограниченностью применения методов первой группы весьма перспективными могут оказаться попытки свести задачу нелинейного программирования к последовательности задач безусловной минимизации. К распространенным методам второй указанной выше группы относятся *методы внешних и внутренних штрафных функций.* К целевой функции добавляется функция штрафа, после чего решается последовательность получившихся задач без функциональных ограничений.

Целью лабораторных работ является формирование навыков нахождения условного минимума функции многих переменных методами проекции градиента, условного градиента, внешних и внутренних штрафных функций.

1 Лабораторная работа №1 «Приближенное решение задачи нелинейного программирования методом проекции градиента»

1.1 Описание лабораторной работы №1

Лабораторная работа включает следующие этапы:

- постановку задачи;
- написание программы;
- выполнение расчетов индивидуальных задач на компьютере и анализ результатов;
- подготовку письменного отчета с выводами по работе;
- защиту лабораторной работы.

Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

1.2 Постановка задачи к лабораторной работе №1

Дана задача нелинейного программирования в общем виде:

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \to \min \qquad (1.1)$$

$$x \in X \subset R^n, \qquad (1.2)$$

где $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ - целевая функция,

X - множество допустимых решений, являющееся замкнутым и выпуклым множеством.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X методом проекции градиента, то есть такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \qquad (1.3)$$

Для поиска минимума целевой функции разработать программу.

Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении А (Таблица А.1).

1.3 Описание метода проекции градиента

Сущность метода проекции градиента состоит в проектировании точки, полученной по методу градиентного спуска, на допустимое множество X.

Дадим определение проекции точки на множество.

Определение. Проекцией точки а на множество X называется точка Пх(а), которая является ближайшей к точке а из всех точек множества X, то есть

$$\Pi x(a) = \arg\min_{x \in X} \varphi(x), \qquad (1.4)$$

где $\varphi(x) = \|x - a\|^2$, т.е. Пх(а) является решением задачи проектирования.

Перечислим свойства проекции.

Пусть X - замкнутое выпуклое множество, $X \subset R^n$.

1. Если $a \in X$, то $\Pi x(a) = a$
2. Проекция $\Pi x(a)$ любой точки $a \in R^n$ существует и единственна
3. Точка Пх(а) является проекцией точки а на множество X тогда и только тогда, когда $< z - \Pi x(a), a - \Pi x(a) > \leq 0 \ \forall z \in X$
4. Для любых $a_1, a_2 \in R^n$ справедливо неравенство $\|\Pi x(a_1) - \Pi x(a_2)\| \leq \|a_1 - a_2\|$, то есть оператор проектирования обладает свойством нерастяжения расстояния.

Доказательства этих свойств приведены в [2], [3].

В основе метода проекции градиента лежит следующая лемма.

Лемма. Пусть множество X выпукло и замкнуто, функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ выпукла на X и дифференцируема в точке $x^* \in X$. Тогда x^* является решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, если

$$x^* = \Pi x(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

при произвольном $\alpha > 0$.

Таким образом, в данном методе в качестве очередного приближения к решению задачи (1.1)-(1.2) выбирается проекция на множество X той точки, которая получается по обычному градиентному методу:

$$x^{k+1} = \Pi x(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)), \quad k = 0,1\ldots, \tag{1.5}$$

где $\nabla f(x^k)$ - вычисленный в точке $x^k \in X$ (на первой итерации - в выбранной точке $x^0 \in X$) градиент целевой функции,

α_k - шаг, выбор значения которого определяется используемым вариантом метода градиентного спуска (например, исходя из исчерпывающего спуска в направлении градиента или метода дробления шага).

В качестве критерия останова можно использовать:

1. критерии, основанные на понятии оценки абсолютной погрешности
   a) $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon_1$;
   b) $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \leq \varepsilon_2$;
   c) $\|\nabla f(x^{k+1})\| \leq \varepsilon_3$;
2. критерии, основанные на понятии оценки относительной погрешности
   a) $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \delta_1(1 + \|x^{k+1}\|)$;
   b) $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \leq \delta_2(1 + |f(x^{k+1})|)$;
   c) $\|\nabla f(x^{k+1})\| \leq \delta_3(1 + \|\nabla f(x^{k+1})\|)$.

Можно также задать максимальное число итераций. Отметим, что выполнение указанных критериев не гарантирует достижения необходимой точности решения задачи, поскольку они могут выполняться и вдали от искомой точки минимума [3].

Приведем теорему о сходимости метода в случае априорного выбора α_k по методу расходящегося ряда.

Теорема 1. Пусть X – выпукло и замкнуто, причем функция $f(x)$ сильно выпукла с константой M, дифференцируема на множестве X, а градиент $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой θ: $\|\nabla f(x) - \nabla f(x')\| \le \theta \|x - x'\|, \forall x, x' \in X$. Тогда последовательность $\{x^k\}$, генерируемая по методу (1.5), где $x^0 \in X$, сходится к решению x^* задачи (1.1)-(1.2) со скоростью геометрической прогрессии.

Отметим, что в методе проекции градиента на каждой итерации нужно решать задачу условной минимизации. Поэтому если X задается с помощью более или менее сложной системы равенств и неравенств, то метод проекции градиента практически неприменим, поскольку задача проектирования оказывается ничуть не проще исходной. В таких случаях прибегают к модификациям данного метода, в которых проектирование на множество заменяют X проектированием на полиэдры, аппроксимирующие X в окрестности очередной точки [3].

Если же X - достаточно простое множество, то иногда проекцию можно найти в явном виде. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся множества:

1. X - шар с радиусом R

$$X = \{x : \|x - x^0\| \le R\}, \text{ тогда } \Pi x(a) = x^0 + \frac{a - x^0}{\|a - x^0\|} \cdot R, \tag{1.6}$$

2. X - координатный параллелепипед

$$X = \{x : b_j \le x_j \le c_j\}, \text{ тогда } \Pi x(a) = \begin{cases} b_j, a_j < b_j \\ a_j, b_j \le a_j \le c_j, j = \overline{1,n} \\ c_j, a_j > c_j \end{cases}, \tag{1.7}$$

3. X - полиэдр

$$X = \{x : Ax = b\}, \text{ тогда } \Pi x(a) = a - A^T (A^T A)^{-1} \cdot (Aa - b), \tag{1.8}$$

4. X - гиперплоскость

$$X = \{x :< p, x >= \beta\}, \text{ тогда } \Pi x(a) = a + (\beta - < p, a >) \cdot \frac{p}{\|p\|^2}, \tag{1.9}$$

Алгоритм метода проекции градиента

Шаг 1.Задаем критерий останова (или любое их сочетание), точность вычислений ε , начальную точку $x^0 \in X$.

Шаг 2. Полагаем $k = 0$.

Шаг 3. Методом градиентного спуска находим $\tilde{x}^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k)$. Выбор шага α_k производится любым методом.

Шаг 4. Находим проекцию $x^{k+1} = \Pi x(\tilde{x}^{k+1})$ на множество X по одной из формул (1.6)-(1.9).

Шаг 5. Проверяем достижение заданной степени точности. Если точность достигнута, то шаг 6. Иначе полагаем $x^{k+1} = x^k$, $k = k + 1$ и переходим к шагу 3.

Шаг 6. Принимаем $x^* := x^{k+1}$, $f(x^*) = f(x^{k+1})$. Конец алгоритма.

2 Лабораторная работа №2 «Приближенное решение задачи нелинейного программирования методом условного градиента»

2.1 Описание лабораторной работы №2

Лабораторная работа включает следующие этапы:

- постановку задачи;
- написание программы;
- выполнение расчетов индивидуальных задач на компьютере и анализ результатов;
- подготовку письменного отчета с выводами по работе;
- защиту лабораторной работы.

Лабораторная работа рассчитана на 2 часа

2.2 Постановка задачи лабораторной работы №2

Дана задача нелинейного программирования в общем виде:

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \to \min \tag{2.1}$$

$$x \in X \subset R^n, \tag{2.2}$$

где $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ - целевая функция, дифференцируемая на X,

X - множество допустимых решений, являющееся выпуклым компактом.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X методом условного градиента, то есть такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \tag{2.3}$$

Для поиска минимума целевой функции разработать программу.

Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении А (Таблица А.2).

2.3 Описание метода условного градиента

Избежать выхода точки x^k за пределы множества X можно не только с помощью операции проектирования.

Пусть на k-ой итерации известна точка $x^{k-1} \in X$. Для нахождения направления спуска используем минимизацию линейной аппроксимации функции $f(x)$ в точке x^{k-1}, то есть функции $f_k(x) = f(x^{k-1}) + \left(\nabla f(x^{k-1}), x - x^{k-1}\right)$.

Так как $f(x^{k-1})$ - константа, то эту задачу можно записать в виде:

$$\left(\nabla f(x^{k-1}), x - x^{k-1}\right) \to \min_{x \in X}. \qquad (2.4)$$

Пусть $\tilde{x}^k = \arg\min_{x \in X} \left(\nabla f(x^{k-1}), x - x^{k-1}\right)$ и $\eta_k = \left(\nabla f\left(x^{k-1}\right), \tilde{x}^k - x^{k-1}\right)$.

Поскольку X – компакт, а $f(x)$ дифференцируема на X, то такая точка $\tilde{x}^k$ всегда существует

Учитывая, что $\tilde{x}^k \in \tilde{O}$, имеем $\eta_k \le \left(\nabla f\left(\tilde{x}^k\right), x - \tilde{x}^k\right) = 0$. Поэтому возможны только два случая: $\eta_k = 0$ или $\eta_k < 0$.

Если $\eta_k = 0$, то $\left(\nabla f\left(\tilde{x}^k\right), x - \tilde{x}^k\right) \ge \eta_k = 0$ при всех $x \in X$, т.е. точка $\tilde{x}^k$ удовлетворяет необходимому условию оптимальности и является стационарной точкой задачи (2.1)-(2.2). В этом случае работа алгоритма заканчивается; точку $\tilde{x}^k$ необходимо исследовать на оптимальность вне рамок данного метода. Если же функция f выпукла, то никакого исследования не требуется: $\tilde{x}^k$ - решение задачи (2.1)-(2.2).

Пусть теперь $\eta_k < 0$. Тогда полагаем $h^k = \tilde{x}^k - x^{k-1}$. Этот вектор принято называть условным антиградиентом функции f в точке $\tilde{x}^k$. Заметим, что $h^k \in U\left(\tilde{x}^k, f\right)$, поскольку $\left(\nabla f\left(\tilde{x}^k\right), h^k\right) = \eta_k < 0$. Кроме того, используя выпуклость X, для любого $\alpha \in$ (0, 1] имеем $x^{k-1} + \alpha \cdot h^k = \alpha \cdot \tilde{x}^k + (1-\alpha) \cdot x^{k-1} \in X$, то есть $h^k \in V\left(\tilde{x}^k, X\right)$.

Таким образом, вспомогательное приближение $\tilde{x}^k$ на каждой k-ой итерации задает вектор $h^k = \tilde{x}^k - x^{k-1}$ (условный антиградиент), определяющий на этой итерации допустимое направление в точке $x^{k-1} \in X$. Оно является направлением спуска, в общем случае не совпадающим с направлением антиградиента целевой функции в точке x^{k-1}. Отсюда и название метода условного градиента. Новая точка x^k строится как:

$$x^k = x^{k-1} + \alpha_k h^k, \qquad (2.5)$$

$$h^k = \tilde{x}^k - x^{k-1} \qquad (2.6)$$

Шаг $\alpha_k > 0$ можно выбирать из условия минимума функции $\varphi_k(\alpha) = f\left(x^{k-1} + \alpha h^k\right)$ по аргументу α в полуинтервале $(0,1]$ или так, чтобы $f(x^k) \le f(x^{k-1})$.

Обоснование выбора шага α заключено в следующей лемме.

Лемма. Пусть X – компакт, $f(x)$ - дифференцируема на множестве X, $\nabla f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой θ. Тогда, $0 < \alpha < \frac{-(1-\varepsilon)\cdot f(\widetilde{x}^k)}{\theta \cdot \|h^k\|^2}$, где $f(\widetilde{x}^k) < 0,\ \forall \varepsilon \in (0,1)$.

Опишем свойства предельных точек последовательности $\{x^k\}$, генерируемой по правилу (2.5), где x^0 – произвольная точка из X, h_k определяется по формуле (2.6), а α_k удовлетворяет описанным выше условиям. При этом считаем, что процесс генерирования продолжается бесконечно, т.е. $\eta_k < 0$ при всех $k = 0,1,\ldots$

Теорема 2. Пусть X – выпуклый компакт. Тогда x_k^*, предельная точка последовательности $\{x_k\}$, которая получается по предложенному методу, является стационарной. Если $f(x)$ - выпуклая функция, то x^* - решение задачи и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = f(x^*)$.

Замечание 1: скорость сходимости метода достаточно мала.

Замечание 2: метод оправдан в тех случаях, когда задача минимизации (2.4) решается просто.

Рассмотрим некоторые простые структуры множества X, для которых решение задачи $\left(\nabla f(x^k), x\right) \to \min\limits_{x\in X}$ удается представить в явном виде или достаточно просто находится:

1. X – шар радиуса R с центром в точке x^0, то есть $X = \left\{x \in R^n : \left|x - x^0\right| \le R\right\}$, то

$$\widetilde{x}^{k+1} = x^0 - \frac{\nabla f(x^k)}{\left\|\nabla f(x^k)\right\|}\cdot R, \qquad (2.7)$$

2. X – координатный параллелепипед, то есть $X = \left\{x \in R^n : x_j \in [a_j, b_j], j = 1,\ldots,n\right\}$, то

$$\widetilde{x}_j^{k+1} = \begin{cases} a_j, & \dfrac{\partial f(x^k)}{\partial x_j} > 0 \\ b_j, & \dfrac{\partial f(x^k)}{\partial x_j} < 0 \\ \forall z \in [a_j, b_j], & \dfrac{\partial f(x^k)}{\partial x_j} = 0 \end{cases}, \quad j = \overline{1,n} \qquad (2.8)$$

3. X – многогранное множество, то есть $X = \{x \in R^n : (a_i, x) \le b_i, i = 1, \ldots, m\}$, или $X = \{x \in R^n : (a_i, x) \le b_i, i = 1, \ldots, m, Bx = d\}$, где B – матрица размерности $l \times n$, а $d \in R^l$, то задача (2.4) сводится к задаче линейного программирования, которая может быть решена симплекс-методом.

Алгоритм метода условного градиента

Шаг 1. Задаем точность вычислений ε, начальную точку $x^0 \in X$.

Шаг 2. Полагаем $k = 1$.

Шаг 3. Решаем задачу $\tilde{x}^k = \arg\min\limits_{x \in X} \left(\nabla f(x^{k-1}), x - x^{k-1}\right)$ (например, используя формулы (2.7), (2.8)). Вычисляем $\eta_k = \left(\nabla f\left(x^{k-1}\right), \tilde{x}^k - x^{k-1}\right)$.

Шаг 4. Проверяем условие окончания итераций. Если $\eta_k < \varepsilon$, то переходим к шагу 7. Иначе получаем направление $h^k = \tilde{x}^k - x^{k-1}$.

Шаг 5. Осуществляем спуск в этом направлении: $x^k = x^{k-1} + \alpha_k h^k$. Выбор шага α_k производится любым методом.

Шаг 6. Полагаем $x^{k+1} = x^k$, $k = k + 1$ и переходим к шагу 3.

Шаг 7. Принимаем $x^* = \tilde{x}^{k+1}$, $f\left(x^*\right) = f\left(\tilde{x}^{k+1}\right)$. Конец алгоритма.

3 Лабораторная работа №3 «Приближенное решение задачи нелинейного программирования методом внешних штрафных функций»

3.1 Описание лабораторной работы №3

Лабораторная работа включает следующие этапы:

- постановку задачи;
- написание программы;
- выполнение расчетов индивидуальных задач на компьютере и анализ результатов;
- подготовку письменного отчета с выводами по работе;
- защиту лабораторной работы.

Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

3.2 Постановка задачи лабораторной работы №3

Дана задача нелинейного программирования:

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \to \min, \tag{3.1}$$

$$x \in X = \{x : g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, m;\ g_j(x) \le 0,\ j = m + 1, \ldots, p\}, \tag{3.2}$$

где $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ - целевая функция, непрерывно дифференцируемая на X,

X - множество допустимых решений, задаваемое дважды непрерывно дифференцируемыми функциями ограничений $g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, m$, $g_j(x) \le 0,\ j = m+1, \ldots, p$.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X методом внешних штрафных функций, то есть такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \tag{3.3}$$

Для поиска минимума целевой функции разработать программу.

Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении А (Таблица А.3).

3.3 Описание метода внешних штрафных функций

Идея метода заключается в сведении задачи на условный экстремум к решению последовательности задач поиска безусловного экстремума вспомогательной функции:

$$F(x, r^k) = f(x) + P(x, r^k) \to \min_{x \in X}, \tag{3.1}$$

где $P(x, r^k)$ - штрафная функция,

r^k - параметр штрафа, задаваемый на каждой k-ой итерации.

Штрафные функции конструируются, исходя из условий:

$$P(x, r^k) = \begin{cases} 0, & \text{при выполнении ограничений} \\ > 0, & \text{при невыполнении ограничений} \end{cases},$$

причем при невыполнении ограничений и $r^k \to \infty$, $k \to \infty$ справедливо, что $P(x, r^k) \to \infty$. Чем больше r^k, тем больше штраф за невыполнение ограничений. Как правило, для ограничений типа равенств используется квадратичный штраф, а для ограничений типа неравенств – квадрат срезки:

$$P(x, r^k) = \frac{r^k}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left[g_j(x)\right]^2 + \sum_{j=m+1}^{p} \left[g_j^+(x)\right]^2 \right\}, \tag{3.2}$$

где $g_j^+(x) = max\{0, g_j(x)\} = \begin{cases} g_j(x), & g_j(x) > 0 \\ 0, & g_j(x) \le 0 \end{cases}$.

Начальная точка поиска может задаваться как вне множества допустимых решений X, так и внутри него. На каждой k-ой итерации ищется точка $x^*(r^k)$ минимума вспомогательной функции $F(x,r^k)$ при заданном параметре r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации. Полученная точка $x^*(r^k)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при возрастающем значении параметра штрафа. При неограниченном возрастании r^k последовательность точек $x^*(r^k)$ стремится к точке условного минимума x^*, но поскольку процедура расчетов завершается при некотором конечном значении параметра штрафа, то приближенное решение, как правило, не принадлежит области допустимых решений, то есть ограничения задачи не выполняются.

Приведем утверждение о сходимости метода.

Утверждение. Пусть x^* - локально единственное решение задачи поиска условного минимума, а функции $f(x)$ и $g_j(x)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^*. Тогда при достаточно больших r^k найдется точка $x^*(r^k)$ локального минимума функции $F(x,r^k)$ в окрестности x^* и $x^*(r^k) \to x^*$ при $r^k \to \infty$.

Алгоритм метода внешних штрафных функций

Шаг 1. Задаем начальную точку x^0, начальное значение параметра штрафа r^0, число $C > 1$ для увеличения параметра штрафа, точность вычислений ε.

Шаг 2. Составляем вспомогательную функцию

$$F(x,r^k) = f(x) + \frac{r^k}{2}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[g_j(x)\right]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}\left[g_j^+(x)\right]^2\right\}.$$

Шаг 3. Находим точку $x^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F(x,r^k)$ по x с помощью любого метода (нулевого, первого или второго порядка): $F(x^*(r^k),r^k) = \min\limits_{x\in X} F(x,r^k)$. В качестве начальной точки взять x^k.

Шаг 4. Вычисляем значение штрафной функции в этой точке, то есть найти $P(x^*(r^k),r^k)$.

Шаг 5. Проверяем условие окончания итераций:

а) если $P(x^*(r^k),r^k) \le \varepsilon$, то перейти к шагу 6.

б) если $P(x^*(r^k),r^k) > \varepsilon$, то положить $r^{k+1} = C \cdot r^k$, $x^{k+1} = x^*(r^k)$, $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

Шаг 6. Принимаем $x^* = x^*(r^k)$, $f(x^*) = f(x^*(r^k))$. Конец алгоритма.

4 Лабораторная работа №4 «Приближенное решение задачи нелинейного программирования методом внутренних штрафных функций»

4.1 Описание лабораторной работы №4

Лабораторная работа включает следующие этапы:

- постановку задачи;
- написание программы;
- выполнение расчетов индивидуальных задач на компьютере и анализ результатов;
- подготовку письменного отчета с выводами по работе;
- защиту лабораторной работы.

Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

4.2 Постановка задачи лабораторной работы №4

Дана задача нелинейного программирования:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \to \min, \tag{4.1}$$

$$x \in X = \{x : g_j(x) \le 0,\ j = 1, \dots, m\}, \tag{4.2}$$

где $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ - целевая функция, дважды непрерывно дифференцируемая на X,

X - множество допустимых решений, задаваемое дважды непрерывно дифференцируемыми функциями ограничений $g_j(x) \le 0,\ j = 1, \dots, m$.

Требуется найти локальный минимум целевой функции на множестве X методом внутренних штрафных функций, то есть такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \tag{4.3}$$

Для поиска минимума целевой функции разработать программу.

Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении А (Таблица А.3).

4.3 Описание метода внутренних штрафных функций

При сохранении той же идеи, что и в методе внешних штрафных функций, в этом методе вместо квадратичных функций штрафа и срезок функции обычно используются:

а) обратная штрафная функция $P(x,r^k) = -r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)}$;

б) логарифмическая штрафная функция $P(x,r^k) = -r^k \sum_{j=1}^{m} ln[-g_j(x)]$.

Обе штрафные функции определены и непрерывны внутри множества X и стремятся к бесконечности при приближении к границе множества изнутри. При $r^k > 0$ обратная штрафная функция. Логарифмическая штрафная функция положительна при $-1 < g(x) < 0$ и отрицательна при $g(x) < -1$, то есть внутренним точкам области отдается предпочтение перед граничными точками.

Начальная точка задается только внутри множества X. Барьерные (внутренние) штрафные функции как бы препятствуют выходу из множества X, а если решение задачи лежит на границе, то процедура метода приводит в движению изнутри области к границе.

Поскольку шаг вблизи границы может привести в точку вне допустимой области, что, в свою очередь, может привести к ложному успеху (уменьшению вспомогательной функции в точке, где она теоретически не определена), то в алгоритме требуется явная проверка того, что точка не покинула допустимую область.

Преимуществом метода внутренних штрафных функций является то, что, хотя процедура поиска обычно завершается при некотором малом отличном от нуля r^k, приближенное решение принадлежит множеству допустимых решений.

Утверждение. Пусть функции $f(x)$, $g_j(x),\ j = 1,\ldots,m$ выпуклы и конечны, множество X^* решений задачи поиска условного минимума непусто и ограничено, существует точка $x^0 \in X$ такая, что $g_j(x^0) < 0,\ j = 1,\ldots,m$. Тогда в методе барьерных функций $X_k^* = arg\,\min_x F(x,r^k) \neq \varnothing$, функции $F(x,r^k)$ выпуклы, последовательность $\{x(r^k)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная алгоритмом, ограничена и все ее предельные точки принадлежат X^*, причем $f(x^*(r^k)) \geq f(x^*)$, $x^* \in X$.

Алгоритм метода внутренних штрафных функций

Шаг 1. Задаем начальную точку x^0, начальное значение параметра штрафа r^0, число $C > 1$ для уменьшения параметра штрафа, точность вычислений ε.

Шаг 2. Составляем вспомогательную функцию $F(x,r^k) = f(x) - r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)}$ или $F(x,r^k) = f(x) - r^k \sum_{j=1}^{m} ln[-g_j(x)]$.

Шаг 3. Находим точку $x^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F(x,r^k)$ по x с помощью любого метода (нулевого, первого или второго порядка): $F(x^*(r^k),r^k) = \min_{x \in X} F(x,r^k)$. В качестве начальной точки взять x^k.

Шаг 4. Вычисляем значение штрафной функции в этой точке, то есть найти $P(x^*(r^k),r^k)$.

Шаг 5. Проверяем условие окончания итераций:

а) если $P\left(x^*\left(r^k\right), r^k\right) \le \varepsilon$, то перейти к шагу 6;

б) если $P\left(x^*\left(r^k\right), r^k\right) > \varepsilon$, то положить $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$, $x^{k+1} = x^*\left(r^k\right)$, $k = k + 1$ и перейти к шагу 2.

Шаг 6. Принимаем $x^* = x^*\left(r^k\right)$, $f\left(x^*\right) = f\left(x^*\left(r^k\right)\right)$. Конец алгоритма.

5 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть выполнен на листах формата А4 с титульным листом, оформленным соответствующим образом и содержать следующее:

1) постановку задачи с вариантом задачи условной оптимизации;
2) подробное описание алгоритма использованного при решении задачи метода;
3) подробную блок-схему реализованного алгоритма;
4) результаты компьютерной обработки данных (указание всех параметров метода, при которых было получено решение, в том числе анализ варьирования этих параметров);
5) выводы по полученным результатам.

6 Вопросы к защите

1 Какие проблемы возникают при поиске *условного* минимума функции?

2 Каким образом операция проектирования используется при решении задач условной оптимизации?

3 Дайте определение проекции точки на множество.

4 Сформулируйте и докажите свойства проекции точки на множество.

5 Как найти проекцию точки на множество, представляющее собой шар радиуса R? Координатный параллелепипед? Полиэдр? Гиперплоскость?

6 В каком случае проекция точки на множество определяется однозначно?

7 Сформулируйте алгоритм метода проекции градиента.

8 Каковы условия и скорость сходимости метода проекции градиента?

9 Как осуществляется выбор шага спуска в методе проекции градиента? В методе условного градиента?

10 Что такое условный антиградиент? Как он находится?

11 Сформулируйте алгоритм метода условного градиента.

12 Как находится решение вспомогательной задачи в методе условного градиента, если допустимое множество является шаром радиуса R? Координатным параллелепипедом? Многогранным множеством?

13 В чем заключается основная идея метода штрафных функций?

14 Исходя из каких принципов конструируются штрафные функции?

15 В чем отличие внешних штрафных функций от внутренних?

16 Как выбирается начальная точка в методе внешних штрафных функций? Внутренних штрафных функций?

17 Приведите примеры штрафных функций для ограничений типа равенств и типа неравенств. Какие из них являются внешними? внутренними?

18 Необходима ли проверка принадлежности точки x^k допустимой области в методе внешних штрафных функций? Почему? А в методе внутренних функций? Почему?

19 Сформулируйте алгоритм метода внешних штрафных функций.

20 Сформулируйте алгоритм метода внутренних штрафных функций.

21 Какое условие выступает в качестве критерия останова в методах штрафных функций? Проекции градиента? Условного градиента?

22 Назовите условия сходимости методов штрафных функций.

Список использованных источников

1 **Пантелеев, А.В.** Методы оптимизации в примерах и задачах: [Текст]: учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высш. шк., 2002. – 544 с.

2 **Андреева, Е.А.** Вариационное исчисление и методы оптимизации: [Текст]: учебное пособие / Е.А. Андреева, В.М. Цирулёва. – Оренбург-Тверь: ГОУ ОГУ, Твер. гос ун-т, 2004. - 575 с.

3 **Аттетков, А.В.** Методы оптимизации: [Текст]: учебное пособие / А. В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э, Баумана, 2001. – 440 с.

Приложение А
(обязательное)

Индивидуальные задания

Таблица А.1 – Индивидуальные задания для решения задач методом проекции градиента

№	Функция	Вид допустимой области
1	2	3
1	$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_2 - 4x_1$	координатный параллелепипед
2	$2x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 + x_3$	шар радиуса R
3	$10x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 - 4\sqrt{5}(5x_1 - x_2) - 16$	гиперплоскость
4	$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 7)^2$	полиэдр
5	$\frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 - 2x_1x_2$	полиэдр
6	$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2$	гиперплоскость
7	$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 1)^2 + x_1x_2$	координатный параллелепипед
8	$\frac{1}{3}(x_2 + 2)^3 + x_1$	шар радиуса R
9	$x_1x_2x_3$	координатный параллелепипед
10	$2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3$	шар радиуса R
11	$(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 3)^2 + x_3$	шар радиуса R
12	$\frac{5}{2x_1} + \frac{9}{x_2} + 2x_1 + x_2$	координатный параллелепипед
13	$x_2^3 - 3x_1x_2$	полиэдр
14	$12x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 4\sqrt{5}(3x_1 - x_3) - 10$	гиперплоскость
15	$x_1^2 + x_2^2$	координатный параллелепипед
16	$x_1x_2x_3 + 5x_2$	шар радиуса R
17	$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 1)^2 + x_1x_2$	шар радиуса R
18	$10x_1^2 - 4x_1^2x_2 + 7x_2^2 - 4\sqrt{5}(5x_1 - x_2) - 16$	полиэдр
19	$\frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + 7x_2$	гиперплоскость
20	$\frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 - 2x_1x_2 + x_3^2$	полиэдр
21	$2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3$	координатный параллелепипед

Продолжение таблицы А.1

1	2	3
22	$10x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 - 4\sqrt{5}(5x_1 - x_2) - 16$	шар радиуса R
23	$\frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2$	гиперплоскость
24	$- x_1^2 - 2x_2^2$	полиэдр
25	$x_2^3 + 6x_1x_2 + x_2^2 + x_3$	координатный параллелепипед

Таблица А.2 – Индивидуальные задания для решения задач методом условного градиента

№	Функция	Вид допустимой области
1	2	3
1	$8x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 12x_2 + 7$	многогранное множество, координатный параллелепипед
2	$x_1x_2x_3$	многогранное множество, шар радиуса R
3	$15x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2 - 4\sqrt{5}(5x_1 - x_2) - 16$	многогранное множество, координатный параллелепипед
4	$2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3$	многогранное множество, координатный параллелепипед
5	$\frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1^2 + x_2^2$	многогранное множество, координатный параллелепипед
6	$x_1x_2x_3 + 5x_1$	многогранное множество, шар радиуса R
7	$x_2^3 - 3x_1x_2 + x_2^2$	многогранное множество, шар радиуса R
8	$x_1 + 2x_2$	многогранное множество, координатный параллелепипед
9	$x_1^2 + 3x_2^2$	многогранное множество, шар радиуса R
10	$10x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 - 4\sqrt{5}(5x_1 - x_2) - 16$	многогранное множество, шар радиуса R
11	$\frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2$	многогранное множество, шар радиуса R
12	$- x_1^2 - 2x_2^2$	многогранное множество, шар радиуса R
13	$x_2^3 + 6x_1x_2 + x_2^2 + x_3$	многогранное множество, шар радиуса R
14	$x_2^3 - 3x_1x_2$	многогранное множество, координатный параллелепипед

Продолжение таблицы А.2

1	2	3
15	$12x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 4\sqrt{5}(3x_1 - x_3) - 10$	многогранное множество, шар радиуса R
16	$x_1^2 + x_2^2$	многогранное множество, координатный параллелепипед
17	$\frac{5}{2x_1} + \frac{9}{x_2} + 2x_1 + x_2$	многогранное множество, координатный параллелепипед
18	$12x_1^2 - 3x_1x_2 + 6x_2^2 - 4\sqrt{5}(3x_1 - x_2) - 11$	многогранное множество, координатный параллелепипед
19	$\frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 - 2x_1x_2$	многогранное множество, координатный параллелепипед
20	$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2$	многогранное множество, шар радиуса R
21	$(x_1 - 4)^2 + (x_2 + 1)^2 + x_1x_2$	многогранное множество, шар радиуса R
22	$\frac{1}{3}(x_2 + 2)^3 + x_1$	многогранное множество, координатный параллелепипед
23	$x_1x_2x_3$	многогранное множество, координатный параллелепипед
24	$2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3$	многогранное множество, шар радиуса R
25	$(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 3)^2 + x_3$	многогранное множество, шар радиуса R

Таблица А.3 – Индивидуальные задания для решения задач методами внешних и внутренних штрафных функций

№	Функция	Ограничения	Вид штрафных функций
1	$10x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 - 4\sqrt{5}(5x_1 - x_2) - 16$	$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 \le 0$	внутренние
2	$x_1^2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 - 2 = 0$	внешние
3	$x_1^2 + x_2^2$	$x_1 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 - 2 \le 0$	внешние
4	$10x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 - 4\sqrt{5}(5x_1 - x_2) - 16$	$x_1 - 2 \le 0$, $x_1 + x_2 - 1 \le 0$	внутренние
5	$15x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2 - 4\sqrt{5}(5x_1 - x_2) - 16$	$x_1^2 + (x_2 + 2)^2 - 4 \le 0$	внутренние
6	$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2$	$x_1 + x_2 \le 3$, $-x_1 + 2x_2 \le 4$	внутренние
7	$x_2^3 - 3x_1x_2$	$4x_1 + 10x_2 \le 40$, $x_1 - 2x_2 = 5$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$	внешние

Продолжение таблицы А.3

1	2	3
8	$x_2^3 - 3x_1x_2 + x_2^2$	$2x_1 + 5x_2 \le 20$, $2x_1 - 4x_2 = 10$
9	$\frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2$	$x_1 - 1 \le 0$, $x_2 \ge 0$
10	$8x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 12x_2 + 7$	$2x_1 + 3x_2 = -6$
11	$\frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1 + x_2$	$x_1 + x_2 \le 6$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$
12	$(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2$	$2x_1 - x_2 \le 2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$
13	$x_1^2 + 2x_2^2$	$-x_1 + x_2 \le 0$, $-x_1 - x_2 - 1 \le 0$
14	$2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3$	$8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 40$, $-2x_1 + x_2 - x_3 = -3$
15	$2x_1^2 + x_2^2$	$-x_1 - x_2 + 2 \le 0$, $x_1 - 2x_2 + 1 \le 0$, $-2x_1 + x_2 \le 0$
16	$\frac{5}{2x_1} + \frac{9}{x_2} + 2x_1 + x_2$	$x_1 + x_2 \le 12$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$
17	$x_1^2 + x_2^2$	$2x_1 + x_2 \ge 2$, $2x_1 + x_2 \le 8$, $x_1 + x_2 \ge 6$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$
18	$x_1^2 + x_2^2$	$(x_1 - 1)^3 - x_2^2 \le 0$
19	$\frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1^2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 \le 6$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$
20	$x_1 + 2x_2$	$8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 40$, $8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 40$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$
21	$\frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1^2 + x_2$	$x_1 + x_2 \le 6$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$
22	$-x_1^2 - 2x_2^2$	$3x_1^2 + x_2^2 \le 1$, $x_1 - 8x_2 \le -1$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$
23	$x_1^2 + 3x_2^2$	$x_1 + x_2 - 2 \le 0$, $x_1 - 1 \le 0$
24	$x_1 x_2 x_3$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ¿ 4 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
25	$12x_1^2 - 3x_1x_2 + 6x_2^2 - 4\sqrt{5}(3x_1 - x_2) - 11$	$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 - 2 \le 0$