МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
″Оренбургский государственный университет″

А.А.ЧАКАК

КУРС ФИЗИКИ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Рекомендовано к изданию Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования ″Оренбургский государственный университет″ в качестве учебного пособия для студентов факультета дистанционных образовательных технологий.

Оренбург 2006

УДК 531 (075.8)
ББК 22.2я 73
Ч 16

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор Н.А.Манаков

Чакак А.А.
Ч 16 **Курс физики. Физические основы механики: учебное пособие для студентов заочного отделения высших учебных заведений/ А.А. Чакак. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. - 188 с.**

В данном разделе «Курса физики» дано систематическое изложение физических основ классической механики, механики жидкостей и газов, рассмотрены элементы специальной теории относительности. В конце каждой главы даются контрольные вопросы, тестовые задания с ответами и упражнения для самоконтроля. В конце учебного пособия приведены контрольные экзаменационные тестовые задания, а также задания для выполнения контрольной работы. В приложении к пособию имеются справочные материалы по математике и общей физике, которые могут оказаться хорошим подспорьем при выполнении практических заданий.

Учебное пособие предназначено для самостоятельного изучения «Физических основ механики» студентами заочного отделения высших учебных заведений. Данное учебное пособие может оказаться полезным для студентов вузов и старшеклассников при проверке ими знаний, полученных при изучении данного раздела «Курса физики».

Учебное пособие рекомендовано к изданию кафедрой общей физики ОГУ. Составитель Чакак А.А.

Ч $\frac{1603010000}{}$

ББК 22.2я 73

Содердание

Содержание

Предисловие

Физика – самая первая из естественных наук. Она отпочковалась от единственной в древности науки – философии.

Свое название физика как наука получила от заглавия книги великого греческого философа Аристотеля (384–322 г.г. до нашей эры) ″Физика″ (от греческого «природа»), посвященной описанию и анализу явлений неживой природы. Таким образом, физика, являясь наукой о наиболее общих законах неживой природы, не только своими корнями уходит глубоко в философию, но и по своей сути является составной частью философии. Не случайно физику в 17−18 веках называли натурфилософией, т.е. философией природы. Поэтому основополагающий труд Ньютона (1643−1727 г.г.) по физике назывался ″Математические начала натуральной философии″. (Философия – наука о наиболее общих законах природы, общества, познания).

Мир представлен совокупностью двух форм материи: поля и вещества. Основополагающие законы существования, движения, взаимодействия и взаимопревращения этих форм материи являются предметом изучения физики. Круг явлений и процессов, изучаемых в физике, постоянно расширяется и представляет фундаментальную базу для развития естественных и технических наук, для становления научной картины мира.

В процессе изучения курса физики, при выполнении лабораторных работ и решении задач в наиболее полном виде формируются элементы научного мышления, усваивается логика построения научных теорий и методика проведения научного эксперимента. Без изучения физики невозможна качественная подготовка любого инженера, любого специалиста в области естественных наук. Для гуманитариев изучение физики является основой формирования естественно-научного представления об окружающем мире.

Раздел 1 Физические основы механики

Простейшим видом движения материи является механическое движение: перемещение различных тел относительно друг друга и изменение формы тела. Законы механического движения рассматриваются в первом разделе физики – в механике. Механика является базовой основой для изучения всех остальных разделов физики.

Глава 1 Элементы кинематики

§ 1.1 Модели в механике. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения

Для описания движения тел в механике используются различные физические модели. Простейшей моделью является материальная точка – тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь. Понятие материальной точки – абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач. Например, изучая движение поезда из Оренбурга в Москву, можно принять его за материальную точку; если же мы рассматриваем движение пассажира относительно поезда, то размеры поезда необходимо учитывать.

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению движения системы материальных точек. В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем переходят к изучению движения системы материальных точек.

При взаимодействии друг с другом тела могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. В определенных случаях деформации тел можно не учитывать. Поэтому в механике вводится еще одна модель – абсолютно твердое тело. Абсолютно твердым телом называется тело, которое ни при каких условиях не деформируется, т.е. расстояние между двумя его произвольными точками остается неизменным.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное. Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе. При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась в разные моменты времени.

Положение материальной точки в пространстве определяется с помощью системы отсчета, связанной с произвольно выбранным телом отсчета (точка отсчета 0 на рисунке 1). Система отсчета – это совокупность системы координат, связанной с точкой отсчета, и часов для отсчета времени. Наиболее часто используется прямоугольная декартовая система координат, в которой положение точки A в данный момент времени t характеризуется тремя координатами *x, y* и *z*, отложенными в определенном масштабе, или радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала системы координат в данную точку A (рисунок 1).

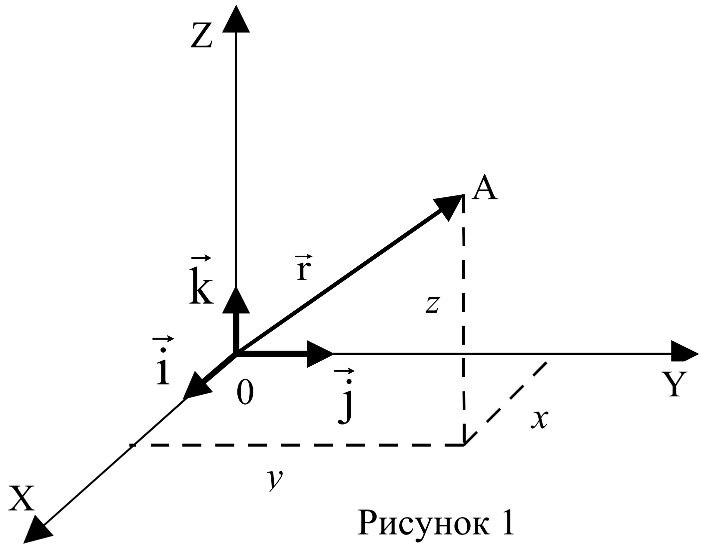


Рисунок 1

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются.

В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t), \tag{1.1}$$

или эквивалентным векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}\,(x,y,z) = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}, \tag{1.2}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей, т.е. единичные векторы, направленные вдоль координатных осей X, Y, Z.

Уравнения (1.1) и (1.2) называются кинематическими уравнениями движения материальной точки.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется числом степеней свободы. Следовательно, если материальная точка движется в пространстве, то она обладает тремя степенями свободы (координаты *x, y* и *z*); если – в некоторой плоскости, то – двумя степенями свободы; если – вдоль прямой линии, то – одной степенью свободы.

Исключая время t из уравнений (1.1), получим уравнение траектории движения материальной точки.

Траектория движения материальной точки – линия, описываемая этой точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории (рисунок 2). Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении А. Длина участка траектории АВ, пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется длиной пути ΔS (или путь) и является скалярной функцией времени: $\Delta S = \Delta S(t)$. Вектор, проведенный из начального положения А движущейся точки в положение В ее в данный момент времени (приращение радиус-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$), называется перемещением.

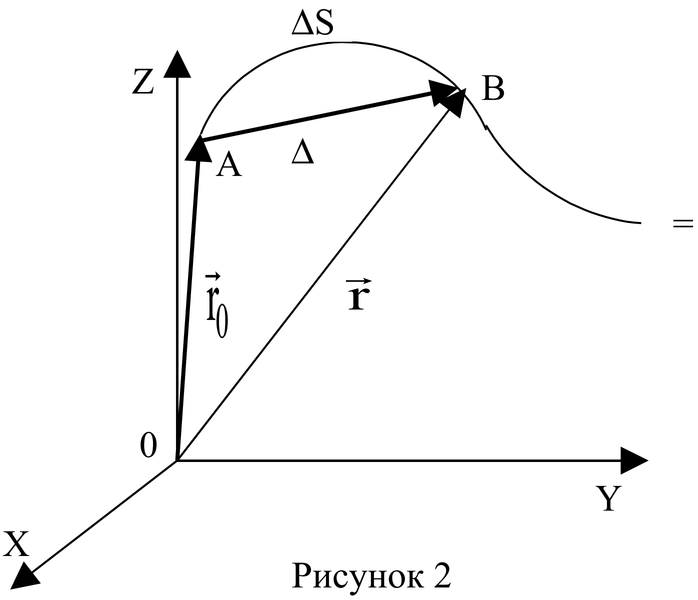


Рисунок 2

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ равен пройденному пути ΔS.

§ 1.2 Скорость и ускорение при прямолинейном движении

Самое простое движение точки – движение по прямой линии. С течением времени точка смещается вдоль прямой линии, удаляясь или приближаясь к заданной точке на данной линии. Прямая линия в этом случае принимается за систему отсчета, относительно которой и рассматривается движение точки.

Если известна координата x (расстояние движущейся точки от некоторой произвольно выбранной точки 0 – начала координат на прямой) как функция времени t, то известен закон движения точки по прямой – $x(t)$. Для анализа удобно изобразить зависимость координаты x от времени t графически (рисунок 3). Таким образом мы можем определить координату x_0, которую имеет точка в любой момент времени t_0. Путь, пройденный точкой, можно определить по ее координате только в том случае, если точка движется в одном направлении. Зависимость координаты от времени $x(t)$ полностью определяет движение точки по прямой, однако в механике важно знать еще две величины: скорость и ускорение.

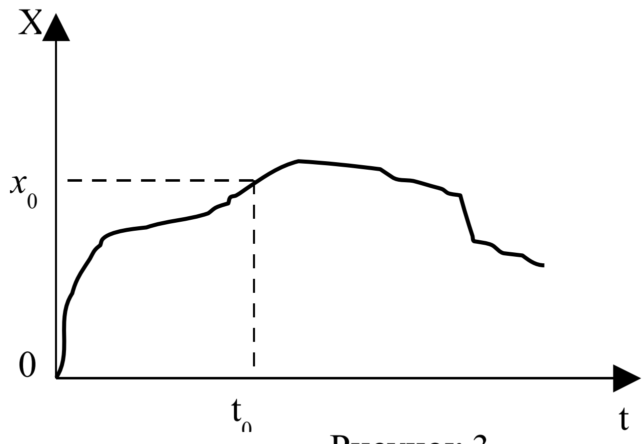


Рисунок 3

Скорость точки есть физическая величина, определяющая изменение координаты с течением времени. Величина средней скорости численно равна отношению пройденного точкой расстояния ко времени, за которое это расстояние пройдено. Пусть в момент времени t_1 тело было в точке x_1, а в момент t_2 – в точке x_2. Следовательно, перемещение его равно $\Delta x = x_2 - x_1$, тогда средняя скорость равна:

$$v_{ср} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что размерность скорости равна отношению двух величин – длины и времени. Скорость измеряется в м/с, см/с, км/ч.

Очевидно, что средняя скорость зависит от промежутка времени, за который мы ее определяем. Если средняя скорость для любого промежутка времени при данном движении одинакова, то это движение происходит с постоянной скоростью и называется равномерным движением. На графике зависимости координаты от времени $x(t)$ равномерное движение представляется прямой линией. При равномерном движении от начала координат нет разницы между величиной координаты и величиной пути.

При неравномерном движении средняя скорость будет различной в зависимости от того, за какой промежуток времени мы ее определяем. Поэтому для более полной и точной характеристики движения вводят мгновенную скорость, т.е. скорость точки в данный момент времени t. По определению мгновенная скорость равна пределу:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \qquad (2.2)$$

В математике этот предел называется производной координаты x по времени t и обозначается:

$$v = \dot{x} = x' = \frac{dx}{dt}. \qquad (2.3)$$

Понятие производной является основным понятием дифференциального исчисления. Используя это понятие можно сказать, что мгновенная скорость v есть производная координаты x(t) по времени t, или производная пройденного пути S по времени t:

$$v = \dot{x} = x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dS}{dt}. \qquad (2.4)$$

Расстояние, пройденное точкой за промежуток времени $t_2 - t_1$ при постоянной скорости v_0, очевидно равно произведению скорости v_0 на время $t_2 - t_1$:

$$x_2 - x_1 = v_0 \cdot (t_2 - t_1). \qquad (2.5)$$

При непостоянной скорости движения точки это выражение лишено смысла. Если известна средняя скорость $v_{ср}$ за время $t_2 - t_1$, то пройденное расстояние будет выражаться формулой, аналогичной (2.5), в которой вместо v_0 будет стоять $v_{ср}$.

В случае, когда средняя скорость неизвестна, вычисление расстояния (пути), пройденного телом, нужно производить особым способом, основанным на том, что всякое движение за достаточно малый промежуток времени можно всегда с достаточной точностью полагать равномерным. Поэтому для определения расстояния dx, которое пройдет тело за достаточно малый промежуток времени dt, нужно скорость v в данный момент времени t умножить на соответствующее приращение времени dt:

$$dx = v \cdot dt. \qquad (2.6)$$

Предположим, что мы разбили весь промежуток времени $t_2 - t_1$ на бесконечно большое число малых промежутков dt. Каждому малому промежутку dt соответствует свое малое приращение dx. Расстояние $x_2 - x_1$, пройденное за время t_2

$-t_1$, можно записать в виде суммы всех dx. Такая сумма называется интегралом и записывается в виде:

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \,.$$

Вместо dx под знаком интеграла подставим равную ему величину $v \cdot$dt, и будем суммировать по времени от t_1 до t_2. Тогда отрезок, пройденный телом за время $t_2 - t_1$, можно записать в такой форме:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot \mathrm{dt} \,.$$

Вычисление величины $x_2 - x_1$ по известной величине v(t) представляет задачу интегрального исчисления. Величина пройденного расстояния равна интегралу от скорости v(t) по времени t.

При неравномерном движении точка имеет переменную скорость, которую, подобно координате, можно рассматривать как функцию времени v(t). На быстроту изменения скорости указывает величина ускорения. Ускорением материальной точки a называют величину, численно равную производной скорости по времени:

$$a = \dot{v} = v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{dt}} \,. \qquad (2.7)$$

или

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \,. \qquad (2.8)$$

Производная (2.7) называется также второй производной координаты x по времени и обозначается символами:

$$a = \ddot{x} = x'' = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{dt}^2} \,. \qquad (2.9)$$

В существовании первой и второй производных координаты по времени в механике, как и во всех аналогичных вопросах физики, мы убеждаемся не путем последовательных рассуждений, а опытным путем. Ускорение измеряется в м/с^2, см/с^2 и т.д.

Движение с постоянным ускорением называется равнопеременным. В этом случае зависимости координаты x и скорости v от времени даются уравнениями:

$$x(\mathrm{t}) = x_0 + v_0\mathrm{t} + \frac{1}{2}a\mathrm{t}^2, \qquad v(\mathrm{t}) = v_0 + a\mathrm{t}, \tag{2.10}$$

где x_0 называется начальной координатой (значение координаты x в начальный момент времени t=0), v_0 – начальной скоростью.
В (2.10) v_0 и a – алгебраические выражения, т.е. $v_0>0$ и $a>0$, если векторы скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{a}$ направлены в сторону положительной полуоси 0X, и $v_0<0$ и $a<0$ – в противном случае.

В случае прямолинейного движения пройденный путь равен $\mathrm{S}=x-x_0$, т.е. из (2.10) следует

$$\mathrm{S} = v_0\mathrm{t} + \frac{1}{2}a\mathrm{t}^2.$$

Примерами равнопеременного движения могут служить свободное падение тел, движение тела, брошенного вертикально вверх, и скатывание тел по наклонной плоскости без трения.

§ 1.3 Скорость и ускорение при движении точки в пространстве

Для характеристики движения материальной точки в пространстве вводится векторная величина – скорость, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени t ее положение определено радиус-вектором $\vec{r}_0$ (см. рисунок 4). В течение малого промежутка времени Δt точка пройдет путь ΔS и совершит элементарное перемещение $\Delta\vec{r}$.

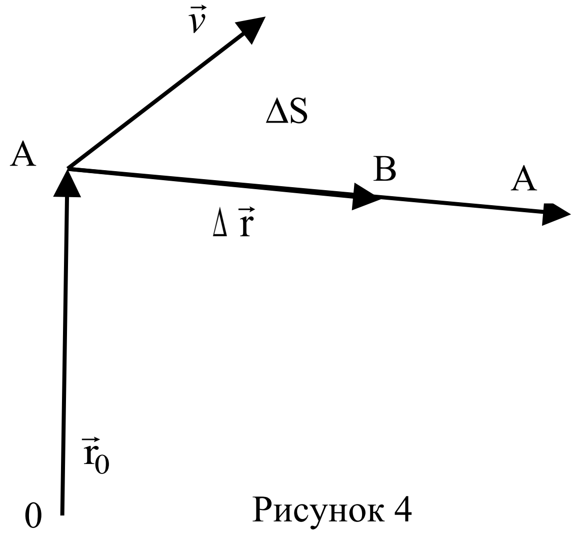


Рисунок 4

Вектором средней скорости $\vec{v}_{ср}$ называется физическая величина, равная отношению приращения $\Delta\vec{r}$ радиус-вектора точки к промежутку времени Δt:

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta \mathrm{t}}. \tag{3.1}$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$. При неограниченном уменьшении Δt средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется мгновенной скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (3.2)$$

Мгновенная скорость $\vec{v}$, таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиус-вектора движущейся точки по времени. Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения (рисунок 4). По мере уменьшения Δt путь ΔS все больше будет приближаться к $|\Delta\vec{r}|$, поэтому модуль мгновенной скорости

$$v = |\vec{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}. \qquad (3.3)$$

При равнопеременном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В этом случае движение точки можно характеризовать скалярной величиной $v_{ср}$ – средней скоростью равнопеременного движения:

$$v_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Из рисунка 3 вытекает, что $v_{ср} > |\vec{v}_{ср}|$, так как $\Delta S > |\Delta\vec{r}|$, и только в случае прямолинейного движения

$$\Delta S = |\Delta\vec{r}|.$$

Если выражение $dS = v \cdot dt$ (см. формулу (3.3)) проинтегрировать по времени в пределах от t до $t+\Delta t$, то найдем путь, пройденный точкой за время Δt:

$$S = \int_{t}^{t+\Delta t} v \cdot dt. \qquad (3.4)$$

В случае равномерного движения численное значение мгновенной скорости постоянно; тогда выражение (3.4) примет вид

$$S = v \cdot \int_{t}^{t+\Delta t} dt = v \cdot \Delta t.$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, дается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot dt.$$

Подставляя в (3.2) выражение (1.2) для радиус-вектора имеем:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}, \qquad (3.5)$$

где v_x, v_y, v_z – составляющие вектора скорости $\vec{v}$.
Значение его модуля находим по теореме Пифагора

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (3.6)$$

Скорость частицы $\vec{v}$ может изменяться со временем, как по величине, так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения вектора скорости точки в механике вводится понятие ускорения.

Пусть в момент времени t скорость равна $\vec{v}$, а в момент t+Δt она равна $\vec{v} + \Delta\vec{v}$. Средним ускорением равнопеременного движения за интервал времени от t до t+Δt называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу времени Δt:

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (3.7)$$

Мгновенным ускорением называют предел среднего ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (3.8)$$

Таким образом, ускорение $\vec{a}$ есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени. Подставляя в (3.8) выражение (3.5) для вектора скорости имеем:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\cdot\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\vec{k} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k}, \qquad (3.9)$$

где a_x, a_y, a_z – составляющие вектора ускорения $\vec{a}$.

Значение его модуля находим по теореме Пифагора

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (3.10)$$

В общем случае полное ускорение $\vec{a}$ можно представить в виде векторной суммы тангенциального и нормального ускорений (см. рисунок 5):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = a_n\cdot\vec{n} + a_\tau\cdot\vec{\tau}; \qquad |\vec{a}| = a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \qquad (3.11)$$

Тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения модуля вектора скорости:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = v', \qquad (3.12)$$

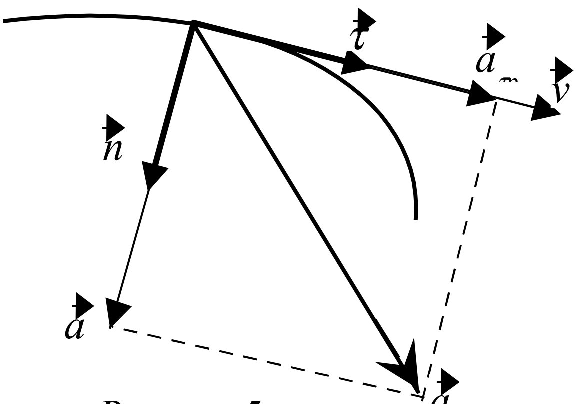


Рисунок 5

т.е. она равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю. На рисунке 5 $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – единичные вектора, направленные, соответственно, по нормали и касательной к траектории. Вектор скорости $\vec{v}$ всегда направлен по касательной к траектории. Векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ коллинеарны, если скорость возрастает со временем (равноускоренное движение) как на рисунке 5, и они направлены в противоположные стороны, если скорость убывает со временем (равнозамедленное движение). Причем, a_τ=0 при равномерном движении, и $a_\tau \neq 0$ при равнопеременном движении.

Нормальная составляющая ускорения равна

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \qquad (3.13)$$

где v – скорость, R – радиус кривизны траектории в данный момент движения по криволинейной траектории.

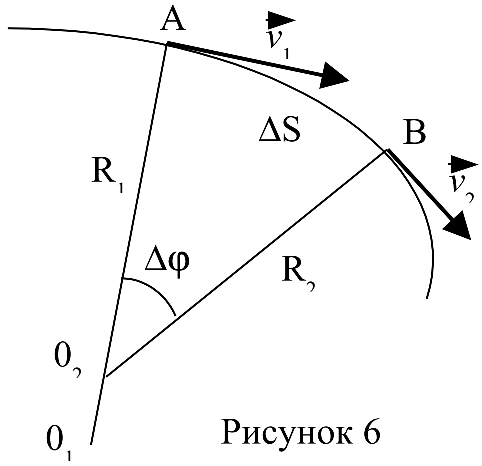


Рисунок 6

Радиус кривизны траектории представляет собой радиус окружности, которая совпадает с ней на данном участке траектории на бесконечно малом ее участке. Центр такой окружности называют центром кривизны для данной точки кривой. Радиус и центр кривизны в точке A (см. рисунок 6) можно определить следующим образом. При движении точки по криволинейной траектории AB в этих точках отметим векторы скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, направленные по касательной к траектории. Перпендикуляры к ним пересекутся в некоторой точке 0_2. Отметим, что для кривой, не являющейся окружностью, расстояния $R_1=0_1A$ и $R_2=0_2B$ будут отличаться друг от друга. Если точку B приближать к точке A, пересечение перпендикуляров 0_2 будет перемещаться вдоль прямой R_1 и в пределе окажется в некоторой точке 0_1. Расстояния R_1 и R_2 будут стремиться к общему пределу, равному радиусу кривизны R. Если элемент участка траектории AB=ΔS, то радиус кривизны траектории в данной точке (A) определяют выражением:

$$R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta \varphi} = \frac{dS}{d\varphi}. \qquad (3.14)$$

Нормальная составляющая ускорения $\vec{a}_n$ направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны. Поэтому ее называют также центростремительным ускорением. При прямолинейном движении нормальное ускорение отсутствует, так как при этом радиус кривизны $R\to\infty$.

Итак, тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по модулю (направлена по касательной к траектории), а нормальная составляющая ускорения – быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории).

Пусть точка движется равномерно с постоянным по величине ускорением. Поскольку при равномерном движении скорость не изменяется по величине, то $\vec{a}_\tau=0$, так что $\vec{a}=\vec{a}_n$. Постоянство по величине $\vec{a}_n$ означает, что $v^2/R=\text{const}$. Отсюда заключаем, что R=const (v=const вследствие равномерности движения). Значит, точка движется по кривой постоянной кривизны, т.е. по окружности. Таким образом, в случае, когда ускорение точки постоянно по величине и направлено в любой момент времени перпендикулярно к вектору скорости, траекторией точки будет окружность.

§ 1.4 Кинематика вращательного движения

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса R (рисунок 7). Ее положение через промежуток времени Δt зададим углом $\Delta\varphi$. Элементарные (бесконечно малые) углы поворота рассматривают как векторы. Модуль вектора $\Delta\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения головки правого винта, если винт вращается в направлении движения точки по окружности, т. е. подчиняется правилу правого винта (рисунок 7). Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются псевдовекторами или аксиальными векторами. Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

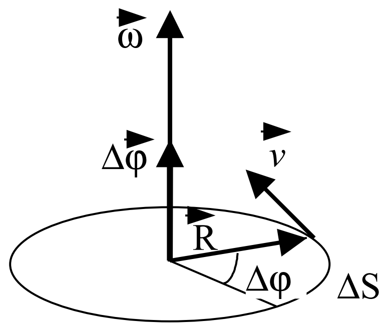


Рисунок 7

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения так же, как и вектор $\Delta\vec{\varphi}$ (см. рисунок 7). Если с конца $\vec{\omega}$ вектора смотреть на плоскость, в которой вращается рассматриваемая точка твердого тела, то наблюдаем вращение против часовой стрелки. Размерность угловой скорости – радиан в секунду (рад/с).

Вращение с постоянной угловой скоростью называют равномерным. Если вращение является равномерным, то $\omega = \varphi / t$, где φ - угол поворота за время t (сравните с выражением для скорости при равномерном движении v=S / t). Таким образом, при равномерном вращении ω показывает, на какой угол поворачивается точка за единицу времени.

Равномерное вращение можно характеризовать периодом вращения T, под которым понимают время совершения одного оборота, т.е. время поворота на угол 2π. Так как промежутку времени Δt=T соответствует угол поворота $\Delta\varphi=2\pi$, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad (4.2)$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (4.3)$$

Число оборотов в единицу времени (частота вращения) ν, очевидно, равно

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что угловая скорость ω равна 2π, умноженному на частоту вращения ν:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{4.5}$$

Понятия периода вращения T и частоты ν вращения можно сохранить и для неравномерного вращения. В этом случае под мгновенным значением T следует понимать то время, за которое точка совершала бы один оборот, если она вращалась равномерно с данным значением угловой скорости, а под ν, понимая то число оборотов, которое совершала бы точка за единицу времени при аналогичных условиях.

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости $\vec{v}$. Скорость каждой из точек непрерывно изменяет свое направление. Величина скорости v определяется угловой скоростью вращения тела ω и расстоянием R рассматриваемой точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени тело повернулось на угол Δφ (рисунок 7). Точка, находящаяся на расстоянии R от оси вращения при этом проходит путь ΔS=RΔφ. Линейная скорость точки равна

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Таким образом,

$$v = \omega \cdot R. \tag{4.6}$$

Формула (4.6) связывает модули линейной и угловой скоростей. Вектор скорости $\vec{v}$ связан с $\vec{\omega}$ через векторное произведение (см. Приложение В):

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{R}\right]. \tag{4.7}$$

Вектор $\vec{\omega}$ может изменяться как за счет изменения скорости вращения тела вокруг оси (в этом случае он изменяется по величине), так и за счет поворота оси вращения в пространстве (в этом случае $\vec{\omega}$ изменяется по направлению). Пусть за время Δt вектор $\vec{\omega}$ получает приращение $\Delta\vec{\omega}$. Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуют величиной:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \qquad (4.8)$$

которую называют угловым ускорением. Угловое ускорение, как и угловая скорость, является псевдовектором.

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{\omega}$, при замедленном – направлен противоположно ему.

Предположим, что ориентация оси вращения тела не изменяется в пространстве. Согласно (3.11) модуль тангенциального ускорения равен dv/dt. Воспользовавшись соотношением (4.6) и учитывая, что расстояние рассматриваемой точки тела от оси вращения R=const, можно написать:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon = \varepsilon \cdot R, \qquad (4.9)$$

где ε - модуль углового ускорения.

При равномерном движении точки по окружности абсолютная величина скорости остается неизменной, но направление ее непрерывно изменяется. Следовательно, вектор скорости, оставаясь перпендикулярным радиусу окружности в любой момент времени, не остается постоянным, а получает приращение. Взяв два вектора скорости точки через небольшой промежуток времени Δt, можно определить приращение скорости (рисунок 8). Для этого строим в соответствующем масштабе отрезки, равные и совпадающие по направлению с векторами скорости $\vec{v}_1$ (в момент времени t) и $\vec{v}_2$ (в момент времени t+Δt). Направления этих векторов совпадают с направлением касательной к окружности в той точке окружности, где находится точка в данный момент. Затем находим приращение скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Очевидно, что вектор $\Delta\vec{v}$ не будет перпендикулярен ни к начальному значению $\vec{v}_1$, ни к конечному $\vec{v}_2$. Однако, если Δt→0, то и $\Delta\vec{v} \to 0$, а направление вектора $\Delta\vec{v}$ в пределе, при Δt→0, стремится к перпендикуляру к вектору скорости $\vec{v}$. Следовательно, достаточное малое приращение вектора $d\vec{v}$ перпендикулярно к вектору $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}_n = d\vec{v}/dt$ перпендикулярно к скорости и направлено к центру окружности.

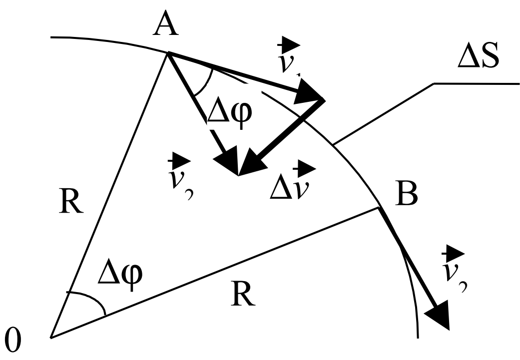


Рисунок 8

Величину ускорения $|\vec{a}_n|$ можно связать с величиной скорости $|\vec{v}|$ движения по окружности и величиной радиуса R. Из чертежа (рисунок 8) видно, что при очень малом Δφ

$$|\Delta\vec{v}| = \Delta v \approx v \cdot \Delta\varphi, \qquad (4.10)$$

а путь, пройденный точкой за время Δt, равен

$$\Delta S = v \cdot \Delta t \approx R \cdot \Delta\varphi. \qquad (4.11)$$

Исключая из этих двух уравнений $\Delta\varphi$, получаем

$$\Delta v \approx \frac{v^2}{R}\Delta t, \qquad (4.12)$$

Или

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{R}; \qquad a_n = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{R}. \qquad (4.13)$$

Такое ускорение a_n направлено к центру окружности (к центру кривизны траектории) и называется центростремительным (нормальным). Комбинируя выражения (4.6) и (4.13) получим следующие уравнения для нормального ускорения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = v\omega. \qquad (4.14)$$

Таким образом, связь между линейными и угловыми величинами определяется следующими формулами:

$$S = R\varphi, \qquad v = \omega R, \qquad a_\tau = \varepsilon \cdot R, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = v\omega. \qquad (4.15)$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности (ε=const):

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \qquad \varphi = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\varepsilon t^2, \qquad (4.16)$$

где ω_0 – начальная угловая скорость, ε - угловое ускорение.

Контрольные вопросы

1 Что называется материальной точкой? Какое тело называют абсолютно твердым? Почему в механике вводят такие модели?

2 Что такое система отсчета?

3 Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?

4 Какое движение называется поступательным? вращательным?

5 Запишите кинематические уравнения движения материальной точки.

6 Что понимают под числом степеней свободы?

7 Дать определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?

8 Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?

9 Какие векторы называют псевдовекторами или аксиальными векторами?

10 Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение? тангенциальное ускорение? Приведите примеры.

11 Что называется угловой скоростью? угловым ускорением? Как определяются их направления?

12 Какова связь между линейными и угловыми величинами?

Тесты

1. Реактивный самолет летит со скоростью V_0=720 км/час. С некоторого момента самолет движется с ускорением в течение t=10 с и в последнюю секунду проходит путь S=295 м. Определите конечную скорость V самолета.

А) 250 м/с В) 300 м/с С) 280 м/с Д) 275 м/с Е) 240 м/с

2. Пуля, летящая со скоростью 400 м/с, ударяется в земляной вал и, двигаясь равнозамедленно, проникает в него на глубину 36 см. Чему будет равна скорость пули к моменту, когда пуля пройдет 99 % своего пути?

А) 40 м/с В) 32 м/с С) 4 м/с Д) 10 м/с Е) 16 м/с

3. Автомобиль, движущийся с начальной скоростью 30 м/с, проехал 175 м с ускорением 2 м/с^2. Сколько времени потребовалось на это?

А) 4 с В) 5 с С) 6 с Д) 8 с Е) 3 с

4. За какое время сделает 100 оборотов колесо, имеющее угловую скорость 4π рад/с?

А) 25 с В) 20 с С) 40 с Д) 50 с Е) 400 с

5. По какой траектории движется частица в горизонтальной плоскости в случае, если $|\vec{V}|$=const и $|\vec{a}|$=const. При этом скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ отличны от нуля.

А) синусоида В) окружность С) прямая Д) парабола Е) гипербола

6. Первую четверть пути автомобиль двигался со скоростью 60 км/час, а оставшуюся часть пути – со скоростью 20 км/час. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

А) 40 км/час В) 36 км/час С) 32 км/час Д) 28 км/час Е) 24 км/час

7. Первый вагон поезда прошел мимо наблюдателя, стоящего на платформе, за t_1=1 с, а второй – за t_2=1,5 с. Длина вагона L=12 м. Найдите ускорение *a* поезда, считая движение равнопеременным.

А) –1,5 м/с^2 В) –2 м/с^2 С) –2,4 м/с^2 Д) –3 м/с^2 Е) –3,2 м/с^2

8. Санки скользят вниз по склону с постоянным ускорением, равным 3 м/с^2. Определите скорость санок после того, как они проскользили 10 м вниз, если их начальная скорость была 2 м/с.

А) 6 м/с В) 7 м/с С) 8 м/с Д) 9 м/с Е) 10 м/с

9. С какой скоростью движется полоса бумаги при печатании газет, если машина отпечатывает 18 000 листов в час? Длина каждого газетного листа 50 см.

А) 25 м/с В) 2 м/с С) 9 м/с Д) 2,5 м/с Е) 0,9 м/с

10. Автомобиль приближается к пункту А со скоростью 80 км/час. В тот момент, когда ему оставалось проехать 10 км, из пункта А в перпендикулярном направлении выезжает грузовик со скоростью 60 км/час. Чему равно наименьшее расстояние между автомобилем и грузовиком?

А) 10 км В) 9 км С) 8 км Д) 6 км Е) 5 км

11. Поезд первую половину пути шел со скоростью в 1,5 раза большей, чем вторую половину пути. Какова скорость поезда на первой половине пути, если средняя скорость прохождения всего пути равна 12 м/с?

А) 14 м/с В) 15 м/с С) 16 м/с Д) 20 м/с Е) 18 м/с

12. Колесо, имеющее угловую скорость вращения $\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, сделает 50 оборотов за время …

А) 25 с В) 100 с С) 75 с Д) 50 с Е) 60 с

13. По наклонной доске пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии L=30 см от начала пути шарик побывал дважды: через t_1=1 с и через t_2=2 с после начала движения. Определите начальную скорость V_0, считая ускорение движения шарика постоянным.

А) 40 см/с В) 45 см/с С) 30 см/с Д) 35 см/с Е) 50 см/с

14. По одному направлению из одной точки одновременно начали двигаться два тела: одно равномерно со скоростью V=9,8 м/с, а другое – равноускоренно без начальной скорости с ускорением a=9,8 см/с^2. Через какое время второе тело догонит первое?

А) 100 с В) 120 с С) 160 с Д) 180 с Е) 200 с

15. За время, равное 2 с, тело, двигаясь прямолинейно и равноускоренно, прошло путь 20 м. Его скорость при этом увеличилась в 3 раза. Определите ускорение тела.

А) 6 м/с^2 В) 5 м/с^2 С) 4 м/с^2 Д) 3 м/с^2 Е) 2 м/с^2

16. Две стрелки начинают двигаться по окружности в одну сторону. Период вращения 1-й составляет T_1=50 с, а 2-й – T_2=30 с. Положения стрелок при этом совпадают через минимальный интервал времени, равный

А) 80 с В) 60 с С) 70 с Д) 65 с Е) 75 с

17. Когда мы говорим, что смена дня и ночи на Земле объясняется вращением Земли вокруг своей оси, то мы имеем в виду систему отсчета, связанную с:

А) Солнцем В) Землей С) Луной Д) планетами Е) любым телом

18. Уклон длиной 50 м лыжник прошел за 10 с, двигаясь с ускорением 0,2 м/с^2. Какова скорость лыжника в начале уклона?

А) 3 м/с В) 4 м/с С) 1 м/с Д) 2 м/с Е) 5 м/с

19. Чему равно центростремительное ускорение тела на экваторе, обусловленное вращением Земли? Радиус Земли равен 6370 км.

А) 2,71 см/с^2 В) 2,92 см/с^2 С) 3,37 см/с^2 Д) 3,95 см/с^2 Е) 4,16 см/с^2

20. С высоты H_1=10 м над землей начинает падать без начальной скорости камень. Одновременно с высоты H_2=5 м вертикально вверх бросают другой камень. С какой начальной скоростью V_0 брошен второй камень, если известно,

что камни встретились на высоте h=1 м над землей? Ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2.

А) 3,9 м/с　В) 3,7 м/с　С) 3,5 м/с　Д) 3,3 м/с　Е) 3,1 м/с

21. С высокой башни вертикально вниз со скоростью 8 м/с бросили камень. На сколько увеличивается скорость камня за вторую секунду полета? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 8 м/с　В) 18 м/с　С) 10 м/с　Д) 20 м/с　Е) 5 м/с

22. Сколько времени потребуется, чтобы увеличить скорость движения тела в 3 раза при его движении с ускорением 5 м/с^2 на пути 20 м?

А) 5 с　В) 4 с　С) 3 с　Д) 2 с　Е) 1 с

23. С крыши с интервалом времени в 1 с падают одна за другой две капли. Через 2 с после начала падения второй капли расстояние между каплями станет равным (полагайте $g=10$ м/с^2):

А) 30 м　В) 25 м　С) 20 м　Д) 15 м　Е) 10 м

24. Если поезд, двигаясь от остановки с постоянным ускорением, прошел 180 м за 15 с, то за первые 5 с от начала движения он прошел

А) 80 м　В) 60 м　С) 36 м　Д) 20 м　Е) 10 м

25. За какую секунду от начала движения путь, пройденный телом в равноускоренном движении, втрое больше пути, пройденного в предыдущую секунду, если движение происходит без начальной скорости?

А) за вторую　В) за третью　С) за четвертую　Д) за пятую　Е) за шестую

26. Тело двигалось со скоростью 6 м/с две трети всего времени движения, оставшуюся треть времени оно двигалось со скоростью 9 м/с. Средняя скорость равна …

А) 6,5 м/с　В) 7,0 м/с　С) 7,5 м/с　Д) 8,0 м/с　Е) 8,5 м/с

27. Со станции вышел товарный поезд, идущий со скоростью 72 км/час. Через 10 мин по тому же направлению вышел экспресс, скорость которого 30 м/с. На каком расстоянии от станции экспресс догонит товарный поезд?

А) 20 км　В) 24 км　С) 28 км　Д) 32 км　Е) 36 км

28. Пуля, летящая со скоростью 400 м/с, ударяется в земляной вал и, двигаясь равнозамедленно, проникает в него на глубину 36 см. Сколько времени двигалась она внутри вала?

А) 2,4 мс В) 1,8 мс С) 3,2 мс Д) 1,2 мс Е) 1,6 мс

29. Определите расстояние, которое пройдет тело до остановки, если оно движется равнозамедленно. Начальная скорость тела V_0=0,64 м/с, а ускорение a= - 0,16 м/с^2.

А) 4 м В) 3,24 м С) 2,56 м Д) 1,28 м Е) 0,96 м

30. Скорость тела, брошенного вертикально вниз с некоторой высоты, через t_1=1 с увеличилась по сравнению с начальной в n_1=6 раз. Во сколько раз увеличилась скорость тела через t_2=2 с после броска? Сопротивление воздуха не учитывайте.

А) 11 В) 8 С) 12 Д) 9 Е) 10

Верные ответы в тестах отмечены красным цветом.

Упражнения для самоконтроля

1.1. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением: $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (C=0,1 м/с^2, D=0,03 м/с^3). Определить: 1) через какое время после начала движения ускорение a тела будет равно 2 м/с^2; 2) среднее ускорение $a_{ср}$ тела за этот промежуток времени. [1) 10 с; 2) 1,1 м/с^2].

1.2. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить угол, под которым тело брошено к горизонту, если максимальная высота подъема тела равна 1/4 дальности его полета. [45^0].

1.3. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиуса R=4 м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$(A=1 м/с^2, B=6 м/с^3, C=3 м/с^4). Определить: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время t_1=5 с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени t_2 =1 с. [1) 6 м/с^2; 2) 85 м; 3) 6,32 м/с^2].

1.4. Частота вращения колеса при равнозамедленном движении за время t=1 мин уменьшилась от 300 об/мин до 180 об/мин. Определить: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время. [1) 0,21 рад/с^2; 2) 240].

1.5. Диск радиусом R=10 см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением:

$\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (B=1 рад/с, C=1 рад/с^2, D=1 рад/с^3). Определить для точек на ободе колеса к концу второй секунды после начала движения: 1) тангенциальное ускорение a_τ; 2) нормальное ускорение a_n; 3) полное ускорение a.
[1) 1,4 м/с^2; 2) 28,9 м/с^2; 3) 28,9 м/с^2].

1.6. Колесо радиусом R=0,1 м вращается так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением ω=2At+5Bt^4 (A=2 рад/с^2, B=1 рад/с^5). Определить полное ускорение точек обода колеса через t=1 с после начала вращения и число оборотов, сделанных колесом за это время.
[a=8,5 м/с^2; N=0,48]

Глава 2 Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Кинематика описывает движение тел, не затрагивая его причин. Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействие между телами), которые обусловливают тот или иной характер движения. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Галилеем (1564–1642) и окончательно сформулированы английским ученым Ньютоном.

Механика Галилея-Ньютона называется классической (нерелятивистской) механикой. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света c в вакууме (c=3·10^8 м/с). Законы движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью c, изучаются в релятивистской механике, основанной на специальной теории относительности, сформулированной Эйнштейном (1879–1955). Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классичесокй (ньютоновой) механики заменяются законами квантовой механики. В нашем курсе, если нет специальной оговорки, мы будем изучать классическую механику, т.е. движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме c.

§ 2.5 Первый закон Ньютона. Масса и импульс тела. Сила

Динамика является основным разделом механики, в ее основе лежат три закона Ньютона, сформулированные им в 1687 г. Законы Ньютона играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением большого количества опытных фактов.

В качестве первого закона динамики Ньютон принял закон, установленный еще Галилеем: всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния. Первый закон Ньютона показывает, что состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения не требует для своего поддержания каких-либо внешних воздействий. В этом проявляется особое динамическое свойство тел, называемое инертностью. Поэтому первый закон Ньютона называют также законом инерции, а движение тела в отсутствие воздействия со стороны других тел – движением по инерции. Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называют инерциальной системой отсчета. Инерциальной системой отсчета является любая система, которая либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно относительно какой-то другой инерциальной системы.

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с поверхностью Земли, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы).

Опыт показывает, что любое тело противится попыткам изменить его состояние движения. Это свойство называют инертностью. Мерой инертности служит масса. Определение массы производят путем сравнения с эталоном. Масса тела m – скалярная физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (инертная масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей 10^{-12} их значения).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость движения, т.е. приобретают ускорения (динамическое проявление сил), либо деформируются, т. е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил). В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Итак, сила $\vec{F}$ – это векторная величина, являющаяся мерой механического действия на рассматриваемое тело со стороны других тел. Механическое взаимодействие может осуществляться как между контактирующими телами (например, при трении, при давлении тел друг на друга), так и между удаленными телами (через поля – гравитационные, электромагнитные и т.п.).

Если на рассматриваемое тело действует несколько сил, то его поступательное движение будет таким же, как если бы на тело действовала результирующая сила, равная векторной сумме отдельных сил:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i . \qquad (5.1)$$

Выражение (5.1) определяет принцип суперпозиции для силы.

Группу рассматриваемых тел называют системой тел. Силы взаимодействия между телами, входящими в систему, называют внутренними. Силы, действующие на тела, входящие в систему, со стороны тел, не входящих в систему, называют внешними. Систему называют замкнутой (изолированной), если на нее не действуют внешние силы.

Согласно многочисленным опытам можно отметить следующие закономерности. Под действием силы материальная точка изменяет свою скорость не мгновенно, а постепенно, т.е. приобретает конечное по величине ускорение, которое тем меньше, чем больше масса материальной точки. Если два тела с разными массами m_1 и m_2 испытывают одинаковые воздействия ($F_1 = F_2$), то тела движутся с ускорениями, обратно пропорциональными их массам:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}. \qquad (5.2)$$

Таким образом, сравнение масс двух тел, на которые действует одна та же сила, сводится к сравнению ускорений этих тел. Взяв некоторое тело за эталон массы, можно сравнивать массу любого тела с этим эталоном. В физике в качестве основной единицы массы принят килограмм. Килограмм есть масса эталонной гири из платиноиридиевого сплава, хранящейся в Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов.

В классической механике выделяют два свойства массы:

- масса – величина аддитивная, т.е. масса тела равна сумме масс его составных частей;

- m = const и не зависит от характера движения тела.

Импульсом $\vec{p}$ или количеством движения называют произведение массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}. \qquad (5.3)$$

Импульсом системы материальных точек называют векторную сумму импульсов отдельных материальных точек, из которых эта система состоит:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \cdot \vec{v}_i. \qquad (5.4)$$

В релятивистской механике импульс частицы также определяется выражением (5.3), только масса m зависит от скорости v согласно формуле:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (5.5)$$

где c – скорость света в вакууме, m_0 – постоянная для данной частицы величина, называемая ее массой покоя.

Масса покоя совпадает с массой, рассматриваемой в классической механике.

§ 2.6 Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения. Он отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил. Второй закон Ньютона гласит, что скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{6.1}$$

Уравнение (6.1) называют уравнением движения тела. Под $\vec{F}$ в уравнении (6.1) понимают результирующую силу, определяемую соотношением (5.1).

Заменив согласно (5.3) импульс $\vec{p}$ произведением $m\cdot\vec{v}$ и учитывая, что в классической механике масса остается постоянной, можно представить соотношение (5.6) в виде:

$$m\cdot\vec{a} = \vec{F}, \tag{6.2}$$

где $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

Таким образом, мы пришли к другой формулировке второго закона Ньютона: произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе.

Единица силы в СИ – ньютон (Н): 1 Н – сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы: 1 Н = 1 кг·м/с^2. В технике широко применяют внесистемную единицу измерения силы – килограмм-сила (кгс; кГ), которая определяется как сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 9,81 м/с^2. Из этого определения следует, что 1 кгс = 1 кГ = 9,81 Н.

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Первый закон Ньютона можно получить из второго. Действительно, в случае равенства нулю равнодействующей силы (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение (см. (6.2)) также равно нулю. Однако первый закон Ньютона рассматривается как самостоятельный закон (а не как следствие второго закона), так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых только и выполняется уравнение (6.1).

В механике большое значение имеет принцип независимости действия сил: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было.

§ 2.7 Третий закон Ньютона

Механическое воздействие тел друг на друга носит характер их взаимодействия: если тело 1 действует на тело 2 с силой $\vec{F}_{21}$, то и тело 2 в свою очередь действует на тело 1 с силой $\vec{F}_{12}$. Третий закон Ньютона утверждает, что силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \qquad (7.1)$$

Эти силы приложены к разным материальным точкам (телам), всегда действуют парами и являются силами одной природы.

При использовании законов динамики иногда допускают следующую ошибку: так как действующая сила всегда вызывает равную по модулю и противоположную по направлению силу противодействия, то, следовательно, их равнодействующая должна быть равна нулю и тела вообще не могут приобрести ускорения. Однако надо помнить, что во втором законе Ньютона речь идет об ускорении, приобретаемом телом под действием приложенных к нему сил. Равенство нулю ускорения означает равенство нулю равнодействующей сил, приложенных к одному и тому же телу. Третий же закон Ньютона говорит о равенстве сил, приложенных к различным телам. На каждое из двух взаимодействующих тел действует только одна сила, которая и сообщает данному телу ускорение.

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики отдельной материальной точки к динамике системы материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

Третий закон Ньютона строго выполняется в случае контактных взаимодействий (т.е. при непосредственном соприкосновении тел), а также при взаимодействии посредством поля находящихся на некотором расстоянии покоящихся тел.

§ 2.8 Принцип относительности Галилея

Преобразованиями Галилея называются преобразования координат и времени, применяемые в классической механике при переходе от одной инерциальной системы отсчета К (с координатами x, y, z) к другой К' (с координатами x', y', z'), которая движется относительно первой поступательно с некоторой постоянной скоростью $\vec{v}_0$. Преобразования Галилея основываются на представлении о независимости времени и расстояния между двумя произвольными точками от системы отсчета. Для простоты вычислений предположим, что оси координат систем К и К′ ориентированы как показано на рисунке 9 и начала координат в момент t = 0 совпадают.

Тогда в любой момент времени t точка с координатами x, y, z в системе К, в системе К′ будет иметь координаты: $x'=x - v_0t$; $y'=y$; $z'=z$. Добавив к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах отсчета течет одинаковым образом, т.е. что $t' = t$, получим совокупность четырех уравнений:

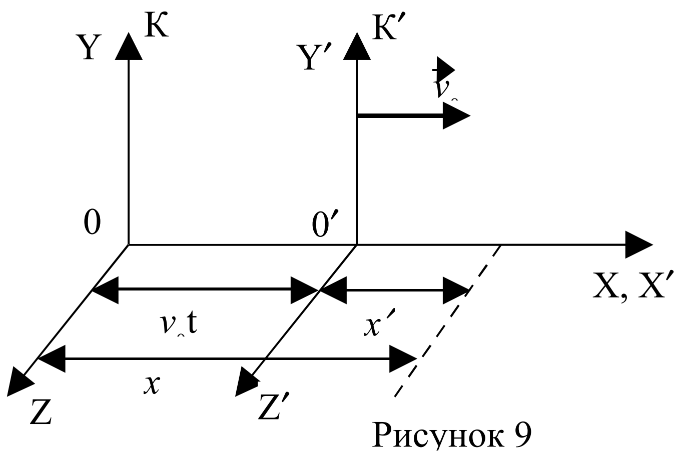


Рисунок 9

$$x' = x - v_0 t; \qquad y' = y; \qquad z' = z; \qquad t' = t, \tag{8.1}$$

называемых преобразованиями Галилея.

Выражения (8.1) справедливы лишь в случае классической механики ($v_0 \ll c$), а при скоростях v_0, сравнимых со скоростью света в вакууме c, преобразования Галилея заменяются более общими преобразованиями Лоренца.

Продифференцировав выражения (8.1) по времени, получим:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v_0 \qquad \text{или} \quad v_x' = v_x - v_0$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \qquad \text{или} \quad v_y' = v_y \tag{8.2}$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} \qquad \text{или} \quad v_z' = v_z$$

Скалярные соотношения (8.2) эквивалентны векторному соотношению:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_0, \tag{8.3}$$

и устанавливают связь скоростей движения $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ рассматриваемой точки в системах отсчета К и К′, соответственно.

Формулы (8.2) и (8.3) дают правило сложения скоростей в классической механике. Они выведены в предположении, что скорость $\vec{v}_0$ постоянна. Следует иметь в виду, что выражение (8.3), как и любое векторное уравнение, остается справедливым при произвольном выборе взаимных направлений координатных осей систем К и К′. Соотношения (8.2) выполняются только при выборе осей, показанном на рисунке 9.

Дифференцируя по времени выражение (8.3) в предположении постоянства $\vec{v}_0$, получим:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \text{или} \qquad \vec{a}' = \vec{a}. \qquad (8.4)$$

Здесь $\vec{a}$ – ускорение точки в системе К, а $\vec{a}'$ – её ускорение в системе К′. Таким образом, ускорения точки в системах отсчета К и К', движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, одинаковы. То есть ускорение инвариантно относительно преобразований Галилея (физические величины и уравнения, остающиеся неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой, называются инвариантными).

Свободная материальная точка движется в системе К без ускорения, так как по предположению система К инерциальная. Формула (8.4) показывает, что ее движение в системе К′ будет также неускоренным. Следовательно и система К′ является инерциальной. Таким образом, система отсчета, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы отсчета, сама является инерциальной системой отсчета. Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то существует и бесконечное множество инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно.

Сила является функцией только инвариантных величин: разностей координат и разностей скоростей взаимодействующих материальных точек. Поэтому она не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой, т.е. $\vec{F}' = \vec{F}$. Иначе говоря, сила инвариантна относительно преобразований Галилея. Так как $\vec{a}' = \vec{a}$ согласно (8.4), то из уравнения (6.2) следует

$$m \cdot \vec{a}' = \vec{F}'.$$

Это уравнение выражает второй закон Ньютона в системе отсчета К′. Оно имеет такой же вид, что и в системе К. Таким образом, уравнения механики Ньютона инвариантны по отношению к преобразованиям координат Галилея. Это утверждение называется принципом относительности Галилея. Следовательно, с помощью механических экспериментов в замкнутой системе тел нельзя установить, покоится эта система или движется прямолинейно и равномерно. Например, сидя в каюте корабля, движущегося равномерно и прямолинейно, мы не можем определить, покоится корабль или движется, не выглянув в иллюминатор. Свободное падение тел, движение брошенных нами тел и все другие механические процессы будут в этом случае происходить так же, как и в случае, если бы корабль был неподвижен.

§ 2.9 Упругие силы

Абсолютно твердое тело – это такое тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться. В абсолютно твердом теле при всех условиях расстояние между двумя произвольными точками остается неизменным. Все реальные тела при определенных условиях деформируются, т.е. тем или иным образом изменяют свою форму и размеры.

В случае твердых тел различают два предельных случая: упругие деформации и пластические деформации. Деформация называется упругой, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму. Деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются пластическими (или остаточными). Характер деформации (упругая или пластическая) зависит как от материала тела, так и от величины внешнего воздействия.

Мы ограничимся изучением только упругих деформаций изотропных тел. Изотропными называются тела, свойства которых одинаковы по всем направлениям.

Рассмотрим однородный стержень длиной l_0 и площадью поперечного сечения S (рисунок 10) и приложим к его основаниям растягивающие или сжимающие силы F. В результате чего длина стержня меняется на величину Δl. Естественно, что при растяжении Δl положительно, а при сжатии – отрицательно.

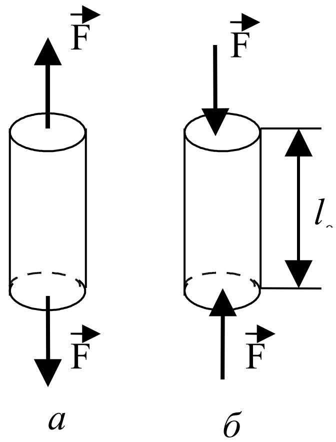


Рисунок 10

Силу, отнесенную к единице площади поперечного сечения стержня, называют напряжением:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \qquad (9.1)$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется нормальным, если же по касательной к поверхности – тангенциальным. В рассматриваемом случае напряжение перпендикулярно к поперечному сечению стержня.

Количественной мерой, характеризующей степень деформации, испытываемой телом, является его относительное удлинение. Так, относительное изменение длины стержня (продольная деформация) равно:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \qquad (9.2)$$

В случае растягивающих сил оно положительно, в случае сжимающих сил – отрицательно. Относительное удлинение, взятое с противоположным знаком, называется относительным сжатием.

Английский физик Р. Гук (1635–1703) экспериментально установил, что для малых деформаций относительное удлинение ε и напряжение σ прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E\varepsilon, \qquad (9.3)$$

где коэффициент пропорциональности E называется модулем Юнга (Т. Юнг (1773–1829) – английский ученый).

Из выражения (9.3) видно, что модуль Юнга (модуль упругости) численно равен напряжению, вызывающему относительное удлинение, равное единице. Поэтому модуль Юнга часто определяют как напряжение, которое необходимо приложить к стержню, чтобы его длина удвоилась (если бы при такой деформации закон Гука (9.3) оставался еще верным). Недостаток этого определения состоит в том, что при таких больших деформациях закон Гука почти для всех тел становится недействительным: тело либо разрушается, либо нарушается пропорциональность между деформацией и приложенным напряжением.

Из формул (9.1), (9.2) и (9.3) вытекает, что

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES} \qquad \text{или} \qquad F = \frac{ES}{l_0}\Delta l = k \cdot \Delta l \tag{9.4}$$

где k – коэффициент упругости (жесткости).

Выражение (9.4) соответствует закону Гука, согласно которому удлинение стержня (пружины) Δl при упругой деформации пропорционально действующей на стержень (пружину) силе F.

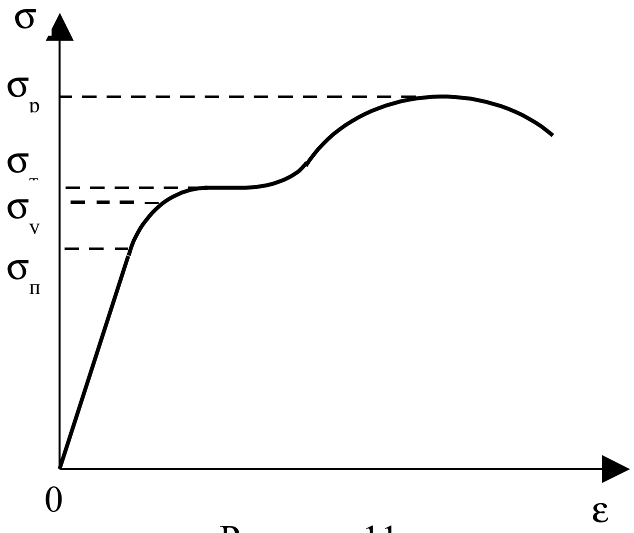


Рисунок 11

График зависимости напряжения σ от относительного удлинения ε называют диаграммой растяжения. Диаграмма растяжения твердого тела σ(ε) имеет вид, изображенный на рисунке 11. Деформации твердых тел подчиняются закону Гука лишь в очень узких пределах (до предела пропорциональности $\sigma_п$). При увеличении напряжения зависимость σ(ε) становится нелинейной, хотя деформация еще упругая вплоть до предела упругости ($\sigma_у$) (т.е. остаточные деформации не возникают). При дальнейшем увеличении напряжений в теле возникают остаточные деформации. Напряжение, при котором остаточная деформация достигает ≈ 0,2 %, называется пределом текучести ($\sigma_т$). При этом деформация возрастает без увеличения напряжения, т. е. тело как бы «течет». Эта область называется областью текучести (или областью пластических деформаций). Материалы, для которых область текучести значительна, называются вязкими, а для которых область текучести практически отсутствует – хрупкими. Дальнейший рост напряжения приводит к разрушению тела. Максимальное напряжение, предшествующее разрушению тела, называется пределом прочности ($\sigma_р$).

Одно и то же твердое тело может при сильном кратковременном воздействии вести себя как хрупкое, а при слабом длительном – как вязкое.

§ 2.10 Силы трения

Силы трения возникают как при относительном перемещении соприкасающихся тел или их частей, так и при их относительном покое.

Трение называют внешним, если оно действует между различными соприкасающимися телами (например, трение между бруском и наклонной плоскостью, на которой он лежит или с которой соскальзывает). Если же трение проявляется между различными частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых непрерывно меняются от слоя к слою, то трение называют внутренним. Трение между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой оно движется, а также трение между различными слоями такой среды, называют вязким (или жидким). Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки (смазки) называют сухим. В случае сухого трения силы трения существуют как при относительном движении соприкасающихся тел, так и при их относительном покое (силы трения покоя), а жидкое трение возможно лишь при относительном движении тел или частей тела. Применительно к сухому трению, когда соприкасающиеся тела движутся друг относительно друга, различают трение скольжения и трение качения.

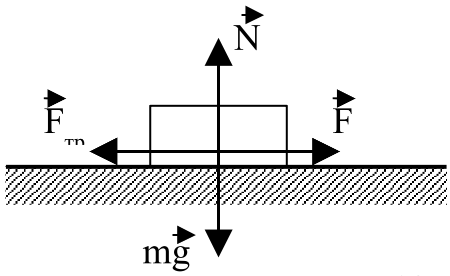


Рисунок 12

Пусть брусок располагается на горизонтальной поверхности (рисунок 12). В состоянии покоя сила тяжести бруска mg уравновешена силой нормального давления (реакцией опоры) N, с которой на брусок действует поверхность (mg = N). Приложим к бруску горизонтальную силу F. Опыт показывает, что если сила F не превосходит некоторой определенной величины F_0 ($F < F_0$), то брусок не приходит в движение. Отсюда следует вывод, что на брусок со стороны поверхности действует равная и противоположно направленная сила $F_{тр}$, уравновешивающая силу F. Это и есть сила трения, а именно трения покоя. Такая же сила трения, но в противоположном направлении, действует на поверхность со стороны бруска. Сила трения покоя автоматически принимает значения, равные внешней силе F. Максимальное значение силы трения покоя равно F_0.

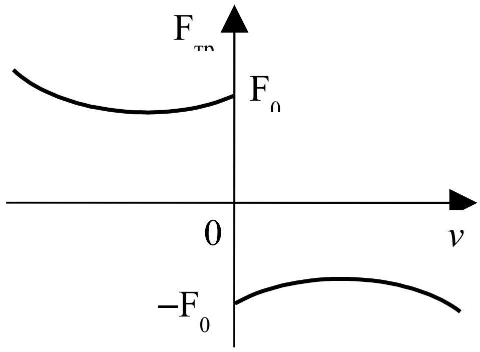


Рисунок 13

Допустим, что брусок скользит по поверхности со скоростью v. При равномерном движении действующая сила F по-прежнему уравновешивается силой $F_{тр}$. Если равновесия нет, то движение будет ускоренным. В обоих случаях сила трения $F_{тр}$, вообще говоря, зависит от скорости v. Характер этой зависимости изображен на рисунке 13. Сила трения, действующая на поверхность бруска, всегда действует против направления движения бруска. На графике это отражено тем, что знаки величин $F_{тр}$ и v всегда противоположны.

При v=0 сила трения покоя может принимать любое значение от $-F_0$ до $+F_0$. При увеличении скорости модуль силы трения сначала убывает, проходит через минимум, а затем начинает возрастать. Зависимость $F_{тр}(v)$ симметрична относительно начала координат $[F(+v) = - F(-v)]$. При специальной обработке соприкасающихся поверхностей сила трения скольжения может оказаться практически не зависящей от скорости. В этом случае криволинейные участки графика на рисунке 13 превращаются в горизонтальные прямые.

Французские физики Г. Амонтон (1663–1705) и Ш. Кулон (1736–1806) опытным путем установили, что сила трения скольжения $F_{тр}$ не зависит от площади соприкосновения трущихся тел и пропорциональна силе N нормального давления, с которой одно тело действует на другое:

$$F_{тр} = \mu N, \tag{10.1}$$

где постоянную μ называют коэффициентом трения (соответственно покоя или скольжения).
Он зависит от свойств соприкасающихся поверхностей.

Трение играет большую роль в природе и технике. Во многих случаях силы трения оказываются полезными. Так, автомобиль приводится в движение силами трения, действующими между шинами колес и полотном дороги. Силы трения между поверхностью дороги и подошвами пешеходов способствуют перемещению пешеходов. Силы трения, возникающие между приводным ремнем и шкивами, осуществляют передачу движения от одного маховика к другому. Благодаря трению удерживается забитый в стену гвоздь и т. д.

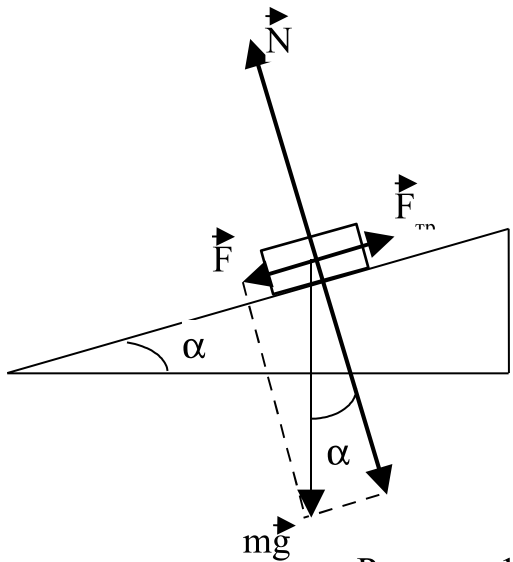


Рисунок 14

В некоторых случаях силы трения оказывают вредное действие. Таковы, например, силы трения, возникающие между деталями машин. Они приводят к преждевременному износу машин, и поэтому их надо уменьшать. Для этого на трущиеся поверхности наносят смазку (сила трения уменьшается примерно в 10 раз), которая заполняет неровности между этими поверхностями и располагается тонким слоем между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, а скользят друг относительно друга отдельные слои жидкости. Таким образом, внешнее трение твердых тел заменяется значительно меньшим внутренним трением жидкости.

Радикальным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения трением качения (шариковые и роликовые подшипники и т.д.).

Коэффициент трения скольжения можно найти с помощью наклонной плоскости (рисунок 14). Тело на наклонной плоскости приходит в движение только когда тангенциальная составляющая $\vec{F}$ силы тяжести $m\vec{g}$ больше силы трения $\vec{F}_{тр}$, т.е. в предельном случае (перед началом скольжения тела):

$$mg \cdot \sin\alpha = \mu N = \mu mg \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$\mu = \text{tg}\alpha. \qquad (10.2)$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла α, при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

§ 2.11 Сила тяжести. Вес

Под действием силы притяжения все тела падают на Землю с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением $\vec{g}$. Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на любое тело массы m действует сила

$$\vec{P} = m\vec{g}, \qquad (11.1)$$

называемая силой тяжести.

Согласно обобщенному закону Галилея, все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Следовательно, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от 9,780 м/с^2 на экваторе до 9,832 м/с^2 на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси и отличием экваториального и полярного радиусов Земли (соответственно 6378 и 6357 км). Так как различие значений g невелико, ускорение свободного падения, которое используется при решении практических задач, принимается равным 9,81 м/с^2. А Землю принимают за однородный шар радиуса R.

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести P и сила гравитационного тяготения F равны между собой:

$$P = m\,g = F = G\frac{mM}{R^2}, \qquad (11.2)$$

где M – масса Земли, R – расстояние между телом и центром Земли, G – гравитационная постоянная.

Эта формула дана для случая, когда тело находится на поверхности Земли.

Значение G, приводимое в таблицах фундаментальных физических постоянных, принимается равным $6{,}670 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2. Очень малая величина G показывает, что сила гравитационного взаимодействия может быть значительной только в случае больших масс.

Пусть тело находится на высоте h от поверхности Земли, тогда

$$P(h) = m \cdot g(h) = G\frac{mM}{(R+h)^2}, \qquad (11.3)$$

т. е. сила тяжести P(h) с удалением от поверхности Земли уменьшается. Из соотношений (11.2) и (11.3) получаем зависимость ускорения свободного падения от высоты h от поверхности Земли:

$$g(h) = g_o\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}, \qquad (11.4)$$

где g_o – ускорение свободного падения у поверхности Земли.
Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести (свободное падение), называется состоянием невесомости.

В физике применяется также понятие веса тела. Весом тела называют силу, с которой тело действует на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения.

Таким образом, сила тяжести действует всегда, а вес тела проявляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести действуют еще другие силы. Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением $\vec{a} \neq \vec{g}$, то на это тело действует дополнительная сила $\vec{N}$, удовлетворяющая условию:

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}. \qquad (11.5)$$

Вес тела в этом случае согласно третьему закону Ньютона равен

$$\vec{P}' = -\vec{N} = \vec{P} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}) \qquad (11.6)$$

т. е. если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, то $\vec{a} = 0$ и $\vec{P}' = m\vec{g}$. Если тело свободно движется в поле тяготения (в этом случае на тело действует только сила тяготения согласно формуле (11.3)) по любой траектории и в любом направлении, то $\vec{a} = \vec{g}$ и $\vec{P}' = 0$, т. е. тело будет невесомым. Например, невесомыми являются тела, находящиеся в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.

Закон всемирного тяготения (см. формулу (11.2)) определяет зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, но не показывает, как осуществляется это взаимодействие. Тяготение принадлежит к особой группе взаимодействий. Силы тяготения, например, не зависят от того, в какой среде взаимодействующие тела находятся. Тяготение существует и в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью поля тяготения, или гравитационного поля. Это поле является одной из форм существования материи. Основное свойство поля тяготения заключается в том, что на всякое тело массой m, внесенное в это поле, действует сила тяготения, т.е.

$$\vec{F} = m\vec{g} \ . \tag{11.7}$$

Вектор $\vec{g}$ не зависит от массы m и называется напряженностью поля тяготения. Напряженность поля тяготения определяется силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает по направлению с действующей силой. Напряженность есть силовая характеристика поля тяготения.

Поле тяготения называется однородным, если его напряженность во всех точках выделенной области пространства одинакова. Поле тяготения называется центральным, если во всех точках поля векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной точке, неподвижной по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета.

Для графического изображения силового поля используются силовые линии (линии напряженности). Силовые линии выбираются так, что вектор напряженности поля направлен по касательной к силовой линии.

Контрольные вопросы

1 Какое движение называют движением по инерции? Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная?

2 Что такое масса (инертная, гравитационная)? Что такое сила? Как их можно охарактеризовать?

3 Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона? Почему?

4 Сформулировав три закона Ньютона, покажите, какова взаимосвязь между этими законами.

5 В чем заключается принцип независимости действия сил?

6 Какова физическая сущность трения? В чем отличие сухого трения от жидкого трения? Какие виды внешнего (сухого) трения Вы знаете?

7 Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми? Является ли Вселенная замкнутой системой? Почему?

8 В чем физическая сущность механического принципа относительности?

9 В чем заключается правило сложения скоростей в классической механике?

10 Что такое вес тела? В чем отличие веса тела от силы тяжести?

11 Как объяснить возникновение невесомости при свободном падении?

12 Что такое напряженность поля тяготения?

13 Какое поле тяготения называется однородным? центральным?

14 Известно, что сила тяготения пропорциональна массе тела. Почему же тяжелое тело не падает быстрее легкого?

15 Какую деформацию называют упругой (пластической)? Нарисуйте диаграмму растяжения вязких материалов.

Тесты

1. Космическая станция движется вокруг Земли по орбите радиусом $8\cdot10^6$ м. Чему приблизительно равна сила тяжести, действующая на космонавта массой 80 кг, в этой станции? Гравитационная постоянная $6{,}67\cdot10^{-11}$ $Н\cdot м^2/кг^2$. Масса Земли $6\cdot10^{24}$ кг. Ускорение свободного падения на поверхности Земли равно 10 $м/с^2$.

А) 0 В) 50 Н С) 80 Н Д) 500 Н Е) 800 Н

2. Шарик массы m, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в момент прохождения положения равновесия и при максимальном отклонении из положения равновесия равны друг другу. Чему равна сила натяжения нити в нижнем положении, если угол отклонения нити в крайнем положении равен α? Ускорение свободного падения g.

А) $mg(1-\cos\alpha)$ В) $mg(1-\sin\alpha)$ С) $mg(1+\sin\alpha)$ Д) 3mg Е) $mg(1+\cos\alpha)$

3. Мальчик массой m=50 кг качается на качелях с длиной подвеса L=4 м. С какой силой он давит на сиденье при прохождении среднего положения со скоростью V=6 м/с? Ускорение свободного падения g =10 $м/с^2$.

А) 1 000 Н В) 950 Н С) 900 Н Д) 850 Н Е) 800 Н

4. Считая известным ускорение свободного падения у поверхности Земли g и ее радиус R, определите радиус круговой орбиты искусственного спутника, который движется по ней со скоростью V.

А) $\frac{gR^2}{V^2}$ В) $\frac{V^2R}{2g}$ С) $\frac{gR}{V^2}$ Д) $\frac{V^2}{2gR}$ Е) $\frac{2gR^2}{V^2}$

5. Груз массой m, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найдите максимальную разность сил натяжения нити. Ускорение силы тяжести g.

А) 4 mg В) 2 mg С) 6 mg Д) 5 mg Е) 3 mg

6. Под действием некоторой силы тележка, двигаясь из состояния покоя, прошла путь 40 см. Когда на тележку положили груз 200 г, то под действием

той же силы за то же время тележка прошла из состояния покоя путь 20 см. Какова масса тележки?

А) 200 г В) 300 г С) 400 г Д) 100 г Е) 600 г

7. Какова должна была бы быть продолжительность суток на Земле, чтобы предметы, расположенные на экваторе, ничего не весили? Радиус Земли 6 400 км. Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

А) 84 мин В) 96 мин С) 60 мин Д) 72 мин Е) 48 мин

8. Чтобы удержать тело на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=45^0$ надо приложить силу F_1=0,2 Н, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, а чтобы равномерно втаскивать вверх, надо приложить силу F_2=0,6 Н. Найдите коэффициент трения.

А) 0,25 В) 0,75 С) 1 Д) 0,5 Е) 0,4

9. Определите массу груза, который нужно сбросить с аэростата массой 1 100 кг, движущегося равномерно вниз, чтобы аэростат стал двигаться с такой же по модулю скоростью вверх. Архимедова сила, действующая на аэростат, равна 10^4 Н. Сила сопротивления воздуха при движении аэростата пропорциональна скорости. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

А) 400 кг В) 300 кг С) 250 кг Д) 200 кг Е) 150 кг

10. Шарик массой 500 г, укрепленный на конце легкого стержня длиной 1 м, равномерно вращается в вертикальной плоскости с угловой скоростью 2 рад/с. С какой силой действует шарик на стержень в нижней точке траектории? Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 7 Н В) 10 Н С) 5 Н Д) 12 Н Е) 4 Н

11. Чему равен тормозной путь автомобиля массой 1 000 кг, движущегося со скоростью 30 м/с? Коэффициент трения скольжения между дорогой и шинами автомобиля равен 0,15. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 15 м В) 30 м С) 150 м Д) 300 м Е) 90 м

12. Камень, привязанный к веревке длиной L=2,5 м, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Масса камня m=2 кг. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. При каком значении периода обращения камня его вес в верхней точке траектории станет равным нулю?

А) 6,28 с В) 3,14 с С) 1,57 с Д) 2 с Е) 4 с

13. Радиус планеты меньше радиуса Земли в 3 раза. Чему равна масса планеты, если сила тяжести тела на ее поверхности равна силе тяжести этого тела на поверхности Земли? Масса Земли равна М.

А) $\frac{M}{3}$ В) 3 М С) $\frac{M}{9}$ Д) 9 М Е) М

14. Определите ускорение свободного падения на высоте h, равной половине радиуса Земли. У поверхности Земли ускорение свободного падения считайте равным g=10 м/с^2.

А) 4,95 м/с^2 В) 3,3 м/с^2 С) 4,4 м/с^2 Д) 5,5 м/с^2 Е) 6,6 м/с^2

15. Космический корабль движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом $2 \cdot 10^7$ м. Определите скорость корабля, считая известными радиус Земли 6 400 км и ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 11 км/с В) 8 км/с С) 6,3 км/с Д) 4,5 км/с Е) 3,8 км/с

16. Поезд массы m=500 т после прекращения тяги паровоза останавливается под действием силы трения F=0,1 МН через время t=1 мин. С какой скоростью V шел поезд до момента прекращения тяги паровоза?

А) 37,8 км/час В) 39,6 км/час С) 41,4 км/час Д) 43,2 км/час Е) 45 км/час

17. Какое ускорение сообщает Солнце Земле своим притяжением? Расстояние до Солнца примерно в 24 тыс. раз больше, чем радиус Земли, а масса Солнца превышает массу Земли в 333 тыс. раз. Ускорение свободного падения у поверхности Земли g=10 м/с^2.

А) 6 $\frac{мм}{с^2}$ В) 12 $\frac{мм}{с^2}$ С) 18 $\frac{мм}{с^2}$ Д) 24 $\frac{мм}{с^2}$ Е) 30 $\frac{мм}{с^2}$

18. Человек сидит на краю круглой горизонтальной платформы радиусом R=4 м. При какой минимальной частоте ν вращения платформы вокруг вертикальной оси человек не сможет удержаться на ней при коэффициенте трения μ =0,27? Ускорение силы тяжести g=9,8 м/с^2.

А) 7,77 $\frac{об}{мин}$ В) 8,12 $\frac{об}{мин}$ С) 8,35 $\frac{об}{мин}$ Д) 8,63 $\frac{об}{мин}$ Е) 9,02 $\frac{об}{мин}$

19. Груз поднимают равноускоренно на высоту h=10 м с помощью веревки. Масса груза m=2 кг. Изначально груз покоился. Определите время подъема t,

если сила натяжения веревки в процессе подъема T=30 Н. Ускорение силы тяжести g=10 м/с^2.

А) 6 с В) 5 с С) 4 с Д) 3 с Е) 2 с

20. Самолет делает″мертвую петлю″ с радиусом R=100 м и движется по ней со скоростью V=280 км/час. С какой силой F тело летчика массой M=80 кг будет давить на сиденье самолета в верхней точке петли? Ускорение силы тяжести g=9,8 м/с^2.

А) 2 853 Н В) 3 256 Н С) 3 812 Н Д) 4 056 Н Е) 5 624 Н

21. В шахту опускается равноускоренно груз массой 580 кг. За первые 10 с он проходит 35 м. Найдите натяжение каната, на котором висит груз. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 4,6 кН В) 5,0 кН С) 5,4 кН Д) 5,8 кН Е) 6,2 кН

22. Канат лежит на столе так, часть его свешивается со стола и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части составляет k=0,2 его длины. Чему равен коэффициент трения каната о стол?

А) 0,4 В) 0,3 С) 0,1 Д) 0,2 Е) 0,25

23. Каков вес поезда, идущего с ускорением 0,05 м/с^2, если коэффициент трения 0,004, а сила тяги паровоза 223 кН? Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

А) $30 \cdot 10^5$ Н В) $22 \cdot 10^5$ Н С) $30 \cdot 10^6$ Н Д) $20 \cdot 10^5$ Н Е) $24{,}8 \cdot 10^6$ Н

24. Сани с седоками общей массой 100 кг начинают съезжать с горы высотой 8 м и длиной 100 м. Какова средняя сила сопротивления движению санок, если в конце горы они достигли скорости 10 м/с? Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

А) 30 Н В) 50 Н С) 20 Н Д) 40 Н Е) 80 Н

25. Груз массой m может скользить без трения по горизонтальному стержню, вращающемуся вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Груз соединяют с этим концом стержня пружиной, коэффициент упругости которой k. При какой угловой скорости ω пружина растянется на 50 % первоначальной длины?

A) $\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{m}}$ B) $\sqrt{\frac{2}{1}\cdot\frac{k}{m}}$ C) $\sqrt{\frac{k}{m}}$ Д) $\sqrt{\frac{3}{1}\cdot\frac{k}{m}}$ Е) $\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{k}{m}}$

26. Какие силы в механике сохраняют своё значение при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую?

A) только гравитационные
B) только силы упругости
C) только силы трения
Д) A, B и C
Е) ни A, ни B, ни C

27. Молоток массой 800 г ударяет по небольшому гвоздю и забивает его в доску. Скорость молотка перед ударом равна 5 м/с, после удара она равна 0, продолжительность удара 0,2 с. Определите среднюю за время удара силу удара молотка.

A) 20 Н B) 80 Н C) 40 Н Д) 8 Н Е) 4 Н

28. Два тела связаны нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К телу массы m_1 приложена сила F_1, направленная вдоль поверхности, а к телу массы m_2 – сила F_2 ($F_2 < F_1$), направленная в противоположную сторону. Найдите силу натяжения T нити при движении тел.

A) $\frac{m_2F_1 - m_1F_2}{m_1 + m_2}$ B) $\frac{m_1F_1 - m_2F_2}{m_1 + m_2}$ C) $\frac{m_1F_1 + m_2F_2}{m_1 + m_2}$ Д) $\frac{m_1F_2 + m_2F_1}{m_1 + m_2}$ Е) $\frac{m_1F_2 - m_2F_1}{m_1 + m_2}$

29. Жесткость пружины равна 50 Н/м. Если с помощью этой пружины равномерно тянуть по полу коробку массы 2 кг, то длина пружины увеличивается с 10 до 15 см. Каков коэффициент трения коробки о пол? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

A) 0,125 B) 0,25 C) 0,1 Д) 0,2 Е) 0,4

30. Вычислите модуль упругости для железа, если известно, что железная проволока длиной 1,5 м и сечением 1 мм^2 под действием силы в 200 Н удлинилась на 1,5 мм.

A) $2\cdot10^8$ Па B) $2\cdot10^9$ Па C) $2\cdot10^{10}$ Па Д) $2\cdot10^{11}$ Па Е) $2\cdot10^{12}$ Па

Верные ответы в тестах отмечены красным цветом.

Упражнения для самоконтроля

2.1. По наклонной плоскости с углом наклона $\varphi=30^0$ к горизонту скользит тело. Определить скорость тела в конце третьей секунды от начала скольжения, если коэффициент трения 0,15. [10,9 м/с]

2.2. Самолет описывает петлю Нестерова радиусом 80 м. Какова должна быть наименьшая скорость самолета, чтобы летчик не оторвался от сиденья в верхней части петли? [28 м/с]

2.3. Блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha=30^0$ и $\beta=45^0$. Гири равной массы ($m_1 = m_2 = 2$ кг) соединены нитью, перекинутой через блок. Считая нить и блок невесомыми, принимая коэффициенты трения гирь о наклонные плоскости равными $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}1$ и пренебрегая трением в блоке, определить: 1) ускорение, с которым движутся гири; 2) силу натяжения нити. [1) 0,24 м/с^2; 2) 12 Н]

2.4. На железнодорожной платформе установлена безоткатная пушка, из которой производится выстрел вдоль полотна под углом 45^0 к горизонту. Масса платформы с пушкой M=20 т, масса снаряда m=10 кг, коэффициент трения μ между колесами платформы и рельсами равен 0,002. Определить скорость снаряда, если после выстрела платформа откатилась на расстояние S=3 м.
[$v_0 = M\sqrt{2\mu gS}/(m\cos\alpha)$ =970 м/с]

2.5. На катере массой m=5 т находится водомет, выбрасывающий γ=25 кг/с воды со скоростью u=7 м/с относительно катера назад. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определить: 1) скорость катера через 3 мин после начала движения; 2) предельно возможную скорость катера.

[1) $v = u\left(1 - e^{-\gamma t/m}\right)$ = 6,6 м/с; 2) 7 м/с]

2.7. Два одинаковых однородных шара из одинакового материала, соприкасаясь друг с другом, притягиваются. Определить, как изменится сила притяжения, если массу шаров увеличить в 4 раза. [Возрастет в 6,35 раза]

Глава 3 Законы сохранения

§ 3.12 О законах сохранения

Любое тело (или совокупность тел) представляет собой, по существу, систему материальных точек или частиц. Если система с течением времени изменяется, то говорят, что изменяется ее состояние. Состояние системы характеризуется одновременным заданием положений (координат) и скоростей всех ее частиц.

Зная законы действующих на частицы системы сил и состояние системы в некоторый начальный момент времени, можно, как показывает опыт, с помощью уравнений движения предсказать ее дальнейшее поведение, т.е. найти состояние системы в любой момент времени. Так, например, решается задача о движении планет Солнечной системы.

Однако детальное рассмотрение поведения системы с помощью уравнений движения часто бывает настолько затруднительно (например, из-за сложности самой системы), что довести решение до конца представляется практически невозможным. А в тех случаях, когда законы действующих сил вообще неизвестны, такой подход оказывается в принципе неосуществимым. Кроме того, существует ряд задач, в которых детальное рассмотрение движения отдельных частиц просто и не имеет смысла (например, описание движения отдельных молекул газа).

В связи с этим возникает вопрос: нет ли каких-либо общих принципов, являющихся следствием законов Ньютона, которые позволяют упростить решение многих практических задач?

Оказывается, такие принципы есть. Это законы сохранения. Как уже было сказано, при движении системы ее состояние изменяется со временем. Однако существуют такие величины, характеризующие состояние системы, которые обладают весьма важным и замечательным свойством сохраняться во времени. Среди этих сохраняющихся величин наиболее важную роль играют энергия, импульс и момент импульса. Эти три величины обладают важным свойством – аддитивностью: их значение для системы, состоящей из частей, равно сумме значений каждой из частей в отдельности. Энергия обладает этим свойством в случае отсутствия заметного взаимодействия между частями системы, а импульс и момент импульса – и при наличии взаимодействия. Свойство аддитивности и придает этим трем величинам особую роль.

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса связаны с фундаментальными свойствами времени и пространства. Закон сохранения энергии связан с однородностью времени, а законы сохранения импульса и момента импульса – соответственно с однородностью и изотропностью пространства. Однородность времени означает, что все моменты времени эквивалентны и физические законы не изменяются со временем, т.е. не зависят от начала отсчета времени. Однородность пространства заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого её физические законы и законы движения не изменяются (не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета). Изотропность пространства означает одинаковость свойств пространства по всем направлениям, т.е. независимость физических законов от выбора направления координат системы отсчета.

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса представляют собой универсальные законы природы, характерные и для элементарных частиц, и для космических объектов. Они лежат в основе современной физики.

§ 3.13 Энергия, работа, мощность

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других – переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое). Однако во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной вторым телом.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы. Работа является мерой изменения энергии.

Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила $\vec{F}$, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения $d\vec{S}$, то элементарная работа dA этой силы равна скалярному произведению этих векторов, т.е. произведению проекции силы F_s на направление перемещения ($F_s = F\cdot\cos\alpha$), умноженной на перемещение точки приложения силы (рисунок 15):

$$dA = \left(\vec{F}\cdot d\vec{S}\right) = F_s\cdot dS = F\cdot dS\cdot\cos\alpha\ . \qquad (13.1)$$

Если вектор силы и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha > 0$), работа положительна. Если угол α - тупой ($\cos\alpha < 0$), работа отрицательна. При $\alpha = \pi/2$ работа равна нулю. Последнее обстоятельство особенно отчетливо показывает, что понятие работы в механике существенно отличается от обыденного представления о работе. В обыденном понимании всякое усилие, в частности мускульное напряжение, всегда сопровождается совершением работы. Например, для того чтобы держать тяжелый груз, стоя неподвижно или перемещать его горизонтально, носильщик затрачивает много усилий, т.е. «совершает работу». Однако работа как механическая величина в этих случаях равна нулю, а энергия груза при этом не изменяется.

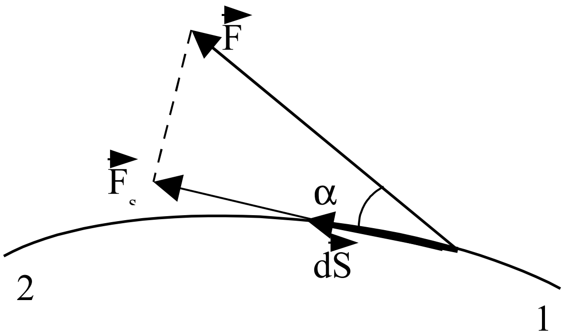


Рисунок 15

Если при перемещении точки приложения сила изменяется как по величине, так и по направлению, то нужно вычислить элементарную работу dA на каждом бесконечно малом участке пути dS, равную $F_s\cdot dS$, а затем сложить значения всех элементарных работ вдоль всего участка пути, например, от точки 1 до точки 2 (рисунок 15). Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 \left(\vec{F}\cdot d\vec{S}\right) = \int_1^2 F_s\cdot dS = \int_L F_s\cdot dS\ , \qquad (13.2)$$

который называется криволинейным интегралом вдоль траектории 12 (часто кривую 12 обозначают одной буквой L).

Если $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то, проецируя это векторное уравнение на направление элементарного перемещения $d\vec{S}$, получим $F_s=F_{1s}+F_{2s}$, а после умножения на dS: $F_s \cdot dS = F_{1s} \cdot dS + F_{2s} \cdot dS$, или

$$dA = dA_1 + dA_2. \tag{13.3}$$

Таким образом, элементарная работа результирующей двух или нескольких сил равна сумме элементарных работ этих сил. Очевидно, то же утверждение справедливо и для работ на конечных перемещениях:

$$A = A_1 + A_2. \tag{13.4}$$

Единица работы – джоуль (Дж): 1 Дж – работа, совершаемая силой в 1 Н при перемещении на 1 м при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения. (1 Дж = 1 Н·м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности. Мощность – это работа, совершаемая силой за единицу времени. Если за время dt совершается работа dA, то мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt}. \tag{13.5}$$

За время dt сила $\vec{F}$ совершает работу $\left(\vec{F} \cdot d\vec{S}\right)$, и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$P = \left(\frac{\vec{F} \cdot d\vec{S}}{dt}\right) = \left(\vec{F} \cdot \vec{v}\right), \tag{13.6}$$

т. е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы; P – величина скалярная.

Зная мощность силы $\vec{F}$, можно найти и работу, которую совершает эта сила за промежуток времени t. В самом деле, представив подынтегральное выражение в формуле (13.2) в виде $\left(\vec{F} \cdot d\vec{S}\right) = \left(\vec{F} \cdot \vec{v} dt\right) = P \cdot dt$, получим

$$A = \int_0^t P \cdot dt. \tag{13.7}$$

Единица мощности – ватт (Вт): 1 Вт – мощность, при которой за 1 с совершается работа в 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с). Внесистемная единица измерения мощности лошадиная сила (л.с.), 1 л.с. = 735 Вт.

Когда говорят о работе (или мощности), то необходимо в каждом конкретном случае четко представлять себе, работа (мощность) какой силы или сил имеется в виду.

§ 3.14 Кинетическая энергия

Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы $\vec{F}$ (в общем случае сила $\vec{F}$ может быть результирующей нескольких сил). Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{S}$. Учитывая, что $\vec{F} = m \cdot d\vec{v}/dt$ и $d\vec{S} = \vec{v} \cdot dt$, можем записать:

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{S}\right) = m\left(\vec{v} \cdot d\vec{v}\right). \tag{14.1}$$

Скалярное произведение $\left(\vec{v} \cdot d\vec{v}\right) = v \cdot dv$, поэтому элементарная работа:

$$dA = m \cdot v \cdot dv = d(mv^2/2). \tag{14.2}$$

Отсюда видно, что работа результирующей силы $\vec{F}$ идет на приращение некоторой величины (стоящей в скобках), которую называют кинетической энергией:

$$T = mv^2/2. \tag{14.3}$$

Таким образом, приращение кинетической энергии частицы при элементарном перемещении равно

$$dT = dA, \tag{14.4}$$

а при конечном перемещении из точки 1 в точку 2

$$T_2 - T_1 = mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = A_{12}, \tag{14.5}$$

т.е. приращение кинетической энергии частицы при некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу при этом перемещении. Если $A_{12} > 0$, то $T_2 > T_1$, т.е. кинетическая энергия частицы увеличивается; если $A_{12} < 0$, то кинетическая энергия частицы уменьшается.

Полученный результат без труда обобщается на случай произвольной системы материальных точек. Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить. Напишем соотношение (14.5) для каждой материальной точки системы, а затем все такие соотношения сложим. В результате снова получится формула (14.5), но уже не для одной материальной точки, а для системы материальных точек. Под A_{12} надо понимать сумму работ всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на материальные точки системы. Таким образом, работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии системы.

Из формулы (14.3) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т. е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.

При выводе формулы (14.3) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а, следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Таким образом, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.

§ 3.15 Потенциальная энергия

Потенциальная энергия – это энергия, определяемая взаимным расположением тел и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть, $F(x, y, z)$ – сила, действующая на тело. Тогда элементарная работа этой силы по перемещению тела равна

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{S}\right) = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz, \tag{15.1}$$

где F_x, F_y, F_z – проекции силы $\vec{F}$ на оси координат. Введем функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{15.2}$$

Функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям (15.2), называют потенциальной функцией, а силу $\vec{F}$ – консервативной (или потенциальной) силой. При этом элементарная работа dA будет равна:

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU. \tag{15.3}$$

Пусть тело под действием силы $\vec{F}$ перемещается из точки 1 в точку 2, тогда работа этой силы при таком перемещении в соответствии с (15.3) равна:

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{S} = -\int_{U_1}^{U_2} dU = -(U_2 - U_1), \tag{15.4}$$

где U_1 и U_2 –начальные и конечные значения потенциальной функции $U(x, y, z)$.

Таким образом, работа консервативной силы зависит лишь от начального и конечного положения точек пути, и не зависит от пути, пройденного телом. Если, например, тело переходит под действием силы тяжести с высоты h_0 над уровнем Земли на высоту h, то работа зависит не от того, по какому пути тело двигалось, а лишь от начального и конечного уровней.

Потенциальная функция, определяемая соотношениями (15.2), связывающими её с консервативной силой, называется потенциальной энергией. Из выражения (15.4) следует, что работа консервативной силы на любом замкнутом пути равна нулю, так как в этом случае $U_1=U_2$.

Если же работа, совершаемая силой, зависит от пути, то такая сила называется диссипативной (например, сила трения).

Тело, находясь в поле консервативных сил, называемом потенциальным полем, обладает потенциальной энергией $U(x, y, z)$. Согласно (15.3) работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению её потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии $dA= -dU$.

Поскольку начало отсчета (состояние с энергией U_1) выбирается произвольно, то потенциальная энергия U системы может иметь отрицательное значение. Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты глубиной h, равна $U = -mgh$. Таким образом, потенциальная энергия системы определяется с точностью до постоянной величины и в зависимости от начала отсчета может принимать положительные или отрицательные значения. В то же время её кинетическая энергия независимо от системы отсчета может принимать только положительные значения.

Пример 1. Рассмотрим растяжение (сжатие) пружины. Согласно закону Гука сила упругости пропорциональна удлинению пружины x, взятому с обратным знаком, т.е. $F = -kx$, где k – жесткость (коэффициент упругости) пружины. С другой стороны согласно (15.2) $F = -dU/dx$. Из приведенных двух выражений заключаем, что потенциальная энергия упругой деформации U равна:

$$U = \int k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} kx^2. \qquad (15.5)$$

Пружина (упругое тело) приобретает энергию за счет работы A внешней силы (см. рисунок 16). Эта работа является мерой изменения потенциальной энергии деформируемого тела (пружины), т.е. $A = U$.

Пример 2. Пусть, потенциальная энергия взаимодействия двух тел обратно пропорциональна расстоянию R между ними, взятому с обратным знаком, т.е. $U = -C/R$, где C - некоторая постоянная. Тогда, сила взаимодействия между этими телами, равная $F = -dU/dR = -C/R^2$, будет являться силой притяжения этих тел друг к другу (см. рисунок 17).

Из этих примеров следует, что внутренние силы, возникающие в системе, действуют в сторону уменьшения её потенциальной энергии.

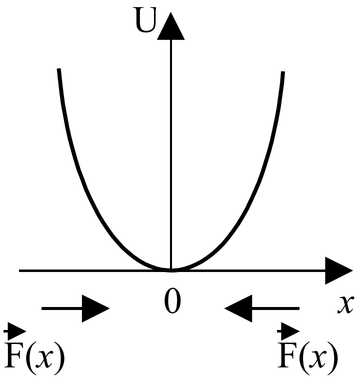


Рисунок 16

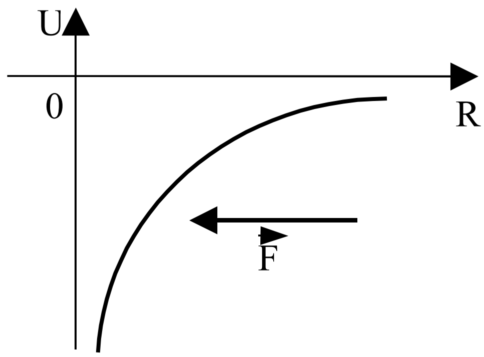


Рисунок 17

Полная механическая энергия системы – энергия механического движения и взаимодействия равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + U. \qquad (15.6)$$

§ 3.16 Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии – результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М.В.Ломоносову (1711–1765), изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814–1878) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821–1894).

Пусть на рассматриваемое тело действуют только потенциальные силы, т.е. силы, удовлетворяющие условию (15.2). Для такого случая согласно(15.3) $dA = -\,dU$. В этом случае согласно (14.4) приращение кинетической энергии происходит за счет работы этих сил, т.е. $dT = dA$. Из сравнения выражений (14.4) и (15.3) находим, что $dT = -\,dU$ или $d(T + U) = dE = 0$. Откуда следует, что величина $E = T + U = \text{const}$. Таким образом, выполняется закон сохранения полной механической энергии, равной сумме кинетической и потенциальной энергий, если на тело действуют только потенциальные силы.

Теперь рассмотрим замкнутую консервативную систему тел, т.е. такую систему, на которую не действуют внешние силы. Положение отдельных тел системы определяется радиус-вектором $\vec{r}_i\,(x_i, y_i, z_i)$, i=1,2,3,…,n; n – количество тел в системе. Потенциальная энергия системы зависит от положения всех тел системы, т.е. $U=U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_n)$. Предположим, что смещается только i-ое тело, а все остальные неподвижны. Тогда элементарная работа перемещения i-го тела будет равна:

$$dA_i=\left(\vec{F}_i \cdot d\vec{S}_i\right)=F_{xi}\cdot dx_i+F_{yi}\cdot dy_i+F_{zi}\cdot dz_i=-\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right)=-dU_i, \quad (16.1)$$

т.е. элементарная работа совершается за счет убыли потенциальной энергии. С другой стороны эта элементарная работа идет на приращение кинетической энергии i-го тела, т.е.

$$dA_i = dT_i. \quad (16.2)$$

Сравнивая соотношения (16.1) и (16.2), получаем

$$dT_i+\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right)=0. \quad (16.3)$$

Просуммируем выражения (16.3) для всех тел системы в предположении возможности перемещения всех тел системы:

$$\sum\left(dT_i\right)+\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right)=0\,. \quad (16.4)$$

Первое слагаемое в (16.4) представляет собой полное изменение кинетической энергии всех тел системы dT, а второе слагаемое представляет собой изменение потенциальной энергии системы dU. Тогда выражение (16.4) принимает вид $d(T+U) = dE = 0$. Откуда следует, что величина

$$E = T + U = \text{const}. \quad (16.5)$$

Таким образом, выполняется закон сохранения полной механической энергии для замкнутой консервативной системы тел. В замкнутых системах могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную энергию и обратно в эквивалентных количествах, так что полная механическая энергия остается неизменной.

В данном параграфе мы рассматриваем закон сохранения энергии при макроскопическом движении макроскопических тел. Т.е. мы полностью отвлекаемся от внутреннего атомистического (микроскопического) строения вещества. Закон сохранения и превращения энергии – фундаментальный закон природы, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микрочастиц.

Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени, т. е. инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

Системы, в которых действуют диссипативные силы, например силы трения, называются диссипативными. В диссипативных системах полная механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии, например, во внутреннюю энергию (внутренняя энергия складывается из кинетической энергии невидимого беспорядочного движения атомов и молекул вещества и потенциальной энергии их взаимодействия; беспорядочное движение атомов и молекул воспринимается нашими органами чувств в виде тепла; таково физическое объяснение кажущейся потери механической энергии при действии диссипативных сил). Этот процесс получил название диссипации (или рассеяния) энергии.

Строго говоря, все реальные макроскопические системы в природе являются диссипативными. Замкнутая система тел является идеализированной моделью для упрощенного рассмотрения многих явлений и процессов.

Следовательно, в реальных случаях закон сохранения механической энергии не выполняется. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. В этом и заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии. Нужно иметь ввиду, что деление энергии на кинетическую и потенциальную имеет смысл только в механике и не охватывает всех форм энергии.

Применительно к незамкнутым (неизолированным) системам закон сохранения энергии означает, что изменение энергии такой системы равно работе, совершаемой системой (энергия системы уменьшается), или работе, совершаемой над системой внешними силами (энергия системы увеличивается).

§ 3.17 Условия равновесия механической системы

Зная вид функции, выражающей потенциальную энергию системы, можно сделать ряд заключений о характере поведения системы. Особенно наглядно это можно сделать в случае одномерного движения тела, т.е. движения, описываемого одной координатой (например, координатой x). График зависимости потенциальной энергии от аргумента $U=U(x)$ называется потенциальной кривой. Анализ потенциальных кривых позволяет определить характер движения тела.

Будем рассматривать только консервативные системы, т. е. системы, в которых превращения механической энергии в другие виды энергии отсутствуют, т.е. когда справедлив закон сохранения энергии в форме (16.5).

Из анализа графика на рисунке 18 приходим к выводу, что при полной энергии тела, равной E, тело не может сместиться правее x_2 и левее x_1, так как кинетическая энергия T не может быть отрицательной величиной и, следовательно, потенциальная энергия U не может быть больше полной. В таком случае говорят, что тело находится в потенциальной яме с координатами $x_1 \leq x \leq x_2$.

В точке с координатой x_0 потенциальная энергия частицы минимальна. В этой точке действующая на частицу сила $F_x = -\,dU/dx = 0$. При смещении частицы из положения x_0 влево или вправо на нее действует возвращающая сила. Поэтому положение x_0 является положением устойчивого равновесия.

В общем случае потенциальная кривая может иметь довольно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (рисунок 19). Проанализируем эту потенциальную кривую. Если E – заданная полная энергия частицы, то частица может находиться только там, где $U(x) \leq E$, т. е. в областях I ($x_1 \leq x \leq x_2$) и III ($x \geq x_3$).

Переходить из области I в III и обратно частица не может, так как ей препятствует потенциальный барьер в области II ($x_2 \leq x \leq x_3$), ширина которого равна интервалу значений x, при которых $E < U$, а высота – определяется разностью $U_{max} - E$. Для того, чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ей необходимо сообщить дополнительную энергию, равную высоте барьера или превышающую ее. В области I частица с полной энергией E оказывается «запертой» в потенциальной яме и совершает колебания между точками с координатами x_1 и x_2.

В точке с координатой x_0 (рисунок 19) потенциальная энергия частицы минимальна. Так как действующая на частицу сила $F_x = -\,dU/dx$ (U – функция только одной координаты), а условие минимума потенциальной энергии dU/dx

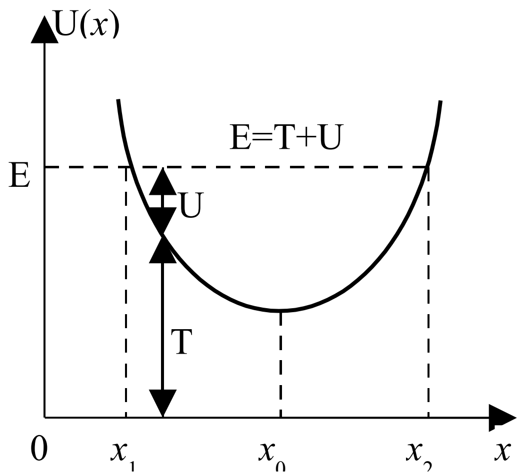


Рисунок 18

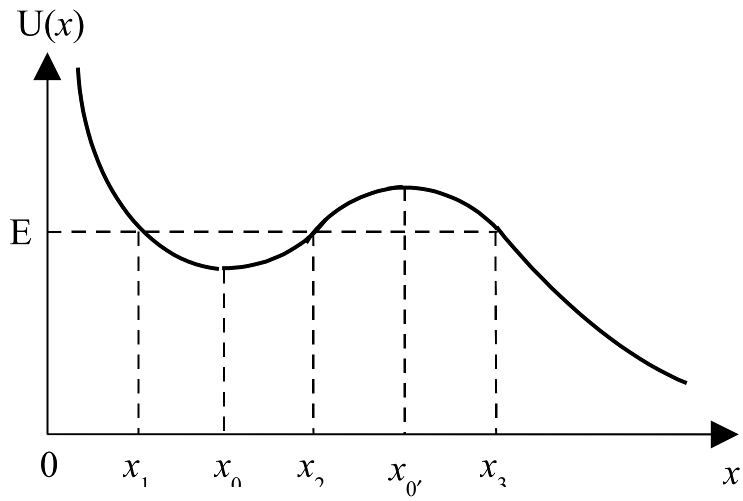


Рисунок 19

$= 0$, то в точке с координатой x_0 сила $F_x(x_0) = 0$. При смещении частицы из положения x_0 (и влево, и вправо) она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение x_0 является положением устойчивого равновесия. Указанные условия выполняются и для точки x_0' (для U_{max}). Однако эта точка соответствует положению неустойчивого равновесия, так как при смещении частицы из положения x_0' появляется сила, стремящаяся отклонить ее от этого положения.

§ 3.18 Закон сохранения импульса

Рассмотрим произвольную систему из n частиц в любой инерциальной системе отсчета. В общем случае частицы этой системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в систему. Поэтому уравнение движения i-й частицы согласно (6.1) можем записать в виде:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i, \tag{18.1}$$

где $\vec{F}_i$ - векторная сумма внешних сил, действующих на i-ую частицу; $\vec{F}_{ik}$ - сила, действующая на i-ую частицу со стороны k-й частицы, и их векторная сумма (первое слагаемое в уравнении) равна векторной сумме внутренних сил, действующих на i-ую частицу.

Просуммируем соотношение (18.1) по всем частицам (телам) системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{18.2}$$

В правой части уравнения (18.2) второе слагаемое представляет собой результирующую внешнюю силу $\vec{F}_{внеш}$, действующую на систему, а первое слагаемое, представляющее векторную сумму всех внутренних сил, равно нулю, так как в соответствии с третьим законом Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, т.е. для любой пары частиц системы их векторная сумма равна нулю. А в левой части, поменяв порядки суммирования и дифференцирования, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\right) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{внеш}, \tag{18.3}$$

т.е. импульс системы частиц $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$ может изменяться только под действием внешних сил. Внутренние силы не могут изменить импульс системы. В случае замкнутой (изолированной) системы на нее не действуют внешние силы ($\vec{F}_{внеш} = \sum \vec{F}_i = 0$), и $d\vec{p}/dt = 0$. Таким образом, получаем закон сохранения импульса – импульс замкнутой системы $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$ остается постоянным, т.е. не меняется со временем. При этом отдельные части замкнутой системы могут только обмениваться импульсами так, что приращение импульса одной части системы всегда равно уменьшению импульса оставшейся части системы.

Импульс может сохраняться и у незамкнутой системы при условии равенства нулю результирующей всех внешних сил. Это непосредственно вытекает из уравнения (18.3). Закон сохранение импульса дает возможность получать достаточно простым путем ряд сведений о поведении системы, не вникая в детальное рассмотрение процесса.

У незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс $\vec{p}$, а его проекция p_x на некоторое направление 0X, в случае если проекция результирующей внешней силы $\vec{F}_{внеш}$ на направление 0X равна нулю, т.е. когда вектор $\vec{F}_{внеш}$ перпендикулярен направлению 0X. Действительно, из уравнения (18.3) для проекций на направление 0X, имеем:

$$\frac{d\vec{p}_x}{dt} = \vec{F}_{внеш\,x}\,. \qquad (18.4)$$

Отсюда следует, что если $\vec{F}_{внеш\,x}$=0, то p_x=const. Например, при движении системы в однородном поле сил тяжести сохраняется проекция её импульса на любое горизонтальное направление.

§ 3.19 Закон сохранения момента импульса

Важные законы механики связаны с понятиями момента импульса и момента силы. Следует различать моменты этих векторов относительно точки и относительно оси. Момент вектора относительно точки и относительно оси – разные понятия, хотя и связанные между собой. Момент вектора относительно точки сам есть вектор. Момент того же вектора относительно оси есть его проекция на эту ось относительно точки, лежащей на той же оси. Таким образом, момент вектора относительно оси уже не является вектором.

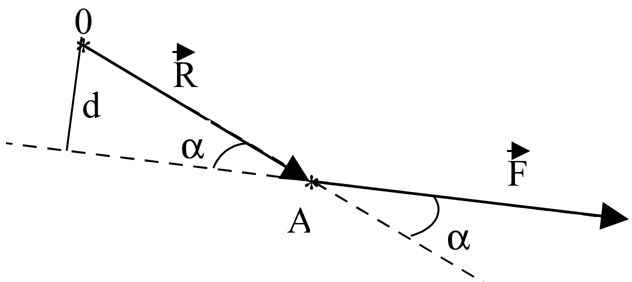


Рисунок 20

Пусть, 0 – какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы. Ее называют началом или полюсом. Обозначим буквой $\vec{R}$ радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы $\vec{F}$ (рисунок 20). Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки 0 называют векторное произведение радиус-вектора $\vec{R}$ на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{R} \cdot \vec{F}\right]. \qquad (19.1)$$

Здесь $\vec{M}$ – псевдовектор, перпендикулярный векторам $\vec{R}$ и $\vec{F}$, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{R}$ к $\vec{F}$. Модуль момента силы равен:

$$M = F \cdot R \cdot \sin\alpha = F \cdot d, \tag{19.2}$$

где α – угол между $\vec{R}$ и $\vec{F}$; $R \cdot \sin\alpha = d$ – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой 0 (d – плечо силы).

Из этого определения непосредственно следует, что момент силы $\vec{M}$ не изменится, если точку приложения силы $\vec{F}$ перенести в любую другую точку, расположенную на линии действия силы.

Аналогично определяется момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки или полюса 0. Моментом импульса называется векторное произведение

$$\vec{L} = \left[\vec{R} \cdot \vec{p}\right], \tag{19.3}$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс, $\vec{R}$ – радиус-вектор, проведенный из полюса в точку, в которой в данный момент находится рассматриваемая материальная точка. Модуль вектора момента импульса

$$L = R \cdot p \cdot \sin\alpha = m \cdot v \cdot R \cdot \sin\alpha = p \cdot d, \tag{19.4}$$

где α–угол между векторами $\vec{R}$ и $\vec{p}$, d – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки 0.

Рассмотрим произвольную систему из n частиц в некоторой инерциальной системе отсчета. В общем случае частицы этой системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в систему. Поэтому уравнение движения i-й частицы согласно (6.1) можем записать в виде:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i, \tag{19.5}$$

где $\vec{F}_i$ - векторная сумма внешних сил, действующих на i-ую частицу; $\vec{F}_{ik}$ - сила, действующая на i-ую частицу со стороны k-й частицы, и их векторная сумма (первое слагаемое в уравнении) равна векторной сумме внутренних сил, действующих на i-ую частицу.

Если все слагаемые в уравнении (19.5) векторно умножить на $\vec{R}_i$ – радиус-вектор относительно некоторого полюса, то, учитывая, что $\vec{L}_i = \left[\vec{R}_i \cdot \vec{p}_i\right]$, $\vec{M}_i = \left[\vec{R}_i \cdot \vec{F}_i\right]$, $\vec{M}_{ik} = \left[\vec{R}_i \cdot \vec{F}_{ik}\right]$, получим:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i, \qquad (19.6)$$

где $\vec{M}_i$ - векторная сумма моментов внешних сил, действующих на i-ую частицу; $\vec{M}_{ik}$ - момент силы, действующей на i-ую частицу со стороны k-й частицы, и их векторная сумма (первое слагаемое в уравнении) равна векторной сумме моментов внутренних сил, действующих на i-ую частицу, $\vec{L}_i$ – момент импульса i-й частицы.

Просуммируем соотношение (19.6) по всем частицам (телам) системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i. \qquad (19.7)$$

В правой части уравнения (19.7) второе слагаемое представляет собой результирующий момент внешних сил $\vec{M}_{внеш}$, действующих на систему, а первое слагаемое, представляющее векторную сумму моментов всех внутренних сил, равно нулю, так как в соответствии с третьим законом Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, т.е. и $\vec{M}_{ik} = -\vec{M}_{ki}$ для любой пары частиц системы. Момент таких двух сил, а значит и моменты всех внутренних сил равны нулю. А в левой части, поменяв порядки суммирования и дифференцирования, имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\right) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш} \qquad \text{или} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш} \qquad (19.8)$$

Соотношение (19.8) означает, что производная по времени от момента импульса системы частиц (материальных точек) относительно произвольной точки равна векторной сумме моментов всех внешних сил относительно той же точки (полюса). Следовательно, момент импульса системы частиц $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ может изменяться только под действием момента внешних сил. Моменты внутренних сил не могут изменить момент импульса системы.

Если момент внешних сил относительно неподвижной точки 0 равен нулю, т.е. $\vec{M}_{внеш}=0$, то момент импульса системы относительно той же точки остается постоянным во времени, т.е. $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = const$. Это положение называют законом сохранения момента импульса. В частности, момент импульса сохраняется для изолированной системы частиц. При этом отдельные части замкнутой системы могут только обмениваться моментами импульса так, что приращение момента импульса одной части системы всегда равно уменьшению момента импульса остальной части системы.

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси каждая отдельная точка (частица) тела движется по окружности постоянного радиуса $\vec{R}_i$ с некоторой скоростью $\vec{v}_i$. Скорость $\vec{v}_i$ и импульс $m_i\vec{v}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора $m_i\vec{v}_i$. Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы равен

$$L_i = m_i v_i R_i \tag{19.9}$$

и направлен вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта.

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных его частиц:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i R_i \tag{19.10}$$

Подставляя в (19.10) формулу (4.6) $v_i = \omega R_i$ и учитывая, что в твердом теле все частицы вращаются с одинаковой угловой скоростью ω, получим:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = J\omega, \tag{19.11}$$

где

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 . \tag{19.12}$$

Моментом инерции J системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек (частиц) системы (тела) на квадраты их расстояний до оси вращения. Как видно из (19.12) момент инерции твердого тела зависит от распределения массы относительно оси вращения и является величиной аддитивной. В случае непрерывного распределения массы суммирование сводится к интегрированию по объему тела V:

$$J = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV , \tag{19.13}$$

где dm и dV – масса и объем элемента тела, находящегося на расстоянии R от оси вращения, ρ – плотность тела в данной точке.

Уравнение (19.11) в векторной форме имеет вид:

$$\vec{L} = J\vec{\omega} . \tag{19.14}$$

Таким образом, момент импульса $\vec{L}$ твердого тела относительно выбранной оси равен произведению момента инерции J тела относительно той же оси на угловую скорость $\vec{\omega}$.

С учетом (19.14) уравнение (19.8) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = \vec{M}_{внеш}, \tag{19.15}$$

где $\vec{M}_{внеш}$ – результирующий момент внешних сил относительно оси вращения.

Соотношение (19.15) представляет основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси. Оно напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки. Роль массы в нем играет момент инерции J, роль скорости – угловая скорость $\vec{\omega}$, роль силы – момент силы $\vec{M}_{внеш}$.

При вращении симметричного твердого тела вокруг неподвижной оси симметрии момент инерции J остается постоянным, и уравнение (19.15) примет вид:

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{внеш}. \tag{19.16}$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения на угловое ускорение $\vec{\beta} = d\vec{\omega}/dt$ равно моменту внешних сил относительно той же оси.

Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы. Он связан со свойством симметрии пространства – его изотропностью, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Контрольные вопросы

1 В чем различие между понятиями энергии и работы? Как найти работу переменной силы?

2 Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?

3 Что такое мощность? Вывести ее формулу.

4 Дайте определения и выведите формулы для известных вам видов механической энергии.

5 Какова связь между силой и потенциальной энергией?

6 Почему изменение потенциальной энергии обусловлено только работой консервативных сил?

7 В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?

8 Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?

9 В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?

10 Каким свойством времени обусловливается справедливость закона сохранения механической энергии?

11 Что такое потенциальная яма? потенциальный барьер?

12 Какие заключения о характере движения тел можно сделать из анализа потенциальных кривых?

13 Как охарактеризовать положения устойчивого и неустойчивого равновесия? В чем их различие?

14 Что такое момент инерции тела?

15 Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?

16 Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела. Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление момента импульса?

17 В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.

18 Каким свойством симметрии пространства обусловливается справедливость закона сохранения момента импульса?

19 Сопоставьте основные уравнения динамики поступательного и вращательного движений, прокомментировав их аналогию.

Тесты

1. Вычислите работу, совершаемую при равноускоренном подъёме груза массой 100 кг на высоту 4 м за время 2 с. Ускорение силы тяжести 9,81 м/с^2.

А) 4500 Дж В) 4720 Дж С) 5020 Дж Д) 5200 Дж Е) нет верного ответа

2. Пуля массой m, летящая горизонтально, попадает в центр бруска массой 10 m, висящий неподвижно на нити, и застревает в нем. Во сколько раз кинетическая энергия пули перед ударом превышает кинетическую энергию бруска с пулей сразу после удара?

А) 11 раз В) 10 раз С) 121 раз Д) 100 раз Е) $\sqrt{10}$ раз

3. Пружина растянута сначала на величину ΔL, а затем еще на столько же. Сравните значения работ A_1 и A_2, совершенных при первом и втором растяжениях.

А) $A_1=2A_2$ В) $A_2=A_1$ С) $A_2=2A_1$ Д) $A_2=3A_1$ Е) $A_2=4A_1$

4. Пуля, летящая со скоростью 400 м/с, ударяется в земляной вал и проникает в него на глубину 36 см. Чему будет равна скорость пули к моменту, когда пуля пройдет 99 % своего пути?

А) 40 м/с В) 32 м/с С) 4 м/с Д) 10 м/с Е) 16 м/с

5. Камень брошен под углом 60^0 к горизонту. Как соотносятся между собой начальная кинетическая T_1 камня с его кинетической энергией T_2 в верхней точке траектории?

А) $T_1=\frac{\sqrt{3}}{2}T_2$ В) $T_1=\frac{3}{4}T_2$ С) $T_1=T_2$ Д) $T_1=4T_2$ Е) $T_1=2T_2$

6. Тело массой m=2 кг двигалось со скоростью V=5 м/с и упруго столкнулось с жесткой стенкой, двигавшейся навстречу со скоростью U=2 м/с. Чему будет равна кинетическая энергия тела после столкновения?

А) 81 Дж В) 49 Дж С) 25 Дж Д) 9 Дж Е) 1 Дж

7. Во сколько раз возрастает импульс тела при увеличении его кинетической энергии в три раза?

А) в 9 раз В) в $\sqrt{3}$ раз С) в 3 раза Д) в 2 раза Е) в 6 раз

8. Тело массы 0,5 кг бросили вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Если за все время полета силы сопротивления воздуха совершили работу, модуль которой равен 36 Дж, то тело упало обратно на землю со скоростью

А) 20м/с В) 8 м/с С) 12 м/с Д) 10 м/с Е) 16 м/с

9. Мотор с полезной мощностью 15 кВт, установленный на автомобиле, может сообщить ему при движении по горизонтальному участку дороги скорость 90 км/час. Определите силу сопротивления движению автомобиля при заданной скорости.

А) 600 Н В) 800 Н С) 500 Н Д) 750 Н Е) 450 Н

10. Пуля массой 20 г, выпущенная под углом 60^0 к горизонту с начальной скоростью 600 м/с, в верхней точке траектории имеет кинетическую энергию, равную …

А) 400 Дж В) 500 Дж С) 600 Дж Д) 800 Дж Е) 900 Дж

11. Действуя постоянной силой F=200 Н, поднимают груз массой M=10 кг на высоту h=10 м. Какую работу A совершает сила F? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2?

A) 500 Дж B) 1 000 Дж C) 2 000 Дж Д) 2 500 Дж E) 4 000 Дж

12. Из орудия массой M=10 т выстрелили в горизонтальном направлении. Масса снаряда m=40 кг, его скорость при вылете V=1 км/с. Определите длину отката орудия, если коэффициент трения лафета о почву μ=0,4. Ускорение силы тяжести g=10 м/с^2.

A) 1 м B) 1,5 м C) 2 м Д) 2,5 м E) 3 м

13. Тележка массой 0,8 кг движется по инерции со скоростью 2,5 м/с. На тележку с высоты 50 см падает кусок пластилина массой 0,2 кг и прилипает к ней. Рассчитайте энергию, которая перешла во внутреннюю энергию при этом ударе. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

A) 2 Дж B) 1 Дж C) 0,5 Дж Д) 1,5 Дж E) 2,5 Дж

14. Тело обладает импульсом p=40 кг·м/с и кинетической энергией $E_к$=100 Дж . Чему равна его масса?

A) 2 кг B) 10 кг C) 5 кг Д) 4 кг E) 8 кг

15. Чему равна мощность двигателя подъемного крана, поднимающего равномерно со скоростью 0,1 м/с груз массой 4 тонны при общем КПД установки 40 %? Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

A) 1кВт B) 10 кВт C) 4 кВт Д) 40 кВт E) 16 кВт

16. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 10 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка, массы которых относятся как 1:2. Осколок меньшей массы полетел горизонтально со скоростью 20 м/с. На каком расстоянии от места выстрела упадет второй осколок? Поверхность Земли можно считать плоской и горизонтальной. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

A) 5 м B) 8 м C) 10 м Д) 16 м E) 20 м

17. Груз подвешен на нити и отклонен от положения равновесия так, что его высота над Землей увеличилась на 20 см. Чему примерно равна скорость, с которой тело будет проходить положение равновесия при свободных колебаниях? Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

A) 1 м/с B) 2 м/с C) 2,5 м/с Д) 4 м/с E) 4,25 м/с

18. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 10 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка, массы которых относятся как 1: 2. Осколок меньшей массы упал на

Землю со скоростью 20 м/с. Чему равна скорость большего осколка при падении на Землю? Поверхность Земли считайте плоской и горизонтальной.

А) 13,2 м/с В) 14,2 м/с С) 15,2 м/с Д) 16,2 м/с Е) 17,2 м/с

19. С какой начальной скоростью V_0 надо бросить вниз мяч с высоты h, чтобы он подпрыгнул на высоту 2h от поверхности Земли? Удар мяча о поверхность Земли считайте абсолютно упругим. Ускорение свободного падения равно g.

А) $\sqrt{2gh}$ В) $\sqrt{gh}$ С) $2\sqrt{gh}$ Д) $2\sqrt{2gh}$ Е) $\frac{\sqrt{gh}}{2}$

20. Шарик массой 100 г свободно скатывается с горки длиной 2 м, составляющей с горизонтом угол 30^0. Определите работу силы тяжести. Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

А) $\sqrt{3}$ Дж В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Дж С)$2\sqrt{3}$ Дж Д) 2 Дж Е) 1 Дж

21. При произвольном делении покоившегося ядра химического элемента образовалось три осколка массами 3m; 4,5m; 5m. Скорости первых двух взаимно перпендикулярны, а их модули равны, соответственно, 4V и 2V. Определите модуль скорости третьего осколка.

А) V В) 3V С) 5V Д) 4V Е) 6V

22. С высоты H_1=10 м над землей начинает падать без начальной скорости камень. Одновременно с высоты H_2=5 м вертикально вверх бросают другой камень. С какой начальной скоростью V_0 брошен второй камень, если известно, что камни встретились на высоте h=1 м над землей? Ускорение свободного падения g=9,8 м/с^2.

А) 3,9 м/с В) 3,7 м/с С) 3,5 м/с Д) 3,3 м/с Е) 3,1 м/с

23. Край доски длиной L поднят на высоту h над горизонтальной плоскостью. Какую работу потребуется совершить для перемещения тела массой m по этой доске от ее нижнего края? Коэффициент трения равен $\mu=\frac{h}{\sqrt{L^2 - h^2}}$. Ускорение свободного падения g.

А) μmgL В) μmgh С) mgh Д) 2μmgh Е) 2mgh

24. КПД двигателя механизма, имеющего номинальную мощность 400 кВт и двигающегося со скоростью 10 м/с при силе сопротивления движению 20 кН, равен

A) 60 % B) 40 % C) 30 % Д) 25 % E) 50 %

25. Тело массой 2 кг брошено вертикально вверх со скоростью 10 м/с. При подъеме на какую высоту h изменение потенциальной энергии взаимодействия тела с Землей окажется в 3 раза меньше кинетической энергии тела на этой высоте? Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

A) 333 см B) 167 см C) 250 см Д) 125 см E) 375 см

26. Найдите среднюю силу сопротивления грунта при погружении в него сваи, если под действием падающей с высоты 1,4 м ударной части свайного молота массой 6 т свая погружается в грунт на 4 см. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

A) $2{,}1\cdot10^4$ Н B) $5{,}6\cdot10^4$ Н C) $2{,}1\cdot10^5$ Н Д) $5{,}6\cdot10^5$ Н E) $2{,}1\cdot10^6$ Н

27. Для откачки нефти из скважины глубиной 500 м используют насос мощностью 10 кВт. КПД насоса 80 %. Какую массу нефти добывают за 1 мин работы? Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

A) 64 кг B) 72 кг C) 80 кг Д) 96 кг E) 100 кг

28. Ракета движется со скоростью V. Скорость истечения продуктов сгорания топлива относительно ракеты U, секундный расход топлива (масса топлива, сгораемая за 1 с) равен μ. Какова полная мощность ракетного двигателя?

A) $\frac{\mu(U-V)^2}{2}$ B) $\frac{\mu(U+V)^2}{2}$ C) $\frac{\mu V^2}{2}$ Д) $\frac{\mu U^2}{2}$ E) μUV

29. Грузовики, снабженные двигателями мощностью N_1 и N_2, развивают скорости, соответственно, V_1 и V_2. Какова будет скорость грузовиков, если их соединить тросом?

A) $\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$ B) $\frac{N_1V_2+N_2V_1}{N_1+N_2}$ C) $\frac{N_1V_1+N_2V_2}{N_1+N_2}$ Д) $\frac{(N_1+N_2)V_1V_2}{N_1V_2+N_2V_1}$ E) $\frac{(N_1+N_2)V_1V_2}{N_1V_1+N_2V_2}$

30. Канат массой m висит вертикально, касаясь нижним концом поверхности пола. Какова будет максимальная сила действия каната на пол, если верхний конец каната отпустить? Ускорение свободного падения равно g.

А) mg B) 2 mg C) 3 mg Д) 4 mg E) 5 mg

Верные ответы в тестах отмечены красным цветом.

Упражнения для самоконтроля

3.1. Найти: 1) работу поднятия груза по наклонной плоскости; 2) среднюю и 3) максимальную мощности подъемного устройства, если масса груза 10 кг, длина наклонной плоскости 2 м, угол ее наклона к горизонту 45^0, коэффициент трения 0,1 и время подъема 2 с. [1) 173 Дж; 2) 86 Вт; 3) 173 Вт]

3.2. С башни высотой 35 м горизонтально брошен камень массой 0,3 кг. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) скорость, с которой брошен камень, если через 1 с после начала движения его кинетическая энергия составляет 60 Дж; 2) потенциальную энергию камня через 1 с после начала движения. [1) 17,4 м/с; 2) 88,6 Дж]

3.3. Пренебрегая трением, определить наименьшую высоту, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиусом 10 м, чтобы она сделала полную петлю и не выпала из желоба. [25 м]

3.4. Пуля массой m=10 г, летевшая горизонтально со скоростью v=500 м/с, попадает в баллистический маятник длиной L=1 м и массой M=5 кг и застревает в нем. Определить угол отклонения маятника. [18^0 30']

3.5. Зависимость потенциальной энергии частицы в центральном силовом поле от расстояния R до центра поля задается выражением $U(R)=\frac{A}{R^2}-\frac{B}{R}$, где A и B – положительные постоянные. Определить значение R_0, соответствующее равновесному положению частицы. Является ли это положение положением устойчивого равновесия? [R_0=2A/B].

3.6. При центральном абсолютно упругом ударе движущееся тело массой m_1 ударяется в покоящееся тело массой m_2, в результате чего скорость первого тела уменьшается в n=1,5 раза. Определить: 1) отношение m_1/m_2; 2) кинетическую энергию T_2', с которой начнет двигаться второе тело, если первоначальная кинетическая энергия первого тела T_1=1 000 Дж. [1) 5; 2) 555 Дж]

3.7. Тело массой m_1=4 кг движется со скоростью v_1=3 м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определить количество теплоты, выделившееся при ударе. [9 Дж]

Глава 4 Неинерциальные системы отсчета

Основное уравнение динамики (второй закон Ньютона) справедливо только в инерциальных системах отсчета. Но часто бывает необходимо решать задачу в неинерциальной системе отсчета. Сразу возникает вопрос: как следует изменить основное уравнение динамики, чтобы оно оказалось справедливым и для неинерциальных систем отсчета.

§ 4.20 Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета

В системах отсчета, движущихся ускоренно, появляются добавочные силы, обусловленные наличием ускорения. Такие силы называют силами инерции. Их характерной особенностью является пропорциональность массе тела, на которое они действуют.

Рассмотрим инерциальную систему отсчета К, относительно которой поступательно с ускорением $\vec{a}_0$ движется система отсчета К′ (см. рисунок 21). Тогда положение частицы, находящейся в точке А, относительно указанных систем отсчета определяется радиус-векторами $\vec{R}$ и $\vec{R}'$, а положение начала координат 0′ системы К′ относительно начала координат 0 системы К определяется радиус-вектором $\vec{R}_0$. Можно записать очевидное соотношение между этими векторами:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{R}'. \qquad (20.1)$$

Дважды дифференцируя это соотношение по времени, получим:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} + \frac{d^2\vec{R}'}{dt^2} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'. \qquad (20.2)$$

Все слагаемые соотношения (20.2) умножим на массу частицы m и с учетом того, что произведение $m\vec{a}$ равно результирующей силе $\vec{F}$, действующей на частицу, имеем:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 \quad \text{или} \quad m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}. \qquad (20.3)$$

Полученное уравнение (20.3) представляет собой уравнение движения частицы в неинерциальной системе отсчета. Таким образом, при описании движения в неинерциальных системах отсчета можно пользоваться уравнениями динамики Ньютона, если наряду с силами $\vec{F}$, обусловленными воздействием тел друг на друга, учитывать так называемые силы инерции $\vec{F}_{ин}$. Силы

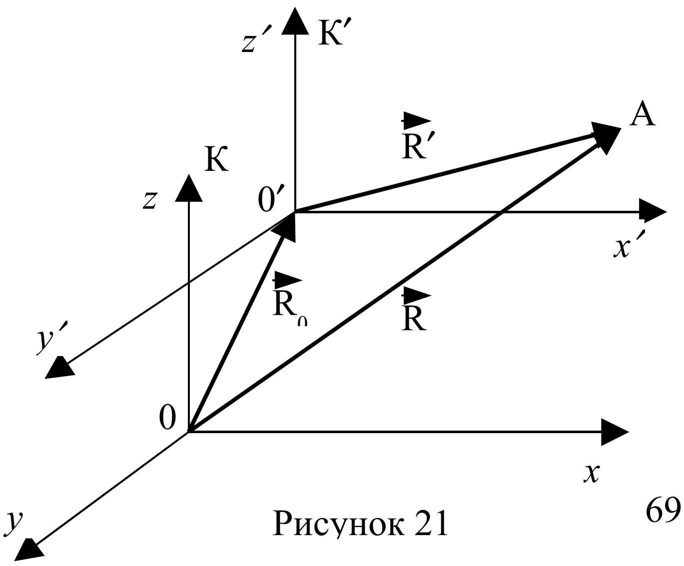


Рисунок 21

инерции следует полагать равными произведению массы частицы (тела) на взятое с обратным знаком ускорение неинерциальной системы отсчета, т.е. $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0$.

Это можно пояснить следующим примером. К потолку железнодорожного вагона, движущегося с ускорением $\vec{a}_0$, подвешен на нити груз массы m (рисунок 22). Наблюдатель, находящийся в вагоне, отмечает, что груз на нити отклоняется от вертикального направления на угол α и несмотря на действие сил тяжести тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити $\vec{F}_н$ остается в таком состоянии. Это можно объяснить, если допустить, что на груз, находящийся в ускоренно движущейся системе отсчета, действует дополнительная сила – сила инерции, равная $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0$, которая направлена противоположно ускорению. Под действием трех перечисленных сил груз может находиться в равновесии, т.е. в отклоненном от вертикали положении, если их векторная сумма равна нулю: $m\vec{g} + \vec{F}_н + \vec{F}_{ин} = 0$.

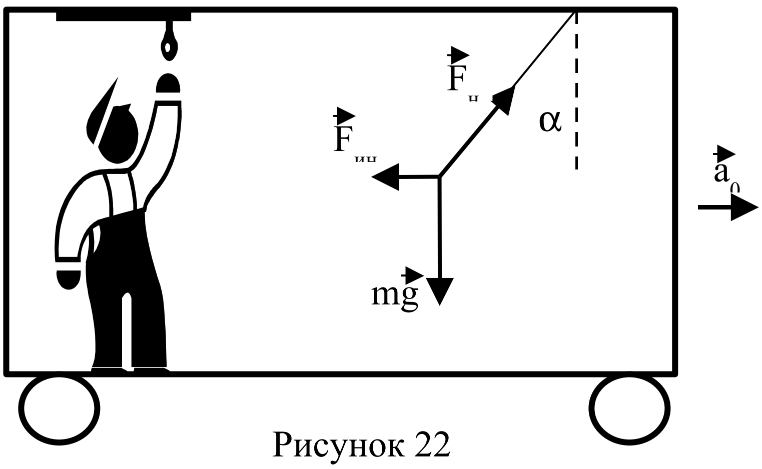


Рисунок 22

Действие силы инерции хорошо ощущают пассажиры при резком торможении или разгоне автомобиля.

Если неинерциальная система отсчета K′ совершает равномерное вращательное движение с угловой скоростью ω, то на неподвижную в этой системе частицу (тело) будет действовать центробежная сила инерции $F_{цб} = m\omega^2R$, где R – расстояние частицы от оси вращения. Если же тело во вращающейся системе движется со скоростью v', то на тело действует сила инерции, называемая силой Кориолиса $F_{кор} = 2mv'\omega\cdot\sin\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$. В нашем курсе эти силы инерции мы не будем рассматривать.

Свойство пропорциональности сил инерции массе тела делает их аналогичными силам тяготения. Допустим, к потолку кабины космического корабля, движущегося поступательно с ускорением свободного падения g, подвешен на нити груз массы m (см. рисунок 23). Тогда, если можно пренебречь взаимодействием с окружающими телами в случае их значительной удаленности от корабля, на тело действует сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{g}$. Точно такая же по величине сила (сила гравитации) будет действовать на тело, если кабина корабля находится неподвижно у поверхности Земли. Таким образом, наблюдатель, находящийся в кабине корабля, не сможет установить, чем обусловлена сила $-m\vec{g}$, – ускоренным движением корабля или гравитаци-

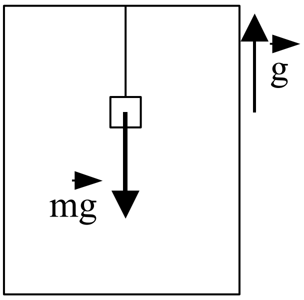


Рисунок 23

онным полем Земли. Поэтому говорят, что силы тяготения в однородном гравитационном поле и силы инерции эквивалентны.

Введение сил инерции позволяет описывать движение тел и в неинерциальных системах отсчета с помощью известного нам второго закона Ньютона.

Подводя итоги, необходимо отметить особенности сил инерции, отличающие их от сил взаимодействия:

- силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. Поэтому на силы инерции третий закон Ньютона не распространяется;

- силы инерции существуют только в неинерциальных системах отсчета. В инерциальных системах отсчета сил инерции нет вообще, и понятие сила в инерциальных системах отсчета применяется только как мера взаимодействия тел;

- все силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела. Поэтому в поле сил инерции, как и в однородном поле сил тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс.

Контрольные вопросы

1 Справедлив ли второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета? Как следует изменить основное уравнение динамики, чтобы оно оказалось справедливым и для неинерциальных систем отсчета?

2 Что понимают под силами инерции?

3 Запишите уравнение движения частицы в неинерциальной системе отсчета.

4 Чему равна сила инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета?

5 В чем проявляется аналогичность сил инерции силам тяготения?

6 Всегда ли силы тяготения в гравитационном поле и силы инерции эквивалентны?

7 Какие особенности отличают силы инерции от сил взаимодействия?

8 Какие силы инерции появляются при вращательном движении системы отсчета?

Глава 5 Механика твердого тела

§ 5.21 Движение центра масс твердого тела

При рассмотрении движения механической системы как целого удобно использовать понятие центр масс (или центр инерции) системы. Центром массы системы материальных точек называется воображаемая точка С, положение которой относительно начала координат данной системы отсчета определяется радиусом-вектором $\vec{R}_C$:

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{R}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{R}_i}{m}, \qquad (21.1)$$

где m_i – масса i-й частицы, $\vec{R}_i$ - радиус-вектор, определяющий положение этой частицы, n - число материальных точек в системе, m – общая масса системы.

Декартовы координаты центра масс равны проекциям вектора $\vec{R}_C$ на координатные оси:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \qquad (21.2)$$

Отметим, что в однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.

После дифференцирования выражения (21.1) по времени и умножения на m, имеем

$$m\frac{d\vec{R}_c}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{R}_i}{dt} \quad \text{или} \quad m\vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{p}. \qquad (21.3)$$

Из (21.3) следует, что импульс $\vec{p}$ системы частиц равен произведению массы системы m на скорость $\vec{v}_C$ ее центра масс. Для замкнутой системы $\vec{p} = = m\vec{v}_C$ =const. Следовательно, центр масс замкнутой системы либо движется равномерно и прямолинейно, либо остается неподвижным.

Подставив выражение $\vec{p} = m\vec{v}_C$ в (18.3), получим:

$$m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_{внеш}, \qquad (21.4)$$

где $\vec{F}_{внеш}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на систему. Отсюда следует, что центр масс любой системы частиц, в том числе твердого тела, движется так, как двигалась бы материальная точка с массой равной массе системы, под действием всех приложенных к системе сил. Выражение (21.4) представляет собой закон движения центра масс.

§ 5.22 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение любого, в том числе и твердого тела, можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение твердого тела определяется уравнением движения центра масс (см. (21.4)) и тело будет находиться в покое или равномерного прямолинейного движения, если $\vec{F}_{внеш}=0$.

При изучении закона сохранения момента импульса (см. § 3.19) мы получили основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси (см. (19.16)):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(J\vec{\omega}\right) = J\vec{\beta} = \vec{M}_{внеш}\,. \qquad (22.1)$$

Так как при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси угловое ускорение $\vec{\beta}$ и моменты внешних сил направлены вдоль оси вращения, то векторное уравнение (22.1) можно записать в скалярной форме:

$$J\frac{d\omega}{dt} = J\beta = M_{внеш}. \qquad (22.2)$$

Уравнение (22.1) называют основным уравнением динамики вращательного движения. Это уравнение является аналогом второго закона Ньютона и определяет вращательное движение твердого тела. Произведение момента инерции J твердого тела относительно произвольной неподвижной оси вращения на угловое ускорение β равно моменту внешних сил относительно той же оси $M_{внеш}$.

§ 5.23 Момент инерции

Как ранее мы установили, момент импульса для твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$, равен $\vec{L}=J\vec{\omega}$. Момент инерции J твердого тела относительно выбранной оси вращения можно рассчитать используя соотношения (19.12) и (19.13). Моменты инерции для некоторых однородных твердых тел относительно оси, проходящей через центр масс тела, приведены в таблице А (m – масса тела).

Таблица А

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Бесконечно тонкий диск	Ось проходит через диаметр	$\frac{1}{4}mR^2$
Однородный эллипс с полуосями a и b	Ось перпендикулярна к плоскости эллипса	$\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$

Прямой тонкий стержень длиной L	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}mL^2$
Тонкая прямоугольная пластинка со сторонами a и b	Ось перпендикулярна к плоскости пластинки	$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$
Прямой тонкий стержень длиной L	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}mL^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$
Полый шар с тонкими стенками радиуса R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{3}mR^2$

Вычисление момента инерции твердого тела произвольной формы относительно произвольной оси вращения представляет собой довольно кропотливую в математическом отношении задачу. Однако в некоторых случаях нахождение момента инерции значительно упрощается, если воспользоваться теоремой Штейнера: момент инерции J относительно произвольной оси равен моменту инерции J_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс C тела, плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$J = J_C + ma^2. \qquad (23.1)$$

§ 5.24 Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Кинетическая энергия вращающегося тела складывается из суммы кинетических энергий отдельных частиц тела. Кинетическая энергия i-й частицы, находящейся на расстоянии R_i от оси вращения:

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \omega^2 \frac{m_i R_i^2}{2}, \qquad (24.1)$$

так как $v_i=\omega R_i$. Тогда кинетическая энергия всего вращающегося тела, равна

$$T_{вр} = \sum T_i = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i R_i^2 = \frac{1}{2} J\omega^2. \qquad (24.2)$$

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела $T_{вр}$ выражается так же, как и кинетическая энергия тела при поступательном движении, только вместо массы следует подставить момент инерции J, а вместо линейной скорости - угловую скорость ω. Формула (24.2) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Так как всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное, то и кинетическая энергия твердого тела, как аддитивная величина, будет складываться из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = T_{пост} + T_{вр} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 \ , \qquad (24.3)$$

где m – масса тела; v_C – скорость центра масс тела; J – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

Пусть однородный цилиндр радиуса R и массы m скатывается без скольжения с наклонной плоскости высоты h (полагаем, что h>>R, ускорение свободного падения равно g, начальная скорость цилиндра равна нулю, трение качения мало и им можно пренебречь). Требуется найти скорость центра масс и угловую скорость вращения в момент выхода цилиндра на горизонтальный участок. В начальный момент кинетическая энергия равна нулю, потенциальная энергия равна mgh. В конце скатывания потенциальная энергия уменьшается до нуля, а кинетическая энергия становится равной

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J\omega^2.$$

Так как скольжение отсутствует, v_C и ω связаны соотношением $v_C=\omega R$. Подставив в выражение для кинетической энергии $\omega=v_C/R$ и $J=mR^2/2$, получим:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{4} m v_C^2 = \frac{3}{4} m v_C^2.$$

Полная энергия в начале и в конце скатывания одинакова, т.е.

$$\frac{3}{4} m v_C^2 = mgh,$$

откуда

$$v_C = \sqrt{\frac{4}{3} gh} \ ,$$

и

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3} gh} \ .$$

Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение (таблица Б).

Таблица Б

Поступательное движение	Вращательное движение
Скорость v	Угловая скорость ω
Ускорение a	Угловое ускорение β
Масса m	Момент инерции J
Сила F	Момент силы M
Импульс p	Момент импульса L
Основное уравнение динамики $F=\frac{dp}{dt}$	Основное уравнение динамики $M=\frac{dL}{dt}$
Кинетическая энергия $mv^2/2$	Кинетическая энергия $J\omega^2/2$

§ 5.25 Гироскопы

Обычно для сохранения положения оси вращения твердого тела с течением времени её тем или иным способом фиксируют. Но существуют такие оси вращения, которые не изменяют своей ориентации в пространстве при отсутствии воздействия внешних сил. Эти оси называются свободными осями (или осями свободного вращения). Свободная ось обязательно должна проходить через центр масс тела. Опыт и теория показывают, что в любом теле существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями (они называются главными осями инерции тела и пересекаются в одной точке, называемой центром подвеса гироскопа). Например, главные оси инерции однородного прямоугольного параллелепипеда проходят через центры противоположных граней. Для однородного цилиндра одной из главных осей инерции является его ось симметрии, а в качестве остальных осей могут быть две любые взаимно перпендикулярные оси, проведенные через центр масс перпендикулярно оси симметрии цилиндра. Главными осями инерции шара являются любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс.

Для устойчивости вращения большое значение имеет, какая именно из свободных осей служит осью вращения. Можно показать, что вращение вокруг главных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции оказывается устойчивым, а вращение около оси со средним моментом инерции – неустойчивым.

Свойство свободных осей сохранять свое положение в пространстве широко применяется в технике, например, в гироскопах. Гироскопом называют массивное симметричное твердое тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии, являющейся свободной осью. Гироскоп в кардановом подвесе имеет три степени свободы. Если центр подвеса гироскопа совпадает с центром его тяжести, то его называют уравновешенным или астатическим, в этом случае сила тяжести не вызывает изменение оси его вращения.

Из (19.8) следует, что $d\vec{L} = \vec{M}_{внеш} \cdot dt$, т.е. для того, чтобы ось гироскопа изменила направление в пространстве, необходимо отличие от нуля момента внешних сил. Если момент внешних сил, приложенных к вращающемуся гироскопу относительно его центра масс, отличен от нуля, то наблюдается явление, получившее название гироскопического эффекта. Оно состоит в том, что под действием пары сил $\vec{F}$, приложенной к оси вращающегося гироскопа (маховика, волчка или юлы, ротора турбины, колеса машины), ось гироскопа (см. рисунок 24) поворачивается вокруг прямой 0_20_2, а не вокруг прямой 0_10_1, как это казалось бы естественным на первый взгляд (оси 00 и 0_10_1 лежат в плоскости чертежа, а ось 0_20_2 и силы $\vec{F}$ перпендикулярны ей).

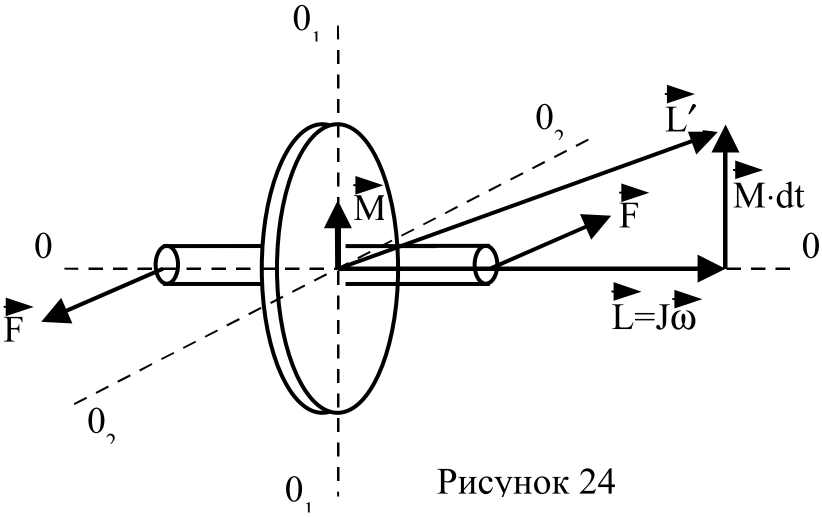


Рисунок 24

Гироскопический эффект объясняется следующим образом. Момент $\vec{M}$ пары сил $\vec{F}$ направлен вдоль прямой 0_10_1. За время dt момент импульса $\vec{L}$ гироскопа получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$ (направление $d\vec{L}$ совпадает с направлением $\vec{M}$) и станет равным $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$. Направление вектора $\vec{L}'$ совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа. Таким образом, ось вращения гироскопа повернется вокруг прямой 0_20_2. Если время действия силы мало, то, хотя момент сил $\vec{M}$ и велик, изменение момента импульса $d\vec{L}$ гироскопа будет также весьма малым. Поэтому кратковременное действие сил практически не приводит к изменению ориентации оси вращения гироскопа в пространстве. Для ее изменения следует прикладывать силы в течение длительного времени.

Гироскопический эффект приводит к появлению гироскопических сил, оказывающих гироскопическое давление на опоры подшипников при виражах машин, самолетов, если ось маховика, колеса и т.п. закреплена подшипниками. При резких виражах гироскопические силы могут принимать весьма значительные величины, превышающие пределы прочности деталей, что может привести к аварийной ситуации. Действие гироскопических сил необходимо учитывать при конструировании устройств, содержащих быстровращающиеся массивные составные части.

Гироскопы применяются в различных навигационных приборах (гироскопический компас, гироскопический успокоитель качки корабля, искусственный горизонт и вертикаль, гироскопический стабилизатор и т. д.). Другое важное применение гироскопов – поддержание заданного направления движения транспортных средств, например, судна (авторулевой) и самолета (автопилот) и т.д. При всяком отклонении от курса вследствие каких-то воздействий (волны, порыва ветра и т.п.) положение оси гироскопа в пространстве сохраняется. Следовательно, ось гироскопа вместе с рамами подвеса поворачивается относительно движущегося устройства. Поворот рам подвеса с помощью определенных приспособлений включает рули управления, которые возвращают движение к заданному курсу.

Рассмотрим поведение гироскопа на примере волчка (юлы). Опыт показывает, что если ось вращающегося волчка наклонена к вертикали, то волчок не падает, а совершает так называемое прецессионное движение (прецессию) – его ось описывает конус вокруг вертикали с угловой скоростью $\omega_{пр}$ (рисунок 25). Причем оказывается, что чем больше угловая скорость ω вращения волчка, тем меньше угловая скорость прецессии $\omega_{пр}$.

Такое поведение волчка-гироскопа можно легко объяснить с помощью основного уравнения динамики вращательного движения (22.1), если принять, что $\omega >> \omega_{пр}$ (это условие, кстати, поясняет, что имеется в виду под большой угловой скоростью гироскопа). Волчок все время находится под действием силы тяжести $m\vec{g}$, момент которой $\vec{M}$ направлен перпендикулярно оси волчка. Модуль этого момента равен:

$$M = mgl \cdot \sin\alpha, \qquad (25.1)$$

где α - угол между вертикалью и осью вращения волчка, l – расстояние от центра масс волчка до точки опоры 0.

Из (19.8) следует, что $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$. За время dt момент импульса $\vec{L}$ гироскопа получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$. Так как направление $d\vec{L}$ совпадает с направлением $\vec{M}$, то и $d\vec{L}$ будет перпендикулярен $\vec{L}$. Вектор $\vec{L}$ описывает круговой конус с углом полураствора α. Это приводит к тому, что конец вектора $\vec{L}$ будет совершать вращательное движение в горизонтальной плоскости по некоторой окружности радиуса R. При этом модуль момента импульса, равный $L=J\omega$ (J – момент инерции волчка), остается постоянным во времени. Величина R равна проекции момента импульса $\vec{L}$ на горизонтальную плоскость, т.е. $R=L\cdot\sin\alpha$ (рисунок 25). Тогда угол поворота $d\varphi$ оси вращения волчка в горизонтальной плоскости за время dt равен (рисунок 25):

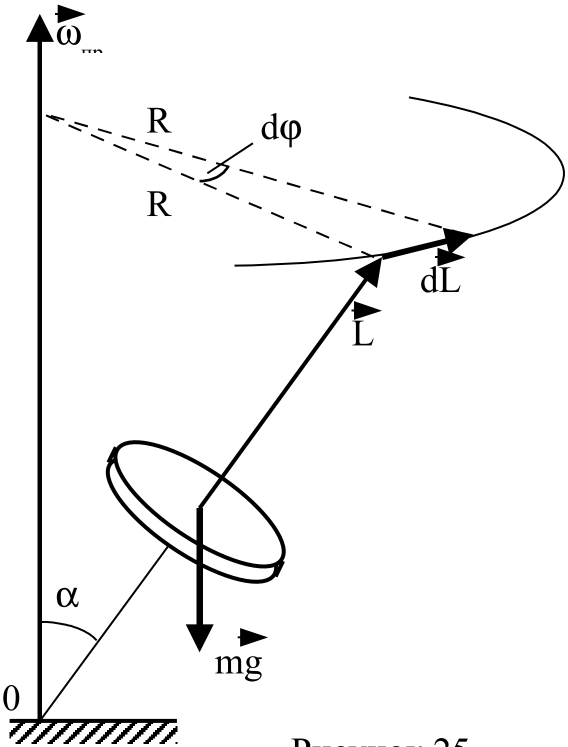


Рисунок 25

$$d\varphi = \frac{dL}{R} = \frac{dL}{L \cdot \sin\alpha} = \frac{M \cdot dt}{L \cdot \sin\alpha} = \frac{mgl \cdot \sin\alpha \cdot dt}{L \cdot \sin\alpha} = \frac{mgl \cdot dt}{J\omega}. \qquad (25.2)$$

Из (25.2) получаем выражение для угловой скорости прецессии волчка вокруг вертикальной оси:

$$\omega_{пр} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L \cdot \sin\alpha} = \frac{mgl}{J\omega}. \qquad (25.3)$$

Из этого уравнения видно, что момент силы M определяет угловую скорость прецессии $\omega_{пр}$ (а не ускорение!). Поэтому мгновенное устранение момента M приводит к мгновенному исчезновению и прецессии. В этом отношении можно сказать, что прецессия не обладает инерцией. Угловая скорость прецессии $\omega_{пр}$ не зависит от угла наклона α оси волчка от вертикали.

Впервые гироскоп был применен французским физиком Ж.Фуко (1819–1868) для доказательства вращения Земли.

Контрольные вопросы

1 Что такое центр масс (центр инерции) системы материальных точек (твердого тела)?

2 Получите выражение для скорости движения центра масс системы.

3 Выведите и сформулируйте уравнение движения центра масс системы.

4 Выведите и сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела. Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление момента импульса?

5 Сопоставьте основные уравнения динамики поступательного и вращательного движений, прокомментировав их аналогию.

6 Какова роль момента инерции во вращательном движении? Приведите выражения для моментов инерции простейших симметричных тел.

7 Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?

8 Дайте формулировку теоремы Штейнера. Как на практике можно применять эту теорему?

9 Что такое свободные оси (главные оси инерции)? Какие из них являются устойчивыми? Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?

10 В чем заключается гироскопический эффект? К каким последствиям может привести гироскопический эффект при резких маневрах машин?

11 Опишите прецессионное движение волчка и выведите выражение для угловой скорости прецессии.

12 Где находят применение гироскопы?

Упражнения для самоконтроля

5.1. С одного уровня наклонной плоскости одновременно начинают скатываться без скольжения сплошные цилиндр и шар одинаковых масс и одинаковых радиусов. Определить: 1) отношение скоростей цилиндра и шара на данном уровне; 2) их отношение в данный момент времени. [1) 14/15; 2) 14/15]

5.2. К ободу однородного сплошного диска радиусом R=0,5 м приложена постоянная касательная сила F=100 Н. При вращении диска на него действует момент сил трения M=2 Н·м. Определить массу m диска, если известно, что его угловое ускорение β постоянно и равно 12 рад/с^2. [32 кг]

5.3. Через неподвижный блок в виде однородного сплошного цилиндра массой m=1 кг перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены тела массами m_1=1 кг и m_2=2 кг. Пренебрегая трением в оси блока, определить: 1)ускорение грузов; 2)отношения T_2/T_1 сил натяжения нити.[1) 2,8 м/с^2; 2) 1,11]

5.4. Частота вращения колеса, вращающегося при торможении равнозамедленно, за время t=1 мин уменьшилась от ν_1=300 об/мин до ν_2=180 об/мин. Момент инерции колеса 2 кг·м^2. Определить: 1) угловое ускорение β колеса; 2) момент M силы торможения; 3) работу силы торможения.
[1) 0,21 рад/с^2; 2) 0,42 Н·м; 3) 630 Дж]

5.5. Человек массой m=80 кг, стоящий на краю горизонтальной платформы массой M=100 кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой ν_1=10 об/мин, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой, определить, с какой частотой ν_2 будет тогда вращаться платформа. [26 об/мин]

5.6. Однородный цилиндр массы m и радиуса R скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найдите уравнение движения цилиндра. [$\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\beta = mgR\cdot\sin\alpha$]

5.7. К телу в точках 1 и 2 приложены две одинаковые по модулю и противоположно направленные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, не действующие вдоль одной прямой (пара сил). Пусть $\vec{R}_{12}$ - радиус-вектор, проведенный из точки 1 в точку 2. Найдите суммарный момент этой пары сил. [$\vec{M} = \left[\vec{R}_{12} \cdot \vec{F}_2\right]$; $M=R_{12}F_2$; $F_1=F_2$]

5.8. Найдите угловую скорость прецессии наклонного волчка массы m, вращающегося с большой угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии, относительно которой момент инерции волчка равен J. Центр масс волчка находится на расстоянии l от точки опоры. [$\omega_{пр}=mgl/J\omega$]

5.9. Небольшой шарик подвесили к точке 0 на легкой нерастяжимой нити длины l. Затем шарик отвели в сторону так, что нить отклонилась на угол α от вертикали, и сообщили ему начальную скорость v_0 перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой расположена нить. При каком значении v_0 максимальный угол отклонения нити от вертикали окажется равным 90^0? [$v_0=\sqrt{2gl/\cos\alpha}$]

5.10. Момент инерции твердого шара относительно его центра $J=\frac{2}{5}mR^2$. Когда шар катится под уклон, какая доля его кинетической энергии связана с поступательным движением (движением центра масс) и какая – с вращением? [5/7; 2/7]

5.11. В каком направлении действуют гироскопические силы на переднее колесо велосипеда, когда велосипед поворачивает направо? Как направлен момент импульса колеса? [вперед по ходу движения; влево к раме велосипеда]

Глава 6 Релятивистская механика

§ 6.26 Специальная теория относительности

Запишем преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы К к другой – К′, и обратно, используемые в классической механике (см. рисунок 9 и уравнения (8.1)):

$$x' = x - v_0 t;\ \ y' = y;\ \ z' = z;\ \ t' = t \quad \text{и} \quad x = x' + v_0 t;\ \ y = y';\ \ z = z';\ \ t = t'. \qquad (26.1)$$

Преобразования (26.1) справедливы при перемещениях со скоростями v, значительно меньшими, чем скорость света в вакууме c, т.е. при $v \ll c$.

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает движение макроскопических тел, движущихся с малыми скоростями ($v \ll c$). Однако в конце XIX в. выяснилось, что выводы классической механики противоречат некоторым опытным данным. Например, при изучении движения быстрых заряженных частиц оказалось, что их движение не подчиняется законам классической механики. Далее возникли затруднения при попытках применить принцип относительности Галилея на распространение света. Если источник и приемник света движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, то, согласно классическим представлениям измеренная скорость должна зависеть от относительной скорости их движения. Американский физик А. Майкельсон (1852–1913) в своем знаменитом опыте в 1881 г., а затем в 1887 г. совместно с Е. Морли (американский физик, 1838–1923) пытался обнаружить движение Земли относительно эфира (эфирный ветер) – опыт Майкельсона–Морли, применяя интерферометр Майкельсона. Обнаружить эфирный ветер Майкельсону не удалось, как, впрочем, не удалось его обнаружить и в других многочисленных опытах (согласно господствовавшей в то время волновой теории, световые волны должны распространяться с определенной скоростью по отношению к некоторой гипотетической среде – эфиру). Опыты «упрямо» показывали, что скорости света в двух движущихся друг относительно друга системах отсчета равны. Это противоречило правилу сложения скоростей классической механики, но находилось в согласии с уравнениями Дж. К. Максвелла (1831–1879), лежащими в основе понимания света как электромагнитной волны.

Для объяснения этих и некоторых других опытных данных необходимо было создать новую механику, которая, объясняя эти факты, содержала бы классическую механику как предельный случай для малых скоростей ($v \ll c$). Это удалось сделать А. Эйнштейну, одному из основателей современной физики. Он пришел к выводу о том, что мирового эфира – особой среды, которая могла бы быть принята в качестве абсолютной системы отсчета,– не существует.

А. Эйнштейн заложил основы специальной теории относительности, представляющей современную физическую теорию пространства и времени, в которой, как и в классической механике, предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно. Специальная теория относительности часто называется также релятивистской теорией, а специфические явления, описываемые этой теорией, – релятивистскими эффектами. Термин «специальная» означает, что эта теория рассматривает явления только в инерциальных системах отсчета.

В основе специальной теории относительности лежат постулаты (принципы), сформулированные Эйнштейном в 1905 г.:

I. Принцип относительности: все инерциальные системы отсчета равноправны, т.е. неразличимы по своим физическим свойствам. Никакие опыты, проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

II. Принцип инвариантности скорости света: скорость света в вакууме не зависит от движения источника и приемника и одинакова во всех направлениях. Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Первый постулат Эйнштейна, являясь обобщением механического принципа относительности Галилея на любые физические процессы, утверждает, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т.е. уравнения, описывающие эти законы, одинаковы по форме во всех инерциальных системах отсчета. Согласно этому постулату, все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны, т. е. явления (механические, электродинамические, оптические и др.) во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково.

Согласно второму постулату Эйнштейна, постоянство скорости света – фундаментальное свойство природы, которое констатируется как опытный факт.

Специальная теория относительности потребовала отказа от привычных представлений о пространстве и времени, принятых в классической механике, поскольку они противоречили принципу постоянства скорости света. Потеряло смысл не только абсолютное пространство, но и абсолютное время.

Постулаты Эйнштейна и теория, построенная на их основе, установили новый взгляд на мир и новые пространственно-временные представления, такие, например, как относительность расстояний и промежутков времени. Выводы и следствия теории Эйнштейна получили надежное экспериментальное подтверждение, послужившее обоснованием специальной теории относительности.

§ 6.27 Преобразования Лоренца

Анализ явлений в инерциальных системах отсчета, проведенный А. Эйнштейном на основе сформулированных им постулатов, показал, что классические преобразования Галилея (26.1) несовместимы с ними и, следовательно, должны быть заменены преобразованиями Лоренца (1904), удовлетворяющими теории относительности.

Прямые и обратные преобразования Лоренца имеют вид (формулы представлены для случая, когда система отсчета К′ движется относительно системы К со скоростью v вдоль оси x, как показано на рисунке 9):

$$x' = \frac{x - v\mathrm{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \mathrm{t}' = \frac{\mathrm{t} - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad (27.1)$$

$$x = \frac{x' + v\mathrm{t}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad \mathrm{t} = \frac{\mathrm{t}' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (27.2)$$

Из сравнения приведенных уравнений (27.1) и (27.2) вытекает, что они симметричны и отличаются лишь знаком при v. Это очевидно, так как если скорость движения системы отсчета К′ относительно системы К равна v, то скорость движения К относительно К′ равна $-v$.

Преобразования Лоренца указывают на неразрывную связь между пространством и временем. Все физические явления происходят в пространстве и во времени, как бы в 4-хмерном пространстве-времени.

Преобразования Лоренца удовлетворяют принципу соответствия, т.е. в случае малых скоростей ($v \ll c$), переходят в классические преобразования Галилея. Таким образом, преобразования Галилея являются предельным случаем преобразований Лоренца.

Формулы (27.1) и (27.2) при $v > c$ дают мнимые значения для координат и времени. Это свидетельствует о невозможности движения одной системы отсчета относительно другой со скоростью v, превышающей скорость света c. Отсюда следует, что движение любых тел со скоростью, большей скорости света в вакууме, невозможно. Невозможна также система отсчета К′, движущаяся относительно системы К со скоростью c, потому что при $v = c$ знаменатели формул для x (или x') и t (или t′) обращаются в нуль.

Из преобразований Лоренца следует очень важный вывод о том, что расстояние и промежуток времени между двумя событиями меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в то время как в рамках преобразований Галилея эти величины считались абсолютными, не изменяющимися при переходе от одной системы к другой.

§ 6.28 Следствия из преобразований Лоренца

Анализ преобразований Лоренца позволяет сделать ряд важных выводов, вытекающих из связи между координатами и временем. Так как все соотношения (27.1) и (27.2) – линейные, то их можно представить в виде:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad (28.1)$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z', \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (28.2)$$

1. Относительность одновременности. Пусть два события в системе отсчета К произошли одновременно на расстоянии Δx друг от друга, для них $\Delta t=0$. Какое $\Delta t'$ будет для этих событий в системе К′?

Подставляем $\Delta t=0$ в четвертое равенство (28.1) и получаем

$$\Delta t' = -\frac{\frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (28.3)$$

Следовательно, события одновременные в системе К, регистрируются в К′ в разные моменты времени. Причем событие, происшедшее в месте с большей координатой x, наступит в системе К′ раньше. Опережает то событие, которое расположено в сторону движения системы К′. Опережение растет со скоростью v и расстоянием Δx. Если же события в системе К происходят в одной точке ($\Delta x=0$) и являются одновременными ($\Delta t=0$), то согласно (28.1) получаем, $\Delta x'=0$ и $\Delta t'=0$, т.е. эти события происходят одновременно и в одной точке в любой инерциальной системы отсчета.

Аналогично, события, одновременные в системе К′, для которых $\Delta t'=0$ и $\Delta x'\neq 0$, в системе К происходят с промежутком во времени

$$\Delta t = \frac{\frac{v\Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (28.4)$$

2. Сокращение расстояний. Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы К′. Длина стержня в системе К′ будет $l_0=\Delta x'$. Определим длину этого стержня в системе К, относительно которой он движется со скоростью v. Для этого необходимо измерить координаты его концов x_1 и x_2 в системе К в один и тот же момент времени t (т.е. при $\Delta t=0$). Их разность $l_{дв}= x_2 - x_1$ и даст длину стержня в системе К. Из первого равенства (28.1) следует:

$$\Delta x'=\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad l_0=\frac{l_{дв}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{т.е.} \quad l_{дв}= l_0\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (28.5)$$

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится (l_0). Если стержень покоится в системе К, то, определяя его длину в системе К′, опять-таки придем к выражению (28.5).

Из выражения (28.5) следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения в $\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз, т. е. так называемое лоренцево сокращение длины тем больше, чем больше скорость движения.

Из второго и третьего уравнений (28.1) следует, что $\Delta y'=\Delta y$, $\Delta z'=\Delta z$, т. е. поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится.

3. Замедление хода движущихся часов. Пусть в некоторой точке с координатой x, покоящейся относительно системы К (т.е. $\Delta x=0$), происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события) равна $\tau_0=\Delta t$. Длительность этого же события в системе К′, которая движется относительно системы К, равна $\tau_{дв}=\Delta t'$. Из четвертого равенства (28.1) находим:

$$\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad \tau_{дв}=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (28.6)$$

Из соотношения (28.6) вытекает, что $\tau_{дв} > \tau_0$, т. е. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна. Этот результат может быть еще истолкован следующим образом: интервал времени $\tau_{дв}$, отсчитанный по часам в системе К′, с точки зрения наблюдателя в системе К, продолжительнее интервала τ_0, отсчитанного по его часам. Следовательно, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов, т. е. ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся. Из (28.6) следует, что замедление хода часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости света в вакууме.

Эффект замедления времени является взаимным, симметричным относительно обеих инерциальных систем отсчета К и К′. Иначе говоря, если с точки зрения К-системы медленнее идут часы К′-системы, то с точки зрения К′-системы, наоборот, медленнее идут часы К-системы (причем в том же отношении). Таким образом, на основании относительности понятий «неподвижная» и «движущаяся» системы соотношения для τ_0 и $\tau_{дв}$ обратимы.

Формула (28.6) позволяет объяснить «загадочное» на первый взгляд поведение мюонов при прохождении земной атмосферы. Мюоны – это нестабильные частицы, которые самопроизвольно распадаются в среднем через $2{\cdot}10^{-6}$ с (это время измерено в условиях, когда они неподвижны или движутся с малыми скоростями). Мюоны образуются в верхних слоях атмосферы на высоте 20–30 км. Если бы время жизни мюонов не зависело от их скорости, то, двигаясь даже со скоростью света, они не смогли бы проходить путь больше чем $c{\cdot}\Delta t = 3{\cdot}10^8$ м/с $\cdot 2{\cdot}10^{-6}$ с = 600 м. Однако наблюдения показывают, что значительное число мюонов достигает земной поверхности. Это объясняется тем, что время $2{\cdot}10^{-6}$ с – это собственное время (τ_0) жизни мюонов, т.е. время по часам, движущимся вместе с мюонами. Время же по земным часам $\tau_{дв}$ должно быть согласно (28.6), гораздо больше (скорость этих частиц близка к скорости света) и оказывается достаточным, чтобы мюоны могли достигнуть поверхности Земли.

В связи с обнаружением релятивистского эффекта замедления хода часов в свое время возникла проблема «парадокса часов», вызвавшая многочисленные дискуссии. Представим себе, что осуществляется фантастический космический полет к звезде, находящейся на расстоянии 500 световых лет (расстояние, которое свет проходит за 500 лет), со скоростью, близкой скорости света (пусть, $\sqrt{1-v^2/c^2}$ =0,001). По земным часам полет до звезды и обратно продлится 1000 лет, в то время как для системы корабля и космонавта в нем такое же путешествие займет всего 1 год. Таким образом, космонавт возвратится на Землю в $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз более молодым, чем его брат-близнец, оставшийся на Земле. Это явление, получившее название парадокса близнецов, в действительности парадокса не содержит. Дело в том, что принцип относительности утверждает равноправность не всяких систем отсчета, а только инерциальных. Неправильность рассуждения состоит в том, что системы отсчета, связанные с близнецами, – не эквивалентны: земная система инерциальная, а корабельная – неинерциальная (она сначала удаляется с ускорением, а затем приближается с ускорением), поэтому к ним принцип относительности неприменим.

4. Преобразование и сложение скоростей. Из уравнений (28.1) и (28.2) заменив приращения на дифференциалы получаем связь между дифференциалами в различных системах отсчета:

$$dx'=\frac{dx-v\,dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad dy'=dy,\quad dz'=dz,\quad dt'=\frac{dt-\frac{v\,dx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\tag{28.7}$$

$$dx=\frac{dx'+v\,dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad dy=dy',\quad dz=dz',\quad dt=\frac{dt'+\frac{v\,dx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\tag{28.8}$$

Допустим, что в системе К′ движется частица со скоростью $\vec{u}'(u_x', u_y', u_z')$. Эта скорость определяется как обычно

$$\vec{u}'=\frac{d\vec{R}'}{dt'}\left(\frac{dx'}{dt'},\frac{dy'}{dt'},\frac{dz'}{dt'}\right),$$

где $\vec{R}'(x',y',z')$ - радиус-вектор в системе К′.

Аналогично можно определить скорость частицы в системе К:

$$\vec{u}=\frac{d\vec{R}}{dt}\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right),$$

где $\vec{R}(x,y,z)$ - радиус-вектор в системе К.

Используя равенства (28.7) и (28.8), получаем:

$$u_x'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx-v\,dt}{dt-\frac{v\,dx}{c^2}}=\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}};\qquad u_y'=\frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}};\qquad u_z'=\frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}.\tag{28.9}$$

$$u_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+v\,dt'}{dt'+\frac{v\,dx'}{c^2}}=\frac{u_x'+v}{1+\frac{vu_x'}{c^2}};\qquad u_y=\frac{u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu_x'}{c^2}};\qquad u_z=\frac{u_z'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu_x'}{c^2}}.\tag{28.10}$$

Уравнения (28.9) и (28.10) и выражают правило сложения скоростей в релятивистской кинематике. При медленных движениях, когда можно пренебречь квадратичными величинами v^2/c^2 и $v\mathrm{u}'_x/c^2$, они переходят в нерелятивистские (классические) формулы:

$$\mathrm{u}'_x = \mathrm{u}_x - v, \qquad \mathrm{u}_y' = \mathrm{u}_y, \qquad \mathrm{u}_z' = \mathrm{u}_z, \tag{28.11}$$

соответствующие преобразованиям Галилея.

Если тело движется параллельно оси x, его скорость относительно системы отсчета К совпадает с u_x, а скорость относительно системы отсчета К′ совпадает с u'_x. В этом случае закон сложения скоростей имеет вид первой формулы (28.10). Пусть скорость u'_x равна скорости света c. Тогда для u_x получается по первой формуле (28.10) значение

$$\mathrm{u}_x = \frac{\mathrm{u}'_x + v}{1 + \dfrac{v\mathrm{u}'_x}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \dfrac{vc}{c^2}} = c.$$

Этот результат не является удивительным, так как в основе преобразований Лоренца, а, следовательно, и формул сложения скоростей, лежит утверждение, что скорость света одинакова во всех системах отсчета. Положив в первой формуле (28.10) $\mathrm{u}'_x = v = c$, получим для u_x также значение, равное c. Таким образом, при сложении любых скоростей результат не может превысить скорости света c в вакууме. Скорость света в вакууме есть предельная скорость, которую невозможно превысить.

§ 6.29 Релятивистские выражения для импульса и энергии

Движение со скоростью, сравнимой со скоростью света, встретилось физикам впервые при исследовании потока заряженных частиц (электронов), испускаемых радиоактивным веществом. Зная законы действия электрического и магнитного полей на движущийся заряд, можно определить величину скорости и массу электронов. Опыты, проделанные в начале прошлого столетия, показали, что существует зависимость инертной массы от скорости, вернее, от отношения скорости движения к скорости света. Вначале полагали, что таким свойством обладают только заряженные частицы. Однако Эйнштейн показал, что зависимость массы от скорости – это свойство всех материальных тел. Непостоянство массы тел – следствие постулатов теории относительности. Было установлено, что масса тела (частицы) возрастает с увеличением скорости v по закону:

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{29.1}$$

где m_0 – масса покоя частицы, т. е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой частица находится в покое; c – скорость света в вакууме; m – релятивистская масса частицы в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью v.

Как видим, релятивистская масса зависит от системы отсчета. Поэтому характеристикой частицы будет её масса покоя m_0. Массу покоя m_0 в дальнейшем будем называть просто массой. А под релятивистской массой в дальнейшем будем иметь в виду просто сокращенное обозначение отношения в правой части выражения (29.1).

Выражение для импульса релятивистской частицы с учетом (29.1) можно записать в виде:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (29.2)$$

Это и есть релятивистский импульс частицы. Опыт показывает, что релятивистский импульс подчиняется закону сохранения независимо от выбора инерциальной системы отсчета. Отметим, что при $v \ll c$ из (29.2) следует классическое определение импульса $\vec{p} = m_0\vec{v}$, где m_0 не зависит от скорости $\vec{v}$.

Из принципа относительности Эйнштейна, утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует условие инвариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца. Так, например, основной закон динамики Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (29.3)$$

оказывается инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, если в нем под $\vec{p}$ подразумевается релятивистский импульс.

Подставив (29.2) в (29.3) получим:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \qquad (29.4)$$

Это и есть основное уравнение релятивистской динамики инвариантное по отношению к преобразованиям Лоренца и подтверждающее закон сохранения импульса. При малых скоростях ($v \ll c$) принимает форму основного уравнения классической динамики ($\vec{F} = m_0\vec{a}$).

Следует учитывать, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами. Более того, в общем случае ускорение не совпадает по направлению с силой.

В силу однородности пространства в релятивистской механике выполняется закон сохранения релятивистского импульса: релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени. Часто вообще не оговаривают, что рассматривают релятивистский импульс, так как если тела движутся со скоростями, близкими к скорости света, то можно использовать только релятивистское выражение для импульса.

Условием применимости законов классической механики является условие $v \ll c$. Законы классической механики получаются как следствие теории относительности для предельного случая $v \ll c$ (формально переход можно осуществлять, полагая $c \to \infty$). Таким образом, классическая механика – это механика макроскопических тел, движущихся с малыми скоростями (по сравнению со скоростью света в вакууме).

Экспериментальное доказательство зависимости массы от скорости (29.1) является одним из подтверждений справедливости специальной теории относительности.

Найдем кинетическую энергию релятивистской частицы. Ранее (§ 3.14) было показано, что приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$\mathrm{dT} = \mathrm{dA} = \left(\vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}\right) \tag{29.5}$$

Учитывая, что $\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \vec{v} \cdot \mathrm{dt}$, и подставив в (29.5) выражение (29.4), получим

$$\mathrm{dT} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{m}_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\right)\vec{v} \cdot \mathrm{dt} = \vec{v} \cdot \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{m}_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Преобразовав данное выражение с учетом того, что $\vec{v}\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}\left(v^2/2\right)$, и формулы (29.1), придем к выражению

$$\mathrm{dT} = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{m}_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\right) = c^2 \cdot \mathrm{dm}, \tag{29.6}$$

т. е. приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению ее массы.

Так как кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна массе покоя m_0, то, проинтегрировав (29.6), получим

$$T = (m - m_0)c^2. \qquad (29.7)$$

Т.е. кинетическая энергия релятивистской частицы имеет вид:

$$T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \qquad (29.8)$$

Под действием внешней силы релятивистская частица, двигаясь ускоренно, увеличивает свою кинетическую энергию, приращение которой равно работе этой силы. Так как работа имеет конечную величину, то и кинетическая энергия (см. (29.8)) имеет конечное значение. Отсюда следует, что релятивистская частица не может приобрести скорость $v = c$, так как в этом случае кинетическая энергия $T \to \infty$. Поэтому для релятивистской частицы должно выполняться условие $v < c$. При скоростях $v \ll c$ выражение (29.8) переходит в классическое $T = m_0v^2/2$.

А. Эйнштейн обобщил положение (29.6), предположив, что оно справедливо не только для кинетической энергии материальной точки, но и для полной энергии. А именно: любое изменение массы Δm сопровождается изменением полной энергии материальной точки

$$\Delta E = c^2 \cdot \Delta m . \qquad (29.9)$$

Отсюда следует универсальная зависимость между полной энергией тела E и его массой m:

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (29.10)$$

Уравнение (29.10), равно как и (29.9), выражает фундаментальный закон природы – закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии: полная энергия системы равна произведению ее массы на квадрат скорости света в вакууме. Отметим, что в полную энергию E не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

С учетом (29.7), уравнение (29.10) можно записать в виде:

$$E = m_0c^2 + T , \qquad (29.11)$$

откуда следует, что покоящееся тело (T = 0) также обладает энергией

$$E_0 = m_0c^2, \qquad (29.12)$$

называемой энергией покоя. Классическая механика энергию покоя E_0 не учитывает, считая, что при скорости $v = 0$ энергия покоящегося тела равна нулю.

В силу однородности времени в релятивистской механике, как и в классической, выполняется закон сохранения энергии: полная энергия замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Из формул (29.10) и (29.2), (29.12) найдем релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы:

$$E^2 = m^2c^4 = m_0^2c^4 + p^2c^2 \quad \text{или} \quad E^2 = E_0^2 + p^2c^2 \qquad (29.13)$$

Возвращаясь к уравнению (29.10), отметим еще раз, что оно имеет универсальный характер. Оно применимо ко всем формам энергии, т. е. можно утверждать, что с энергией, какой бы формы она ни была, связана масса

$$m = E/c^2 \qquad (29.14)$$

и, наоборот, со всякой массой связана определенная энергия (29.10).

Закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии блестяще подтвержден экспериментами о выделении энергии при протекании ядерных реакций. Он широко используется для расчета энергетических эффектов при ядерных реакциях и превращениях элементарных частиц.

Рассматривая выводы специальной теории относительности, видим, что она, как, впрочем, и любые крупные открытия, потребовала пересмотра многих установившихся и ставших привычными представлений. Масса тела не остается постоянной величиной, а зависит от скорости тела; длина тел и длительность событий не являются абсолютными величинами, а носят относительный характер; наконец, масса и энергия оказались связанными друг с другом, хотя они и являются качественно различными свойствами материи.

Контрольные вопросы

1 В чем физическая сущность механического принципа относительности?

2 В чем заключается правило сложения скоростей в классической механике?

3 Каковы причины возникновения специальной теории относительности?

4 В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?

5 Зависит ли от скорости движения системы отсчета скорость тела? скорость света?

6 Запишите и прокомментируйте преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?

7 Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?

8 Одновременны ли события в системе К′, если в системе К они происходят в одной точке и одновременны? в системе К события разобщены, но одновременны? Обосновать ответ.

9 Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета? Ответ обосновать.

10 При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25 %?

11 В чем состоит «парадокс близнецов» и как его разрешить?

12 В чем заключается релятивистский закон сложения скоростей? Как показать, что он находится в согласии с постулатами Эйнштейна?

13 Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики материальной точки? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?

14 В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса?

15 Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике? При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу?

16 Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии. В чем его физическая сущность? Приведите примеры его экспериментального подтверждения.

Тесты

1. Какая энергия выделилась бы при полном превращении 1 г вещества в излучение?

A) $9\cdot10^{12}$ Дж B) $9\cdot10^{13}$ Дж C) $9\cdot10^{14}$ Дж Д) $9\cdot10^{15}$ Дж E) $9\cdot10^{16}$ Дж

2. При какой скорости кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя? Скорость света в вакууме равна c.

A) $\frac{1}{2}c$ B) $\frac{3}{4}c$ C) c Д) $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}c$

3. Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от 0,6 c до 0,8 c (где c – скорость света в вакууме)?

A) 0,8 m_0c^2 B) 0,42 m_0c^2 C) 0,2 m_0c^2 Д) 0,14 m_0c^2 E) 0,5 m_0c^2

4. Закон взаимосвязи массы и энергии в теории относительности имеет вид:

A) $E=mc^2$ B) $E=m_0c^2+\frac{mV^2}{2}$ C) $E=h\nu$ Д) $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ E) $E=\frac{mc^2}{2}$

5. Мировое потребление энергии человечеством составляет примерно $3\cdot 10^{20}$ Дж в год. Для производства такого количества энергии необходимо сжечь 10 млрд. т угля. Сколько тонн угля в год понадобилось бы для обеспечения всех энергетических потребностей человечества, если бы использовалась вся его энергия? Скорость света $3\cdot 10^8$ м/с.

A) 3 300 т B) 330 т C) 33 т Д) 3,3 т E) 0,33 т

6. На сколько увеличится релятивистская масса частицы (m_0 – масса покоя) при увеличении ее скорости от v_0=0 до v=0,9 c (где c – скорость света в вакууме)?

A) 1,29 m_0 B) 0,29 m_0 C) 2,29 m_0 Д) 1,9 m_0 E) 0,9 m_0

7. Скорость частицы v=30 Мм/с. На сколько процентов релятивистская масса движущейся частицы больше массы покоящейся частицы? Скорость света в вакууме c=300 тыс. км/с.

A) 0,25 % B) 0,5 % C) 0,75 % Д) 0,1 % E) 1 %

8. Полная энергия тела возросла на ΔE=1 Дж. На сколько при этом изменилась масса тела? Скорость света в вакууме c=300 000 км/с.

A) $1{,}1\cdot 10^{-12}$ г B) $1{,}1\cdot 10^{-13}$ г C) $1{,}1\cdot 10^{-14}$ г Д) $1{,}1\cdot 10^{-15}$ г E) $1{,}1\cdot 10^{-16}$ г

9. Во сколько раз замедляется ход времени при скорости движения часов v=240 000 км/с? Скорость света c=300 000 км/с.

A) 1,57 B) 1,67 C) 1,77 Д) 1,87 E) 1,97

10. Ускоритель разгоняет протоны до кинетической энергии 70 ГэВ. Во сколько раз увеличивается их масса? Масса покоя (энергия покоя) протона равна 938,3 МэВ.

A) 62,6 B) 65,6 C) 68,6 Д) 71,6 E) 75,6

11. Подводная лодка «Наутилус» имеет мощность топливных установок P=14,7 МВт, КПД η=25 %. Топливом служит обогащенный уран массой m_0=1 кг, при делении ядер которого выделяется энергия $E_0=6{,}9\cdot 10^{13}$ Дж. Определите запас горючего, необходимого для годового плавания лодки.

А) 26,9 кг В) 29,3 кг С) 31,2 кг Д) 33,5 кг Е) 35,6 кг

12. При распаде π - мезона образовалось два фотона с энергией E_1 и E_2, которые летят в противоположных направлениях. Определите скорость распавшегося мезона. E=p*c* - связь между энергией E и импульсом p, где *c* – скорость света в вакууме.

А) $c\dfrac{E_1}{E_2}$ В) $c\dfrac{(E_1 - E_2)^2}{E_1^2 + E_2^2}$ С) $c\dfrac{E_1^2 - E_2^2}{(E_1 + E_2)^2}$ Д) $c\dfrac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$ Е) $c\dfrac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2}$

13. Найдите относительную скорость двух частиц, движущихся навстречу друг другу со скоростью v=0,5 *c*, где *c* – скорость света в вакууме.

А) 0,4 *c* В) 0,6 *c* С) 0,7 *c* Д) 0,8 *c* Е) *c*

14. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы равно 10 нс. Какой путь пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где время ее жизни равно 20 нс? Скорость света в вакууме $3\cdot10^8$ м/с.

А) 25 м В) 20 м С) 15 м Д) 10 м Е) 5 м

15. Электрон движется со скоростью $v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$, где *c* – скорость света в вакууме. Чему равен импульс этого электрона? Масса покоя электрона равна m_0.

А) $\dfrac{1}{4}m_0c$ В) $\dfrac{3}{4}m_0c$ С) $2\sqrt{3}\,m_0c$ Д) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}m_0c$ Е) $\sqrt{3}\,m_0c$

16. Собственное время жизни частицы отличается на 1 % от времени жизни по неподвижным часам. Определите скорость частицы в единицах *c* – скорости света в вакууме.

А) 0,16 *c* В) 0,14 *c* С) 0,12 *c* Д) 0,10 *c* Е) 0,08 *c*

17. Найдите скорость космической частицы, если ее полная энергия в 5 раз больше энергии покоя. Ответ выразите в единицах скорости света в вакууме *c*.

А) $\dfrac{2\sqrt{7}}{6}c$ В) $\dfrac{2\sqrt{5}}{7}c$ С) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}c$ Д) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}c$ Е) $\dfrac{2\sqrt{5}}{6}c$

18. Две ракеты движутся по одной прямой в одном направлении со скоростями 0,5 *c* и 0,8 *c* относительно неподвижного наблюдателя (*c* – скорость света в вакууме). Определите скорость их относительного удаления в системе отсчета этого наблюдателя и в системе отсчета наблюдателя в ракете.

A) в первом случае 0,3 c, во втором 0,5 c
B) в первом случае 0,5 c, во втором 0,3 c
C) в обоих случаях 0,3 c
Д) в обоих случаях 0,4 c
E) в обоих случаях 0,5 c

19. Две ракеты движутся навстречу друг другу по одной прямой относительно неподвижного наблюдателя со скоростями v_1=0,9 c и v_2=0,6 c (c – скорость света в вакууме). Определите скорость их сближения в системе отсчета этого наблюдателя и в системе отсчета, связанной с одной из ракет.

A) в обоих случаях 1,5 c
B) в обоих случаях 0,974 c
C) в обоих случаях 0,3 c
Д) в первом случае 0,974 c, во втором 1,5 c
E) в первом случае 1,5 c, во втором 0,974 c

20. Неподвижное атомное ядро массой M распалось на две равные части, с массой m каждая. Найдите скорости образовавшихся частей. Скорость света в вакууме равна c.

A) $c\sqrt{\frac{m}{M}}$ B) $c\sqrt{\frac{m}{M}-2}$ C) $c\sqrt{\frac{M}{m}-2}$ Д) $c\sqrt{\frac{M}{m}-1}$ E) $c\sqrt{\frac{M}{m}}$

21. Космический корабль удаляется от Земли с относительной скоростью v_1=0,8 c (c – скорость света в вакууме), а затем с него стартует ракета (в направлении от Земли) со скоростью v_2=0,8 c относительно корабля. Определите скорость u ракеты относительно Земли.

A) 1,6 c B) 1,47 c C) 0,983 c Д) 0,976 c E) 0,961 c

22. Определите, какая кинетическая энергия должна быть сообщена ракете массой m_0=1 500 кг, чтобы она приобрела скорость v=120 Мм/с. Скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с.

A) $1{,}23\cdot10^{16}$ Дж B) $1{,}23\cdot10^{17}$ Дж C) $1{,}23\cdot10^{18}$ Дж Д) $1{,}23\cdot10^{19}$ Дж E) $1{,}23\cdot10^{20}$ Дж

23. Определите, на сколько процентов масса релятивистской элементарной частицы, вылетающей из ускорителя со скоростью v=0,75 c (где c – скорость света в вакууме), больше ее массы покоя.

A) 49,2 % B) 51,2 % C) 53,2 % Д) 55,2 % E) 57,2 %

24. Время жизни покоящейся нестабильной частицы составляет 1 мкс. Для наблюдателя, относительно которого такая частица движется со скоростью, отличающейся на 1 % от скорости света в вакууме, ее время жизни равно

A) 0,14 мкс B) 9,9 мкс C) 7,1 мкс Д) 0,9 мкс E) 3,2 мкс

25. Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость 0,4 *c*. В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения β-частицу со скоростью 0,75 *c* относительно ускорителя. Найдите скорость частицы относительно ядра, если *c* – скорость света в вакууме.

A) 0,35 *c* B) 0,40 *c* C) 0,45 *c* Д) 0,55 *c* E) 0,50 *c*

26. Какая энергия выделяется при термоядерной реакции ${}_1H^2 + {}_1H^3 \rightarrow {}_2He^4 + {}_0n^1$? Дефект массы реакции $\Delta m = 0{,}01851$ а.е.м. (1 а.е.м. = 1,66 $\cdot 10^{-27}$ кг, скорость света $c = 3\cdot 10^8$ м/с)

A) $0{,}21\cdot 10^{-11}$ Дж B) $0{,}07\cdot 10^{-11}$ Дж C) $0{,}14\cdot 10^{-11}$ Дж Д) $0{,}56\cdot 10^{-11}$ Дж E) $0{,}28\cdot 10^{-11}$ Дж

27. Время жизни нестабильного мюона, входящего в состав космических лучей, измеренное земным наблюдателем, относительно которого мюон двигался со скоростью, составляющей 95 % скорости света в вакууме, оказалось равным 6,4 мкс. Каково время жизни мюона, покоящегося относительно наблюдателя?

A) 20 мкс B) 1 мкс C) 2 мкс Д) 12 мкс E) 4 мкс

28. Две ракеты движутся навстречу друг другу относительно неподвижного наблюдателя с одинаковой скоростью, равной 0,5 *c*. Определите скорость сближения ракет в единицах *c* – скорости света в вакууме.

A) *c* B) 0,95 *c* C) 0,9 *c* Д) 0,85 *c* E) 0,8 *c*

29. Определите относительную скорость движения, при которой релятивистское сокращение линейных размеров тела составляет 10 %. Скорость света в вакууме $c = 3\cdot 10^8$ м/с.

A) $1{,}01\cdot 10^8$ м/с B) $1{,}20\cdot 10^8$ м/с C) $1{,}31\cdot 10^8$ м/с Д) $1{,}48\cdot 10^8$ м/с E) $1{,}57\cdot 10^8$ м/с

30. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью *v* относительно инерциальной системы отсчета. При каком значении *v* длина стержня в этой системе отсчета будет на η=0,5 % меньше его собственной длины (*c* – скорость света в вакууме)?

A) 0,01 *c* B) 0,05 *c* C) 0,1 *c* Д) 0,2 *c* E) 0,4 *c*

Верные ответы в тестах отмечены красным цветом.

Упражнения для самоконтроля

6.1. Часы движутся в К′-системе отсчета прямолинейно и равномерно со скоростью *v*. В начальный момент времени t=0 их показания совпадали с часами К-системы. На какое время отстанут движущиеся часы за время t=60 мин (это время по часам К-системы), если: 1) *v*=1 800 км/ч (реактивный самолет); 2) *v*=0,8 *c*, где *c* – скорость света в вакууме? [1) $5\cdot10^{-9}$ с; 2) 24 мин]

6.2. Собственное время жизни частицы отличается на 1,5 % от времени жизни по неподвижным часам. Определить отношение *v/c*. [0,172]

6.3. Тело с массой покоя 2 кг движется со скоростью 200 Мм/с в системе отсчета К′, которая сама движется относительно системы отсчета К со скоростью 200 Мм/с. Определить: 1) скорость тела относительно системы К; 2) его массу в этой системе. [1) 277 Мм/с; 2) 5,2 кг]

6.4. Определите расстояние, которое пролетел π-мезон с момента рождения до распада, если время его жизни в этой системе отсчета Δt = 5 мкс, а собственное время жизни (время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом) Δt_o = 2,2 мкс. [1,35 км]

6.5. Определить скорость, при которой релятивистский импульс частицы превышает ее ньютоновский импульс в пять раз. [0,98 *c*]

6.6. Определить скорость, полученную электроном, если он прошел ускоряющую разность потенциалов 1,2 МэВ. [2,86 Мм/с]

6.7. Определить релятивистский импульс электрона, кинетическая энергия которого 1 ГэВ. [$5{,}34\cdot10^{-19}$ Н·с]

6.8. Стержень, собственная длина которого l_0=5,0 м, движется в продольном направлении со скоростью *v* относительно К-системы отсчета. При каком значении скорости длина стержня в К-системе будет l=3,0 м? [*v*=0,8 *c*]

6.9. Количество энергии, которое приносит на Землю солнечное излучение за 1 с на площадку 1 м^2, перпендикулярную солнечным лучам, составляет около 1,4 кДж/(с·м^2). Оцените ежесекундную потерю массы Солнца, если радиус орбиты Земли 150 млн. км. [$4{,}4\cdot10^9$ кг/с]

6.10. Космический корабль движется со скоростью *v*=0,8 *c* по направлению к Земле. Определите расстояние, пройденное им в системе отсчета, связанной с Землей (система К), за время t_0 = 0,5 с, отсчитанное по часам в космическом корабле (система К′). [$2\cdot10^8$ м]

6.11. Частица движется со скоростью *v*=0,8 *c*. Определите отношение полной энергии релятивистской частицы к ее энергии покоя. [E/E_0 = 1,67]

Глава 7 Механика жидкостей и газов

§ 7.30 Твердые, жидкие и газообразные тела

Все тела состоят из мельчайших частиц – молекул, которые находятся в постоянном и непрерывном движении. В твердых телах молекулы совершают колебательное движение около некоторого определенного положения равновесия. Но эти перемещения молекул настолько малы, что они совершенно не влияют на движение тел или их частей, рассматриваемых в механике. Любые части твердого тела содержат настолько большое количество молекул, что их при рассмотрении движения и деформация тела можно считать сплошной, непрерывной средой.

Каждое твердое тело имеет определенную форму, для изменения которой (т.е. для деформации), необходимо приложить к телу или к его частям некоторые силы. Жидкости и газы представляют собой такие физические тела, которые не имеют определенной формы и принимают форму того сосуда, который они заполняют.

В газе молекулы совершают беспорядочное, хаотическое движение, соударяясь друг с другом подобно мельчайшим шарикам из твердого материала. Молекулы не связаны друг с другом во время полета, и частицы газа вследствие непрерывных соударений стремятся разлететься во все стороны, поэтому газ равномерно заполняет весь предоставленный ему объем. Таким образом, газ не имеет ни определенной формы, ни определенного объема. Объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает. При анализе механических явлений газ можно представлять в виде непрерывного сплошного тела, которое стремится расшириться и равномерно заполнить весь предоставленный ему объем. Такое представление будет правильным только в том случае, когда мельчайшие частицы газообразного тела содержат достаточно большое число молекул.

В жидкостях, как и в газах, молекулы жестко не связаны друг с другом. При хаотическом молекулярном движении одна молекула двигается относительно другой как угодно. Но в жидкости, в отличие от газа, среднее расстояние между молекулами остается практически неизменным. Следовательно, жидкость представляет собой физическое тело, не имеющее определенной формы, но обладающее определенным объемом. Большинство жидкостей оказывает значительное сопротивление сжатию и считается практически несжимаемым.

Жидкое тело всегда ограничено определенной поверхностью, отделяющей его от твердого тела или газа; в последнем случае поверхность жидкости называют свободной.

Газообразные тела обычно ограничены или поверхностью жидкости или поверхностью твердых тел, но они могут и не иметь определенной граничной поверхности, например верхние слои земной атмосферы. Основными физическими свойствами жидкостей, лежащими в основе построения теоретических моделей, являются непрерывность, текучесть и вязкость.

В курсе механики с достаточной степенью точности твердые, жидкие и газообразные тела рассматриваются как сплошные и непрерывные, причем предполагается, что твердое тело при неизменных внешних условиях обладает определенными, присущими ему формой и объемом, жидкое тело обладает только определенным объемом, газообразное тело не имеет ни формы, ни объема, ему присущего.

Раздел механики, в котором изучается движение несжимаемых жидкостей и их взаимодействие с твердыми телами или газом называется гидродинамикой.

Методы гидродинамики позволяют рассчитывать скорость, давление и другие параметры жидкости в любой точке занятого жидкостью пространства в любой момент времени. Это дает возможность определить силы давления и трения, действующие на движущее в жидкости тело или на стенки канала (русла), являющиеся границами для потока жидкости. Методы гидродинамики пригодны и для газов при скоростях, малых по сравнению со скоростью звука, когда газы еще можно считать несжимаемыми. В этом случае поведение жидкостей и газов определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями.

§ 7.31 Закон Паскаля. Сила Архимеда. Линии и трубки тока. Неразрывность струи

Рассмотрим основные понятия и законы гидродинамики.

Давление – это физическая величина, численно равная силе, которая действует на единицу площади поверхности выделенного объема и направлена нормально к поверхности:

$$P = \frac{F}{S}. \tag{31.1}$$

Единица давления – паскаль (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2 (1 Па = 1 Н/м^2).

Внесистемные единицы давления: физическая (или нормальная) атмосфера 1 атм = 760 мм рт. ст. = $1{,}013\cdot10^5$ Па; техническая атмосфера 1 ат = 1 кгс/см^2 = $0{,}98\cdot10^5$ Па; 1 бар = 10^5 Па; 1 мм рт.ст. = 1 тор = 133 Па.

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется закону Паскаля (французский ученый (1623–1662)): поверхностные силы, действующие на неподвижную жидкость или газ, создают давление, одинаковое во всех точках жидкости или газа. Поверхностными силами являются сила атмосферного давления и сила, действующая на жидкость со стороны соприкасающихся с ней тел. Закон Паскаля можно вывести из условий равновесия любого по форме объема, если представить себе его вырезанным внутри жидкости или газа.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S, высоте h и плотности ρ столба жидкости, его вес равен $\rho g h S$, где g – ускорение свободного падения. Тогда давление на нижнее основание будет равно:

$$P = \rho g h S / S = \rho g h, \tag{31.2}$$

т. е. давление изменяется линейно с высотой (глубиной) h. Давление ρgh называется гидростатическим давлением.

Согласно формуле (31.2), сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние слои. Поэтому на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила. Архимедом (287-212 гг. до н.э.) был найден закон: всякое тело, погруженное в жидкость или газ, испытывает со стороны окружающей среды действие силы, равной весу вытесненной телом жидкости или газа. Эта сила направлена вверх и проходит через центр масс вытесненной жидкости или газа. Сила Архимеда равна $F_A=\rho gV_п$, где $V_п$ - объем части тела, погруженной в жидкость.

Движение жидкости называется течением, а совокупность частиц движущейся жидкости – потоком. В гидродинамике используют физическую модель идеальной жидкости, т.е. жидкости, лишенной вязкости. Такой жидкости и такого газа, разумеется, нет. Однако движение жидкости и газа во многих практически важных случаях можно приближенно рассматривать как течение идеальной жидкости. Идеальная жидкость течет без трения.

Зная законы течения идеальной жидкости, можно уже в них внести поправки, учитывающие влияние вязкости. Такой путь последовательного изучения закономерностей движения жидкости и газа позволяет относительно простыми способами выяснить сложные законы движения вязкой жидкости.

Картину текущей жидкости (газа) можно представить себе при помощи поля вектора скоростей частиц. Каждой точке пространства $\vec{R}$ в момент времени t соответствует вектор $\vec{v}(\vec{R},t)$ – вектор скорости частицы, проходящей через точку $\vec{R}$, он зависит от положения точки $\vec{R}$ и времени t.

Течение жидкости называют стационарным (установившимся), если все параметры, характеризующие состояние жидкости (скорость, давление, плотность, температура и др.), остаются постоянными все время в каждой точке пространства, занятого текущей жидкостью.

Графически течение жидкостей изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рисунок 26). Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была пропорциональна скорости течения жидкости. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости течения жидкости в разных точках пространства. Линии тока в жидкости можно наблюдать, подмешав в нее какие-либо заметные взвешенные частицы.

Совокупность траекторий всех частиц жидкости, коснувшихся мысленно выделенного кольца в стационарном потоке жидкости, образуют трубки тока (рисунок 26). Так как жидкость непрерывна, то стенки трубок тока можно представить как сплошные, непроницаемые. Скорость частиц на стенках трубки направлена по касательной к поверхности трубки.

Рассмотрим условие постоянства потока массы при течении по трубке тока. При стационарном течении масса жидкости или газа, прошедшая за единицу времени через любое поперечное сечение трубки, одинакова для всех сечений.

Представим себе трубку переменного сечения (рисунок 26). Скорость в сечении S_1 равна v_1. Тогда масса жидкости, прошедшая за секунду через это сечение, равна $Q_1=\rho_1 v_1 S_1$, где ρ_1 – плотность жидкости или газа в данном сечении. А в другом сечении трубки площадью S_2 масса жидкости, прошедшей за секунду, равна $Q_2=\rho_2 v_2 S_2$, где ρ_2 и v_2 – плотность и скорость жидкости во втором сечении трубки. Должно быть $Q_1 = Q_2$, в противном случае количество жидкости между этими двумя сечениями начало бы возрастать или убывать, и течение перестало бы быть стационарным. Следовательно, закон постоянства потока массы может быть представлен в виде:

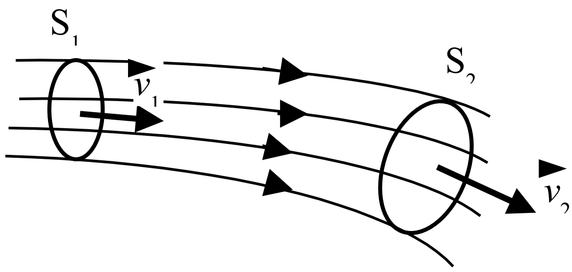


Рисунок 26

$$Q = \rho v S = \text{const} \tag{31.3}$$

вдоль любой трубки тока.

Если жидкость несжимаема (ρ = const), то из (31.3) следует, что

$$vS = \text{const}, \quad \text{или} \quad S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \,. \tag{31.4}$$

Т.е. за секунду через сечение S_2 пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение S_1. Соотношение (31.4) называется уравнением неразрывности (непрерывности) для несжимаемой жидкости. Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Из (31.4) следует, что при переменном сечении трубки тока частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением.

§ 7.32 Уравнение Бернулли для стационарного течения несжимаемой жидкости

Выделим в стационарно текущей идеальной несжимаемой жидкости трубку тока малого сечения (рисунок 27). Рассмотрим объем жидкости, ограниченный стенками трубки тока и перпендикулярными к линиям тока сечениями S_1 и S_2. За время Δt этот объем переместится вдоль трубки тока, причем перемещение в сечении S_1 равно Δl_1, перемещение в сечении S_2 равно Δl_2. В силу неразрывности струи объемы жидкости, прошедшие через сечения S_1 и S_2 за время Δt, будут иметь одинаковую величину: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

Пусть в месте сечения S_1 скорость течения v_1, давление P_1 и высота, на которой это сечение расположено, h_1. Аналогично, в месте сечения S_2 скорость течения v_2, давление P_2 и высота, на которой это сечение расположено, h_2. Согласно закону постоянства потока массы, массы жидкости, прошедшие через сечения S_1 и S_2 за время Δt, будут равны $\Delta m=\rho\cdot\Delta V$. Тогда приращение полной энергии (кинетической и потенциальной), запишется следующим образом:

$$\Delta E=E_2-E_1=\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\Delta V\cdot v_2{}^2+\rho\cdot\Delta V\cdot g\cdot h_2\right)-\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\Delta V\cdot v_1{}^2+\rho\cdot\Delta V\cdot g\cdot h_1\right), \quad (32.1)$$

где ρ - плотность жидкости, g – ускорение свободного падения.

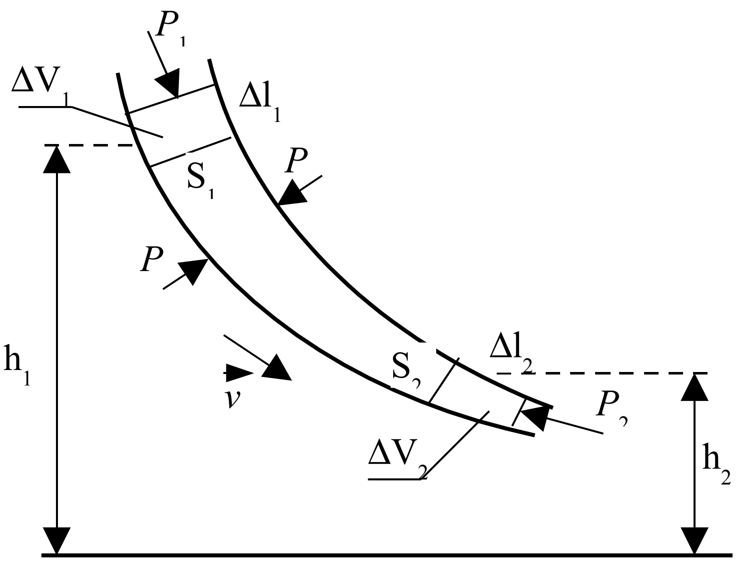


Рисунок 27

В идеальной жидкости силы трения отсутствуют. Поэтому приращение энергии (32.1) должно равняться работе, совершаемой над выделенным объемом силами давления. Силы давления на боковую поверхность перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частиц, к которым они приложены, вследствие чего работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил, приложенных к сечениям S_1 и S_2. Эта работа равна:

$$A = P_1\cdot S_1\cdot\Delta l_1 - P_2\cdot S_2\cdot\Delta l_2 = (P_1 - P_2)\cdot\Delta V. \quad (32.2)$$

Приравняв выражения (32.1) и (32.2), сократив на ΔV и перенося члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получим:

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 . \qquad (32.3)$$

Сечения S_1 и S_2 были взяты совершенно произвольно. Поэтому можно утверждать, что в любом сечении трубки тока

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const} . \qquad (32.4)$$

Выражение (32.4) выведено швейцарским физиком Д. Бернулли (1700–1782) и называется уравнением Бернулли (опубликовано в 1738 г.). Как видно из его вывода, это уравнение является выражением закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина P в формуле (32.4) называется статическим давлением (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела), величина $\rho v^2/2$ – динамическим давлением. Как уже указывалось выше (31.2), величина $\rho g h$ называется гидростатическим давлением.

Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$) выражение (32.4) принимает вид:

$$P + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const} . \qquad (32.5)$$

Из уравнения Бернулли (32.5) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности (31.4) следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т. е. там, где скорость меньше.

§ 7.33 Истечение жидкости из отверстия

Применим уравнение Бернулли для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим широкий сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого на некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие (рисунок 28). Выделим в жидкости трубку тока, имеющую своим сечением с одной стороны открытую поверхность жидкости в сосуде, а с другой стороны – отверстие, через которую жидкость вытекает.

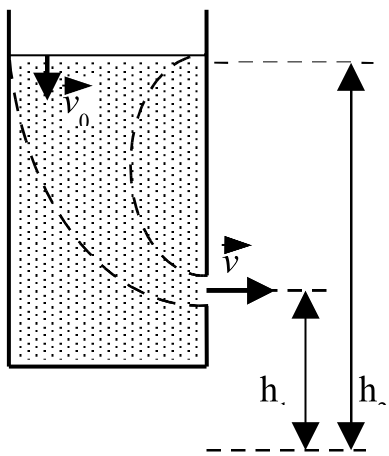


Рисунок 28

Рассмотрим два сечения (на уровне h_1 свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне h_2 выхода ее из отверстия). Напишем для них уравнение Бернулли:

$$P_1 + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho v_0^{\,2}}{2} + \rho g h_2 .$$

Так как давления P_1 и P_2 в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т. е. $P_1 = P_2$, то уравнение после сокращения на плотность жидкости ρ будет иметь вид:

$$\frac{v^2}{2} + g h_1 = \frac{v_0^{\,2}}{2} + g h_2 .$$

Из уравнения неразрывности (31.4) следует, что $v_0/v = S/S_0$, где S_0 и S – площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если $S_0 >> S$, то членом $v_0^2/2$ можно пренебречь. Тогда

$$v^2 = 2g(h_2 - h_1) = 2gh,$$

и

$$v = \sqrt{2gh}\,, \qquad (33.1)$$

где v – скорость истечения жидкости из отверстия, $h = h_2 - h_1$ – высота открытой поверхности над отверстием.

Это выражение получило название формулы Торричелли (Э. Торричелли (1608 –1647) – итальянский физик и математик).

Итак, скорость истечения жидкости из отверстия, расположенного на глубине h под открытой поверхностью, совпадает со скоростью, которую приобретает любое тело, падая с высоты h. Следует помнить, что этот результат получен в предположении, что жидкость идеальна. Для реальных жидкостей скорость истечения будет меньше. Отличие будет тем сильнее от значения (33.1), чем больше вязкость жидкости.

Струя жидкости, вытекающая из отверстия в сосуде (рисунок 29) за время Δt, имеет импульс $\Delta\vec{p} = \rho S v \vec{v}\,\Delta t$, где ρ - плотность жидкости, S – площадь отверстия, $\vec{v}$ - скорость истечения струи. Этот импульс сообщается вытекающей жидкости сосудом. По третьему закону Ньютона сосуд получает от вытекающей жидкости за время Δt импульс, равный $-\Delta\vec{p}$, т.е. испытывает действие силы

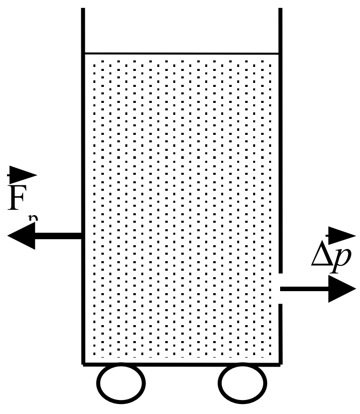


Рисунок 29

$$\vec{F}_p = -\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -\rho S v \vec{v}. \qquad (33.2)$$

Эта сила называется реакцией вытекающей струи (реактивной силой). Если сосуд поставить на тележку, то под действием силы $\vec{F}_p$ он придет в движение в направлении, противоположном направлению струи. Найдем значение силы $\vec{F}_p$, воспользовавшись выражением (33.1) для скорости истечения жидкости из отверстия:

$$F_p = \rho S v^2 = 2\rho g h S. \qquad (33.3)$$

На реакции вытекающей струи газа основано действие реактивных двигателей и ракет. Реактивное движение, не нуждаясь для своего осуществления в наличии атмосферы, используется для полетов в космическом пространстве.

§ 7.34 Силы внутреннего трения

Вязкость (внутреннее трение) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Для нахождения количественных законов вязкости начнем с простейшего примера. Рассмотрим две параллельные бесконечно длинные пластинки, между которыми находится слой жидкости (пластинки считаются бесконечными, если их длина и ширина значительно больше расстояния между ними). Нижняя пластинка АВ неподвижна, а верхняя СД движется относительно нее с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ (рисунок 30). Оказывается, что для поддержания равномерного движения пластинки СД к ней надо приложить постоянную силу $\vec{F}$, направленную в сторону движения. На пластинку АВ должна действовать такая же, но противоположно направленная сила, чтобы удержать эту пластинку в покое. Модуль силы $\vec{F}$, как экспериментально было установлено еще Ньютоном, пропорционален скорости v_0, площади пластинки S и обратно пропорционален расстоянию d между пластинками:

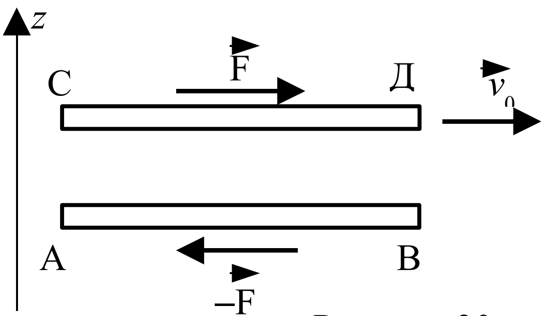


Рисунок 30

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{v_0}{d}. \qquad (34.1)$$

Здесь η - постоянная, зависящая от природы жидкости, называется динамической вязкостью (или просто вязкостью). Она не зависит от материала пластинок и имеет разные значения для различных жидкостей. Для данной жидкости коэффициент η зависит от параметров, характеризующих ее внутреннее состояние, и в первую очередь от температуры. Таким образом, под вязкостью понимают как явление, так и коэффициент, характеризующий свойства жидкости.

Если обе пластинки двигаются равномерно параллельно друг другу (пусть скорость пластинки АВ равна v_1, а пластинки СД -v_2), то вместо (34.1) можно написать более общую формулу:

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{v_2 - v_1}{d}. \qquad (34.2)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти в систему отсчета, в которой пластинка АВ покоится.

В формуле (34.1) предполагается, что скорость частиц жидкости в направлении z, перпендикулярном к пластинкам, меняется по линейному закону (рисунок 30). В общем случае отношение v_0/d нужно заменить градиентом скорости в направлении z. Тогда (34.1) примет вид:

$$F = \eta \cdot S \cdot \left|\frac{dv}{dz}\right|. \qquad (34.3)$$

Эта формула определяет модуль силы трения. Знак модуля поставлен для того, чтобы исключить зависимость знака силы трения от направления движения пластинок.

Единица вязкости – паскаль-секунда (Па·с): 1 Па·с равен динамической вязкости среды, в которой при градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на м, возникает сила внутреннего трения в 1 Н на 1 м^2 поверхности касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с/м^2).

§ 7.35 Ламинарное и турбулентное течения

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется ламинарным (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних слоев, не перемешиваясь с ними, и турбулентным (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до стенки трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы. Так, при ламинарном течении в прямолинейной трубе постоянного поперечного сечения частицы жидкости движутся вдоль прямолинейных траекторий, параллельных оси трубы. Однако при достаточно больших скоростях ламинарное течение оказывается неустойчивым и переходит в турбулентное.

Турбулентное течение – это такое течение, гидродинамические характеристики которого (скорость, давление, а для газов – плотность и температура) быстро и нерегулярно изменяются во времени. При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому происходит интенсивное перемешивание между слоями движущейся жидкости. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы жидкости переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у стенки трубы обычно происходит образование вихрей. Примерами турбулентного течения могут служить движение воды в бурном горном потоке, водопаде или за кормой быстроходного катера, движение дыма, выходящего из фабричной трубы.

Английский ученый О. Рейнольдс (1842–1912) в 1883 г. установил, что характер течения зависит от безразмерной величины, называемой числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta} = \frac{v l}{\nu}, \tag{35.1}$$

где η – коэффициент вязкости жидкости, ρ – плотность жидкости, $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость, v – средняя по сечению трубы скорость движения жидкости; l – характерный для поперечного сечения размер, например, сторона квадрата при квадратном сечении, радиус или диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} \le 1\,000$) наблюдается ламинарное течение. Переход от ламинарного течения к турбулентному течению происходит в области $1\,000 \le \mathrm{Re} \le 2\,000$, а при $\mathrm{Re} = 2\,300$ (для гладких труб) течение – турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

§ 7.36 Формула Стокса

При малых Re, т.е. при небольших скоростях движения (и небольших l; см. (35.1)), сопротивление среды обусловлено практически только силами трения. Дж. Стокс ((1819–1903) – английский физик и математик) установил, что сила сопротивления в этом случае пропорциональна коэффициенту динамической вязкости η, скорости v движения тела относительно жидкости и характерному размеру тела l, т.е. $F \sim \eta \cdot l \cdot v$ (предполагается, что расстояние от тела до границ жидкости, например до стенок сосуда, значительно больше размеров тела). Коэффициент пропорциональности зависит от формы тела. Для шара, если в качестве l взять радиус шара R, коэффициент пропорциональности оказывается равным 6π. Следовательно, сила сопротивления движению шарика в жидкостях при небольших скоростях в соответствии с формулой Стокса равна

$$F = 6\pi\cdot\eta\cdot R\cdot v. \qquad (36.1)$$

Определение вязкости по методу Стокса основано на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы: сила тяжести, равная $mg=\frac{4}{3}\pi R^3\rho g$ (ρ – плотность шарика, g – ускорение свободного падения), сила Архимеда $F_A=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_ж g$ ($\rho_ж$ – плотность жидкости) и сила сопротивления, эмпирически установленная Дж. Стоксом: $F=6\pi\cdot\eta\cdot R\cdot v$, где R – радиус шарика, v – его скорость. При равномерном движении шарика

$$mg = F_A + F \qquad \text{или} \qquad \frac{4}{3}\pi R^3\rho g = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_ж g + 6\pi\cdot\eta\cdot R\cdot v,$$

откуда

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_ж)gR^2}{9v}. \qquad (36.2)$$

Измерив скорость v равномерного движения шарика, можно определить вязкость η жидкости (газа).

Контрольные вопросы

1 Что такое давление в жидкости? Давление – величина векторная или скалярная? Какова единица давления в СИ?

2 Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.

3 Что называют линией тока? трубкой тока?

4 Что характерно для установившегося течения жидкости?

5 Каков физический смысл и как вывести уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости?

6 Какой закон выражает уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости? Выведите это уравнение.

7 Что такое градиент скорости?

8 Каков физический смысл коэффициента динамической вязкости?

9 Какое течение жидкости называется ламинарным? турбулентным? Что характеризует число Рейнольдса?

10 Поясните (с выводом) метод Стокса определения вязкости.

Тесты

1. Тело плавает в сосуде с водой, движущемся вниз с ускорением a ($a<g$). Найдите выталкивающую силу, действующую на тело.

A) $\rho_в g V_п$ B) $\rho_в(g-a)V_п$ C) $\rho_в(g+a)V_п$ Д) $\rho_в(a-g)V_п$ E) $\rho_в a V_п$

2. Полый шар, отлитый из чугуна, плавает в воде, погрузившись ровно наполовину. Найдите объем V внутренней полости шара, если масса шара m=50 кг. Плотность чугуна 7,8 г/см^3, воды – 1 г/см^3.

A) 85,1 дм^3 B) 93,6 дм^3 C) 95,7 дм^3 Д) 89,8 дм^3 E) 87,3 дм^3

3. Определите плотность ρ однородного тела, вес которого в воздухе P_1=280 Н, а в воде P_2=180 Н. Потерей веса в воздухе пренебрегайте. Плотность воды $\rho_в$=1 000 кг/м^3.

A) 2,8 г/см^3 B) 2,4 г/см^3 C) 2 г/см^3 Д) 1,6 г/см^3 E) 1,8 г/см^3

4. Плавающее тело вытесняет керосин объемом 120 см^3. Какой объем воды будет вытеснять это тело? Плотность керосина 800 кг/м^3, воды – 1 000 кг/м^3.

A) 78 см^3 B) 96 см^3 C) 92 см^3 Д) 106 см^3 E) 84 см^3

5. Через один кран резервуар заполняется за 18 минут, а через другой – за 27 минут. На какой промежуток времени надо открыть оба крана, чтобы наполнить 0,5 резервуара?

A) 5,2 мин B) 5,4 мин C) 5,5 мин Д) 5,6 мин E) 5,8 мин

6. Однородный шар плавает на поверхности воды, наполовину погруженный в воду. Чему равен объем шара, если на него действует выталкивающая сила F? Ускорение силы тяжести g. Плотность воды ρ.

A) $2F\rho g$ B) $F\rho g$ C) $\frac{F}{\rho g}$ Д) $\frac{F}{2\rho g}$ E) $\frac{2F}{\rho g}$

7. Каково давление в жидкости плотностью 1 г/см^3 на глубине 10 м от поверхности? Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

A) 10^{-3} Па B) 10^{-1} Па C) 10 Па Д) 10^3 Па E) 10^5 Па

8. Подводная лодка находится на глубине h=100 м. С какой скоростью через отверстие в корпусе лодки будет врываться струя воды? Ускорение силы тяжести g=9,8 м/с^2.

А) 44,3 м/с　　В) 42,3 м/с　　С) 40,3 м/с　　Д) 38,3 м/с　　Е) 36,3 м/с

9. Сосуд кубической формы наполнен жидкостью массы m. Определите полную силу давления на дно сосуда и четыре его боковые стенки. Ускорение силы тяжести g.

А) mg　　В) 2mg　　С) 3mg　　Д) 4mg　　Е) 5mg

10. В сообщающиеся сосуды налита ртуть ($\rho_р$=13,6 г/см^3), поверх которой в одном из них находится вода ($\rho_в$=1 г/см^3). Разность уровней ртути 14,7 мм. Высота столба воды равна:

А) 9 см　　В) 20 см　　С) 40 см　　Д) 66 см　　Е) 6 см

11. В два сосуда конической формы, расширяющихся 1) кверху и 2) книзу, и 3) цилиндрический сосуд, налита вода при температуре t=100 ^{0}С. Как изменится давление на дно сосудов после охлаждения воды до комнатной температуры?

А) во всех сосудах – 1,2,3 давление увеличится
В) во всех сосудах – 1,2,3 давление уменьшится
С) в 1 – увеличится, в 2 – уменьшится, в 3 – не изменится
Д) в 1 – уменьшится, в 2 – увеличится, в 3 – не изменится
Е) во всех сосудах – 1,2,3 давление остается неизменным

12. Нижняя грань кубика, имеющего длину ребра a=80 мм, изготовленного из материала плотностью ρ=0,7 г/см^3 и помещенного в раствор плотностью ρ_0=1,2 г/см^3, опустится на глубину, равную (ускорение свободного падения g=10 м/с^2) …

А) 42 мм　　В) 45 мм　　С) 47 мм　　Д) 51 мм　　Е) 29 мм

13. Воду, текущую по водопроводной трубе со скоростью 2 м/с, быстро перекрывают жесткой заслонкой. Определите силу, действующую на заслонку при остановке воды. Скорость звука в воде 1,4 км/с. Сечение трубы 5 см^2. Плотность воды 1 г/см^3.

А) 140 Н　　В) 700 Н　　С) 1 400 Н　　Д) 2 800 Н　　Е) 280 Н

14. Однородное тело плавает на поверхности керосина так, что объем погруженной части составляет 0,92 всего объема тела. Определите, какую часть от объема тела составляет погруженная часть при плавании тела на поверхности воды. Плотность воды 1 г/см^3, керосина – 0,8 г/см^3. Ускорение силы тяжести 9,8 м/с^2.

A) 0,71 B) 0,74 C) 0,78 Д) 0,82 E) 0,87

15. Работа, которую нужно совершить, чтобы медленно поднять камень объемом V с глубины h до поверхности воды, равна (плотность камня $\rho_к$, плотность воды $\rho_в$, ускорение силы тяжести g):

A) $(\rho_к+\rho_в)Vgh$ B) $(\rho_к-\rho_в)Vgh$ C) $\frac{\rho_к+\rho_в}{2}Vgh$ Д) $\frac{\rho_к-\rho_в}{2}Vgh$ E) $\frac{\rho_к\rho_в}{\rho_к+\rho_в}Vgh$

16. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в четыре раза больше плотности материала шарика. Определите силу сопротивления жидкости при движении в ней шарика, считая ее постоянной. Масса шарика 10 г. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

A) 0,1 H B) 0,2 H C) 0,3 H Д) 0,4 H E) 0,5 H

17. Сосуд, имеющий форму усеченного конуса, сужающегося кверху, с приставным дном, опущен в воду. Если в сосуд налить 200 г воды, то дно оторвется. Отпадет ли дно, если на него: 1) поставить гирю 200 г? 2) налить 200 г масла? 3) налить 200 г ртути?

A) да, в случае 3)
B) да, в случае 1)
C) да, в случае 2) и 3)
Д) да, в случае 2)
E) да, в случае 1) и 3)

18. Кусок стекла падает в воде с ускорением a. Определите плотность ρ стекла. Плотность воды ρ_0. Ускорение силы тяжести g. Вязкость воды не учитывать.

A) $\rho_0\frac{a}{g-a}$ B) $\rho_0\frac{g}{g+a}$ C) $\rho_0\frac{a}{g}$ Д) $\rho_0\frac{g}{a}$ E) $\rho_0\frac{g}{g-a}$

19. Плотность воды равна 1 000 кг/м^3, плотность льда равна 900 кг/м^3. Если льдина плавает, выступая на 50 м^3 над поверхностью воды, то объем всей льдины равен

A) 450 м^3 B) 400 м^3 C) 500 м^3 Д) 550 м^3 E) 300 м^3

20. Деревянный шар объема V и массы m удерживается под водой пружиной жесткости k. Пренебрегая массой и объемом пружины, найдите энергию

деформации пружины. Плотность воды равна ρ. Ускорение свободного падения равно g.

A) $\frac{g^2(\rho V - m)}{2k}$ B) $\frac{g^2(m - \rho V)^2}{2k}$ C) $\frac{g(\rho V - m)}{2k}$ Д) $\frac{g^2(\rho V - m)^2}{k}$ E) $\frac{g^2(\rho V - m)}{k}$

21. В сосуд с водой ($\rho_в$=1 000 кг/м^3) вставлена трубка сечением S=2 см^2. В трубку налили 72 г масла ($\rho_м$=900 кг/м^3). Найдите разность уровней масла и воды.

A) 4 см B) 2 см C) 6 см Д) 3 см E) 1 см

22. Кастрюля емкостью 2 л доверху наполнена водой ($\rho_в$=1 г/см^3). В нее ставят тело объемом 0,5 л и массой 0,6 кг. Сколько воды вытечет из кастрюли? Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

A) 0,1 кг B) 0,6 кг C) 0,5 кг Д) 0,49 кг E) 0,245 кг

23. Тело плавает в керосине, погружаясь на 0,75 своего объема. Какая часть его объема V погружается в воде? Плотность керосина 0,8 г/см^3, воды 1 г/см^3.

A) 0,7V B) 0,65V C) 0,6V Д) 0,55V E) 0,5V

24. Один конец нити закреплен на дне, а второй прикреплен к пробковому поплавку. При этом 0,75 всего объема поплавка погружено в воду. Определите силу натяжения нити F, если масса поплавка равна 2 кг. Плотность пробки равна 0,25 г/см^3, воды - 1 г/см^3. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2. Массой нити пренебрегайте.

A) 36 Н B) 38 Н C) 40 Н Д) 34 Н E) 32 Н

25. Льдина плавает в море. Объем не погруженной в воду части льдины V_1. Плотность льда ρ_1, плотность морской воды ρ_2. Определите массу льдины.

A) $\frac{V_1}{\rho_2 - \rho_1}$ B) $\frac{\rho_1\rho_2 V_1}{\rho_1 + \rho_2}$ C) $\frac{\rho_2^2 V_1}{\rho_2 - \rho_1}$ Д) $\frac{\rho_1\rho_2 V_1}{\rho_2 - \rho_1}$ E) $\frac{\rho_1^2 V_1}{\rho_2 - \rho_1}$

26. Тело плавает в одной жидкости, погружаясь в нее на $\frac{1}{3}$ своего объема, а в другой жидкости – погружаясь на $\frac{2}{3}$ своего объема. На какую часть объема

погрузится тело в жидкость, плотность которой равна средней арифметической плотности первых двух жидкостей?

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{4}{27}$ Д) $\frac{2}{27}$ E) $\frac{1}{2}$

27. В цилиндрическое ведро с площадью дна S=0,1 м^2 налита вода. Найдите массу воды, если ее давление на боковую стенку ведра на расстоянии h=0,1 м от дна равно P=196 Па. Плотность воды ρ=1 000 кг/м^3. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

A) 8,96 кг B) 11,96 кг C) 12,96 кг Д) 2,96 кг E) 19,6 кг

28. Направленная горизонтально струя воды бьет в вертикальную стенку. С какой силой струя давит на стенку, если скорость истечения воды V=10 м/с и вода поступает через трубку, имеющую сечение S=4 см^2? Считайте, что после удара вода стекает вдоль стенки. Плотность воды ρ=1 г/см^3.

A) 4 Н B) 20 Н C) 40 Н Д) 200 Н E) 400 Н

29. Найдите силу F, отделяющую сливки (плотностью $\rho_с$=0,93 г/см^3) от снятого молока ($\rho_м$=1,03 г/см^3) в расчете на единицу объема, если отделение происходит в неподвижном сосуде. Ускорение свободного падения g=9,8 м/с^2.

A) 9 800 Н/м^3 B) 980 Н/м^3 C) 98 Н/м^3 Д) 9,8 Н/м^3 E) 0,98 Н/м^3

30. Два шара одинакового объема, полностью находящиеся в жидкости, соединены нитью и опускаются равномерно и вертикально один над другим. Пренебрегая силами сопротивления жидкости, определите силу натяжения нити, если массы шаров равны 1,6 кг и 2 кг. Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

A) 2,0 Н B) 2,5 Н C) 3,2 Н Д) 4,0 Н E) 36 Н

Верные ответы в тестах отмечены красным цветом.

Упражнения для самоконтроля

7.1. Полый железный шар (ρ=7,87 г/см^3) весит в воздухе 5 Н, а в воде ($\rho_в$=1 г/см^3) – 3 Н. Пренебрегая выталкивающей силой воздуха, определить объем внутренней полости шара. [139 см^3]

7.2. Бак цилиндрической формы площадью основания S=1 м^2 и объемом V=3 м^3 заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить время t, необходимое для опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью S_1=10 см^2. $\left[t = \frac{1}{S_1}\sqrt{\frac{2SV}{g}} = 13\ \text{мин}\right]$

7.3. Жидкость налита в сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Вычислите момент сил гидростатического давления, действующих на боковую стенку сосуда, относительно ее нижнего основания. Полагайте, что h- высота уровня жидкости относительно дна, S – площадь рассматриваемой боковой стенки сосуда. [$M=\frac{1}{3}\rho g h^2 S$]

7.4. На горизонтальной поверхности стоит цилиндрический сосуд, в боковой поверхности которого имеется отверстие. Поперечное сечение отверстия значительно меньше поперечного сечения самого сосуда. Отверстие расположено на расстоянии H_1=64 см ниже уровня воды в сосуде, который поддерживается постоянным, и на расстоянии H_2=25 см от дна сосуда. Пренебрегая вязкостью воды, определить, на каком расстоянии по горизонтали от сосуда падает на поверхность струя, вытекающая из отверстия. [80 см]

7.5. В широком сосуде, наполненном глицерином (плотность ρ=1,2 г/см^3), падает с установившейся скоростью 5 см/с стеклянный шарик (ρ_c=2,7 г/см^3) диаметром 1 мм. Определить динамическую вязкость глицерина. [1,6 Па·с]

7.6. В вертикально стоящий цилиндрический сосуд налита идеальная жидкость до уровня H (относительно дна сосуда). Площадь дна сосуда равна S. Определить время t, за которое уровень жидкости в сосуде опустится до высоты h (относительно дна сосуда), если в дне сосуда сделано малое отверстие площадью σ. Определить также время τ, за которое из сосуда выльется вся жидкость.

$$\left[t = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right),\ \tau = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$$

7.7. Прямоугольная коробка плавает на поверхности воды, погружаясь под действием собственного веса на глубину h. Площадь дна коробки равна S, высота – H. Через какое время коробка утонет, если в центре дна ее проделать малое отверстие площади σ и с помощью боковых направляющих сохранять неизменной ориентацию коробки? $\left[t = \frac{S}{\sigma}\frac{H - h}{\sqrt{2gh}}\right]$

7.8. Через какое время наполнится водой шаровая колба радиусом R, если в центре ее нижнего основания сделано малое отверстие площадью σ? Колба погружена в воду до нижнего основания ее горлышка. $\left[t = \frac{16\pi R^2}{15\sigma}\sqrt{\frac{R}{g}}\right]$

7.9. Какова размерность числа Рейнольдса? [безразмерно]

Глава 8 Контрольная работа

§ 8.1 Общие методические указания к решению задач и выполнению контрольных работ

1. За время изучения курса физики студент должен представить контрольные работы после изучения каждого раздела дисциплины (всего 5 разделов).

2. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по таблицам вариантов. Номер варианта определяется по последней цифре номера зачетной книжки. Критерии оценки контрольной работы следующие:

“отлично” - 9-10 правильных ответов;
“хорошо” - 8-9 правильных ответов;
“удовлетворительно” - 6-7 правильных ответа;
“неудовлетворительно” - менее 6 правильных ответов.

При получении положительной оценки контрольная работа считается засчитанной.

3. Контрольные работы нужно выполнять письменно на листах формата А4, либо в электронном виде (высылается на факультет дистанционных образовательных технологий). Титульный лист включает в себя следующие пункты, расположенные по высоте страницы в следующей последовательности (сверху вниз):

- Министерство образования и науки Российской Федерации;
- Оренбургский государственный университет;
- Контрольная работа по дисциплине «Физика»;
- Фамилию и инициалы студента, группа, номер зачетной книжки;
- Номер варианта.

4. Условия задач в контрольной работе надо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах оставлять поля. В конце контрольной работы необходимо оставить 1-2 чистые страницы, предназначенные для замечаний рецензента.

5. В конце контрольной работы указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

При выполнении контрольных заданий студентам можно рекомендовать данное пособие, литературу, указанную в конце пособия, справочные материалы из приложений к данному пособию.

6. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых оказались неверными. Повторную работу необходимо представить вместе с не зачтенной.

7. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это возможно, дать чертеж, выполненный с помощью чертежных принадлежностей.

8. Решать задачу надо в общем виде, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.

9. После получения расчетной формулы для проверки правильности ее следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

10. Числовые значения величин при подстановке их в расчетную формулу следует выражать только в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

11. При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти (т.е. в нормированном виде). Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.

12. Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

Таблица вариантов

Вариант	Номера задач									
1	101	111	121	131	141	151	161	171	181	191
2	102	112	122	132	142	152	162	172	182	192
3	103	113	123	133	143	153	163	173	183	193
4	104	114	124	134	144	154	164	174	184	194
5	105	115	125	135	145	155	165	175	185	195
6	106	116	126	136	146	156	166	176	186	196
7	107	117	127	137	147	157	167	177	187	197
8	108	118	128	138	148	158	168	178	188	198
9	109	119	128	139	149	159	169	179	189	199
0	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200

§ 8.2. Контрольные задачи

101. Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью v_1, а вторую половину со скоростью v_2. Какова средняя скорость движения автомобиля?

102. Первую треть пути поезд прошел со скоростью 60 км/час. Средняя скорость на всем пути оказалась равной 40 км/час. С какой скоростью поезд прошел оставшуюся часть пути?

103. Катер проходит расстояние 150 км между двумя пунктами по течению за 2 часа, а против течения за 3 часа. Определите скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки.

104. Катер проходит расстояние между двумя пунктами по реке вниз по течению за время 10 часов, а обратно за 15 часов. За какое время катер прошел бы это расстояние в стоячей воде?

105. Вдоль оси $0x$ движутся две точки: первая – по закону $x_1=(4+2t)$, м, вторая – по закону $x_2=(24-3t)$, м. В какой момент времени они встретятся? Укажите место встречи на координатной оси, считая, что движение начато одновременно. Найдите, с какой скоростью приближаются точки друг к другу.

106. Теплоход идет от Н.Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно 7 суток. Как долго будет плыть плот от Н.Новгорода до Астрахани? Рассмотрите идеальный случай, когда стоянки и задержки в движении исключены.

107. Из начала координат начинают двигаться одновременно две точки. Первая движется по оси $0x$ со скоростью 3 м/с, вторая по оси $0y$ со скоростью 4 м/с. С какой скоростью они удаляются друг от друга?

108. Из двух точек А и В, расположенных на расстоянии 90 м друг от друга, одновременно в одном направлении начали движение два тела. Тело, движущееся из точки А, имело скорость 5 м/с, а тело, движущееся из точки В, – скорость 2 м/с. Через какое время первое тело нагонит второе? Какое перемещение совершит каждое тело? Задачу решить аналитически и графически.

109. Поезд длиной L=180 м движется по мосту с постоянной скоростью v=36 км/ч. Определите время движения поезда по мосту, если длина моста S=450 м.

110. Мяч упал с высоты H=2 м, отскочил от пола и был пойман на высоте h=1 м. Определите отношение пути мяча к величине его перемещения.

111. Поезд проехал первую половину пути со скоростью v=80 км/ч, а вторую – в n=2 раза медленнее. Определите среднюю скорость поезда на всем участке.

112. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми L=120 км, движется со скоростью v_1=40 км/ч товарный поезд. Одновременно с ним из пункта B в пункт A по параллельному пути движется со скоростью v_2=60 км/ч пассажирский поезд. Запишите уравнения движения поездов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в системе координат $0x$, начало которой совпадает с пунктом A, а направление - с направлением движения товарного поезда. Определите через сколько времени t_0 и на каком расстоянии S_0 от пункта A поезда встретятся.

113. На некотором отрезке пути скорость тела увеличилась с 12 см/с до 13 см/с. Зная, что движение равноускоренное, определите, на сколько возрастет скорость тела после того, как будет пройден следующий участок такой же длины?

114. При равноускоренном движении из состояния покоя тело проходит за пятую секунду 90 см. Определить перемещение тела за седьмую секунду.

115. Тело движется вдоль оси Оx по закону x=6–3t+2t^2. Найти среднюю скорость тела и ускорение за промежуток времени 1–4 с. Построить графики перемещения, скорости и ускорения.

116. Тело, брошенное вертикально вверх с поверхности земли, упало через время t=5 с. Определите начальную скорость тела.

117. Два диска, расположенные на одной оси, вращаются с частотой 100 об/с. Пуля, летящая параллельно оси вращения, пробивает оба диска, причем пробоина на втором диске сдвинута относительно пробоины на втором диске на 24°. Расстояние между дисками 45 см. Определите скорость пули.

118. Автомобиль при торможении начинает скользить по дороге так, что колеса при этом продолжают вращаться. Верхняя точка одного из колес имеет скорость относительно земли v_1=110 км/ч, нижняя точка – скорость v_2=10 км/ч (направлена вперед по движению). Какова скорость v автомобиля?

119. Горизонтальную платформу перемещают с помощью круглых катков. На какое расстояние переместится каждый каток, если платформа передвинется на 1 м?

120. Стержень длиной L=0,8 м вращается с угловой скоростью ω=8 рад/с вокруг оси, проходящей через стержень и перпендикулярной к нему. Один из концов стержня движется с линейной скоростью v=2 м/с. Определите линейную скорость другого конца стержня.

121. Диаметр задних колес старинного автомобиля в n=1,5 раза больше диаметра передних. Определите отношение угловых скоростей вращения колес при равномерном движении автомобиля.

122. Две материальные точки равномерно движутся по окружностям, отношение радиусов которых равно n=3. Определите отношение периодов обращения этих точек, если их ускорения равны по величине.

123. Линейная скорость точек обода вращающегося диска v_1=10 м/с, а точек, находящихся на L=20 см ближе к оси вращения, v_2=6 м/с. Определите угловую скорость вращения и радиус диска.

124. Колесо, вращаясь равнозамедленно, за время t=1 мин уменьшило свою частоту вращения с ν_1=300 об/мин до ν_2=180 об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

125. Найти радиус R вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость v_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости v_2 точки, лежащей на расстоянии r=5 см ближе к оси колеса.

126. Два велосипедиста движутся навстречу друг другу. Величина скорости первого велосипедиста увеличивается, а второго – уменьшается. Различаются ли направления ускорений велосипедистов относительно дороги?

127. Звук от выстрела и пуля достигают высоты 680 м одновременно. Какова начальная скорость пули, если скорость звука 340 м/с?

128. Зависимость скорости материальной точки от времени описывается формулой:

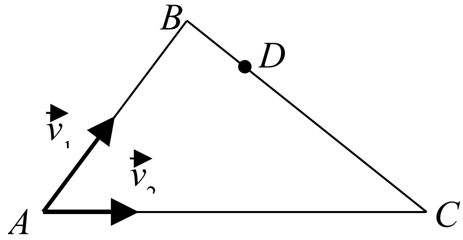
$$v_x=5-2t,$$

v_x выражено в м/с; t – в секундах.

Найдите уравнение движения x(t) материальной точки, если в начальный момент времени (t=0) она имела координату x_0=2 м.

129. Тело переместилось из точки с координатами x_1=100 см, y_1=51 см в точку с координатами x_2=98 см, y_2=49 см. Определите величину вектора перемещения и угол, который составляет этот вектор с осью 0x.

130. Два автомобиля одновременно выходят из пункта A и движутся по дорогам, образующим треугольник с углом при вершине A, равным α=60°(см. рисунок). Скорости, автомобилей v_1=60 км/ч и v_2=80 км/ч. Автомобили одновременно достигают пунктов B и C в момент времени t=1 час. Определите время встречи автомобилей в точке D с начала движения из точки A.



Рисунок

131. Тело массой 10 кг движется равномерно по окружности по законам: S=2t; φ=5t. Найдите равнодействующую сил, действующих на тело.

132. По кругу какого наименьшего радиуса сможет проехать велосипедист, движущийся со скоростью v=28,8 км/час, если коэффициент трения между покрышками колес и землей μ=0,3?

133. Найдите силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, движущегося в гору с ускорением 1 м/с^2. Уклон горы 1 м на каждые 25 м пути. Масса автомобиля 1 т, коэффициент трения 0,1.

134. Тело массой 0,1 кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 40 м/с, достигло высшей точки подъема через 2,5 с. Определите среднее значение силы сопротивления воздуха.

135. На тело массой m=0,4 кг действуют только две силы, равные соответственно F_1=3 Н и F_2=4 Н. Силы направлены под углом α=90° друг к другу. Определите величину ускорения тела.

136. Определите, может ли равнодействующая трех равных по величине сил, приложенных в одной точке, быть равной нулю. Если это, возможно, приведите пример.

137. Величины трех сил, приложенных к одной точке и лежащих в одной плоскости, равны соответственно F_1=2 Н, F_2=3 Н, F_3=7 Н. Определите минимальное значение, которое может принимать равнодействующая этих трех сил. Как в этом случае направлены векторы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ относительно друг друга?

138. Груз массой m=800 кг поднимают вертикально с помощью троса, прочность которого на разрыв равна T=20 000 Н. Определите максимальное ускорение, с которым можно поднимать этот груз.

139. Плывя на лодке вверх против течения реки с постоянной скоростью и находясь под мостом, лодочник потерял запасное весло. Обнаружив через некоторое время потерю, он повернул обратно и через 1 час после поворота догнал весло на расстоянии 3 км ниже моста. Определить скорость течения реки. Изменится ли результат, если бы лодочник потерял весло, плывя вниз по течению реки?

140. Груз какой массы нужно подвесить к пружине с жесткостью, равной 1 000 Н/м, чтобы растянуть ее на 10 см?

141. Автомашина массой m=2 000 кг останавливается за t=6 с, пройдя расстояние S=30 м. Определите силу торможения.

142. Ведерко с водой вращают в вертикальной плоскости на веревке длиной 0,5 м. С какой минимальной скоростью нужно его вращать, чтобы при прохождении через верхнюю точку удержать воду в ведерке?

143. Лифт разгоняется с постоянным ускорением до скорости v=10 м/с в течение t=10 с. Столько же времени занимает и остановка лифта. Определите отношение весов человека в поднимающемся лифте в начале и конце движения.

144. На какой высоте h сила тяжести в n=2 раза меньше, чем на поверхности Земли? Радиус Земли R=6400 км.

145. Определите во сколько раз вес человека в лифте, движущемся с ускорением вверх, больше веса в лифте, движущемся с ускорением вниз. В обоих случаях величина ускорения a=3 м/с^2.

146. Сила $\vec{F}$, направленная вертикально вверх, поднимает тело массой m=2 кг с ускорением a=4 м/с^2. Определите работу, которую совершает сила за время t = 10 с подъема.

147. Определить работу, совершенную краном при равномерном подъеме тела массой 3 т на высоту 5 м.

148. Сила тяги трактора при пахоте равна 10 кН, а его скорость равна 7,2 км/ч. Какую работу совершает трактор за 5 ч?

149. При равномерном подъеме из шахты нагруженной углем бадьи массой 10 т произведена работа 7 200 кДж. Какова глубина шахты?

150. Мощность тягового электродвигателя троллейбуса равна 90 кВт. Какую работу может совершить двигатель за 3 ч?

151. Тепловоз при скорости 21,6 км/ч развивает силу тяги 500 кН. Какая работа совершается по перемещению поезда в течение 1,5 ч?

152. Во сколько раз возрастает импульс тела при увеличении его кинетической энергии в 4 раза?

153. Из пружинного пистолета с пружиной жесткостью k=150 Н/м был произведен выстрел пули массой m=8 г. Определить скорость v пули при вылете ее из пистолета, если пружина была сжата на Δx=4 см.

154. С какой начальной скоростью v_0 надо бросить вертикально вниз мяч с высоты 2 м, чтобы он подпрыгнул на высоту 4 м? Считать удар о землю абсолютно упругим.

155. Снаряд, летевший со скоростью v=400 м/с, в верхней точке траектории разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40 % от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью u_1=150 м/с. Определить скорость u_2 большего осколка.

156. При горизонтальном полете со скоростью v=250 м/с снаряд массой m=8 кг разорвался на две части. Большая часть массой m_1=6 кг получила скорость u_1=400 м/с в направлении полета снаряда. Определить модуль и направление скорости u_2 меньшей части снаряда.

157. Камень брошен вертикально вверх со скоростью 10 м/с. На какой высоте кинетическая энергия камня равна его потенциальной энергии?

158. Налетев на пружинный буфер, вагон массой m=16 т, двигавшийся со скоростью v=0,6 м/с, остановился, сжав пружину на Δl=8 см. Найти общую жесткость k пружин буфера.

159. Какую работу A нужно совершить, чтобы пружину жесткостью k=800 Н/м, сжатую на x=6 см, дополнительно сжать на Δx=8 см?

160. Человек массой m_1=70 кг, бегущий со скоростью v_1=9 км/ч, догоняет тележку массой m_2=190 кг, движущуюся со скоростью v_2=3,6 км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью станет двигаться тележка с человеком? С какой скоростью будет двигаться тележка с человеком, если человек до прыжка бежал навстречу тележке?

161. Шар диаметром D=6 см и массой m=0,25 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения ν=4 об/с. Найти кинетическую энергию шара.

162. Определить момент инерции однородного диска радиусом R=20 см и массой m=1 кг относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через середину одного из радиусов диска.

163. К ободу колеса радиусом 0,5 м и массой m=50 кг приложена касательная сила F=100 Н. Найти угловое ускорение ε колоса. Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.

164. Маховик, момент инерции которого J=63,6 кг·м^2, вращается с постоянной угловой скоростью ω=31,4 рад/с. Найти тормозящий момент, под действием которого маховик останавливается через t=20 с.

165. Маховик, момент инерции которого J=40 кг·м^2, из состояния покоя начал вращаться равноускоренно под действием момента силы M=20 Н·м в течение t=10 с. Определите кинетическую энергию, приобретенную маховиком.

166. Медный шар радиусом R=10 см вращается с частотой ν=2 об/с вокруг своей оси, проходящей через его центр. Какую работу A необходимо совершить, чтобы увеличить скорость вращения в k=2 раза?

167. Шар массой m=1 кг, катящийся без скольжения со скоростью v_1=10 м/с, ударяется о стенку и откатывается от нее со скоростью v_2=8 м/с. Найти количество теплоты Q, выделившейся при ударе.

168. Диск массой m=2 кг катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости со скоростью v=4 м/с. Найти кинетическую энергию диска.

169. Определить момент инерции шара относительно оси, совпадающей с касательной к его поверхности. Радиус шара 10 см, его масса 5 кг.

170. Определить момент силы M, который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой ν=12 с$^{-1}$, чтобы он остановился в течение времени Δt=8 с. Диаметр блока D=30 см. Массу блока m=6 кг считать равномерно распределенной по ободу.

171. Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость 0,4 c. В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения β - ча-

стицу со скоростью 0,75 c относительно ускорителя. Найти скорость частицы относительно ядра (в единицах c – скорости света в вакууме).

172. Реактивный самолет летит со скоростью 1 000 м/с. На сколько часы, находящиеся в самолете, отстанут от часов на Земле за сутки?

173. Релятивистская масса движущегося протона в 100 раз больше его массы покоя. Найти скорость движущегося протона.

174. Электрон движется со скоростью 200 Мм/с. Определите кинетическую энергию по классической и релятивистской формулам. Сравните результаты.

175. Найти отношение кинетической энергии электрона к его энергии покоя, если скорость электрона 150 Мм/с. Каков релятивистский импульс электрона?

176. Полная энергия мезона в 8 раз больше его энергии покоя. Какова скорость мезона?

177. Какому изменению массы соответствует изменение энергии на 1 Дж?

178. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит η=25 %?

179. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными часами. Скорость спутника v=7,9 км/с. На сколько отстанут часы, находящиеся на спутнике, от часов земного наблюдателя за время τ_0=0,5 года?

180. Определите скорость тела, кинетическая энергия которого в n=2 раза больше его энергии покоя.

181. Электрон движется со скоростью v=0,6 c (c – скорость света в вакууме). Определить импульс электрона.

182. Найти скорость, при которой релятивистский импульс частицы в n=2 раза превышает ее импульс, определяемый в классической механике.

183. Импульс релятивистской частицы $p=m_0c$, где m_0 – масса покоя частицы, c – скорость света в вакууме. Определить скорость частицы.

184. Определить импульс частицы, если ее кинетическая энергия равна энергии покоя, m_0 – масса покоя частицы.

185. Определить кинетическую энергию релятивистской частицы, если ее импульс $p=m_0c$, где m_0 – масса покоя частицы, c – скорость света в вакууме.

186. На границе раздела двух жидкостей плотности ρ_1 и ρ_2 плавает шайба плотности ρ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Высота шайбы H. Определите глубину ее погружения во вторую жидкость.

187. В цилиндрический сосуд налиты равные массы ртути и воды. Общая высота двух слоев жидкости 29,2 см. Определите давление жидкостей на дно сосуда.

188. Полый шар, отлитый из чугуна, плавает в воде, погрузившись ровно наполовину. Найти объем V внутренней полости шара, если масса шара m=50 кг, плотности чугуна ρ=7,8 г/см^3, воды - $\rho_в$=1 г/см^3.

189. Что произойдет с весами, находящимися в равновесии, если погрузить палец в стакан с водой, стоящий на чашке весов, не прикасаясь пальцем ко дну и стенок?

190. Вес однородного тела в воде в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела, если плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3?

191. В цилиндр с площадью основания 50 см^2 налита ртуть, высота столба которой 12 см. Определить силу давления на дно сосуда.

192. В трубе переменного сечения в сечении площадью 10 см^2 скорость потока воды 2 м/с. Определить скорость в сечении площадью 25 см^2.

193. Определить скорость течения воды в широкой части горизонтально расположенной трубы переменного сечения, если радиус узкой части в 3 раза меньше радиуса широкой части, а разность давлений в широкой и узкой частях трубы ΔP=10 кПа.

194. Вода течет по горизонтальной трубе переменного сечения. Скорость течения в широкой части трубы v_1=20 см/с. Определить скорость течения воды в узкой части трубы, диаметр которой в k=1,5 раза меньше диаметра широкой части.

195. По горизонтальной трубе в широкой ее части вода течет под давлением $2{,}5\cdot10^5$ Па и со скоростью 5 см/с. Какова скорость ее течения в узкой части трубы, где давление $2{,}0\cdot10^5$ Па?

196. Какое давление P создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вылетает из него со скоростью v=25 м/с? Плотность краски равна ρ=800 кг/м^3.

197. Какую силу необходимо приложить к поршню горизонтально расположенной спринцовки, чтобы вытекающая из нее струя имела скорость v=10 м/с? Радиус поршня R=2 см. Трением пренебречь.

198. Определить скорость ветра, если он оказывает давление P=200 Па. Ветер дует перпендикулярно стене. Плотность воздуха ρ=1,29 кг/м^3.

199. Вычислите максимальное значение скорости потока воды в трубе диаметром 2 см, при котором течение будет оставаться ламинарным. Критическое значение числа Рейнольдса для трубы приблизительно равно 3 000.

200. Стеклянный шарик радиусом 0,5 мм падает в большом сосуде с глицерином с установившейся скоростью 5 см/с. Найти вязкость глицерина, если плотность стекла 2,7 г/см^3, плотность глицерина 1,2 г/см^3.

Глава 9 Экзамены

§ 9. 1 Общие положения

За время изучения курса физики студент должен представить экзаменационные тестовые задания после изучения каждого раздела дисциплины (всего 5 разделов).

Номера тестовых заданий, которые студент должен включить в свою экзаменационную работу, определяются по таблицам вариантов. Номер варианта определяется по последней цифре номера зачетной книжки. Каждый вариант включает в себя 20 (двадцать) тестовых заданий, номера которых определяются номером варианта.

Оформление экзаменационного теста производится либо в электронном виде, либо письменно. При оформлении записываются номера тестовых заданий и отмечаются правильные ответы (Если, например, по мнению студента в 37 тестовом задании верный ответ С, то правильный ответ следует отмечать следующим образом: 37-С). Как и в контрольных работах непременно необходимо оформлять титульный лист.

Критерии экзаменационной оценки следующие:

“отлично” - более 18 правильных ответов;
“хорошо” - 16-18 правильных ответов;
“удовлетворительно” - 12-15 правильных ответа;
“неудовлетворительно” - менее 12 правильных ответов.

Таблица вариантов

Вариант	Номера задач									
1	101, 105	111, 115	121, 125	131, 137	141, 147	151, 157	161, 169	171, 183	181, 193	191, 173
2	102, 106	112, 115	122, 124	132, 138	142, 148	152, 158	162, 170	172, 184	182, 194	192, 174
3	103, 107	113, 116	123, 125	133, 139	143, 149	153, 159	163, 161	173, 185	183, 195	193, 175
4	104, 108	114, 117	124, 126	134, 140	144, 150	154, 160	164, 162	174, 186	184, 196	194, 176
5	105, 109	115, 118	125, 127	135, 141	145, 151	155, 131	165, 163	175, 187	185, 197	195, 177
6	106, 110	116, 119	126, 128	136, 142	146, 152	156, 132	166, 164	176, 188	186, 198	196, 178
7	107, 111	117, 120	127, 129	137, 143	147, 153	157, 133	167, 165	177, 189	187, 199	197, 179
8	108, 112	118, 121	128, 130	138, 144	148, 154	158, 134	168, 166	178, 190	188, 200	198, 180
9	109, 113	119, 122	128, 101	139, 145	149, 155	159, 135	169, 167	179, 191	189, 171	199, 181
0	110, 114	120, 123	130, 102	140, 146	150, 156	160, 136	170, 168	180, 192	190, 172	200, 182

§ 9.2 Экзаменационные тестовые задания

101. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом R=3 м задается уравнением $S=At^2+Bt$ ($A=0,4$ м/с^2, $B=0,1$ м/с). Определите нормальное ускорение для момента времени t=1 с после начала движения.

А) 0,36 м/с^2 В) 0,32 м/с^2 С) 0,30 м/с^2 Д) 0,27 м/с^2 Е) 0,24 м/с^2

102. Теплоход проходит по течению реки путь 40 км за 2 часа, а против течения 45 км за 3 часа. Определите скорость течения реки.

А) 4 км/ч В) 3 км/ч С) 2 км/ч Д) 1,5 км/ч Е) 2,5 км/ч

103. Скорость течения реки v_1=3 км/ч, а скорость движения лодки относительно воды v_2=6 км/ч. Определите, под каким углом относительно берега должна двигаться лодка, чтобы проплыть поперек реки.

А) [illegible] рад В) [illegible] рад С) [illegible] рад Д) [illegible] рад Е) [illegible] рад

104. Для создания искусственной силы тяжести космические станции должны вращаться. При каком периоде вращения у периметра станции будет обеспечено тяготение, равное земному, если ее радиус равен 500 м?

А) 77 с В) 33 с С) 66 с Д) 44 с Е) 55 с

105. Два поезда одинаковой длины идут навстречу друг другу по параллельным путям с одинаковой скоростью 36 км/ч. В момент, когда поравнялись головные вагоны, один из поездов начинает тормозить и полностью останавливается к моменту, когда поравнялись последние вагоны составов. Найдите длину каждого поезда, если время торможения составило 1 мин.

А) 500 м В) 600 м С) 650 м Д) 550 м Е) 450 м

106. Поезд первую половину пути шел со скоростью в n=1,5 раза большей, чем вторую половину пути. Средняя скорость поезда на всем пути $V_{ср}$=43,2 км/ч. Какова скорость поезда V_2 на второй половине пути?

А) 10 м/с В) 8 м/с С) 12 м/с Д) 18 м/с Е) 15 м/с

107. Если при торможении автомобиль, двигаясь равнозамедленно, проходит за пятую секунду 5 см и останавливается, то за третью секунду этого движения он прошел путь, равный:

А) 15 см В) 30 см С) 10 см Д) 45 см Е) 25 см

108. Колесо, имеющее угловую скорость вращения π рад/с, сделает 50 оборотов за время…

А) 25 с В) 100 с С) 75 с Д) 50 с Е) 60 с

109. Пуля, летящая со скоростью 140 м/с, попадает в доску и проникает на глубину 6 см. Если пуля в доске двигалась равнозамедленно, то на глубине 3 см ее скорость была равна:

А) 80 м/с В) 120 м/с С) 70 м/с Д) 50 м/с Е) 100 м/с

110. При скорости ветра, равной 10 м/с, капли дождя падают под углом 30^0 к вертикали. При какой скорости ветра капли будут падать под углом 60^0 к вертикали?

А) 35 м/с В) 30 м/с С) 25 м/с Д) 20 м/с Е) 15 м/с

111. Движения двух велосипедистов заданы уравнениями: x_1=6+2t и x_2=0,5t^2. Через какое время после одновременного начала движения велосипедистов второй догонит первого?

А) 4 с В) 6 с С) 8 с Д) 9 с Е) 12 с

112. От движущегося поезда отцепляется последний вагон. Поезд продолжает двигаться с той же скоростью v_0. Как будут относиться пути, пройденные поездом – $S_п$ и вагоном $S_в$ к моменту остановки вагона? Считайте, что вагон двигался равнозамедленно.

А) 4 : 1 В) 2 : 1 С) 3 : 2 Д) 3 : 1 Е) 4 : 3

113. Движущийся со скоростью 5 м/с автомобиль подвергается ускорению 2 м/с^2 в течение 5 с. Какой путь он прошел за это время?

А) 25 м В) 50 м С) 30 м Д) 60 м Е) 75 м

114. Санки скользят вниз по склону с постоянным ускорением, равным 3 м/с^2. Определите скорость санок после того, как они проскользили 10 м вниз, если их начальная скорость была 2 м/с.

А) 12 м/с В) 18 м/с С) 8 м/с Д) 6 м/с Е) 16 м/с

115. Два автомобиля едут по дорогам, которые пересекаются под прямым углом; один приближается к перекрестку со скоростью 16 м/с, другой удаляется со скоростью 12 м/с. Скорость первого автомобиля относительно второго равна:

А) 28 м/с В) 4 м/с С) 12 м/с Д) 16 м/с Е) 20 м/с

116. Самолет летит горизонтально со скоростью 360 км/ч на высоте 490 м. Когда он пролетает над точкой А, с него сбрасывают пакет. На каком расстоя-

нии от точки А пакет упадет на землю? Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

А) 0,8 км В) 1,0 км С) 1,2 км Д) 1,4 км Е) 1,6 км

117. Изучая дорожное происшествие, автоинспектор установил, что след торможения автомобиля, ехавшего по асфальтовой дороге, L=60 м. С какой скоростью ехал автомобиль, если коэффициент трения колес об асфальт при торможении μ=0,5? Ускорение силы тяжести g=10 м/с^2.

А) 79 км/ч В) 82 км/ч С) 85 км/ч Д) 88 км/ч Е) 91 км/ч

118. Если поезд, двигаясь от остановки с постоянным ускорением, прошел 180 м за 15 с, то за первые 5 с от начала движения он прошел:

А) 80 м В) 60 м С) 36 м Д) 20 м Е) 10 м

119. Со станции вышел товарный поезд, идущий со скоростью 72 км/час. Через 10 мин по тому же направлению вышел экспресс, скорость которого 30 м/с. На каком расстоянии от станции экспресс догонит товарный поезд?

А) 20 км В) 24 км С) 28 км Д) 32 км Е) 36 км

120. Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью v_0=10 м/с и ускорением а=-5 м/с^2. Каков путь, пройденный точкой до остановки?

А) 30 м В) 20 м С) 10 м Д) 15 м Е) 25 м

121. Пуля вылетает из ствола в горизонтальном направлении со скоростью 800 м/с. На сколько снизится пуля во время полета, если щит с мишенью находится на расстоянии, равном 400 м? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

А) 0,2 м В) 2 м С) 0,5 м Д) 0,75 м Е) 1,25 м

122. Автомобиль, двигавшийся прямолинейно со скоростью 10 м/с, начал торможение. Сила трения сообщает при этом ускорение 2 м/с^2, направление противоположно вектору скорости. Какой путь пройдет автомобиль за 6 с после начала движения?

А) 25 м В) 54 м С) 24 м Д) 30 м Е) 96 м

123. Материальная точка движется по окружности с постоянной по величине скоростью. Линейную скорость точки увеличили в 2 раза и период

обращения увеличили в 2 раза. При этом центростремительное ускорение точки

А) увеличилось в 4 раза В) увеличилось в 2 раза С) уменьшилось в 2 раза
Д) уменьшилось в 4 раза Е) не изменилось

124. С крыши с интервалом времени в 1 с падают одна за другой две капли. Через 2 с после начала падения второй капли расстояние между каплями станет равным (полагайте $g = 10$ м/с^2):

А) 30 м В) 25 м С) 20 м Д) 15 м Е) 10 м

125. Снаряд разрывается в наивысшей точке траектории на расстоянии L по горизонтали от пушки на два одинаковых осколка. Один из них вернулся к пушке по первоначальной траектории снаряда. Где упал второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебрегайте.

А) на расстоянии L по горизонтали от пушки
В) на расстоянии 2 L по горизонтали от пушки
С) на расстоянии 3 L по горизонтали от пушки
Д) на расстоянии 4 L по горизонтали от пушки
Е) на расстоянии 5 L по горизонтали от пушки

126. Две стрелки движутся по циферблату в одну сторону. Период вращения 1-й составляет T_1=50 с, а 2-й – T_2=30 с. Положения стрелок при этом совпадают через интервал времени, равный

А) 80 с В) 60 с С) 70 с Д) 65 с Е) 75 с

127. Какая предельная скорость приземления v парашютиста допустима, если человек, не имея парашюта, может безопасно прыгать с высоты h $\square$ 2 м? Ускорение силы тяжести g=10 м/с^2.

А) 5,4 м/с В) 5,7 м/с С) 6 м/с Д) 6,3 м/с Е) 6,6 м/с

128. Автомобиль идет в гору с начальной скоростью, величина которой 20 м/с, ускорение его направлено в сторону, противоположную вектору начальной скорости, и равно по величине 1 м/с^2. Какой путь пройдет автомобиль за 40 с?

А) 400 м В) 200 м С) 100 м Д) 800 м Е) 300 м

129. Начальное значение скорости материальной точки v_{x1}=1 м/с, v_{y1}=3 м/с, v_{z1}=0. Конечное значение скорости v_{x2} =4 м/с, v_{y2}=6 м/с, v_{z2}=0. Определите приращение модуля скорости.

А) 4 м/с В) 3 м/с С) 5 м/с Д) 2 м/с Е) 8 м/с

130. Пассажир поезда, идущего со скоростью 15 м/с, видит в окне встречный поезд длиной 150 м в течение 6 с, если скорость встречного поезда равна:

А) 25 м/с В) 20 м/с С) 15 м/с Д) 10 м/с Е) 5 м/с

131. С какой максимальной скоростью может ехать мотоциклист по горизонтальной поверхности, описывая дугу радиусом R=90 м, если коэффициент трения μ=0,4? Ускорение свободного падения g=9,8 м/с^2.

А) 59,6 км/ч В) 61,6 км/ч С) 63,6 км/ч Д) 65,6 км/ч Е) 67,6 км/ч

132. Тепловоз массой 100 т тянет два вагона массами по 50 т каждый с ускорением 10 см/с^2. Найдите силу натяжения сцепок между вагонами, если коэффициент сопротивления движению равен 0,006. Ускорение силы тяжести g=9,8 м/с^2.

А) 7740 Н В) 7940 Н С) 8140 Н Д) 8340 Н Е) 8540 Н

133. Два автомобиля с одинаковыми массами m движутся со скоростями v и 3v относительно Земли в одном направлении. Чему равен импульс второго автомобиля в системе отсчета, связанной с первым автомобилем?

А) mv В) 2 mv С) 2,5 mv Д) 3 mv Е) 4 mv

134. Под действием некоторой силы тележка, двигаясь из состояния покоя, прошла путь 40 см. Когда на тележку положили груз 200 г, то под действием той же силы за то же время тележка прошла из состояния покоя путь 20 см. Какова масса тележки?

А) 200 г В) 300 г С) 400 г Д) 100 г Е) 600 г

135. Если координата тела массы m=10 кг, движущегося прямолинейно вдоль оси x, меняется со временем по закону x(t)=10t(1−2t), (м), то модуль силы, действующей на тело равен:

А) 400 Н В) 40 Н С) 20 Н Д) 10 Н Е) 0 Н

136. С помощью какого из перечисленных ниже опытов наблюдатель, находясь в закрытой каюте корабля, может установить, покоится корабль или движется равномерно и прямолинейно?

А) Падение капель воды

В) Измерение дальности полета тел, бросаемых с одинаковой начальной скоростью

С) Отклонение груза, подвешенного на нити

Д) Движение шарика по горизонтальной поверхности

Е) Отличить равномерное и прямолинейное движение от покоя нельзя никакими механическими опытами.

137. Какую скорость должен иметь вагон, движущийся по закруглению радиуса 100 м, чтобы шарик, подвешенный на нити к потолку вагона, отклонился от вертикали на угол 45^0? Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

А) 17,8 м/с В) 21,2 м/с С) 27,6 м/с Д) 31,3 м/с Е) 41,5 м/с

138. При свободном падении ускорение всех тел одинаково. Этот факт объясняется тем, что:

А) Земля имеет форму сплюснутого шара

В) Земля имеет очень большую массу

С) Все земные предметы очень малы по сравнению с Землей

Д) Сила тяжести пропорциональна массе Земли

Е) Сила тяжести пропорциональна массе тела.

139. Кусок стекла падает в воде с ускорением a. Определите плотность ρ стекла. Плотность воды ρ_0. Ускорение силы тяжести g.

А) $\rho_0 \frac{a}{g - a}$ В) $\rho_0 \frac{g}{g + a}$ С) $\rho_0 \frac{a}{g}$ Д) $\rho_0 \frac{g}{a}$ Е) $\rho_0 \frac{g}{g - a}$

140. На шероховатой горизонтальной поверхности лежит тело массы 1 кг. Коэффициент трения скольжения тела о поверхность равен 0,1. Чему равна сила трения между телом и поверхностью при действии на тело горизонтальной силы 0,5 Н? Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

А) 0 В) 0,1 Н С) 0,5 Н Д) 1 Н Е) 1,5 Н

141. Копер массой 180 кг падает с высоты 5 м на сваю и приходит в состояние покоя через 0,3 с. Подсчитайте среднюю силу, приложенную к свае, пренебрегая движением сваи. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 24 кН В) 18 кН С) 12 кН Д) 9 кН Е) 6 кН

142. Если на тело массой 1 кг, лежащее на горизонтальной плоскости, подействовать горизонтальной силой 3 Н, то сила трения между телом и плоскостью будет равна (коэффициент трения между телом и плоскостью 0,2; ускорение силы тяжести 10 м/с^2):

A) 3 Н B) 1,5 Н C) 0,6 Н Д) 1 Н E) 2 Н

143. Человек сидит на краю круглой горизонтальной платформы радиусом R. С какой максимальной частотой должна вращаться платформа вокруг вертикальной оси, чтобы человек мог удержаться на ней при коэффициенте трения μ? Ускорение силы тяжести g.

A) $2\pi\sqrt{\frac{R}{\mu g}}$ B) $2\pi\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$ C) $2\pi\sqrt{\mu gR}$

Д) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$ E) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\mu g}}$

144. Барабан сушильной машины, имеющий диаметр D=1,96 м, вращается с угловой скоростью ω=20 рад/с. Во сколько раз сила F, прижимающая ткань к стенке, больше силы тяжести mg, действующей на ткань? Ускорение силы тяжести g=9,8 м/с^2.

A) 5 B) 10 C) 20 Д) 40 E) 80

145. Автомашина массой 1 т, передвигающаяся со скоростью 72 км/ч, врезается в кирпичную стену и приходит в состояние покоя за 0,5 с. Определите среднюю силу, действующую на автомашину со стороны стены.

A) 40 кН B) 36 кН C) 20 кН Д) 48 кН E) 24 кН

146. Пуля массы 20 г, выпущенная под углом 60^0 к горизонту с начальной скоростью 600 м/с, в верхней точке траектории имеет кинетическую энергию, равную:

A) 400 Дж B) 500 Дж C) 600 Дж Д) 800 Дж E) 900 Дж

147. Работа, затрачиваемая на подъем тела массой m=2 кг на высоту H=50 м над поверхностью Земли с ускорением a=2 м/с^2, равна (ускорение силы тяжести g=10 м/с^2):

A) 1 600 Дж B) 400 Дж C) 2 000 Дж Д) 1 000 Дж E) 1 200 Дж

148. Груз массой 5 кг свободно падает с некоторой высоты и достигает поверхности земли за 2,5 с. Найдите работу силы тяжести. Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

A) 1,4 кДж B) 1,5 кДж C) 1,6 кДж Д) 1,8 кДж E) 2,0 кДж

149. Металлический шарик, падая с высоты h_1=1 м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту h_2=0,81 м. Во сколько раз уменьшается модуль импульса шарика при ударе?

А) в 0,81 раза В) в 0,9 раза С) в 1,81 раза Д) в 2 раза
Е) импульс не меняется

150. Тележка движется по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_1=0,5 м/с. С нее прыгает человек со скоростью v_0=3 м/с относительно тележки в направлении, противоположном направлению движения. Найдите приращение скорости тележки Δv_1 после прыжка. Масса тележки m_1=240 кг. Масса человека m_2=80 кг.

А) 0,5 м/с В) 1 м/с С) 1,5 м/с Д) 2 м/с Е) 3 м/с

151. Если шарик массой m упал с высоты H на горизонтальную поверхность и отскочил от нее на высоту h, то изменение импульса шарика в результате удара было равно:

А)$m\left(\sqrt{2gH} - \sqrt{2gh}\right)$ В)$m\sqrt{2g(H-h)}$ С) $m\left(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh}\right)$
Д) $m\sqrt{2g(H+h)}$ Е) $2m\left(\sqrt{2gH} - \sqrt{2gh}\right)$

152. Чему равен тормозной путь автомобиля массой 1 000 кг, движущегося со скоростью 30 м/с? Коэффициент трения скольжения между дорогой и шинами автомобиля равен 0,3. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 15 м В) 30 м С) 150 м Д) 300 м Е) 90 м

153. Человек, находящийся в вагонетке, толкает другую вагонетку. Обе вагонетки приходят в движение и через некоторое время останавливаются вследствие трения. Определите отношение путей, пройденных вагонетками до остановки, если масса первой вагонетки вместе с человеком в 3 раза больше массы второй вагонетки:

А) $S_1 : S_2 = 1: 9$ В) $S_1 : S_2 = 1: 3$ С) $S_1 : S_2 = 1: 1$
Д) $S_2 : S_1 = 1: 3$ Е) $S_2 : S_1 = 1: 9$

154. При сжатии стальной пружины на 2 см в ней возникает сила упругости 25 Н. Какую скорость может сообщить телу массой 500 г эта пружина в результате передаче ему всей энергии упругой деформации?

A) $\sqrt{2}$ м/с B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ м/с C) 1 м/с Д) 2,5$\sqrt{2}$ м/с E) 2$\sqrt{2}$ м/с

155. Тормозной путь автомобиля при его торможении юзом, т.е. при невращающихся колесах…

A) прямо пропорционален квадрату его скорости и обратно пропорционален коэффициенту трения скольжения;

B) прямо пропорционален его скорости и обратно пропорционален коэффициенту трения скольжения;

C) прямо пропорционален квадрату его скорости и массе, обратно пропорционален коэффициенту трения скольжения;

Д) прямо пропорционален его скорости и массе, обратно пропорционален коэффициенту трения скольжения;

E) Среди приведенных ответов нет правильного.

156. Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок равной толщины и расположенных вплотную друг к другу. В какой по счету доске застрянет пуля, если скорость ее после прохождения первой доски v_1=0,8 v_0?

A) 6 B) 4 C) 2 Д) 5 E) 3

157. Подъемный кран за время t=7 ч поднимает массу m=3 000 т строительных материалов на высоту h=10 м. Какова мощность P двигателя крана, если КПД крана η=60 %? Ускорение силы тяжести g=9,8 м/с^2.

A) 19,4 кВт B) 21,4 кВт C) 23,4 кВт Д) 25,4 кВт E) 27,4 кВт

158. Из орудия массой 1500 кг вылетает горизонтально снаряд массой 12 кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете равна 1,5 МДж. Какую кинетическую энергию получает орудие вследствие отдачи?

A) $1,25\cdot10^4$ Дж B) $1,5\cdot10^4$ Дж C) $1,2\cdot10^4$ Дж Д) $1,8\cdot10^4$ Дж E) $2,5\cdot10^4$ Дж

159. Тело обладает кинетической энергией $E_к$=100 Дж и импульсом P=40 кг$\cdot$ м/с. Чему равна его скорость?

A) 5 м/с B) 4 м/с C) 2 м/с Д) 10 м/с E) 8 м/с

160. Находящемуся на горизонтальной плоскости стола бруску сообщили скорость 5 м/с. Под действием силы трения брусок движется с ускорением, по модулю равным 1 м/с^2. Определите путь, пройденный бруском за 6 с.

A) 17,5 м B) 15 м C) 12,5 м Д) 12 м E) 6 м

161. Вычислите момент инерции медного однородного диска относительно оси симметрии, перпендикулярной к плоскости диска, если его толщина b=2,0 мм и радиус R=10 см. Плотность меди ρ=8,9 г/см^3.

A) $2{,}8\cdot10^{-3}$ кг·м^2 B) $3{,}8\cdot10^{-3}$ кг·м^2 C) $4{,}8\cdot10^{-3}$ кг·м^2 Д) $5{,}8\cdot10^{-3}$ кг·м^2 E) $6{,}8\cdot10^{-3}$ кг·м^2

162. Вычислить момент импульса Земли, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Землю считать однородным шаром. Масса Земли $5{,}96\cdot10^{24}$ кг, ее радиус $6{,}37\cdot10^6$ м.

A) $7{,}0\cdot10^{34}$ кг·м^2/с B) $7{,}0\cdot10^{33}$ кг·м^2/с C) $7{,}0\cdot10^{32}$ кг·м^2/с Д) $7{,}0\cdot10^{31}$кг·м^2/с E) $7{,}0\cdot10^{30}$ кг·м^2/с

163. Гироскоп массы m=1,000 кг, имеющий момент инерции J=4,905·10^{-3} кг·м^2, вращается с угловой скоростью ω=100,0 рад/с. Расстояние от точки опоры до центра масс l=5 см. Угол между вертикалью и осью гироскопа $\alpha=30^0$. Найти угловую скорость прецессии.

A) 1,00 рад/с B) 1,20 рад/с C) 1,40 рад/с Д) 1,60 рад/с E) 1,80 рад/с

164. Определить момент инерции однородного диска радиусом R=20 см и массой m=1,0 кг относительно оси перпендикулярной плоскости диска и проходящей через середину одного из радиусов диска.

A) $6\cdot10^{-2}$ кг·м^2 B) $5\cdot10^{-2}$ кг·м^2 C) $4\cdot10^{-2}$ кг·м^2 Д) $3\cdot10^{-2}$ кг·м^2 E) $2\cdot10^{-2}$ кг·м^2

165. Маховик, момент инерции которого J=63,6 кг·м^2, вращается с постоянной угловой скоростью ω=31,4 рад/с. Найти тормозящий момент, под действием которого маховик останавливается через t=20 с.

A) 100 Н·м B) 75 Н·м C) 50 Н·м Д) 25 Н·м E) 10 Н·м

166. Шар массой m=10 кг и радиусом R=0,2 м вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Закон движения шара имеет вид $\varphi=A+Bt^2+Ct^3$, где B=4 рад/с^2, C= - 1 рад/с^3. Найти момент сил M в момент времени t=2 с.

A) – 0,25 Н·м B) – 0,32 Н·м C) – 0,36 Н·м Д) – 0,48 Н·м E) – 0,64 Н·м

167. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом R=2 м и массой m=4 кг, стоит человек, масса которого M=80 кг. Платформа может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. С какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью v=2 м/с относительно платформы?

A) 0,45 рад/с B) 0,55 рад/с C) 0,65 рад/с Д) 0,75 рад/с E) 0,85 рад/с

168. Определите кинетическую энергию тонкого кольца радиуса R и массы m, раскрученного до угловой скорости ω вокруг его оси.

A) $2\ m\omega^2R^2$ B) $m\omega^2R^2$ C) $\frac{1}{2}\ m\omega^2R^2$ Д) $\frac{1}{4}m\omega^2R^2$ E) $\frac{2}{5}m\omega^2R^2$

169. Частота вращения колеса, вращающегося при торможении равнозамедленно, за время t=1 мин уменьшилась от ν_1=300 об/мин до ν_2=180 об/мин. Момент инерции колеса 2 кг·м^2. Определить момент силы торможения M.

A) 0,82 Н·м B) 0,72 Н·м C) 0,62 Н·м Д) 0,52 Н·м E) 0,42 Н·м

170. Частота вращения колеса, вращающегося при торможении равнозамедленно, за время t=1 мин уменьшилась от ν_1=300 об/мин до ν_2=180 об/мин. Момент инерции колеса 2 кг·м^2. Определить работу силы торможения.

A) 800 Дж B) 630 Дж C) 530 Дж Д) 250 Дж E) 100 Дж

171. Какое из приведенных ниже утверждений является постулатом специальной теории относительности?

A) Все явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково
B) Механические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково
C) A и B
Д) Ни A, ни B
E) Среди приведенных ответов нет правильного

172. Электрон движется со скоростью $v=\frac{\sqrt{3}}{2}c$ (c – скорость света в вакууме). Чему равен импульс этого электрона? Масса покоя электрона равна m_0.

A) $\frac{1}{4}m_0c$ B) $\frac{3}{4}m_0c$ C) $2\sqrt{3}\,m_0c$ Д) $\frac{\sqrt{3}}{2}m_0c$ E) $\sqrt{3}\,m_0c$

173. Для того, чтобы масса электрона в состоянии движения была втрое больше его массы покоя, электрон должен двигаться со скоростью v, равной (ответ выразите в единицах c – скорости света в вакууме):

А) $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ В) $\frac{2\sqrt{2}}{3}c$ С) $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ Д) $\frac{1}{\sqrt{3}}c$ Е) $\frac{2}{\sqrt{3}}c$

174. Ускоритель разгоняет протоны до кинетической энергии 70 ГэВ. Во сколько раз увеличивается их масса? Масса покоя (энергия покоя) протона равна 938,3 МэВ.

А) 62,6 В) 65,6 С) 68,6 Д) 71,6 Е) 75,6

175. Два мальчика бегут по прямой дороге (второй догоняет первого): первый – со скоростью v_1 относительно земли, второй со скоростью $v_2 > v_1$. У первого мальчика в руках фонарик. Если c – это скорость света в вакууме, то скорость света фонарика в системе отсчета, связанной со вторым мальчиком, равна:

А) $c - v_2$ В) $c + v_1 + v_2$ С) $c + v_1 - v_2$ Д) $c - v_1 + v_2$ Е) c

176. Два мальчика бегут по прямой дороге навстречу друг другу: первый – со скоростью v_1 относительно земли, второй со скоростью $v_2 > v_1$. У первого мальчика в руках фонарик. Если c – это скорость света в вакууме, то скорость света фонарика в системе отсчета, связанной со вторым мальчиком, равна:

А) $c - v_2$ В) $c + v_1 + v_2$ С) c Д) $c - v_1 + v_2$ Е) $c + v_1 - v_2$

177. С какой скоростью должно двигаться тело, чтобы для неподвижного наблюдателя его масса покоя была равна 3 кг, а релятивистская 5 кг? (c – скорость света в вакууме).

А) 0,08 c В) 0,15 c С) 0,3 c Д) 0,6 c Е) 0,8 c

178. Длина покоящегося стержня l_0=1 м. Какова будет его длина при скорости движения v=0,6· c, где c – скорость света в вакууме?

А) 1,2 м В) 1 м С) 0,8 м Д) 0,9 м Е) 0,6 м

179. Сравните два утверждения:

А. При одинаковых начальных условиях всякое явление природы протекает одинаково в любой инерциальной и неинерциальной системе отсчета.

Б. Скорость света в вакууме одинакова для всех инерциальных и неинерциальных систем отсчета.

А) только А В) только Б С) и А, и Б Д) ни А, ни Б
Е) Среди приведенных ответов нет правильного

180. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы отсчета. При каком значении v длина стержня в этой системе отсчета будет на η=0,5 % меньше его собственной длины (c – скорость света в вакууме)?

А) 0,01 c В) 0,05 c С) 0,1 c Д) 0,2 c Е) 0,4 c

181. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями v_1=0,5 c и v_2=0,75 c в инерциальной системе отсчета (c – скорость света в вакууме). Найти их относительную скорость в этой системе отсчета.

А) 0,91 c В) 0,25 c С) 0,45 c Д) 0,375 c Е) 1,25 c

182. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями v_1=0,5 c и v_2=0,75 c в инерциальной системе отсчета (c – скорость света в вакууме). Найти их относительную скорость в системе отсчета, связанной с одной из частиц.

А) 0,91 c В) 0,25 c С) 1,25 c Д) 0,375 c Е) 0,45 c

183. Во сколько раз релятивистская масса частицы превышает ее массу покоя, если скорость частицы отличается от скорости света на 0,01 %?

А) 50 В) 60 С) 70 Д) 80 Е) 90

184. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от 0,6 c до 0,8 c (c – скорость света в вакууме)?

А) 0,58 m_0c^2 В) 0,42 m_0c^2 С) 0,35 m_0c^2 Д) 0,27 m_0c^2 Е) 0,14 m_0c^2

185. Найти скорость, при которой кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя.

А) $1{,}8\cdot10^8$ м/с В) $2{,}0\cdot10^8$ м/с С) $2{,}2\cdot10^8$ м/с Д) $2{,}4\cdot10^8$ м/с Е) $2{,}6\cdot10^8$ м/с

186. Скорость ветра над крышей дома 25 м/с. Какая сила действует на крышу площадью 250 м^2? Плотность воздуха ρ=1,29 кг/м^3.

А) $1{,}6\cdot10^5$ Н В) $1{,}4\cdot10^5$ Н С) $1{,}2\cdot10^5$ Н Д) $1\cdot10^5$ Н Е) $0{,}8\cdot10^5$ Н

187. До какой высоты h_0 нужно налить жидкость в цилиндрический сосуд радиусом R, чтобы сила давления жидкости на боковую поверхность была равна силе давления на дно?

А) 2R В) $\frac{3}{2}$R С) $\frac{3}{4}$R Д) $\frac{5}{4}$R Е) R

188. Приподнять камень, погруженный в воду, легче, чем приподнять такой же камень на суше. Это объясняется тем, что:

А) Плотность камня в воде меньше, чем в воздухе
В) Ускорение свободного падения в воде меньше, чем в воздухе
С) Давление воды на нижнюю поверхность камня больше, чем на верхнюю его поверхность
Д) Плотность воды у нижней поверхности камня больше, чем у верхней его поверхности
Е) На камень в воде не действует атмосферное давление

189. Два шара одинакового объема, полностью находящиеся в жидкости, соединены нитью и опускаются равномерно и вертикально один над другим. Пренебрегая силами сопротивления жидкости, определите силу натяжения нити, если массы шаров равны 1,6 кг и 2,0 кг. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 2,0 Н В) 2,5 Н С) 3,2 Н Д) 4,0 Н Е) 36 Н

190. Плотность воды 1 000 кг/м^3, а плотность стекла 2 500 кг/м^3. Если стеклянный шарик массы 100 г погрузить в воде на глубину 50 см, то сила Архимеда совершает работу, равную… (полагайте, что g=10 м/с^2).

А) – 0,2 Дж В) + 0,2 Дж С) – 0,5 Дж Д) +0,5 Дж Е) – 500 Дж

191. Цилиндрический сосуд высотой 1 м заполняют маслом с плотностью 900 кг/м^3 и погружают открытым концом в бассейн с водой. Найдите давление масла в сосуде непосредственно у его дна, если известно, что нижний конец сосуда находится на глубине 3 м от поверхности воды в бассейне. Атмосферное давление 10^5 Па. Плотность воды – 1 000 кг/м^3. Ускорение силы тяжести равно g=9,8 м/с^2.

А) 120,6 кПа В) 115 кПа С) 110,8 кПа Д) 125 кПа Е) 129,4 кПа

192. Тело взвешивают в воде ($\rho_в$=10^3 кг/м^3) и в воздухе. Показания динамометра, соответственно, равны 2,7 Н и 3,0 Н. Определите плотность тела.

A) $0,15\cdot10^4$ кг/м^3 B) $0,5\cdot10^4$ кг/м^3 C) $2\cdot10^4$ кг/м^3
Д) $1\cdot10^4$ кг/м^3 E) $3\cdot10^4$ кг/м^3

193. Тело плавает в одной жидкости, погружаясь в нее на 1/3 своего объема, а в другой жидкости – погружаясь на 2/3 своего объема. На какую часть объема погрузится тело в жидкость, плотность которой равна средней арифметической плотностей первых двух жидкостей?

A) 4/9 B) 2/9 C) 4/27 Д) 2/27 E) 1/2

194. В водопроводной трубе образовалось отверстие сечением 4 мм^2, из которого бьет вертикально вверх струя воды, поднимаясь на высоту 80 см. Какова утечка воды за сутки? Ускорение силы тяжести 9,8 м/с^2.
A) 1 368 л B) 1 398 л C) 1 428 л Д) 1 458 л E) 1 488 л

195. Льдина плавает в море. Объем не погруженной в воду части льдины V_1. Плотность льда ρ_1, плотность морской воды ρ_2. Определите массу льдины.

A) $\dfrac{V_1}{\rho_2 - \rho_1}$ B) $\dfrac{\rho_1\rho_2 V_1}{\rho_1 + \rho_2}$ C) $\dfrac{\rho_2^{\,2} V_1}{\rho_2 - \rho_1}$
Д) $\dfrac{\rho_1\rho_2 V_1}{\rho_2 - \rho_1}$ E) $\dfrac{\rho_1^{\,2} V_1}{\rho_2 - \rho_1}$

196. В бочку заливается вода со скоростью 200 см^3/с. На дне бочки образовалось отверстие площадью поперечного сечения 0,8 см^2. Пренебрегая вязкостью воды, определите уровень воды в бочке. Ускорение силы тяжести равно g=9,8 м/с^2.

A) 16 см B) 20 см C) 24 см Д) 28 см E) 32 см

197. Какова должна быть высота цилиндрического сосуда радиусом 8 см, заполненного водой и находящегося на горизонтальной подставке, чтобы сила давления воды на дно сосуда была равна силе ее давления на боковую поверхность?

A) 12 см B) 16 см C) 4 см Д) 8 см E) 2 см

198. Тело, имеющее массу m=2 кг и объем V=1 000 см^3, находится в озере на глубине h=5 м. Какая работа должна быть совершена при его подъеме на высоту H=5 м над поверхностью воды? Плотность воды ρ=1 г/см^3. Ускорение силы тяжести g=9,8 м/с^2.

A) 127 Дж B) 132 Дж C) 137 Дж Д) 142 Дж E) 147 Дж

199. Какая часть айсберга от всего объема находится над поверхностью воды? Плотность льда $\rho_л$=0,9 г/см^3, плотность воды $\rho_в$=1 000 кг/м^3.

А) 0,1 В) 0,11 С) 0,2 Д) 0,89 Е) 0,9

200. Найдите плотность ρ однородного тела, действующего на неподвижную опору в воздухе с силой $P_в$=2,8 Н, а в воде – с силой P_0=1,69 Н. Выталкивающей силой воздуха пренебрегайте. Плотность воды $\rho_в$=1 г/см^3.

А) $2\cdot 10^3$ кг/м^3 В) $4\cdot 10^3$ кг/м^3 С) $3\cdot 10^3$ кг/м^3 Д) $3{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3 Е) $2{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3

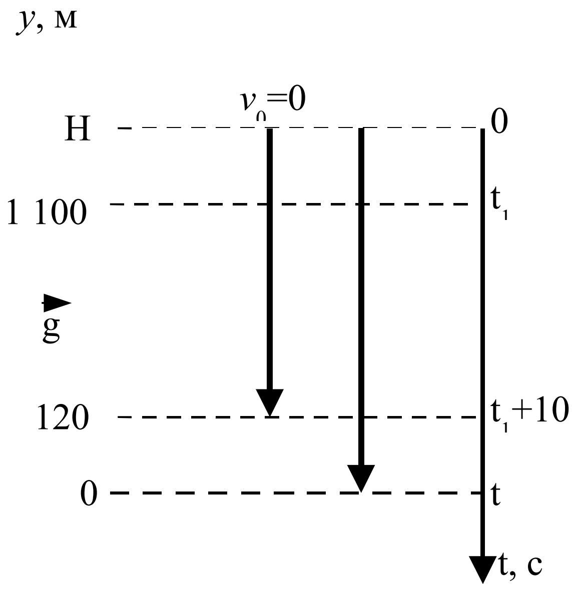
Глава 10 Примеры решения задач

1. Свободно падающее тело спустя некоторый промежуток времени после начала падения находилось на высоте 1 100 м, а еще через 10 с на высоте 120 м над поверхностью Земли. С какой высоты падало тело? Сколько времени оно было в движении? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Дано: $y(t_1)$=1 100 м; $y(t_1+10)$=120 м; g=10 м/с^2; v_0=0.
H–? t–?

Решение. Так как движение тела происходит по вертикали, то для описания движения возьмем вертикальную ось 0y с началом на поверхности земли. Раз тело падает свободно, то начальная скорость v_0=0. Обозначим H – искомая высота, t – время падения (см. рисунок).

Направим ось 0y вертикально вверх, ось времени 0t направим вертикально вниз с началом отсчета времени t=0 на высоте H (т.к. тело начинает движение с высоты H). Каждой высоте будем сопоставлять моменты времени:



- в начальный момент времени t=0 тело находится на высоте H;
- спустя некоторый промежуток времени t_1 – на высоте 1 100 м;
- еще через 10 с, т.е. через t_1+10 после начала движения – на высоте 120 м;
- через время t после начала движения y=0 (тело достигает поверхности Земли).

В уравнение движения тела по оси 0y в общем виде $y(t)=y_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$ подставляем значения y_0=H (тело начинает движение в момент t=0 с этой координаты), v_0=0 (тело свободно падает), a= -g (т.к. проекция g_y= -g). Итак, уравнение движения имеет вид:

$$y(t)=y=H-\frac{1}{2}gt^2.$$

Применяя последнее уравнение для моментов времени t_1, t_1+10 и t, получим 3 уравнения:

$$1\,100=H-\frac{1}{2}gt_1^2; \qquad 120=H-\frac{1}{2}g(t_1+10)^2; \qquad 0=H-\frac{1}{2}gt^2\,.$$

Решая систему из трех уравнений, найдем искомые величины H и t.

Вычтем почленно из первого уравнения второе, затем найдем t_1:

$$1\,100-120=H-\frac{1}{2}gt_1^2-H+\frac{1}{2}g(t_1+10)^2\,,$$

откуда

$$t_1=\frac{980-50g}{10g}=\frac{980-50\cdot 10}{10\cdot 10}=4{,}8\text{с}.$$

Подставляя полученное значение t_1 в первое уравнение, найдем H:

$$1\,100=H-\frac{1}{2}gt_1^2 \quad \text{и} \quad H=1\,100+\frac{1}{2}gt_1^2=1\,100+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 4{,}8^2=1\,215\text{м}.$$

Из третьего уравнения $0=H-\frac{1}{2}gt^2$, найдем t:

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1215}{10}}=15{,}6\text{ с}.$$

Ответ: H = 1 215 м; t = 15,6 с.

2. Точка движется по окружности со скоростью, которая меняется по закону v = bt, где b = 0,5 м/с^2. Найдите модуль полного ускорения, когда точка совершит первый оборот после начала движения.

Дано: v = bt ; b = 0,5 м/с^2.

a – ?

Решение. Из уравнения v = bt следует, что в начальный момент времени t=0 начальная скорость $v_0=b\cdot 0=0$, и в этот момент угловая скорость равна $\omega_0=v_0/R=0/R=0$, где R – радиус окружности.

Один оборот соответствует повороту на угол 2π рад. Уравнение вращательного движения точки

$$\varphi=2\pi=\frac{1}{2}\varepsilon t^2,$$

откуда находим

$$t^2=4\pi/\varepsilon,$$

где ε - угловое ускорение.

Поскольку тангенциальное ускорение по определению $a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(bt)=b$, то из выражения $a_\tau=\varepsilon R$, находим, $\varepsilon=a_\tau/R=b/R$.

Нормальное ускорение равно:

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(bt)^2}{R}=\frac{b^2}{R}\cdot t^2=\frac{b^2}{R}\cdot\frac{4\pi}{\varepsilon}=\frac{b^2}{R}\cdot\frac{4\pi}{b/R}=4\pi b.$$

Полное ускорение равно:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{(4\pi b)^2+b^2}=b\sqrt{(4\pi)^2+1}=0{,}5\sqrt{(4\pi)^2+1}=6{,}3\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: a = 6,3 м/с^2.

3. Космонавт массой m_1=80 кг находится на поверхности астероида, имеющего форму однородного шара радиуса R=1 км, и держит в руках камень массой m_2=4 кг. С какой максимальной скоростью v_2 относительно астероида (в горизонтальном направлении) космонавт может бросить камень, не рискуя, что сам станет спутником астероида? Плотность астероида ρ=5 г/см^3. Гравитационная постоянная равна $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Дано: m_1=80 кг; R=1 000 м; m_2=4 кг; ρ=5 000 кг/м^3; $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

v_2–?

Решение. Первая космическая скорость для астероида равна:

$$v_1=\sqrt{G\frac{M}{R}},$$

где $M=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$ – масса астероида.

Итак,

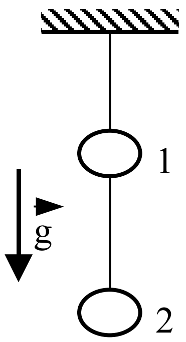
$$v_1=\sqrt{\frac{G}{R}\cdot M}=\sqrt{\frac{G}{R}\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}=2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}.$$

Допустим, что космонавт после броска камня приобретает максимально допустимую скорость v_1. В этом случае, если космонавт массой m_1 бросит камень массой m_2 со скоростью v_2 относительно астероида, то по закону сохранения импульса системы «космонавт – камень» имеем: $m_1v_1=m_2v_2$, откуда находим

$$v_2=\frac{m_1}{m_2}v_1=\frac{m_1}{m_2}\cdot 2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}=\frac{80}{4}\cdot 2\cdot 1000\sqrt{\frac{\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5000}{3}}=23{,}6\text{ м/с}.$$

Ответ: v_2 = 23,6 м/с.

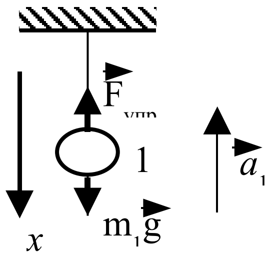
4. Если пережечь нить, связывающую грузы, висящие на резиновом шнуре, то верхний груз (1) придет в движение с ускорением a_1=5 м/с^2 (см. рисунок). Если грузы поменять местами и пережечь нить, то с каким ускорением a_2 придет в движение груз (2)? Ускорение силы тяжести g=10 м/с^2.



Дано: a_1=5 м/с^2; g=10 м/с^2.
a_2 – ?

Решение. Упругая резина под действием силы тяжести двух грузов растягивается на величину Δx, определяемую законом Гука $|\vec{F}_{упр}|=k\cdot\Delta x=(m_1+m_2)g$. Когда нить, связывающую грузы (1) и (2) пережигают, то на верхний груз (1) действуют $\vec{F}_{упр}$ и сила тяжести $m_1\vec{g}$, и по второму закону Ньютона

$$m_1\vec{a}_1=\vec{F}_{упр}+m_1\vec{g}\quad\text{(см. рисунок).}$$



Это уравнение в проекции на вертикальную ось 0x имеет вид:

$$-m_1a_1=-k\cdot\Delta x+m_1g.$$

С учетом, что $k\cdot\Delta x=(m_1+m_2)g$, имеем

$$-m_1a_1=-(m_1+m_2)g+m_1g=-m_2g,\ \text{т.е.}\ m_1a_1=m_2g$$

и $\qquad a_1=\dfrac{m_2}{m_1}g.$

Если поменять грузы (1) и (2) местами, то при тех рассуждениях можно получить выражение для a_2:

$$a_2=\frac{m_1}{m_2}g.$$

Перемножая почленно полученные выражения для a_1 и a_2, имеем:

$$a_1 \cdot a_2=\frac{m_2}{m_1}g \cdot \frac{m_1}{m_2}g=g^2,$$

откуда находим

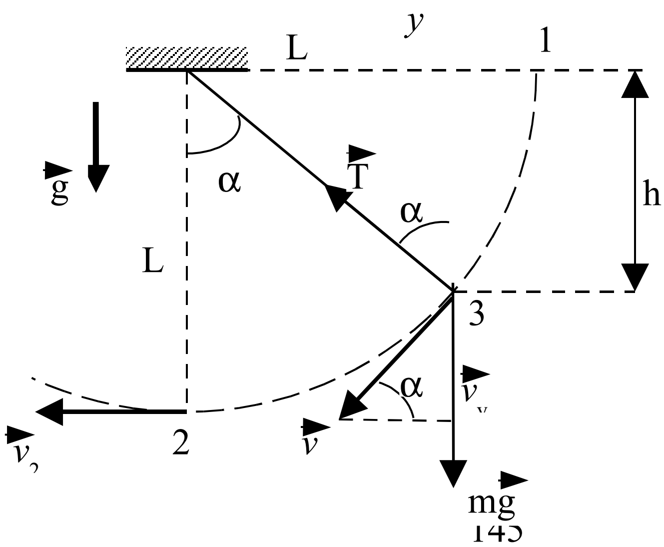
$$a_2=\frac{g^2}{a_1}=\frac{10^2}{5}=20 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: a_2= 20 м/с^2.

5. Шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити, отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают. Какой угол с вертикалью образует нить в тот момент, когда проекция скорости шарика на вертикальное направление наибольшая?

Дано: $\alpha_0=90^0$; $v_y=v_{y\,max}$.
α–?

Решение. В начальный момент (положение 1 на рисунке) скорость шарика равна нулю. Значит, равна нулю и проекция скорости на вертикальную ось 0y. В положении 2 вертикальная составляющая скорости снова равна нулю, так как вектор скорости $\vec{v}_2$ направлен горизонтально.



Следовательно, по мере движения шарика из положения 1 в положение 2 вертикальная проекция скорости v_y сначала увеличивается, достигая максимального значения, а затем начинает уменьшаться. Возрастание вертикальной проекции скорости будет продолжаться до тех пор, пока не станет равной нулю вертикальная проекция равнодействующей приложенных к шарику силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$. В этот момент (положение 3 на рисунке) вертикальная проекция ускорения обратится в нуль, и второй закон Ньютона в проекциях на ось 0y запишется в виде:

$$T\cdot\cos\alpha - mg = 0,$$

где α - угол между нитью и вертикалью.

Натяжение нити T найдем, воспользовавшись тем, что шарик движется по дуге окружности радиуса L, где L – длина нити. Уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекции на ось, совпадающей с нитью, выглядит так:

$$T - mg\cdot\cos\alpha = m\cdot\frac{v^2}{L}.$$

Квадрат линейной скорости v^2 шарика найдем из закона сохранения энергии:

$$m\cdot\frac{v^2}{2}=mgh,\text{ где } h=L\cdot\cos\alpha \text{ (см. рисунок),}$$

откуда

$$v^2=2gL\cos\alpha.$$

Учитывая все записанные соотношения, получаем

$$3mg\cos^2\alpha - mg = 0, \qquad \text{и} \qquad 3\cos^2\alpha - 1 = 0,$$

откуда находим

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и

$$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = 55^0.$$

Эту задачу можно решить, используя математический прием. Как известно, в точках экстремума функции ее производная равна нулю. В произвольном положении шарика вертикальная проекция скорости равна:

$$v_y = v\cdot\sin\alpha = \sqrt{2gL\cdot\cos\alpha}\cdot\sin\alpha.$$

Приравняем нулю производную от этого выражения:

$$v_y' = \frac{\sqrt{gL}}{\sqrt{2\cos\alpha}}\left(-\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha\right) = \sqrt{\frac{gL}{2\cos\alpha}}\left(3\cos^2\alpha - 1\right) = 0.$$

Отсюда вытекает условие: $3\cos^2\alpha - 1 = 0$, совпадающее с найденным ранее.

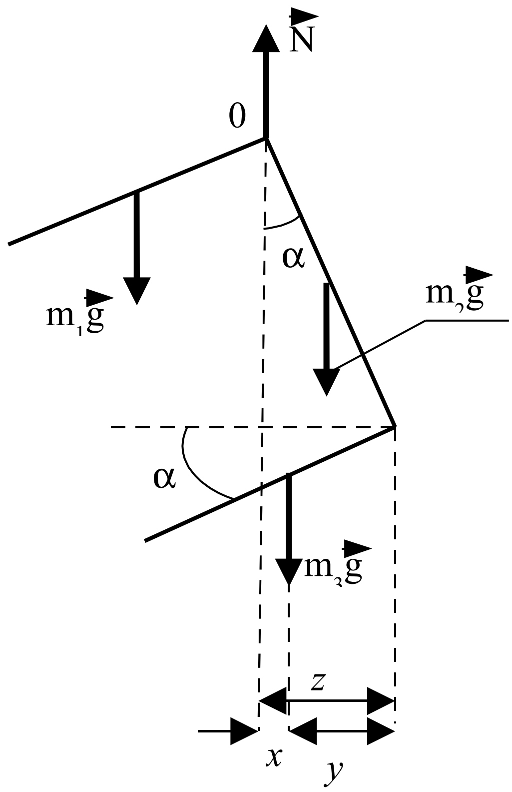
Ответ: $\alpha = 55^0$.

6. Квадратная рамка из однородной проволоки, у которой отрезана одна сторона, подвешена на гвоздь. Найдите тангенс угла между средней стороной и вертикалью.

Дано: $L_1 = L_2 = L_3 = L.$

$tg\alpha - ?$

Решение. На рамку действуют сила реакции $\vec{N}$ и силы тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, приложенные к серединам сторон рамки (см. рисунок). Так как проволока однородная, то массы сторон рамки равны между собой $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Сторону рамки обозначим через a. Приравнивая нулю сумму моментов сил (условие равновесия) относительно оси, проходящей через точку подвеса (гвоздь) 0, получим уравнение:



$$m_1 g\cdot\frac{a}{2}\cos\alpha - m_2 g\cdot\frac{a}{2}\sin\alpha - m_3 g\cdot x = 0.$$

С учетом того, что $x = y - z = a\cdot\sin\alpha - \frac{a}{2}\cos\alpha$ и массы сторон рамки равны, уравнение моментов примет вид:

$$mg\cdot\frac{a}{2}\cos\alpha - mg\cdot\frac{a}{2}\sin\alpha - mg\cdot\left(a\cdot\sin\alpha - \frac{a}{2}\cos\alpha\right) = 0,$$

откуда получим искомый тангенс угла α:

$$tg\alpha = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $tg\alpha = \frac{2}{3}$.

7. Какая сила давления может быть получена на гидравлическом прессе, если к длинному плечу рычага, передающего давление на малый поршень, при-

ложена сила F_0 = 100 Н, соотношение плеч рычага равно $L_0/L_1 = 9$, а площади поршней пресса соответственно равны S_1=5 см^2 и S_2=500 см^2. КПД пресса равен η=0,8.

Дано: $F_0 = 100$ Н; $L_0/L_1 = 9$; $S_1=5\cdot10^{-4}$ м^2; $S_2=500\cdot10^{-4}$ м^2; η=0,8 (80 %).
F_2 –?

Решение. Сделаем схематический рисунок гидравлического пресса. Обозначения на рисунке: $L_0/L_1 = 9$ – отношение плеч рычага; F_1 и F_2 – силы, действующие на малый и большой поршни, соответственно; S_1 и S_2 – площади поршней.

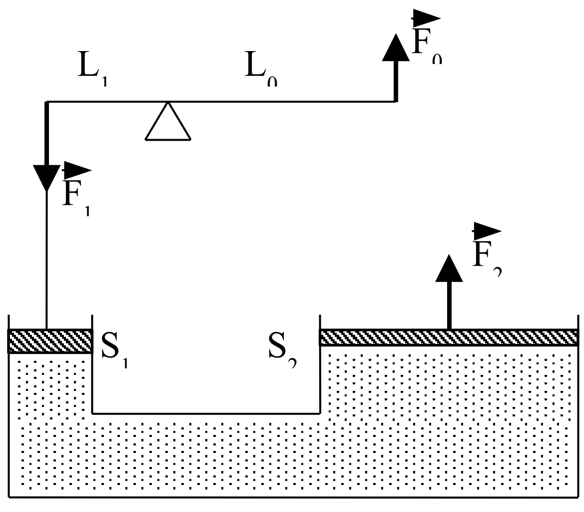
Напишем уравнение для гидравлического пресса:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1},$$

где l_1 и l_2 – перемещения поршней.

Из этого уравнения следует, что $F_1l_1=F_2l_2$, т.е. $A_1= F_1l_1$ – работа, совершаемая силой F_1, действующей на малый поршень, и $A_2= F_2l_2$ – работа, совершаемая силой F_2, действующей на большой поршень, равны. Так как гидравлический пресс используется для получения выигрыша в силе, то $A_2=A_{пол}$ – представляет собой полезную работу, а $A_1=A_{затр}$ представляет собой затраченную работу. $A_{пол}=A_{затр}$ – полезная и затраченная работы равны только в том случае, когда не учитываются силы сопротивления, действующие в механизмах пресса. В общем случае, как в нашей задаче, КПД пресса равен:

$$\eta=\frac{A_{пол}}{A_{затр}} = \frac{F_1l_1}{F_2l_2} = \frac{F_1}{F_2}\cdot\frac{l_1}{l_2}\ .$$



Так как из уравнения гидравлического пресса следует, что

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{S_2}{S_1}, \quad \text{тогда} \quad \eta=\frac{F_1}{F_2}\cdot\frac{S_2}{S_1},$$

откуда находим

$$F_2=\eta F_1\frac{S_2}{S_1}.$$

Значение F_1 находим из уравнения для рычага: $F_1L_1=F_0L_0$, т.е. $F_1=F_0\frac{L_0}{L_1}$. Подставляя выражение для F_1 в уравнение для F_2, получаем:

$$F_2=\eta F_1\frac{S_2}{S_1}=\eta\cdot F_0\cdot\frac{L_0}{L_1}\cdot\frac{S_2}{S_1}=0{,}8\cdot100\cdot9\cdot\frac{500}{5}=72\cdot10^3\ \text{Н}=72\ \text{кН}.$$

Ответ: $F_2=72$ кН.

8. По трубе радиусом R=1,5 см течет углекислый газ (с плотностью $\rho=7{,}5$ кг/м^3). Определите скорость его течения, если за время t=20 мин через поперечное сечение трубы протекает m=950 г газа.

Дано: $R=1{,}5\cdot10^{-2}$ м; $\rho=7{,}5$ кг/м^3; $t=20\cdot60$ с; $m=0{,}95$ кг.
v–?

Решение. Пишем формулу для массового расхода газа, т.е. для массы газа, протекающего в единицу времени через поперечное сечение трубы:

$$Q=\frac{m}{t}=\rho Sv,$$

где v – скорость течения газа, $S=\pi R^2$ – площадь поперечного сечения трубы.
Тогда

$$\frac{m}{t}=\rho\pi R^2v,$$

откуда находим:

$$v=\frac{m}{\rho\pi R^2t}=\frac{0{,}95}{7{,}5\cdot\pi\cdot(1{,}5\cdot10^{-2})^2\cdot20\cdot60}=0{,}15\ \text{м/с}=15\ \text{см/с}.$$

Ответ: $v=15$ см/с.

9. Лодка массой M стоит в неподвижной воде. Насколько сместится лодка, если рыбак массой m переместится с кормы на нос лодки. Длина лодки l. Сопротивлением воды пренебрегайте.

Дано: M; m; l.
L–?

Решение. В системе отсчета, связанной с неподвижной водой или берегом сохраняется проекция импульса системы рыбак – лодка на горизонтальное направление:

$$0=Mu_x+mv_x,$$

где u_x ,v_x – проекции скоростей лодки и рыбака на горизонтально расположенную ось $0x$.

Но $v_x=u_x+v_x'$, где v_x' - проекция скорости рыбака относительно лодки, поэтому

$$0=Mu_x+m(u_x+v_x') \quad \text{или} \quad 0=(M+m)\,u_x+ mv_x'.$$

Умножим обе части последнего уравнения на Δt – время перемещения рыбака с кормы на нос, тогда с учетом того, что $u_x\Delta t=L$ – перемещение лодки относительно берега, $v_x'\Delta t=l$ – перемещение рыбака относительно лодки равно длине лодки, имеем:

$$0 = (M+m)L + ml,$$

откуда находим

$$L=-\frac{m}{M+m}\cdot l\,.$$

Знак “–” указывает на то, что лодка перемещается в направлении, противоположном перемещению рыбака.

Ответ: $L=-\dfrac{m}{M+m}\cdot l.$

10. Платформа в виде сплошного диска радиуса R=1,5 м и массой m_1=180 кг вращается вокруг оси симметрии с частотой ν_0=10 об/мин. В центре платформы стоит человек массой m_2=60 кг. Какую линейную скорость v относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы? Человека принять за материальную точку.

Дано: $R=1{,}5$ м; $m_1=180$ кг; $\nu=10$ об/мин $= (1/6)$ $с^{-1}$; $m_2=60$ кг.

v–?

Решение. Так как на платформу не действуют внешние силы, соответственно, их момент можно считать равным нулю. В этом случае момент импульса системы «платформа – человек» остается неизменным:

$$L = J\omega = \text{const},$$

где J – момент инерции системы «платформа + человек» относительно оси вращения, ω – угловая скорость вращения платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому в начальный момент времени $J=J_1+J_2$, в конечном состоянии $J'=J_1'+J_2'$. В итоге закон сохранения момента импульса примет вид:

$$(J_1+J_2)\cdot\omega=(J_1'+J_2')\cdot\omega',$$

где J_1 и J_1' - значения момента инерции платформы в начальном и конечном состоянии, J_2 и J_2' - значения момента инерции человека в начальном и конечном состоянии.

На момент инерции платформы относительно оси вращения переход человека не влияет, и момент инерции платформы, имеющей форму диска, равен: $J_1=J_1' = \frac{1}{2} m_1R^2$. Момент инерции человека, как материальной точки, в начальный момент, когда он находится в центре платформы, $J_2=0$; а в конечном состоянии, когда человек находится на краю платформы, $J_2'=m_2R^2$.

Записанные соотношения для моментов инерций подставим в уравнение, выражающее закон сохранения момента импульса, и учтем, что угловая скорость в начальный момент $\omega=2\pi\nu$ и в конечный момент $\omega'=\frac{v}{R}$, где v – скорость человека относительно пола помещения:

$$\left(\frac{1}{2} m_1R^2+0\right)\cdot 2\pi\nu=\left(\frac{1}{2} m_1R^2+ m_2R^2\right)\cdot \frac{v}{R},$$

откуда находим искомую скорость

$$v = \frac{2\pi\nu R m_1}{m_1+2m_2} = \frac{2\cdot\pi\cdot\frac{1}{6}\cdot 1{,}5\cdot 180}{180+2\cdot 60} = 1 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 1$ м/с.

11. Определите релятивистский импульс p и кинетическую энергию Т электрона, движущегося со скоростью v=0,9 c, где c – скорость света в вакууме.

Дано: $m_0=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг; $c=3\cdot10^{8}$ м/с; $v=0{,}9\,c$.

p–? Т–?

Решение. Релятивистский импульс по определению равен:

$$P = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,v,$$

где m_0 – масса покоя и m – релятивистская масса электрона.
Подставив значения, произведем вычисление релятивистского импульса:

$$p=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,v=\frac{m_0\cdot 0{,}9c}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}9c}{c}\right)^2}}=\frac{0{,}9m_0c}{\sqrt{1-0{,}81}}=\frac{0{,}9\cdot 9{,}1\cdot10^{-31}\cdot 3\cdot 10^{8}}{\sqrt{0{,}19}}=5{,}6\cdot10^{-22}\ \text{кг}\cdot\text{м/с}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия Т равна разности между полной энергией Е и энергией покоя:

$$T=E-E_0=mc^2-m_0c^2=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2-m_0c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)=$$

$$=9{,}1\cdot10^{-31}\cdot(3\cdot10^{8})^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}81}}-1\right)=1{,}06\cdot10^{-13}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $p=5{,}6\cdot10^{-22}$ кг·м/с ; $T=1{,}06\cdot10^{-13}$ Дж.

Литература, рекомендуемая для изучения физики

1. **Трофимова, Т.И.** Курс физики / Т.И. Трофимова.–М.: Высшая школа, 2004.–544 с.

2. **Савельев, И.В.** Курс физики / И.В. Савельев.–М.: Наука, 1989.

Т.1: Механика. Молекулярная физика.–350 с.

3. **Детлаф, А.А.** Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский.–М.: Высшая школа, 2000.–718 с.

4. **Савельев, И.В.** Курс общей физики: учебное пособие для вузов в 5 кн. / И.В. Савельев.–М.: Астрель, АСТ, 2003.

Кн.1: Механика.–336 с.

5. **Яворский, Б.М.** Справочное руководство по физике / Б.М. Яворский, Ю.А. Селезнев.–М.: Наука, 1989.–576 с.

6. **Савельев, И.В.** Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев.–М.: Наука, 1988.–288 с.

7. **Трофимова, Т.И.** Сборник задач по курсу физики с решениями / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова.–М.: Высшая школа, 2003.–591 с.

Список использованных источников

1. **Трофимова, Т.И.** Курс физики / Т.И. Трофимова.–М.: Высшая школа, 2004.–544 с.

2. **Савельев, И.В.** Курс общей физики: учебное пособие для вузов в 5 кн. / И.В. Савельев.–М.: Астрель, АСТ, 2003.

Кн.1: Механика.–336 с.

3. **Иродов, И.Е.** Механика. Основные законы / И.Е. Иродов.–М.: Лаборатория Базовых знаний, 2003.–312 с.

4. **Савельев, И.В.** Курс общей физики / И.В. Савельев.–М.: Наука, 1987.

Т.1: Механика. Молекулярная физика.–432 с.

5. **Сивухин, Д.В.** Общий курс физики: учебное пособие для вузов в 5 т. / Д.В. Сивухин.–М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ, 2002.

Т.1: Механика.–560 с.

6. **Стрелков, С.П.** Механика / С.П. Стрелков.–М.: Наука, 1975.–560 с.

7. **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Советская энциклопедия, 1988.

Т.1: Ааронова – Бома эффект – Длинные линии.–704 с.

8. **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Советская энциклопедия, 1990.

Т.2: Добротность – Магнитооптика.–703 с.

9. **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Большая Российская энциклопедия, 1992.

Т.3: Магнитоплазменный – Пойнтинга теорема.–672 с.

10. **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Большая Российская энциклопедия, 1994.

Т.4: Пойнтинга – Робертсона – Стримеры.–704 с.

11. **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.

Т.5: Стробоскопические приборы – Яркость.–760 с.

12. **Савельев, И.В.** Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев.–М.: Наука, 1988.–288 с.

13. **Иродов, И.Е.** Задачи по общей физике / И.Е. Иродов.–М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001.–432 с.

Приложение А
(*справочное*)
Основные физические константы

Скорость света в вакууме	$c=2{,}9979\cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	$G=6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$ м^2/кг^2
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_\mu=22{,}414$ $\frac{\text{л}}{\text{моль}}$
Универсальная газовая постоянная	$R=8{,}314$ $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$
Постоянная Фарадея	$F=96\,500$ $\frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$
Число Авогадро	$N_A=6{,}022\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$к=1{,}38\cdot 10^{-23}$ $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ $=8{,}625\cdot 10^{-5}$ $\frac{\text{эВ}}{\text{К}}$
Элементарный заряд	$e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ $\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ $k=(4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0)^{-1}=9\cdot 10^{9}$ $\frac{\text{м}}{\text{Ф}}$
Магнитная постоянная	$\mu_0=4\cdot\pi\cdot 10^{-7}$ $\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ $=12{,}56\cdot 10^{-7}$ $\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Постоянная Планка	$h=6{,}626\cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с$=4{,}136\cdot 10^{-15}$ эВ$\cdot$с $\hbar=\frac{h}{2\pi}=1{,}054\cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$ с
Постоянная Ридберга	$R=3{,}29\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ $R=1{,}10\cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Масса покоя электрона	$m_e=9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p=1{,}672\cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n=1{,}675\cdot 10^{-27}$ кг
Атомная единица массы	1 а.е.м.$= 1{,}6606\cdot 10^{-27}$ кг
Электрон-вольт	1 эВ$=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж
Нормальное атмосферное	760 мм рт. ст. = 101 325 Па

давление	
Первый Боровский радиус	r_1=0,528 · 10^{-10} м
Масса изотопа Н	$m_н$=1,6736 · 10^{-27} кг

Приложение Б

(*справочное*)

Соотношения между единицами некоторых физических величин

Длина	1 Å (Ангстрем)=1·10^{-10} м 1 дюйм= 2,54 см 1 пк (парсек) ≈3,1· 10^{16} м 1 св. год (световой год) ≈0,95· 10^{16} м 1 ферми =10^{-15} м 1 фут =30,48 см 1 ярд =91,44 см
Масса	1 тонна =10^3 кг 1 а.е.м.=1,6606·10^{-27} кг 1 кар (карат) =0,2 г
Время	1 сутки =86400 с 1 мин =60 с 1 час =60 мин 1 сутки =24 часа 1 год ≈3,16·10^7 с
Объем	1 л =1·10^{-3} $м^3$
Сила	1 кГ =1 кгс (килограмм-сила) =9,81 Н
Давление	1 бар =1·10^5 Па 1 атм =760 мм рт. ст. =1,01325·10^5 Па 1 ат =1 кгс/$см^2$ =0,98·10^5 Па 1 торр =1 мм рт. ст. =133,3 Па
Энергия	1 эВ =1,6·10^{-19} Дж 1 квт· ч =3,6·10^6 Дж 1 кал =4,1868 Дж
Мощность	1 л.с. (лошадиная сила) =735 Вт

Приложение В
(*справочное*)
Приложение Г
(*справочное*)
Основные формулы по физике

$V=\frac{S}{t}$ при равномерном движении скорость V равна отношению пути S ко времени t.

$V_{ср.}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$ $V_{ср.}$ - средняя скорость равна отношению пути Δ S к промежутку времени Δ t, в течение которого этот путь был пройден.

$\vec{V}_{ср.} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ $\vec{V}_{ср.}$ - вектор средней скорости перемещения за время Δ t, $\Delta\vec{r}$ - вектор перемещения.

$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'_t$ $\vec{V}$ - вектор мгновенной скорости равен производной от перемещения по времени.

$V = \frac{dS}{dt} = S'_t$ V - модуль мгновенной скорости равен производной от пути по времени.

$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ $\vec{a}_{ср.}$ - вектор среднего ускорения равен отношению изменения скорости $\Delta\vec{V}$ к промежутку времени Δt, за которое это изменение произошло.

$\vec{a}=\frac{dV}{dt}=V'_t$ мгновенное ускорение равно производной от скорости по времени

$a_t = \frac{dV}{dt} = V'_t$ тангенциальное (касательное) ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю и направлено по касательной к траектории в данной точке.

$a_n = \frac{V^2}{R}$ нормальное (центростремительное) ускорение a_n характеризует быстроту изменения скорости по направлению и направлено к центру кривизны траектории. R - радиус кривизны траектории, V–скорость. (при равномерном вращении по окружности a_n–центростремительное ускорение, R–радиус окружности).

$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ a–полное ускорение при криволинейном движении;

$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ a_n,a_t–нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.

$x(t)=x_0 + V_0 \cdot t$ кинематическое уравнение равномерного движения вдоль оси x, x_0 - начальная координата, t - время.

$$x(t) = x_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

кинематическое уравнение равнопеременного движения (a=const) вдоль оси x, V_0 - начальная скорость. Значения V_0 и a - положительны, если векторы $\vec{V}_0$ и $\vec{a}$ направлены в сторону положительной полуоси x, и отрицательны в противном случае.

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$
$$V = V_0 + a \cdot t$$

S–путь и V–мгновенная скорость при равнопеременном движении, V_0 - начальная скорость, a - ускорение, t - время.

$$S = \frac{V^2 - V_0^2}{2a}$$

кинематическое уравнение, связывающее путь S, пройденный телом за некоторое время, с начальной - V_0 и конечной - V скоростями на этом отрезке пути, с ускорением a.

$$H = \frac{gt^2}{2};\ t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$
$$h(t) = H - \frac{gt^2}{2}$$
$$V = gt = \sqrt{2gH}$$

свободное падение ($v_0 = 0$) тела с высоты H: t - время падения; g - ускорение свободного падения; V -скорость тела в момент достижения поверхности (Земли), h(t) – высота в момент времени t.

$$x(t) = V_0 \cdot t;$$
$$y(t) = H - \frac{gt^2}{2};$$
$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}};\ L = V_0 t_0;$$
$$V_x = V_0;\ |V_y| = gt$$
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

движение тела, брошенного горизонтально со скоростью V_0 с высоты H: $x_0 = 0$ и $y_0 = H$ - начальное положение тела (в момент броска); x(t) и y(t) - уравнения движения по осям; t_0 - время полета; L - дальность полета; V_x и V_y - составляющие скорости $\vec{V}$ тела по осям координат для любого момента времени t во время полета (до удара о поверхность).

$$V_{ox} = V_0 \cdot \cos\alpha;\ V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha;$$
$$x(t) = V_{ox}(t); \qquad y(t) = V_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2;$$
$$V_x(t) = V_{ox};\ V_y(t) = V_{oy} - gt;$$
$$H = \frac{V_{0y}^2}{2g};\ t_0 = \frac{2V_{0y}}{g};$$
$$L = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

движение тела, брошенного со скоростью V_0 под углом α к горизонту: $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ - начальное положение тела (в момент броска); V_{ox} и V_{oy} - проекции скорости $\vec{V}_0$ по осям; x(t) и y(t) - уравнения движения по осям; $V_x(t)$ и $V_y(t)$- зависимость составляющих скорости по осям от времени t; H - высота подъема, t_0 - время полета; L - дальность полета.

$$\nu = \frac{N}{t},\ T = \frac{t}{N}$$
$$\nu = T^{-1},\ T = \nu^{-1}$$

при равномерном вращательном движении: ν - частота вращения, T - период вращения, N - число оборотов за время t.

$\omega = \dfrac{\varphi}{t}$; $N = \dfrac{\varphi}{2\pi}$; $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ — ω - угловая скорость при равномерном вращении: φ - угол поворота, N - число оборотов за время t; ν - частота вращения, T - период вращения.

$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \varphi'_t$ — ω - угловая скорость равна производной угла поворота по времени.

$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \omega'_t$ — ε - угловое ускорение равно производной угловой скорости по времени.

$S = R \cdot \varphi$ — S - путь, пройденный материальной точкой при повороте на угол φ по дуге окружности радиуса R.

$V = \omega \cdot R = \dfrac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu$ — связь между линейной и угловой скоростями при равномерном вращательном движении

$a_t = R \cdot \varepsilon$, $a_n = \omega^2 \cdot R = \dfrac{V^2}{R} = V \cdot \omega$ — a_n и a_t–нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.

$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t$ — кинематическое уравнение равномерного вращения, φ_0 - начальное угловое положение.

$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \dfrac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$ — кинематическое уравнение равнопеременного вращения (ε=const), ω_0 - начальная угловая скорость.

$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$, $\varepsilon = \dfrac{\omega - \omega_0}{t}$ — ω - мгновенная угловая скорость при равнопеременном вращении в момент времени t, ω_0 - начальная угловая скорость, ε - угловое ускорение.

$\varphi = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$ — кинематическое уравнение, связывающее угол поворота φ с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями и с угловым ускорением ε.

$\rho = \dfrac{m}{V}$ — ρ- плотность тела, m - масса, V - объем тела.

$\vec{P} = m \cdot \vec{V}$ — $\vec{P}$ - импульс тела - векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость $\vec{V}$.

$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$, $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{P}'_t$ второй закон Ньютона: m - масса тела, $\vec{F}$ - равнодействующая всех приложенных к телу сил, $\vec{a}$ - ускорение, $\vec{P}$ - импульс тела.

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ третий закон Ньютона: силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и противоположно направлены.

$F_{упр.} = -k \cdot \Delta l$,
$\sigma = \varepsilon \cdot E$,
$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$, $\sigma = \frac{F}{S}$
$\Delta l = l - l_0$

закон Гука: сила упругости $F_{упр.}$ пропорциональна удлинению тела (пружины) Δl и направлена в сторону, противоположную направлению перемещений частиц тела при деформации; k - коэффициент пропорциональности (жесткость пружины); σ - механическое напряжение; S - площадь поперечного сечения образца, к которому приложена сила F; E - модуль Юнга (упругости); ε - относительное удлинение; l_0 - начальная длина.

$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$ закон всемирного тяготения: два тела притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между их центрами масс; G - гравитационная постоянная. В такой форме записи закон справедлив для взаимодействия материальных точек и однородных тел сферической формы.

$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$
$g(h) = g\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$

g(h) - ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью планеты, M и R - масса и радиус планеты; g - ускорение свободного падения у поверхности планеты (без учета вращения планеты), т.е. $g = G\frac{M}{R^2}$.

$F_{тр.} = \mu \cdot N$ сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя $F_{тр.}$, пропорциональной силе нормального давления N (реакции опоры); μ - коэффициент трения.

$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ P - сила тяжести, m - масса тела, g - ускорение свободного падения.

$V_1 = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}} = \sqrt{g \cdot R}$ V_1 - первая космическая скорость: M и R - масса и радиус планеты, G - гравитационная постоянная, g - ускорение свободного падения на поверхности планеты.

$V_2 = \sqrt{2}\, V_1 = \sqrt{2g \cdot R}$ V_2 – вторая космическая скорость, V_1 - первая космическая скорость.

$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$ ΔA - элементарная работа равна скалярному произведению силы $\vec{F}$ на перемещение $\Delta\vec{r}$, α - угол между $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$.

$N_{ср.}=\frac{\Delta A}{\Delta t}$ мощность равна работе, совершаемой в единицу времени: $N_{ср}$ - средняя мощность за время Δt.

$N=\vec{F}\cdot\vec{V}=F\cdot V\cdot\cos\alpha$ мгновенная мощность N равна скалярному произ-ведению силы $\vec{F}$ на скорость $\vec{V}$, с которой движется точка приложения силы, α - угол между $\vec{F}$ и $\vec{V}$.

$E_K=\frac{m\cdot V^2}{2}=\frac{P^2}{2m}$ E_K - кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью V, P - импульс тела.

$A=E_{K2}-E_{K1}$ работа равнодействующей силы равна изменению кинетической энергии тела (при условии постоянства потенциальной энергии).

$A=-\Delta U$ работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии (при условии постоянства кинетической энергии).

$E_П=m\,g\cdot h$ потенциальная энергия тела в однородном поле тяготения: h - высота над поверхностью Земли (высота от нулевого уровня), g - ускорение свободного падения, m - масса тела.

$E_П=\frac{k\cdot(\Delta l)^2}{2}$ потенциальная энергия упруго деформированного тела (пружины).

$E_П=-G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{R}$ потенциальная энергия взаимодействия двух тел массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии R друг от друга.

$\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot\vec{V}_i=\text{const}$ закон сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой системы остается постоянным (по величине и направлению) при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.

$m\cdot\vec{V}-m\cdot\vec{V}_0=\vec{F}\cdot\Delta t$

$\Delta\vec{P}=\vec{P}-\vec{P}_0=\vec{F}\cdot\Delta t$

изменение импульса тела $\Delta\vec{P}$ за время Δt равно импульсу равнодействующей силы $\vec{F}\cdot\Delta t$.

$E=E_К+E_П$ полная механическая энергия материальной точки (тела) равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

$E=E_K+E_П=\text{const}$ закон сохранения полной механической энергии: полная механическая энергия замкнутой системы тел остается постоянной при любых движениях тел системы, если в системе не действуют диссипативные силы.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$
$$\frac{m_1 v_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 v_2^{\,2}}{2} = \frac{m_1 u_1^{\,2}}{2} + \frac{m_1 u_2^{\,2}}{2}$$
законы сохранения импульса и энергии при центральном абсолютно упругом ударе двух тел (шаров).

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$
закон сохранения импульса при центральном абсолютно неупругом ударе двух тел.

$$\Delta E_к = Q = \left(\frac{m_1 v_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 v_2^{\,2}}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}$$
изменение кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе (часть ее переходит в «тепловую» форму энергии).

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{затр}} = \frac{N_{пол}}{N_{затр}}$$
$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{затр}} \cdot 100\% = \frac{N_{пол}}{N_{затр}} \cdot 100\%$$
коэффициент полезного действия механизмов равен отношению полезной работы $A_{пол}$ (полезной мощности $N_{пол}$) к затраченной $A_{затр}$ (затраченной - $N_{затр}$).

$$\frac{dE_п}{dx} = (E_п)_x' = 0$$
условие равновесия - экстремальное значение потенциальной энергии (для случая одномерной задачи, когда $E_п$ зависит только от координаты x, т.е. когда $E_п = E_п(x)$).

$$\frac{d^2E_п}{dx^2} = (E_п)_{xx}'' > 0$$
условие устойчивого равновесия

$\vec{M} = [\vec{R} \cdot \vec{F}]$ момент силы $\vec{M}$ относительно неподвижной точки - физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{R}$, проведенного из этой точки в точку приложения силы, на эту силу $\vec{F}$.

$M = R \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot d$ модуль момента силы - M, α - угол между $\vec{R}$ и $\vec{F}$, $d = R \cdot \sin\alpha$ - плечо силы равно кратчайшему расстоянию от оси вращения до линии действия силы.

$\sum \vec{F}_i = 0$ (первое) условие равновесия тела при отсутствии вращения: векторная сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю.

$\sum M_i = 0$ (второе) условие равновесия твердого тела с неподвижной осью вращения: алгебраическая сумма моментов сил относительно любой оси равна нулю, причем моменты сил, вращающих в одну сторону, считают положительными, а в другую - отрицательными.

$\sum [\vec{R}_i m_i \vec{g}] = 0$ центр тяжести тела: сумма моментов сил тяжести всех частиц тела по отношению к оси, проходящей через центр тяжести, равна нулю.

$\vec{R}_c = \frac{\sum m_i g \vec{R}_i}{\sum m_i g}$ центр тяжести тела: $\vec{R}_c(x_c, y_c, z_c)$ - радиус-вектор, проведенный из начала координат в центр тяжести тела; x_c, y_c, z_c - координаты центра тяжести; x_i, y_i, z_i - координаты частиц тела, причем $\vec{R}_i(x_i, y_i, z_i)$; суммирование производится по всем частицам тела.

$x_c = \frac{\sum m_i g x_i}{\sum m_i g}$

$y_c = \frac{\sum m_i g y_i}{\sum m_i g}$

$z_c = \frac{\sum m_i g z_i}{\sum m_i g}$

$\vec{R}_{цм} = \frac{\sum m_i \vec{R}_i}{\sum m_i}$ $\vec{R}_{цм}(x_{цм}, y_{цм}, z_{цм})$ - радиус-вектор центра масс системы материальных точек; m_i и $\vec{R}_i$ - масса и радиус-вектор i-ой материальной точки (если твердое тело, то суммирование производится по всем частицам тела).

$\vec{R}_c = \vec{R}_{цм}$ координаты центра масс и центра тяжести тела совпадают в случае, если размерами тела можно пренебречь в сравнении с размерами Земли (планеты).

$M = F \cdot d$ момент пары сил: d- плечо пары сил ($F_1 = F_2 = F$) – кратчайшее расстояние между линиями действия сил.

$\frac{F}{mg} = \frac{l_1}{l_2}$ правило рычага: во сколько раз плечо l_2 силы F больше плеча l_1 груза весом mg, тем меньше усилие F требуется, чтобы сдвинуть груз.

$\vec{L} = \left[\vec{R} \cdot \vec{P}\right] = \left[\vec{R} \cdot m\vec{V}\right]$

$L = R \cdot P \cdot \sin\alpha = P \cdot d$

$\vec{L}$ –момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки О: $\vec{R}$ –радиус-вектор от точки О до материальной точки; $\vec{P} = m \cdot \vec{V}$ - импульс материальной точки; α - угол между $\vec{R}$ и $\vec{P}$; d - плечо вектора $\vec{P}$ относительно неподвижной точки О.

$P = \frac{F}{S}$ давление равно отношению силы, перпендикулярной к поверхности тела, к величине площади поверхности S, на которую действует эта сила.

$P = \rho \cdot g \cdot h$ P - гидростатическое давление: ρ - плотность жидкости, h - высота столба жидкости, g - ускорение свободного падения.

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1}$ гидравлический пресс дает выигрыш в силе во столько раз, во сколько раз площадь ее большого поршня превосходит площадь маленького поршня, S_1 и S_2 - площади поперечного сечения поршней, l_1 и l_2 - перемещения поршней, F_1 и F_2 - силы, приложенные к поршням.

$F_A = \rho \cdot g \cdot V_п$ закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости или газа. ρ - плотность жидкости (газа), $V_п$ - объем погруженной в жидкость (газ) части тела, g - ускорение свободного падения.

$S \cdot v = const$ уравнение неразрывности (непрерывности) для несжимаемой жидкости: произведение скорости течения v на поперечное сечение S трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока;

$V = S \cdot v \cdot t$ объем жидкости (газа) V, проходящий через сечение S струи (трубы) за время t.

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ в сообщающихся сосудах высота столбиков жидкостей над уровнем раздела обратно пропорциональна плотностям жидкостей.

$P + \frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h = const$ уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости: P - статическое давление, $\frac{\rho \cdot v^2}{2}$ -динамическое давление, $\rho \cdot g \cdot h$ - гидростатическое давление, v - скорость течения жидкости в данном сечении.

$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ формула Торричелли: v - скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде, h - глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости.

$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$ ν - количество вещества: μ - молярная масса, N_A - число Авогадро, N - число молекул в веществе (газе) массой m.

$m_0 = \frac{m}{N} = \frac{\mu}{N_A}$ m_0 - масса одной молекулы.

$T = t + 273$ T - температура по абсолютной шкале температур (шкале Кельвина), t - температура по шкале Цельсия.

$P \cdot V = const$ закон Бойля-Мариотта: для данной массы газа (m=const) при неизменности состава газа (молярная масса μ=const) при постоянной температуре (T=const) произведение давления газа P на его объем V есть величина постоянная.

$V = V_0 \cdot (1 + \alpha t)$
$V = V_0 \cdot \alpha \cdot T$
$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$
закон Гей-Люссака: объем данной массы газа (m=const) при неизменности состава газа (молярная масса μ=const) при постоянном давлении (P=const) изменяется линейно с температурой, $\alpha = 273^{-1}\ K^{-1}$ - термический коэффициент расширения, V_0 - объем при 0 ^{0}C.

$P = P_0 \cdot (1 + \beta t)$
$P = P_0 \cdot \beta \cdot T$
закон Шарля: давление данной массы газа (m=const) при неизменности состава газа (молярная масса μ=const) при постоянном

$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$ объеме (V=const) изменяется линейно с температурой, $\beta=273^{-1}\ K^{-1}$ - термический коэффициент давления, P_0 - давление при 0 °С.

$V_\mu=\frac{V}{\nu}=22{,}41\ \frac{л}{моль}$ закон Авогадро: моли любых идеальных газов при одинаковых условиях (одинаковых температуре и давлении) занимают одинаковые объемы, в частности, при нормальных условиях, - 22,41 л.

P=760 мм рт. ст. значения давления и температуры при нормальных условиях.
t=0 °С

$P=\Sigma P_i$ закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов; P_i - парциальное давление i-ой компоненты равно давлению, которое создавала бы i-ая компонента смеси газов, если бы она одна занимала объем, равный объему смеси при той же температуре.

$\frac{P\cdot V}{T}=const$ уравнение Клапейрона справедливо при неизменности состава и массы газа, P - давление, V - объем, T - абсолютная температура.

$P\cdot V=\frac{m}{\mu}\cdot R\cdot T$ уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа), m - масса газа, R - универсальная газовая постоянная, μ - молярная масса газа.

$R=k\cdot N_A$ R - универсальная газовая постоянная, k - постоянная Больцмана, N_A - число Авогадро.

$n=\frac{N}{V}$; n - концентрация молекул - число молекул в единице объема.

$\rho=\frac{m}{V}$; $\rho=m_0\cdot n$ ρ –плотность газа, m_0–масса одной молекулы

$P=n\cdot k\cdot T$ зависимость давления P от концентрации молекул n и температуры T; k - постоянная Больцмана.

$P=\frac{2}{3}n\cdot E_0$;

$E_0=\frac{m_0V^2}{2}$

основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов: давление P идеального газа равно $\frac{2}{3}$ среднеквадратической кинетической энергии молекул, содержащихся в единице объема, m_0 - масса одной молекулы, n - концентрация молекул.

$E_0=\frac{m_0\cdot V^2}{2}=\frac{3}{2}k\cdot T$ E_0 - среднеквадратическая кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа, m_0 - масса молекулы, k - постоянная Больцмана, T - температура, V – среднеквадратическая скорость.

$V = \overline{\overline{V}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} V_i^2}{N}}$ $V\left(\overline{\overline{V}}\right)$ - среднеквадратическая скорость молекул идеального газа.

$\overline{\overline{V}} = \sqrt{\dfrac{3\cdot k\cdot T}{m_0}} = \sqrt{\dfrac{3\cdot R\cdot T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{3\cdot P}{\rho}}$ R - универсальная газовая постоянная, μ - молярная масса, T - температура, P - давление, ρ - плотность газа, к- постоянная Больцмана, m_0 - масса молекулы.

$V_{cp} = \sqrt{\dfrac{8\cdot k\cdot T}{\pi\cdot m_0}} = \sqrt{\dfrac{8\cdot R\cdot T}{\pi\cdot\mu}} = \sqrt{\dfrac{8\cdot P}{\pi\cdot\rho}}$ V_{cp} - средняя арифметическая скорость молекул газа.

$V_H = \sqrt{\dfrac{2\cdot k\cdot T}{m_0}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot R\cdot T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot P}{\rho}}$ V_H - наиболее вероятная скорость молекул газа.

$\lambda = \dfrac{V_{cp}}{Z} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot d^2\cdot n}$ λ - средняя длина свободного пробега молекул газа равна среднему расстоянию между двумя последовательными столкновениями молекулы, Z - среднее число соударений молекулы за 1 с, d - эффективный диаметр молекулы, n - концентрация молекул, V_{cp} - относительная средняя арифметическая скорость молекул.

$E_{cp} = \dfrac{i}{2}\cdot k\cdot T$ E_{cp} - средняя энергия молекулы, i - число степеней свободы молекул газа, k - постоянная Больцмана, T - температура.

$U = \dfrac{i}{2}\cdot\nu\cdot R\cdot T$ U - внутренняя энергия идеального газа, ν - количество вещества, R - универсальная газовая постоянная, T - температура.

$Q = \Delta U + A$ первое начало термодинамики: количество теплоты Q, переданное системе, идет на изменение внутренней энергии ΔU системы и на совершение системой работы A против внешних сил.

$\Delta U = \dfrac{i}{2}\cdot\nu\cdot R\cdot\Delta T = \dfrac{i}{2}P\cdot\Delta V$ ΔU - изменение внутренней энергии при изменении температуры на ΔT; ΔV–изменение объема при давлении P.

$C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$ C - теплоемкость численно равна количеству теплоты, необходимому для изменения температуры тела на 1 К.

$c = \dfrac{C}{m} = \dfrac{\Delta Q}{m\cdot\Delta T}$ c - удельная теплоемкость равна теплоемкости единицы массы тела, m - масса тела.

$C_V=\frac{i}{2}\cdot R$ C_V - молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, i - число степеней свободы молекул газа, R - универсальная газовая постоянная.

$C_P=\frac{(i+2)}{2}\cdot R$ C_P - молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.

$R=C_P-C_V$ уравнение Майера: универсальная газовая постоянная численно равна работе, которую 1 моль идеального газа совершает, изобарически расширяясь при нагревании на 1 К.

$A=P\cdot\Delta V$ A - работа, совершаемая газом при изменении его объема, P - давление газа, ΔV - изменение его объема.

$A=P\cdot(V_2-V_1)=\frac{m}{\mu}\cdot R\cdot(T_2-T_1)$ A - работа газа при изобарическом процессе.

$A=\frac{m}{\mu}\cdot R\cdot T\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{\mu}\cdot R\cdot T\cdot\ln\frac{P_1}{P_2}$ A - работа газа при изотермическом процессе.

$A=\frac{m}{\mu}\cdot\frac{R}{\gamma-1}\cdot\left(T_1-T_2\right)=\frac{m}{\mu}\cdot C_V\cdot\left(T_1-T_2\right)$ A - работа газа при адиабатическом процессе, γ - показатель адиабаты.

$P\cdot V^{\gamma}=\text{const}$

$T\cdot V^{\gamma-1}=\text{const}$

$T^{\gamma}\cdot P^{1-\gamma}=\text{const}$

уравнение Пуассона (уравнение адиабатического процесса), $\gamma=\frac{C_P}{C_V}$ - показатель адиабаты.

$\gamma=\frac{C_P}{C_V}=\frac{i+2}{i}$ γ - показатель адиабаты, C_P и C_V - молярные теплоемкости при постоянных давлении и объеме, соответственно; i - число степеней свободы молекул газа.

$L=L_0\cdot(1+\alpha t)$

$\alpha=\frac{1}{L}\cdot\frac{\Delta L}{\Delta t}$

$\Delta L=L-L_0$

линейное расширение твердых тел: L_0 - длина при 0 °C, L - длина при температуре t °C, α - линейный коэффициент расширения равен относительному изменению длины при нагреве на 1 °C (1 K).

$V=V_0\cdot(1+\beta t)$

$\beta=\frac{1}{V}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta t}$

$\Delta V=V-V_0$

объемное расширение твердых тел и жидкостей: V_0 - объем при 0 °C, V - объем при температуре t °C, β - объемный коэффициент расширения равен относительному изменению объема при нагреве на 1 °C (1K).

$\beta=3\alpha$ соотношение между коэффициентами линейного (α) и объемного (β) расширения твердых тел.

$q=\dfrac{Q}{m}$ удельная теплота сгорания равна количеству теплоты, выделяющемуся при сгорании единицы массы топлива.

$\lambda=\dfrac{Q}{m}$ количество теплоты, необходимое для превращения единицы массы из твердого (жидкого) состояния в жидкое (твердое) при температуре плавления (кристаллизации), называют удельной теплотой плавления (кристаллизации) λ. Удельная теплота плавления равна удельной теплоте кристаллизации. Температура плавления равна температуре кристаллизации.

$r=\dfrac{Q}{m}$ количество теплоты, которое необходимо сообщить жидкости для испарения единицы ее массы при постоянной температуре (в частности, при температуре кипения), называют удельной теплотой парообразования r. С ростом температуры величина удельной теплоты парообразования уменьшается.

$\eta=\dfrac{A}{Q_1}=\dfrac{Q_1-Q_2}{Q_1}$ η - коэффициент полезного действия теплового двигателя: A - работа, совершенная за цикл, Q_1 - количество теплоты, полученное системой (от нагревателя), Q_2 - количество теплоты, отданное системой (холодильнику; окружающей среде).

$\eta=\dfrac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\dfrac{T_1-T_2}{T_1}$ η - коэффициент полезного действия идеального теплового двигателя (цикла Карно): T_1 и T_2 - температуры нагревателя и холодильника, соответственно; Q_1 - количество теплоты, полученное газом от нагревателя при изотермическом расширении; Q_2 - количество теплоты, отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии.

$\rho=\dfrac{m}{V}$ абсолютной влажностью ρ называют количество водяного пара в граммах, содержащегося в 1 м^3 воздуха при данной температуре.

$\varphi=\dfrac{\rho}{\rho_H}$ относительной влажностью φ называют отношение абсолютной влажности к тому количеству водяного пара, которое необходимо для насыщения 1 м^3 воздуха при той же температуре.

$\varphi=\dfrac{P}{P_H}$ относительной влажностью φ называют отношение парциального давления P водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению P_H насыщенного пара при той же температуре.

$\delta=\dfrac{F}{L}$ δ - коэффициент поверхностного натяжения равен силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины границы свободной поверхности жидкости.

$\delta=\dfrac{A}{\Delta S}$ δ - коэффициент поверхностного натяжения равен работе, необходимой для увеличения свободной поверхности жидкости при постоянной температуре на единицу.

$\Delta P = \delta \cdot \left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right)$ формула Лапласа: избыточное давление ΔP, обусловленное кривизной поверхности жидкости; r_1 и r_2 - радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; δ - коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

$\Delta P = \dfrac{2\cdot\delta}{r}$ избыточное давление в случае сферы: r - радиус сферы, δ - коэффициент поверхностного натяжения.

$h=\dfrac{2\cdot\delta\cdot\cos\upsilon}{\rho\cdot g\cdot r_0}$ h - высота подъема жидкости в капиллярной трубке: υ - краевой угол, r_0 - радиус капилляра, ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения, δ - коэффициент поверхностного натяжения, (υ = 0 - полное смачивание; υ = 180^0 - полное несмачивание)

$\Sigma q_i= const$ закон сохранения заряда: алгебраическая сумма зарядов в замкнутой системе (т.е. в системе, не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается неизменной при любых процессах внутри этой системы.

$F=\dfrac{|q_1|\cdot|q_2|}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot r^2}$

$F = k\,\dfrac{|q_1|\cdot|q_2|}{\varepsilon\cdot r^2}$

закон Кулона: сила взаимодействия F между двумя неподвижными точечными зарядами прямо пропорциональна абсолютным значениям зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, ε_0–электрическая постоянная, $k=\dfrac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\,\dfrac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$, ε - диэлектрическая проницаемость изотропной непрерывной среды нахождения зарядов.

$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$ $\vec{E}$ - напряженность электростатического поля равна силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

$E=\dfrac{q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot r^2}$ E - напряженность электростатического поля точечного заряда q на расстоянии r от него: ε_0 - электрическая постоянная, ε - диэлектрическая проницаемость среды.

$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$ принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей: напряженность $\vec{E}$ результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

$\vec{p} = q\vec{l}$ $\vec{p}$ - электрический момент диполя: $\vec{l}$ - плечо диполя.

$\sigma = \dfrac{Q}{S}$ σ - поверхностная плотность заряда равна заряду, приходящемуся на единицу площади поверхности несущего заряд тела.

$\rho = \dfrac{Q}{V}$ ρ - объемная плотность заряда равна заряду, приходящемуся на единицу объема заряженного по объему тела.

$E = \dfrac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}$ E - напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью: σ - поверхностная плотность заряда, ε_0 - электрическая постоянная, ε - диэлектрическая проницаемость среды нахождения плоскости.

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}$ E - напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями, в пространстве между этими плоскостями.

$W_П = \dfrac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r}$ $W_П$ - потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r друг от друга.

$\varphi = \dfrac{W_п}{q_0}$ φ - потенциал электростатического поля равен потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в данную точку.

$\varphi = \dfrac{A_\infty}{q_0}$ φ - потенциал поля равен работе перемещения единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

$\varphi = \dfrac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r}$ φ - потенциал поля точечного заряда на расстоянии r от него.

$\varphi = \Sigma\varphi_i$ принцип суперпозиции для потенциала: если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов в данной точке.

$\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{A_{12}}{q_0}$ разность потенциалов между двумя точками равна работе поля по перемещению единичного положительного заряда из начальной точки в конечную; U - напряжение.

$U = \varphi_1 - \varphi_2$

$\varepsilon = \dfrac{E_0}{E}$ диэлектрическая проницаемость ε показывает во сколько раз электрическое поле ослабляется диэлектриком; E_0 - напряженность поля в вакууме, E - напряженность поля в диэлектрике.

$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ — $\vec{D}$ – электрическое смещение.

$E = -\dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$

$E = \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}$

связь между напряженностью E и разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ для однородного электростатического поля: d - расстояние между точками поля, отсчитанное вдоль силовой линии (знак минус ″–″ в первом уравнении указывает на то, что вектор напряженности поля направлен в сторону убывания потенциала).

$E = \dfrac{U}{d}$ — E – напряженность однородного электрического поля в пространстве между обкладками плоского конденсатора; U - напряжение и d – расстояние между обкладками.

$C = \dfrac{q}{\varphi}$ — C - электроемкость уединенного проводника равна заряду, сообщение которого проводнику изменяет его потенциал на единицу.

$C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \dfrac{q}{U}$ — C - электроемкость конденсатора равна отношению заряда q, накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов (напряжению) между его обкладками.

$C = \dfrac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}$ — C - электроемкость плоского конденсатора: S - площадь каждой из обкладок, d - расстояние между обкладками.

$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot R$ — C - электроемкость шара радиуса R.

$C = \Sigma C_i$ — C - электроемкость батареи конденсаторов при их параллельном соединении, C_i – электроемкость отдельного конденсатора.

$U = U_i$ — напряжения на конденсаторах при их параллельном соединении одинаковы.

$q = \Sigma q_i$ — q – общий заряд на батарее конденсаторов при их параллельном соединении, q_i – заряд на отдельном конденсаторе.

$\dfrac{1}{C} = \Sigma \dfrac{1}{C_i}$ — C - электроемкость батареи конденсаторов при их последовательном соединении, C_i – электроемкость отдельного конденсатора.

$U = \Sigma U_i$ — U – общее напряжение на батарее конденсаторов при их последовательном соединении, U_i – напряжение на отдельном конденсаторе.

$q = q_i$ — заряды на конденсаторах при их последовательном соединении одинаковы.

$W = \dfrac{q \cdot U}{2} = \dfrac{C \cdot U^2}{2} = \dfrac{q^2}{2 \cdot C}$ — W - энергия заряженного конденсатора: q - заряд, U - напряжение (разность потенциалов), C - электроемкость конденсатора.

$\omega = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2}{2}$ ω - объемная плотность энергии электростатического поля, E - напряженность поля.

$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S}{2}$ F - сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками плоского конденсатора.

$\frac{m \cdot V_1^2}{2} + q \cdot \varphi_1 = \frac{m \cdot V_2^2}{2} + q \cdot \varphi_2$ закон сохранения энергии при движении заряженной частицы с зарядом q и массой m: V_1 и V_2 - скорости частицы в точках 1 и 2, φ_1 и φ_2 - потенциалы в точках 1 и 2, соответственно.

$I = \frac{q}{t}$ сила тока I равна заряду, протекающему через поперечное сечение проводника в единицу времени.

$I = \frac{dq}{dt} = q'_t$

$j = \frac{I}{S}$ плотность тока j равна силе тока, протекающего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока.

$\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{V}_{cp}$ направление вектора плотности тока $\vec{j}$ совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов, n - концентрация носителей тока, $\vec{V}_{cp}$ - скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике (скорость дрейфа), e - заряд носителей тока.

$I = \frac{U}{R}$ закон Ома для (однородного) участка цепи: I - сила тока, U - напряжение на участке цепи равно разности потенциалов, т.е. $U = \varphi_1 - \varphi_2$, R - сопротивление участка цепи.

$R = \frac{\rho \cdot l}{S}$ R - сопротивление однородного линейного проводника длиной l с постоянной площадью поперечного сечения S, ρ - удельное электрическое сопротивление проводника.

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ σ - удельная электрическая проводимость вещества, ρ - удельное электрическое сопротивление.

$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$

$\alpha = \frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t}$ зависимость удельного сопротивления ρ от температуры: ρ_0 - удельное сопротивление при 0 °C, α - температурный коэффициент сопротивления равен относительному изменению сопротивления при нагреве на 1 °C (1 K).

$R=\Sigma R_i$ — R - общее сопротивление цепи при последовательном соединении проводников, R_i- сопротивление i-го проводника.

$U=\Sigma U_i$ — U – общее напряжение в цепи последовательно соединенных проводников; U_i – напряжение на сопротивлении R_i.

$I=I_i$ — сила тока в цепи последовательно соединенных сопротивлений одинакова на всех проводниках.

$\frac{1}{R}=\sum\frac{1}{R_i}$ — R - общее сопротивление цепи при параллельном соединении проводников, R_i - сопротивление i-го проводника.

$U=U_i$ — напряжение при параллельном соединении проводников одинакова на всех сопротивлениях

$I=\Sigma I_i$ — I – общая сила тока при параллельном соединении проводников; I_i – сила тока на сопротивлении R_i.

$U=\frac{A}{q}$ — напряжение U равно работе электрического поля по перемещению единичного электрического заряда на данном участке цепи.

$\mathcal{E}=\frac{A_{стор}}{q}$ — $\mathcal{E}$ - электродвижущая сила (ЭДС), действующая в цепи, равна работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда.

$I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}$ — закон Ома для замкнутой (полной) цепи: сила тока I в замкнутой цепи прямо пропорциональна ЭДС источника и обратно пропорциональна сумме внешнего R и внутреннего r сопротивлений.

$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}_{12}}{R}$

$U = IR = =\varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}_{12}$

закон Ома для неоднородного участка цепи (участка цепи с источником тока): φ_1 - φ_2 - разность потенциалов на концах участка цепи, $\mathcal{E}_{12}$ - ЭДС источника (источников) тока, входящего в участок с сопротивлением R. U - напряжение на неоднородном участке цепи не равно разности потенциалов, т.е. $U \neq \varphi_1 - \varphi_2$.

$\vec{j}=\sigma\cdot\vec{E}=\frac{\vec{E}}{\rho}$ — закон Ома в дифференциальной форме: j - плотность тока, σ - удельная электропроводность, ρ - удельное сопротивление, E - напряженность электростатического поля.

$\Sigma I_к=0$ — первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$\sum I_к\cdot R_к=\sum\mathcal{E}_i$ — второе правило Кирхгофа: для любого замкнутого контура разветвленной электрической цепи алгебраическая сумма произведений сил токов $I_к$ на сопротивления $R_к$ соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС $\mathcal{E}_i$ в этом контуре.

$I=\dfrac{n\cdot \mathcal{E}}{n\cdot r+R}$ закон Ома для замкнутой цепи при последовательном соединении n одинаковых источников тока: n - число источников тока, r - внутреннее сопротивление каждого из источников, $\mathcal{E}$ - ЭДС отдельного источника, R - внешнее сопротивление цепи.

$I=\dfrac{\mathcal{E}}{\frac{r}{n}+R}$ закон Ома для замкнутой цепи при параллельном соединении n одинаковых источников тока.

$R_Ш=\dfrac{R_A}{n-1}$ расчет сопротивления шунта $R_Ш$ для расширения верхнего предела измерения амперметра в $n=\dfrac{I}{I_0}$ раз, R_A - сопротивление амперметра.

$R_{доб}=R_V\cdot(n-1)$ расчет добавочного сопротивления $R_{доб}$ для расширения верхнего предела измерения вольтметра в $n=\dfrac{U}{U_0}$ раз, R_V - сопротивление вольтметра.

$A=I\cdot U\cdot t=I^2\cdot R\cdot t=\dfrac{U^2}{R}\cdot t$ A - работа постоянного тока: I - сила тока в цепи, U - напряжение на участке цепи с сопротивлением R, t - время.

$P=\dfrac{A}{t}=I\cdot U=I^2\cdot R=\dfrac{U^2}{R}$ P - мощность тока.

$Q=I^2\cdot R\cdot t=\dfrac{U^2}{R}\cdot t=I\cdot U\cdot t$ закон Джоуля-Ленца: Q - количество теплоты, выделяющейся на участке цепи с сопротивлением R за время t.

$\omega=j\cdot E=\sigma\cdot E^2$ закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме: ω - удельная тепловая мощность тока (количество теплоты, выделяющейся в единицу времени в единице объема), σ - удельная электропроводность, j - плотность тока, E - напряженность электростатического поля.

$m=k\cdot q=$ $=k\cdot I\cdot t$ первый закон Фарадея для электролиза: масса вещества m, выделившаяся на электроде, пропорциональна заряду q, прошедшему через электролит, I - сила постоянного тока, протекавшего за время t, k - электрохимический эквивалент вещества.

$k=\frac{1}{F}\cdot\frac{A}{n}$ второй закон Фарадея: электрохимический эквивалент k пропорционален химическому эквиваленту $\frac{A}{n}$, A - атомная (молярная) масса данного химического элемента, n - его валентность, F - постоянная Фарадея.

$j_H=N\cdot q\cdot d$ j_H - плотность тока насыщения в газе: N - число пар ионов, возникающих в единице объема в единицу времени, d - расстояние между электродами, q - заряд ионов (в частном случае q = e = элементарному заряду).

$\eta=\frac{U}{\mathcal{E}}=\frac{R}{R+r}$ η - коэффициент полезного действия (КПД) источника тока: R - внешнее сопротивление, r - внутреннее сопротивление, $\mathcal{E}$ - ЭДС источника, U - напряжение на R.

$P_{max}=\frac{\mathcal{E}^2}{4\cdot r}$ P_{max} - максимальная полезная мощность источника тока: $\mathcal{E}$ - ЭДС источника, r - внутреннее сопротивление источника. При этом внешнее сопротивление R=r.

$r^2=R_1\cdot R_2$ соотношение между внутренним сопротивлением r источника и внешними сопротивлениями R_1 и R_2, когда мощности, выделяемые на R_1 и R_2, одинаковы (R_1 и R_2 подключаются поочередно).

$\eta=1-\frac{P\cdot R}{U^2}$ η - КПД линии электропередачи: P - мощность, развиваемая источником при напряжении U на зажимах источника, R – сопротивление линии передачи (сопротивление проводов).

$d\vec{B}=\frac{\mu_0\cdot I\cdot\left[d\vec{l}\cdot\vec{r}\right]}{4\cdot\pi\cdot r^3}$

$dB=\frac{\mu_0\cdot I\cdot dl\cdot\sin\alpha}{4\cdot\pi\cdot r^2}$

закон Био-Савара-Лапласа: $d\vec{B}$ - магнитная индукция поля, создаваемая элементом длины dl проводника с током I в вакууме, $\vec{r}$ - радиус-вектор от $d\vec{l}$ в точку наблюдения, α - угол между $d\vec{l}$ и $\vec{r}$, μ_0 - магнитная постоянная.

$\vec{B}=\frac{\mu_0\cdot q\cdot\left[\vec{v}\cdot\vec{r}\right]}{4\cdot\pi\cdot r^3}$

$B=\frac{\mu_0\cdot q\cdot v\cdot\sin\alpha}{4\cdot\pi\cdot r^2}$

$\vec{B}$ - индукция магнитного поля свободно движущегося в вакууме заряда q с нерелятивистской скоростью $\vec{v}$: $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения; α - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$.

$B=\frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot R}$ B - индукция магнитного поля в центре кругового проводника, находящегося в вакууме: R - радиус витка, I - сила тока в проводнике.

$B=\mu_0\cdot\frac{I}{2\cdot\pi\cdot b}$ B - индукция магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током I в вакууме, b - расстояние от оси проводника до точки наблюдения.

$B=\mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$ B - индукция магнитного поля внутри (длинного) соленоида, находящегося в вакууме: l - длина соленоида, N - число витков.

$B=\frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$ B - индукция магнитного поля внутри тороида, находящегося в вакууме, N - число витков, r - расстояние от оси до средней линии тороида, I - сила тока, μ_0 - магнитная постоянная.

$\vec{B} = \sum \vec{B}_i$ принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей: $\vec{B}$ - магнитная индукция результирующего поля; $\vec{B}_i$ - магнитные индукции складываемых полей.

$\vec{F}_A = I \cdot \left[\Delta \vec{l} \cdot \vec{B}\right]$

$F_A = I \cdot \Delta l \cdot B \cdot \sin\alpha$

закон Ампера: F_A - сила Ампера, действующая на участок проводника длины Δl с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией B, α - угол между направлением отрезка $\Delta \vec{l}$ проводника с током и $\vec{B}$, направление $\Delta \vec{l}$ совпадает с направлением тока.

$F = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I_1 \cdot I_2}{R} \cdot l$ сила взаимодействия двух прямых прямолинейных бесконечных параллельных проводников с токами I_1 и I_2: R -расстояние между проводниками; l - длина одного из проводников, на которую действует сила F; μ - магнитная проницаемость окружающей среды; μ_0 - магнитная постоянная.

$\vec{P}_m = N \cdot I \cdot S \cdot \vec{n}$

$P_m = N \cdot I \cdot S$

P_m - магнитный момент плоского контура с током I и площадью S: $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности рамки, N - число витков рамки.

$\vec{M} = \left[\vec{P}_m \cdot \vec{B}\right]$

$M = P_m \cdot B \cdot \sin\alpha$

M - механический момент сил, действующий на плоский контур с током, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B: P_m - магнитный момент рамки с током, α - угол между нормалью $\vec{n}$ к плоскости контура и вектором $\vec{B}$.

$\vec{F}_л = q \cdot \left[\vec{V} \cdot \vec{B}\right]$

$F_л = q \cdot V \cdot B \cdot \sin\alpha$

сила Лоренца (ее магнитная составляющая): $F_л$ - сила, действующая на электрический заряд q, движущийся в магнитном поле с индукцией B со скоростью V, α - угол между $\vec{V}$ и $\vec{B}$.

$\vec{F}_л = q\vec{E} + q \cdot \left[\vec{V} \cdot \vec{B}\right] =$
$= \vec{F}_{эл} + \vec{F}_{магн}$

общее выражение для силы Лоренца $\vec{F}_л$ при наличии в пространстве электрического (с напряженностью $\vec{E}$) и магнитного (с индукцией $\vec{B}$) полей. $\vec{F}_л$ - складывается из электрической $\vec{F}_{эл}$ и магнитной $\vec{F}_{магн}$ составляющих (слагаемых).

$R=\frac{mv}{qB}$

$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi m}{qB}$

R – радиус окружности и T – период обращения заряженной частицы с зарядом q и массой m, влетевшей со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией B нормально к линиям индукции.

$R=\frac{mv\cdot \sin\alpha}{qB}$

$T=\frac{2\pi R}{v\cdot \sin\alpha}=\frac{2\pi m}{qB}$

$h=vT\cos\alpha=\frac{2\pi m}{qB}\cdot v\cdot \cos\alpha$

R – радиус окружности, T – период обращения и h – шаг спирали, по которой движется заряженная частица с зарядом q и массой m, влетевшая в однородное магнитное поле с индукцией B со скоростью $\vec{v}$, составляющей угол α с линиями индукции, т.е. с вектором $\vec{B}$.

$v=\frac{qB}{m}\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$

v=v(R,h) - выражение скорости v заряженной частицы через радиус окружности R и шаг спирали h.

$\Phi=B\cdot S\cdot \cos\alpha$

$\Phi=B_n\cdot S$

Ф - магнитный поток (поток магнитной индукции) через площадку S: α - угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к площадке, $B_n=B\cdot\cos\alpha$ - проекция вектора $\vec{B}$ на направление $\vec{n}$.

$A=I\cdot\Delta\Phi$ работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$\mathcal{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\Phi'_t$

закон Фарадея (основной закон электромагнитной индукции): ЭДС индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

$\mathcal{E}=-N\frac{d\Phi}{dt}=-N\Phi'_t$

$\mathcal{E}$ - ЭДС индукции в рамке с числом витков N.

$\mathcal{E}=B\cdot l\cdot v=\varphi_1-\varphi_2$

разность потенциалов (ЭДС индукции), возникающая на концах прямолинейного отрезка проводника длиной l при его движении в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной линиям индукции $\vec{B}$, со скоростью $\vec{v}$; $\vec{v}$ - перпендикулярна проводнику.

$q=\frac{\Delta\Phi}{R}$

q - величина заряда, протекающего в замкнутом контуре с сопротивлением R при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром, на $\Delta\Phi$.

$\Phi=L\cdot I$

Ф - магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L.

$\mathcal{E}_c=-L\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t}$

$\mathcal{E}_c$ - ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения силы тока в контуре, L - индуктивность контура.

$$\mathcal{E}_c = -L\cdot\frac{dI}{dt} = -L\cdot I'_t$$

$\mu = \dfrac{B}{B_0}$ μ - магнитная проницаемость вещества показывает, во сколько раз индукция результирующего поля в магнетике больше индукции внешнего поля B_0 (поля, создаваемого намагничивающим током в вакууме); μ=1 для вакуума.

$\vec{B} = \mu\cdot\mu_0\cdot\vec{H}$ $\vec{B}$ - магнитная индукция в случае однородной изотропной среды, H - напряженность магнитного поля, μ_0 - магнитная постоянная, μ - магнитная проницаемость среды.

$L = \mu\cdot\mu_0\cdot N^2\cdot\dfrac{S}{l}$ L - индуктивность соленоида, N - число витков, l - длина соленоида, S - его площадь поперечного сечения, V=S·L – объем соленоида.

$W = \dfrac{L\cdot I^2}{2}$ W - энергия магнитного поля, создаваемого током I в замкнутом контуре с индуктивностью L.

$\omega = \dfrac{B^2}{2\cdot\mu\cdot\mu_0} = \dfrac{\mu\cdot\mu_0\cdot H^2}{2} = \dfrac{B\cdot H}{2}$ ω - объемная плотность энергии однородного магнитного поля (энергия магнитного поля в единице объема).

$k = \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{U_1}{U_2}$ k - коэффициент трансформации трансформатора, N_2 и N_1- число витков во вторичной и первичной обмотках, U_2 и U_1- напряжения на обмотках в режиме холостого хода.

$x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\alpha)$ кинематическое уравнение гармонических колебаний: x - смещение колеблющейся точки из положения равновесия, A - амплитуда, ω_0 - круговая (циклическая) частота, α - начальная фаза, t - время, $(\omega_0 t + \alpha)$ - фаза колебаний.

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ дифференциальное уравнение гармонических колебаний; ω_0- циклическая частота.

$x''_{tt} + \omega_0^2 x = 0$

$T = \dfrac{t}{N} = \nu^{-1}$; $\nu = \dfrac{N}{t}$ T – период колебаний равен времени совершения одного колебания; ν - частота колебаний; N – число полных колебаний за время t.

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, $\nu = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ T и ν - период и частота гармонических колебаний, ω_0 - циклическая частота.

$V(t)=\frac{dx}{dt}=x'_t=-A\cdot\omega_0\cdot\sin(\omega_0 t+\alpha)=A\cdot\omega_0\cdot\cos(\omega_0 t+\alpha+\frac{\pi}{2})$ V - скорость колеблющейся точки.

$a(t)=\frac{dV}{dt}=V'_t=-A\cdot\omega_0^2\cdot\sin\left(\omega_0 t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=A\cdot\omega_0^2\cdot\cos(\omega_0 t+\alpha+\pi)$ a - ускорение колеблющейся точки.

$F=-m\cdot\omega_0^2\cdot x$ F - упругая (квазиупругая) сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m, x - смещение колеблющейся точки из положения равновесия.

$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$ T - период колебаний математического маятника, l - длина маятника, g - ускорение силы тяжести.

$F = ma = mx''$, $F = -kx$;
$mx'' = -kx$; $x'' + \frac{k}{m}x = 0$;
$x'' + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

второй закон Ньютона для гармонических колебаний пружинного маятника: m - масса груза, подвешенного на пружине с жесткостью k; $F = -k\cdot x$ - сила упругости; ω_0 - циклическая частота.

$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}$ T - период колебаний пружинного маятника: m - масса груза, подвешенного на пружине жесткостью k.

$W_К=\frac{m\cdot V^2}{2}=\frac{m\cdot A^2\cdot\omega_0^2\cdot\sin^2(\omega_0 t+\alpha)}{2}$ кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания.

$W_П=\frac{k\cdot x^2}{2}=\frac{m\cdot\omega_0^2\cdot x^2}{2}=\frac{m\cdot A^2\cdot\omega_0^2\cdot\cos^2(\omega_0 t+\alpha)}{2}$ потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F.

$W=W_К+W_П=\frac{m\cdot A^2\cdot\omega_0^2}{2}=\frac{kA^2}{2}$ полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания.

$V=\lambda\cdot\nu=\frac{\lambda}{T}$ связь между скоростью волны V, длиной волны λ, частотой ν, периодом T;

$V=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ V – скорость распространения звуковых (акустических) волн в упругой среде, E – модуль Юнга среды и ρ - ее плотность.

$x(r,t)=A\cdot\cos\omega_0(t-\frac{r}{V})=A\cdot\cos(\omega_0 t-k\cdot r)$

$k=\frac{2\cdot\pi}{\lambda}=\frac{\omega_0}{V}$

уравнение плоской прямой (бегущей) волны, распространяющейся в среде без поглощения в сторону положительной полуоси r, k – волновое число.

$q''+\frac{1}{LC}q=0$

$q''+\omega_0^2 q=0$

дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда q в контуре; L- индуктивность и C- емкость контура

$q=q_0\cos(\omega_0 t+\alpha);$

$I=\frac{dq}{dt}=q'_t=-q_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\alpha);$

$I=I_0\cos\left(\omega_0 t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right);\quad I_0=q_0\omega_0;$

уравнения колебаний заряда q(t) и тока I(t) в LC- контуре; ω_0 - циклическая частота; q_0, I_0, U_0-амплитудные значения заряда, силы тока и напряжения.

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}};\ q_0=CU_0;\ \frac{CU_0^2}{2}=\frac{LI_0^2}{2};$

связь между амплитудными значениями силы тока и напряжения в контуре.

$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}$

T - период колебаний электрического контура (формула Томсона).

$W=\frac{LI^2}{2}+\frac{CU^2}{2}=\frac{LI_0^2}{2}=\frac{CU_0^2}{2}$

полная электромагнитная энергия контура равна сумме энергий электрического и магнитного полей. Она также равна максимальной энергии электрического или магнитного полей.

$\lambda_0=cT=\frac{c}{\nu_0};\ \nu_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$

связь между скоростью распространения электромагнитной волны в вакууме c (скоростью света в вакууме), длиной волны λ_0, частотой ν_0, периодом T.

$\Phi=N\cdot B\cdot S\cdot\cos\alpha=$
$=N\cdot B\cdot S\cdot\cos\omega t$

Ф - магнитный поток через контур площадью S и числом витков N: ω - циклическая частота вращения рамки; α - угол поворота рамки (угол между индукцией $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$) в момент времени t; N - число витков.

$E_i = -\Phi_t' = -\dfrac{d\Phi}{dt} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin\omega t$ E_i - ЭДС индукции, возникающая при вращении рамки.

$E_{max} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega$ значение максимальной (амплитудной) ЭДС во вращающейся рамке (при $\sin\omega t = 1$).

$X_L = \omega \cdot L$ X_L - (реактивное) индуктивное сопротивление.

$X_C = \dfrac{1}{\omega \cdot C}$ X_C - (реактивное) емкостное сопротивление.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

Z - (импеданс) - полное сопротивление цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L, конденсатор емкостью C. На концы цепи подается переменное напряжение $U = U_0 \cdot \cos\omega t$.

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

закон Ома для цепи переменного тока, I_0 - амплитудное значение силы тока в цепи переменного тока, Z - импеданс.

$U_{0R} = I_0 R$

$U_{0L} = I_0 X_L$

$U_{0C} = I_0 X_C$

U_{0R}, U_{0L}, U_{0C} – амплитудные значения напряжений на активном сопротивлении, катушке индуктивности и конденсаторе, соответственно, в цепи переменного тока.

$U_R = I_0 R \cdot \sin\omega t$

$U_C = I_0 X_C \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$U_L = I_0 X_L \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

фазовые соотношения между напряжениями на активном сопротивлении U_R, катушке индуктивности U_L и конденсаторе U_C, соответственно, в цепи переменного тока.

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}$$

φ - сдвиг фаз между напряжением и силой тока в цепи, содержащей последовательно включенные R, L ,C.

$$P = \frac{U_0 \cdot I_0 \cdot \cos\varphi}{2} = U_Э \cdot I_Э \cdot \cos\varphi;$$

$$U_э = \frac{U_0}{\sqrt{2}}; \quad I_э = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \cos\varphi = \frac{R}{Z};$$

P - средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока: cosφ - коэффициент мощности, (φ - сдвиг фаз между U и I), U_0 и I_0 - амплитудные значения, $U_Э$ и $I_Э$- действующие (эффективные) значения напряжения и силы переменного тока, соответственно.

$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$ c - скорость света в вакууме (электродинамическая постоянная), ε_0 - электрическая постоянная, μ_0 - магнитная постоянная.

$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$ v - скорость распространения света (электромагнитной волны) в среде: ε и μ - электрическая и магнитная проницаемости среды.

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}$ закон преломления света: отношение синуса угла падения (α) к синусу угла преломления (β) есть величина постоянная для данных сред.