МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

И.В.КРЮЧКОВА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2006

УДК 517.518.4 (076.5)
ББК 22.161.5я73
К 85

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент Л.М.Невоструев

Крючкова И.В.
К 85 **Тригонометрические ряды и преобразование Фурье: методические указания/ И.В.Крючкова. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006.-38 с.**

В методических указаниях рассмотрена теория тригонометрических рядов и преобразования Фурье, приводятся примеры решения задач, в том числе с использованием системы MathCAD, сформулированы задачи для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования, и преподавателей, ведущих занятия по данному разделу курса математического анализа.

ББК 22.161.5я73

Содержание

Введение

В настоящее время появилось много учебных пособий, излагающих теорию обобщенных рядов Фурье с точки зрения функционального анализа. Однако, такое общее изложение слишком далеко от прикладных задач, решаемых инженерами и специалистами в электротехнике, электронике и во многих других прикладных и теоретических дисциплинах.

В данных методических указаниях излагается теория тригонометрических рядов Фурье, преобразования Фурье. Изложение теоретического материала ведется на доступном для студентов уровне доказательности. В согласии с обычной практикой прохождения данного раздела курса математического анализа изложение проводится при помощи нестрогих, «эвристических» рассуждений, доказательство теоремы Дирихле о разложении в ряд Фурье опущено. Приводятся примеры решения задач, в том числе с использованием системы MathCAD.

Даны рекомендации по использованию символьного процессора MathCAD, что облегчит будущим инженерам применение теории преобразования Фурье в дальнейшей практической деятельности.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования, и преподавателей, ведущих занятия по данному разделу курса математического анализа.

1 Ряды Фурье

1.1 Тригонометрический ряд

Системой тригонометрических функций называется совокупность функций:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{1.1}$$

Система тригонометрических функций является подмножеством множества непрерывных функций на всей числовой оси. Как известно множество непрерывных функций образует линейное пространство.

В этом пространстве скалярное произведение можно ввести следующим образом: $(f(x); g(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Система тригонометрических функций (1.1) является ортогональной, т.е.

$$(f(x); g(x)) = \begin{cases} 0, f(x) \neq g(x) \\ \pi, f(x) = g(x) \end{cases} \tag{1.2}$$

Оставляем читателю самостоятельно убедиться в этом.

Тригонометрическим рядом Фурье называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)), \qquad a_n \in R, \ b_n \in R \tag{1.3}$$

Так как $\cos nx$, $\sin nx$ - периодические функции с периодом $T = \frac{2\pi}{n}$, то сумма ряда (1.3), если она существует, имеет период $T = 2\pi$.

Предположим, что тригонометрический ряд сходится, причем равномерно, на отрезке [-π; π]. $S(x)$ - его сумма, она будет являться непрерывной функцией.

Рассмотрим ряды:

$$S(x) \cdot \cos Nx = \frac{a_0}{2}\cos Nx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx \cdot \cos Nx + b_n \cdot \sin nx \cdot \cos Nx) \tag{1.4}$$

$$S(x) \cdot \sin Nx = \frac{a_0}{2}\sin Nx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin Nx + b_n \cdot \sin nx \cdot \sin Nx) \tag{1.5}$$

Если тригонометрический ряд (1.3) сходится равномерно, то ряды (1.4) и (1.5) также сходятся равномерно, и их можно почленно интегрировать.

Проинтегрируем тригонометрический ряд (1.3):

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot x)dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot x)dx)$$

И в силу утверждения (1.2):

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \cdot \pi$$

Отсюда: $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx$.

Аналогично проинтегрируем ряды (1.4) и (1.5):

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \cos(N \cdot x)dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(N \cdot x)dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot x) \cdot \cos(N \cdot x)dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot x) \cdot \cos(N \cdot x)dx) =$$

$$= a_N \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(N \cdot x)dx = a_N \cdot \pi$$

$$a_N = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \cos Nxdx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \sin(N \cdot x)dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(N \cdot x)dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot x) \cdot \sin(N \cdot x)dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot x) \cdot \sin(N \cdot x)dx) =$$

$$= b_N \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(N \cdot x)dx = b_N \cdot \pi$$

$$b_N = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \sin(N \cdot x)dx$$

Получили формулы Эйлера – Фурье функции $S(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \cos(n \cdot x)dx \qquad (1.6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \sin(n \cdot x)dx$$

Таким образом, каждой интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(n\cdot x)+b_n\cdot\sin(n\cdot x)) \tag{1.7}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам Эйлера-Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(n\cdot x)dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(n\cdot x)dx$$

Однако, выводя формулы Эйлера-Фурье, мы предполагали равномерную сходимость тригонометрического ряда и равенство $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(n\cdot x)+b_n\cdot\sin(n\cdot x))$ пока еще не доказано. В следующей теореме сформулированы достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.

1.2 Теорема Дирихле

Условия Дирихле:

пусть на отрезке $[-\pi;\pi]$ задана ограниченная функция $f(x)$, и, кроме того:

1) функция $f(x)$ кусочно-непрерывна, т.е. имеет на отрезке $[-\pi;\pi]$ лишь конечное число точек разрыва *1*-ого рода.

2) функция $f(x)$ кусочно-монотонна, т.е. отрезок $[-\pi;\pi]$ можно разбить на конечное число частичных отрезков, на каждом из которых $f(x)$ монотонно возрастает или убывает, либо остается постоянной.

При выполнении условий Дирихле функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд (1.7), который сходится на отрезке $[-\pi;\pi]$, причем:

1) в каждой точке x_0 непрерывности $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в этой точке:

$$S(x_0)=f(x_0)$$

2) в каждой точке x_1 разрыва функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна среднему арифметическому левого и правого пределов $f(x)$ в этой точке:

$$S(x_1)=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to x_1-0}f(x)+\lim_{x\to x_1+0}f(x)\right)$$

3) в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда равна среднему арифметическому правого предела $f(x)$ в точке -π и левого предела $f(x)$ в точке π:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to -\pi+0} f(x) + \lim_{x\to \pi-0} f(x)\right)$$

4) на любом частичном отрезке [α; β] ⊂ [-π; π], свободного от точек разрыва $f(x)$ ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)$.

Замечание:

1. Если функция $f(x)$ удовлетворяет на [-π; π] условиям Дирихле и является периодической с периодом $T = 2\cdot\pi$, то ряд (1.7) будет сходиться к $f(x)$ не только на отрезке [-π; π] , но и во всех точках действительной оси.

Характер сходимости ряда (1.7) к функции $f(x)$ в этом случае можно охарактеризовать законом среднего арифметического:

- в точках непрерывности: $S(x_0) = f(x_0) = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) + \lim_{x\to x_0+0} f(x)\right)$

- в точках разрыва это следует из пункта 2 теоремы Дирихле.

- в точках π и –π:

$$S(\pi) = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to -\pi+0} f(x) + \lim_{x\to \pi-0} f(x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to \pi+0} f(x) + \lim_{x\to \pi-0} f(x)\right)$$

$$S(-\pi) = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to -\pi+0} f(x) + \lim_{x\to \pi-0} f(x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to -\pi+0} f(x) + \lim_{x\to -\pi-0} f(x)\right)$$

Таким образом, в точках разрыва функции и в точках $x = (2\cdot k+1)\cdot\pi$ значения $S(x)$ могут отличаться от значений функции $f(x)$ в этих точках. Пример показан на рисунке 1.1.

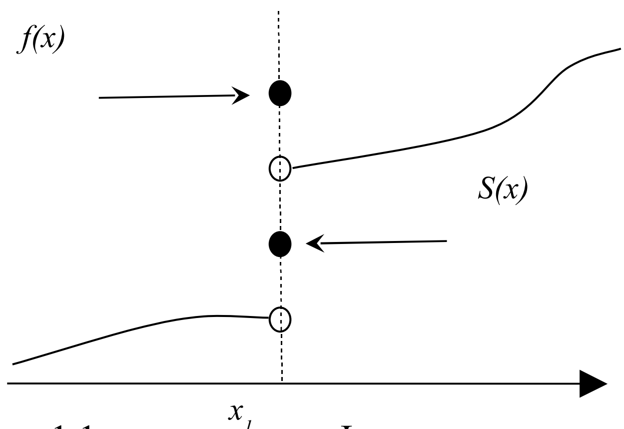


Рисунок 1.1 – Сумма ряда Фурье в точке разрыва

Поэтому на практике заранее (до разложения) не задают значения функции $f(x)$ в точках разрыва и в точках $(2\cdot k+1)\cdot\pi$.

2. в случае, когда функция $f(x)$ не является периодической или имеет период, отличный от 2π, разложение в ряд (1.7) справедливо только на отрезке [-π; π]. Сумма ряда $S(x)$ повторяет свои значения, как периодическая функция с периодом 2π, и за пределами отрезка отличается от $f(x)$.

Пример 1.1.

Разложить функцию $f(x) = e^x, \ -\pi < x < \pi$ в ряд Фурье.

Решение.

Применим формулы Эйлера-Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi} \cdot e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot \cos nx dx = \frac{(-1)^n \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi \cdot (1 + n^2)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot \sin nx dx = \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi \cdot (1 + n^2)}$$

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\cos 2x}{5} - \frac{2 \cdot \sin 2x}{5} - \ldots \right)$$

Исходя из теоремы Дирихле, сумма полученного ряда представлена на рисунке 1.2.

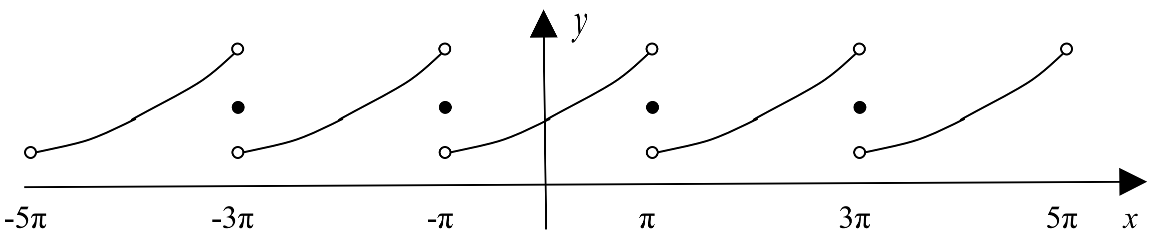


Рисунок 1.2 – Сумма ряда

1.3 Неполные ряды Фурье

Разложим в ряд Фурье четную функцию $f_1(x)$:

$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cdot \sin(n \cdot x) dx = 0$, так как под интегралом стоит нечетная функция, а интегрирование идет по симметричному отрезку.

$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f_1(x) dx$, так как $f_1(x)$ - четная функция.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} f_1(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx$$, так как $f_1(x) \cdot \cos(n \cdot x)$ - четная функция.

Получили разложение четной функции в неполный ряд Фурье:

$$f_1(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cdot \cos(n \cdot x), \tag{1.8}$$

где $\tilde{a}_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f_1(x) dx$, $\tilde{a}_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f_1(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx$

Аналогично получается разложение нечетной функции в неполный ряд Фурье:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \cdot \sin(n \cdot x), \tag{1.9}$$

где $\tilde{b}_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f_2(x) \cdot \sin(n \cdot x) dx$

1.4 «Раздельная» запись ряда Фурье

Под раздельной записью ряда Фурье понимают:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot x)$$

Обоснуем возможность подобной записи. Любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где
$$f_1(-x) = f_1(x)$$
$$f_2(-x) = -f_2(x)$$

Покажем это:

если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$, отсюда

$$\left.\begin{array}{l} f(x) + f(-x) = 2 \cdot f_1(x) \\ f(x) - f(-x) = 2 \cdot f_2(x) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет теореме Дирихле, тогда $f_1(x)$ и $f_2(x)$ также удовлетворяют условиям теоремы Дирихле и разлагаются в неполные ряды (1.8), (1.9).

Для обоснования возможности раздельной записи ряда Фурье осталось показать: $\begin{array}{l} a_n = \tilde{a}_n \\ b_n = \tilde{b}_n \end{array}$.

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f_1(x)\cdot\cos(n\cdot x)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\cdot\cos(n\cdot x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)dx + \int_0^{\pi} f(-x)\cdot\cos(n\cdot x)dx\right) = \left|\begin{matrix} t = -x \\ dt = -dx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)dx - \int_0^{-\pi} f(t)\cdot\cos(n\cdot t)dt\right) = \left|\begin{matrix} x = t \\ dx = dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)dx = a_n$$

Аналогично показывается $\tilde{b}_n = b_n$.

1.5 Разложение функций, заданных на отрезке $[-l;l]$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l;l]$, $l > 0$. И $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на этом отрезке.

Выполним преобразование $t = \frac{\pi}{l}\cdot x$

$$-l < x < l \Rightarrow -\pi < t < \pi$$

Положим $F(t) = f(\frac{l}{\pi}\cdot t) = f(x)$. $F(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на [-π; π]. Разложим $F(t)$ в тригонометрический ряд:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(n\cdot t) + b_n\cdot\sin(n\cdot t)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt = \left|\begin{matrix} t = \frac{\pi}{l}\cdot x; dt = \frac{\pi}{l}\cdot dx \\ t = -\pi; x = -l \\ t = \pi; x = l \end{matrix}\right| = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-l}^{l} F(\frac{\pi}{l}\cdot x)\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

Аналогично вычисляются a_n и b_n.

Получили следующее разложение:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{n\cdot\pi\cdot x}{l} + b_n\cdot\sin\frac{n\cdot\pi\cdot x}{l}\right), \qquad (1.10)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} dx$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) dx$$

Можно переформулировать теорему Дирихле для функций, заданных на отрезке $[-l;l]$, заменив символ π на l.

Теперь получим неполные ряды Фурье функций, заданных на отрезке $[-l;l]$. Пусть $f_1(x)$ - четная функция. Тогда:

$$f_1(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}, \tag{1.11}$$

где

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{l} \cdot \int_{0}^{l} f_1(x) dx$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{l} \cdot \int_{0}^{l} f_1(x) \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} dx$$

Пусть $f_2(x)$ - нечетная функция. Тогда:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}, \tag{1.12}$$

где $\tilde{b}_n = \frac{2}{l} \cdot \int_{0}^{l} f_2(x) \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} dx$

Пример 1.2.

Разложим в тригонометрический ряд функцию $f(x)$, заданную на промежутке (-2; 2) .

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

Решение.

Условия Дирихле выполнены; $l = 2$.

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{-2}^{0} 2dx + \int_{0}^{2} 3dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2x\Big|_{-2}^{0} + 3x\Big|_{0}^{2} \right) = 5$$

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_{-2}^{0} 2\cdot\cos\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}dx + \int_{0}^{2} 3\cdot\cos\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot 2}{n\cdot\pi}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{3\cdot 2}{n\cdot\pi}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\Bigg|_{0}^{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\left(-\sin(-n\cdot\pi)\right) + \frac{3}{n\cdot\pi}\cdot\sin n\cdot\pi = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_{-2}^{0} 2\cdot\sin\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}dx + \int_{0}^{2} 3\cdot\sin\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot(-2)}{n\cdot\pi}\cdot\cos\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{3\cdot(-2)}{n\cdot\pi}\cdot\cos\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\Bigg|_{0}^{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot n\cdot\pi}\left(-4\cdot(1-\cos(-n\cdot\pi)) - 6\cdot(\cos(n\cdot\pi)-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot n\cdot\pi}\cdot 2\cdot\left(1-\cos(n\cdot\pi)\right) = \frac{1-\cos(n\cdot\pi)}{n\cdot\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\cdot\pi} = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \dfrac{2}{n\cdot\pi}, n = 2k-1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2} = \frac{5}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\cdot\pi}\cdot\sin\frac{(2k-1)\pi\cdot x}{2}$$

График суммы полученного ряда представлен на рисунке 1.3.

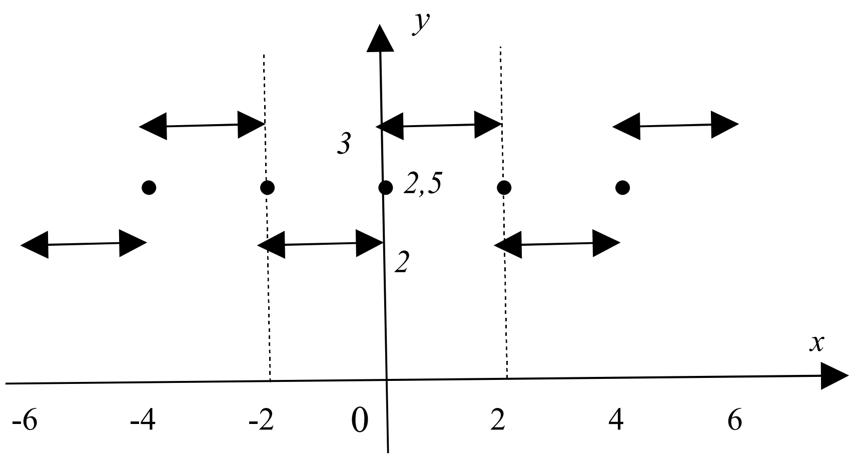
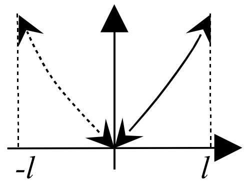


Рисунок 1.3 - График суммы полученного ряда

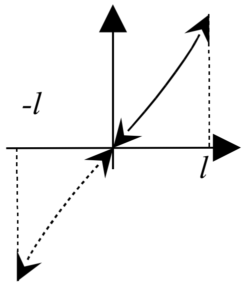
При разложении в неполные ряды Фурье на отрезках $[0;l]$ поступают следующим образом.

Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[0;l]$; $l > 0$.

Такую функцию можно разложить в неполные ряды Фурье по косинусам или по синусам. Для этого, в первом случае, ее достраивают на отрезке $[-l;0]$ четным способом, а во втором случае – нечетным способом, и применяют формулы (1.11), (1.12). Примеры продолжения функции представлены на рисунке 1.4.



а) четным способом



б) нечетным способом

Рисунок 1.4 - Примеры продолжения функции $f(x)$

1.6 Разложение в ряд Фурье на произвольном отрезке

Произвольному отрезку $[a;b]$ соответствует ортогональная система функций $\left\{1, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, ..., \sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}, ...\right\}$,

где $b = a + 2l$, то есть $l = \frac{b-a}{2}$. Пример представлен на рисунке 1.5.

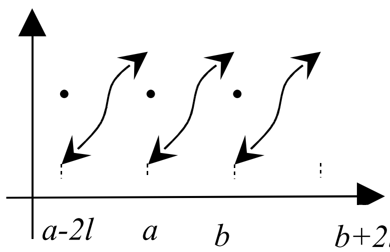


Рисунок 1.5 – Сумма ряда Фурье функции, заданной на отрезке $[a;b]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1.13)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

1.7 Комплексная запись ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет достаточным условиям разложимости в ряд Фурье. Тогда на отрезке $[-\pi;\pi]$ ее можно представить рядом вида:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(n\cdot x)+b_n\cdot\sin(n\cdot x)) \tag{1.14}$$

Используя формулы Эйлера

$$e^{inx}=\cos(n\cdot x)+i\cdot\sin(n\cdot x),\quad e^{-inx}=\cos(n\cdot x)-i\cdot\sin(n\cdot x),$$

найдем $\cos(n\cdot x)=\dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ и $\sin(n\cdot x)=\dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2\cdot i}=i\cdot\dfrac{e^{-inx}-e^{inx}}{2}$.

Подставляя эти выражения в ряд (2.1), получаем

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+i\cdot b_n\cdot\frac{e^{-inx}-e^{inx}}{2}\right)=\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-i\cdot b_n}{2}\cdot e^{inx}+\frac{a_n+i\cdot b_n}{2}\cdot e^{-inx}\right)\end{aligned} \tag{1.15}$$

Введем следующие обозначения: $\dfrac{a_0}{2}=c_0$, $\dfrac{a_n-i\cdot b_n}{2}=c_n$, $\dfrac{a_n+i\cdot b_n}{2}=c_{-n}$

Ряд (2.2) принимает вид:

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cdot e^{inx}+c_{-n}\cdot e^{-inx})=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\cdot e^{-inx}=$$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot e^{inx}+\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n\cdot e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\cdot e^{inx}$$

Таким образом, ряд Фурье представлен в комплексной форме:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\cdot e^{inx} \tag{1.16}$$

Найдем выражения коэффициентов c_n и c_{-n} через интегралы:

$$c_n=\frac{a_n-i\cdot b_n}{2}=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx-i\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot(\cos(n\cdot x)-i\cdot\sin(n\cdot x))\cdot dx=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}\cdot dx$$

Аналогично $c_{-n}=\dfrac{1}{2\cdot\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{inx}\cdot dx$.

Таким образом, комплексные коэффициенты Фурье вычисляются по формуле:

$$c_n=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}\cdot dx,\ n=0,\pm1,\pm2,... \tag{1.17}$$

Для периодической функции $f(x)$ с периодом $2 \cdot l$ комплексная форма ряда Фурье примет вид:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{i \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}} \tag{1.18}$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot e^{-i \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}} dx, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Замечание:
сходимость рядов (1.16) и (1.18) понимается так: ряды являются сходящимися для данного значения x, если существуют пределы: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i \cdot \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}}$.

Последовательность $\{c_n\}$ коэффициентов разложения (1.16) или (1.18) называется спектральной последовательностью функции $f(x)$, так как с помощью членов этой последовательности получаются характеристики всех гармоник, на которые разложено соответствующее периодическое колебание: возьмем сумму двух членов разложения (1.16) с противоположными номерами:

$$c_{-n} \cdot e^{-inx} + c_n \cdot e^{inx} = \frac{a_n + i \cdot b_n}{2} \cdot (\cos(n \cdot x) - i \cdot \sin(n \cdot x)) +$$

$$+ \frac{a_n - i \cdot b_n}{2} \cdot (\cos(n \cdot x) + i \cdot \sin(n \cdot x)) = a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)$$

Сумма таких двух членов воспроизводит $n-$ю гармонику. Выразим характеристики $n-$ой гармоники через коэффициенты разложения (1.16): $a_n = \delta_n \cdot \sin(\varphi_0)_n$, $b_n = \delta_n \cdot \cos(\varphi_0)_n$. Откуда $\delta_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $tg(\varphi_0)_n = \frac{a_n}{b_n}$.

$$a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x) = \delta_n \cdot \sin(n \cdot x + (\varphi_0)_n),$$

где δ_n - амплитуда гармоники, n - частота, $(\varphi_0)_n$ - начальная фаза.

Следовательно, амплитуда δ_n равна модулю $|c_n| = |a_n - i \cdot b_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Если рассмотреть угол $(\psi_0)_n = \frac{\pi}{2} - (\varphi_0)_n$, то $tg((\psi_0)_n) = ctg((\varphi_0)_n) = \frac{b_n}{a_n}$.

Следовательно $\arg \bar{c}_n = arctg \frac{b_n}{a_n} = (\psi_0)_n$, где $\bar{c}_n = a_n + i \cdot b_n$. Таким образом, последовательность $\{|c_n|\}$ образует амплитудный спектр функции $f(x)$, а последовательность $\{\arg \bar{c}_n\}$ образует фазовый спектр.

1.8 Указания к решению задач по теме «Тригонометрические ряды» в системе MathCAD

Перед началом исследования следует выбрать в панели математических инструментов кнопки «Арифметические инструменты», «Операторы математического анализа», «Символические операторы», «Символы греческого алфавита» открыть соответствующие панели и разместить их в удобном месте на рабочем столе (см. рисунок 1.6).

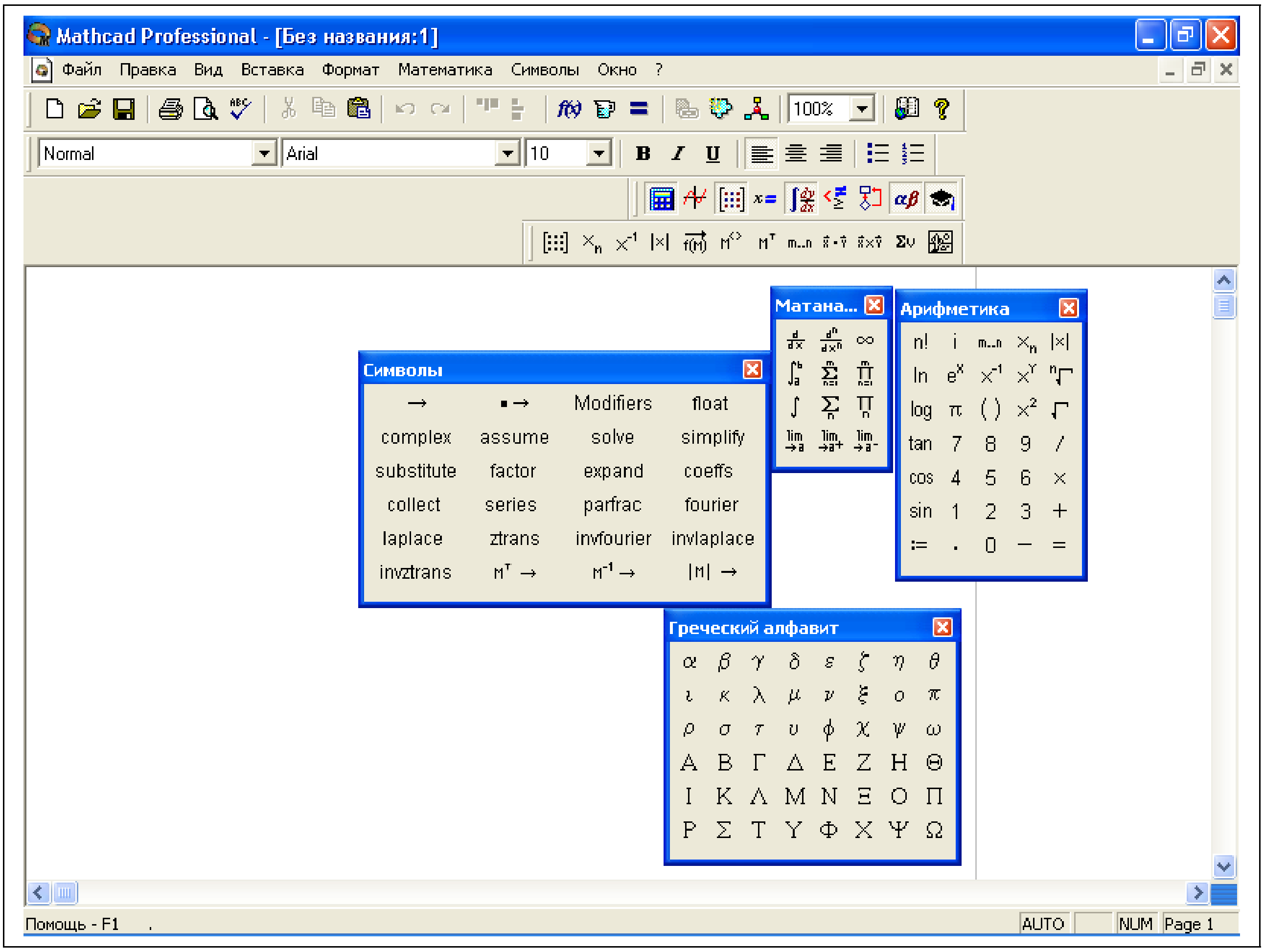


Рисунок 1.6 – Рабочий лист MathCAD

Для определения функции, заданной разными аналитическими выражениями на различных промежутках числовой оси, - ввести имя функции f переменной x, щелкнуть в панели калькулятора по кнопке «Присвоить значение» в панели «Арифметические инструменты» или ввести с клавиатуры знак двоеточия, выбрать в панели «Программирование» кнопку «Add Line». В рабочем документе справа от знака присваивания появится вертикальная черта с двумя строками ввода (если в дальнейшем вам понадобиться более двух строк ввода, то можно добавить их, нажав дополнительно кнопку «Add Line»). Выбрать первую строку и щелкнуть по кнопке «if», ввести слева от «if» выражение, а справа – ограничение на аргумент. Аналогично следует поступить для второй строки.

Далее следует ввести выражения для коэффициентов Фурье в виде векторов *a* и *b*, для чего определить размерность вектора *n*, определить k - диапазон изменения номера компонент векторов *a* и *b* от 0 до *n*, определить выражения для коэффициентов Фурье a_k - ввести с клавиатуры символ «*a*», знак нижнего индекса - «[» (или выбрать соответствующей кнопкой в панели «Арифметика»), ввести в позиции нижнего индекса «*k*», вернуться в основную строку, ввести знак присваивания и выражение для коэффициента. Аналогично - для b_k.

Частичную сумму ряда следует определить как функцию двух переменных $S(x,n)$.

Для построения графиков частичных сумм необходимо задать диапазон значений аргумента х на отрезке $[-\pi;\pi]$ с некоторым шагом (в нашем примере шаг равен $\frac{\pi}{100}$), для чего используйте кнопку «Задать диапазон дискретной величины» в панели «Арифметические инструменты».

Вставка графика в рабочий лист осуществляется кнопкой «Декартов график» (Shift+2) в панели «Графики», для ввода нескольких функций они определяются через запятую.

Численное исследование частичных сумм состоит в сравнении значений частичных сумм для различных *n* со значениями функции на концах отрезка, в точке разрыва и в точке непрерывности.

Введя имя частичной суммы *S*, в скобках значения аргументов, и нажав клавишу «=», получим на экране значение в точке.

1.9 Примеры решения задач

Задача № 1.

Функцию $f(x)=\begin{cases}-1, & при\ -\pi<x\le 0\\ 1, & при\ \ 0<x<\pi\end{cases}$

разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$, определить сумму ряда в точках разрыва и на концах интервала, графически исследовать сходимость частичных сумм полученного ряда.

Решение:

Функция $f(x)=\begin{cases}-1 & при\ \ -\pi<x<0\\ 1 & при\ \ \ 0<x<\pi\end{cases}$ является нечетной, поэтому используем формулы для разложения в неполный ряд Фурье. График функции представлен на рисунке 1.7.

$f(x)$

Рисунок 1.7 – График функции

$$b_k = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(k\cdot x)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{-\cos(k\cdot\pi)}{k}+\frac{1}{k}\right) = \begin{cases} 0 & при \\ \dfrac{4}{k\cdot\pi} & при \end{cases}$$

$$\begin{matrix} k = 2\cdot l \\ k = 2\cdot l - 1 \end{matrix} = \begin{cases} 0 & при \quad k = 2\cdot l \\ \dfrac{4}{\pi\cdot(2\cdot l - 1)} & при \quad k = 2\cdot l - 1 \end{cases}$$

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot\sin(k\cdot x) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{4}{(2\cdot l-1)\cdot\pi}\cdot\sin((2\cdot l-1)\cdot x) = \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin((2\cdot l-1)\cdot x)}{2\cdot l-1} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin x + \frac{1}{3}\cdot\sin 3x + \frac{1}{5}\cdot\sin 5x + ...\right)$$

Таким образом, аналитически получили разложение данной функции в ряд Фурье: $\frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin x + \frac{1}{3}\cdot\sin 3x + \frac{1}{5}\cdot\sin 5x + ...\right)$.

В случае если аналитически вычислить коэффициенты ряда Фурье сложно, следует использовать символьные вычисления в MathCad.

Поскольку сходимость ряда Фурье характеризуется законом среднего арифметического, в точке разрыва $x_0 = 0$ ряд Фурье данной функции будет сходиться к $\frac{1}{2}\cdot(\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) + \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)) = 0$; в точках $x = -\pi$; $x = \pi$ ряд Фурье будет сходиться к $\frac{1}{2}\cdot(\lim\limits_{x\to -\pi} f(x) + \lim\limits_{x\to \pi} f(x)) = 0$

Сумма ряда Фурье определена на всей числовой оси и является периодической функцией с периодом 2π :

$$S(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x = -\pi + 2\pi\cdot m \\ -1, & при \quad -\pi + 2\pi\cdot m < x < 0 + 2\pi\cdot m \\ 0, & при \quad x = 0 + 2\pi\cdot m \\ 1, & при \quad 0 + 2\pi\cdot m < x < \pi + 2\pi\cdot m \end{cases}, \quad m\in N$$

График полученной суммы ряда представлен на рисунке 1.8.

$S(x)$

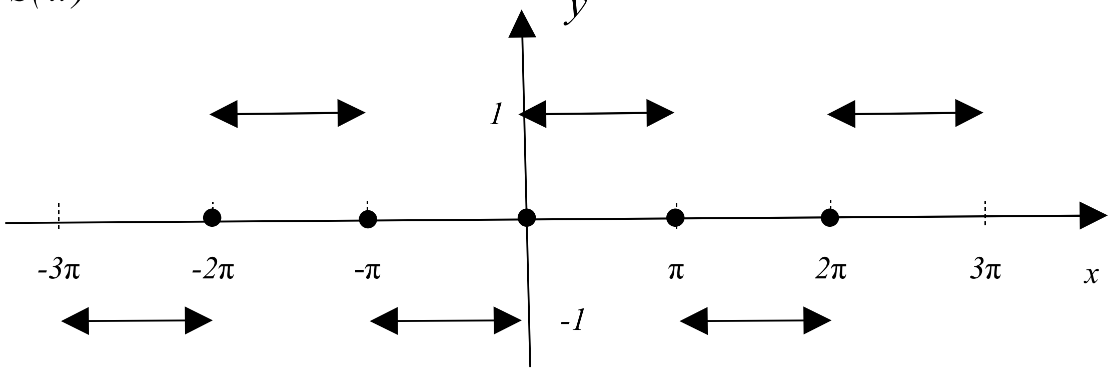


Рисунок 1.8 – График суммы ряда

Используя MathCad, исследуем графически поведение частичных сумм полученного ряда Фурье. (См. ниже листинг 1.1 рабочего документа MathCad).

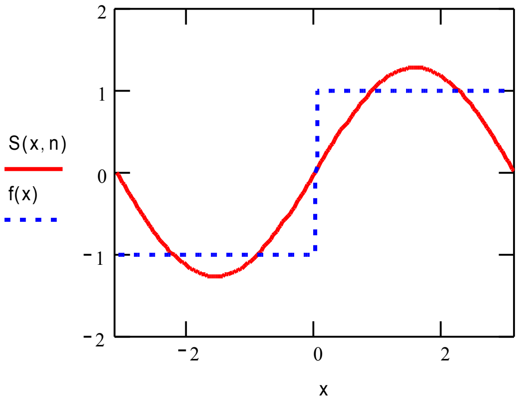
$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{if } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases} \qquad n := 50 \qquad k := 0..\,n$$

$$b_k := \frac{2}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx \right)$$

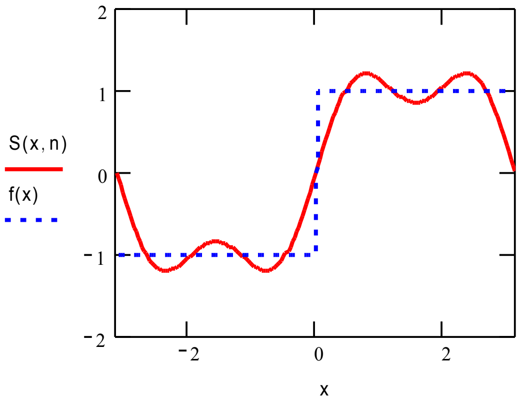
$$\frac{2}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(k \cdot x)\, dx \right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{-\cos(k \cdot \pi)}{k} + \frac{1}{k} \right)$$

$$S(x, n) := \sum_{k=1}^{n} \left(b_k \cdot \sin(k \cdot x) \right) \qquad x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} .. \pi$$

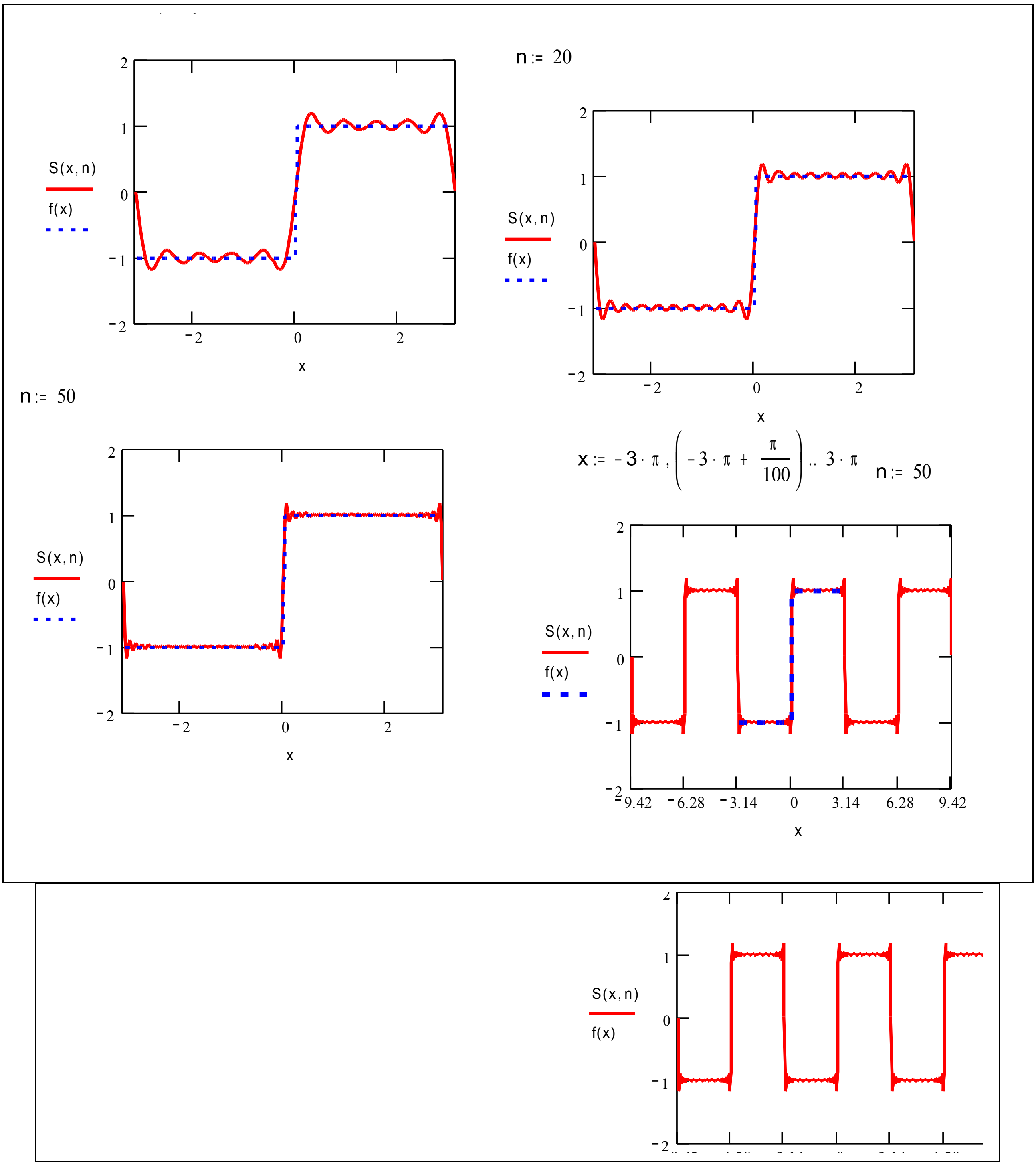
$n := 1$



$n := 3$



Листинг 1.1 Лист 1

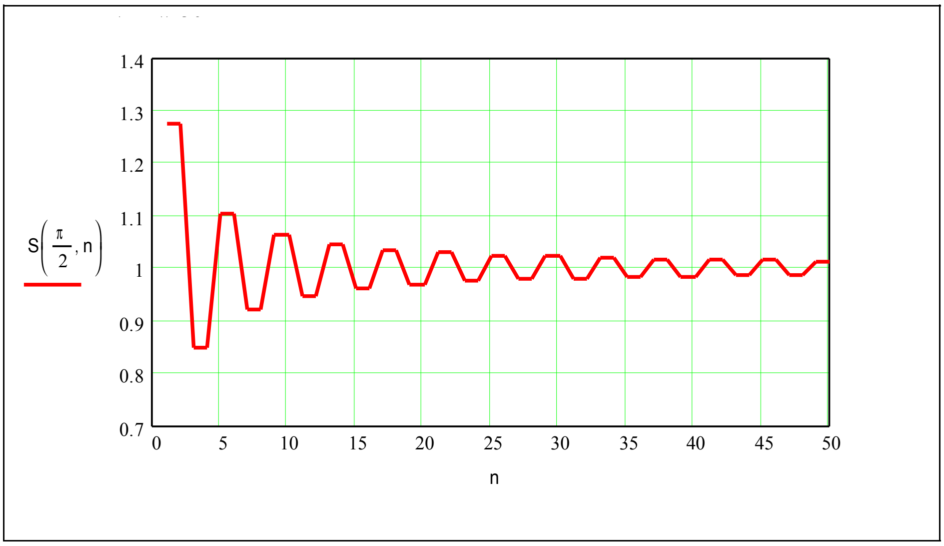


Листинг 1.1 Лист 2

График на листинге 1.2 иллюстрирует сходимость частичных сумм ряда Фурье в точке непрерывности функции.

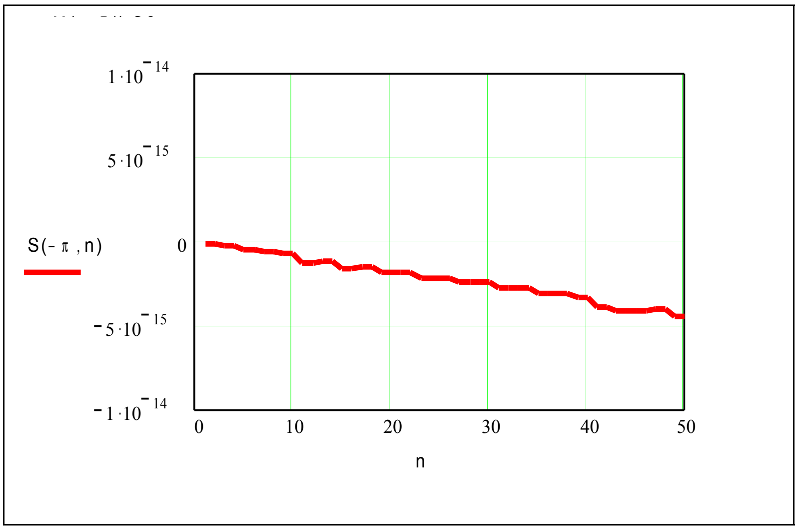
На графиках видно, что при приближении к точкам разрыва x_0 разность $|S_n(x) - f(x)|$ увеличивается. Это объясняется тем, что, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0) = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\right)$, существуют такие последовательности $u_n \to x_0 + 0$ и $v_n \to x_0 - 0$, что пределы $S_n(u_n)$ и $S_n(v_n)$

при $n \to \infty$ различны и оба отличаются от $S(x_0)$. Эта особенность поведения частичных сумм Фурье в окрестности точек разрыва называется явлением Гиббса. Явление Гиббса состоит в том, что для некоторых функций $f(x)$ в точке x_0 их скачка существуют такие значения a, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0 \pm \frac{a}{n}) \neq S(x_0)$.



Листинг 1.2

Исследуем поведение частичных сумм построенного ряда Фурье в точке $x_0 = -\pi$ (см. листинг 1.3).



Листинг 1.3

Задача №2.

Для функции $f(x) = |\sin(x+1)|$, заданной в интервале $(-\pi;\pi)$, найти тригонометрический многочлен наилучшего приближения наименьшей степени со среднеквадратическим отклонением, меньшим 0.01. Построить график зависимости среднеквадратического отклонения от степени многочлена.

Решение:

Последовательность решения:

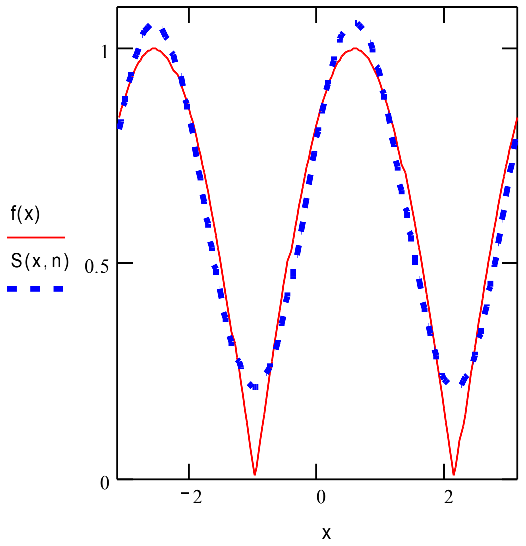
1. Вычисляются коэффициенты Эйлера-Фурье - a_k, b_k.
2. Вычисляются частичные суммы ряда Фурье - $S(x,n)$.
3. Вычисляется среднеквадратическое отклонение - $\sigma(n)$.
4. Создается вектор P, элементы которого равны соответствующим значениям среднеквадратического отклонения - $P_k = \sigma(k)$.
5. Анализ элементов вектора P и графика зависимости $\sigma = \sigma(k)$ позволяет определить наименьшее количество слагаемых тригонометрического многочлена, удовлетворяющего заданной точности.

Ответ: $n = 20$.

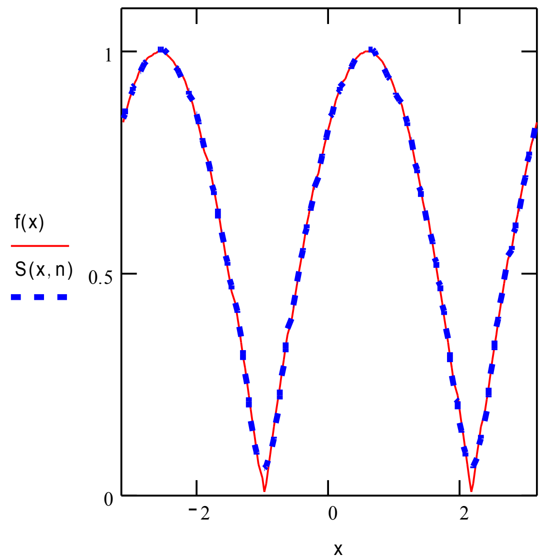
Ниже приведен листинг 1.4 рабочего документа MathCad.

Листинг 1.4 Лист 1

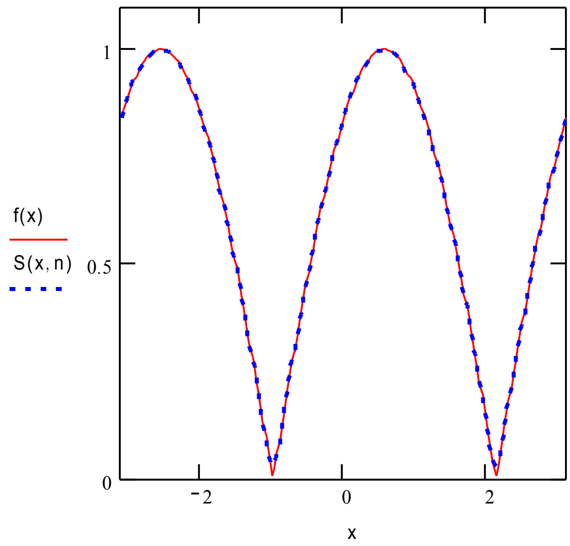
$x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} .. \pi \qquad n := 2$



$x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} .. \pi \qquad n := 10$



$x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} .. \pi \qquad n := 20$



Листинг 1.4 Лист 2

Задача №3.

Разложить в интервале $(2;6)$ в неполный ряды Фурье по синусам кратных дуг функцию $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8 \cdot x - 12 & при \;\; 2 < x < 4 \\ 8 \cdot x - 12 & при \;\; 4 < x < 6 \end{cases}.$

Построить график самой функции и частичных сумм ряда Фурье при $n =$ 1, 2, 5, 10, 20 (также и вне интервала $(2;6)$). При $n=20$ вычислить $S_n(3)$, $S_n(4)$ и $S_n(5)$.

Решение:

Приведен листинг 1.5 рабочего документа MathCad.

$$l := \frac{(6-2)}{2} \qquad l = 2$$

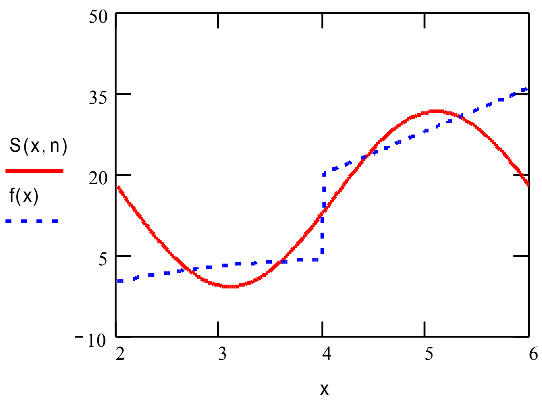
$$f(x) := \begin{cases} -x^2 + 8\cdot x - 12 & \text{if } 2 < x < 4 \\ 8\cdot x - 12 & \text{if } 4 < x < 6 \end{cases}$$

$$n := 50 \qquad k := 0..n$$

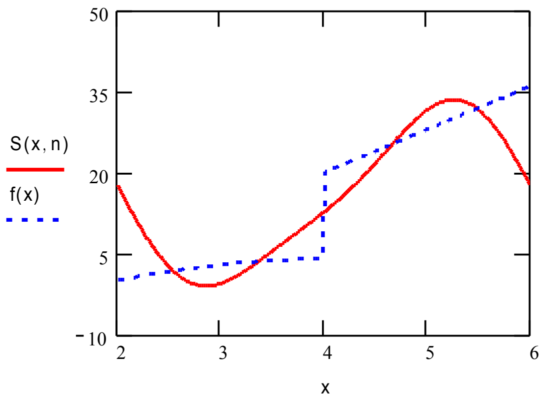
$$a_k := \frac{1}{l}\cdot\int_2^6 f(x)\cdot\cos\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right)dx \qquad b_k := \frac{1}{l}\cdot\left(\int_2^6 f(x)\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right)dx\right)$$

$$S(x,n) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\cos\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right) + b_k\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right)\right)$$

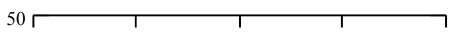
$n := 1$



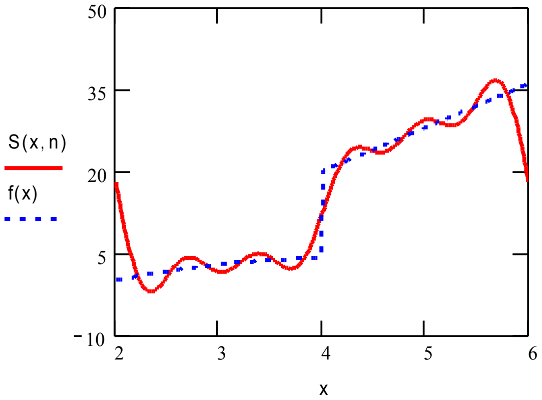
$n := 2$



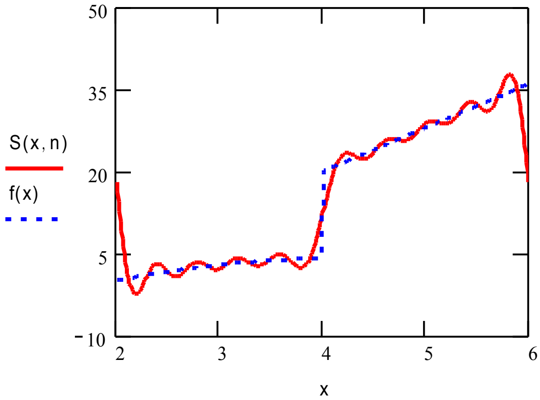
$n := 5$



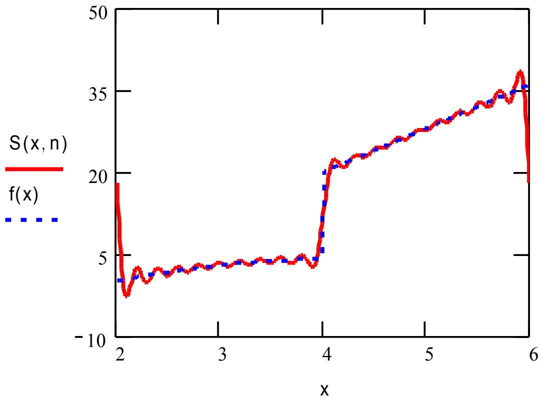
Листинг 1.5 Лист 1

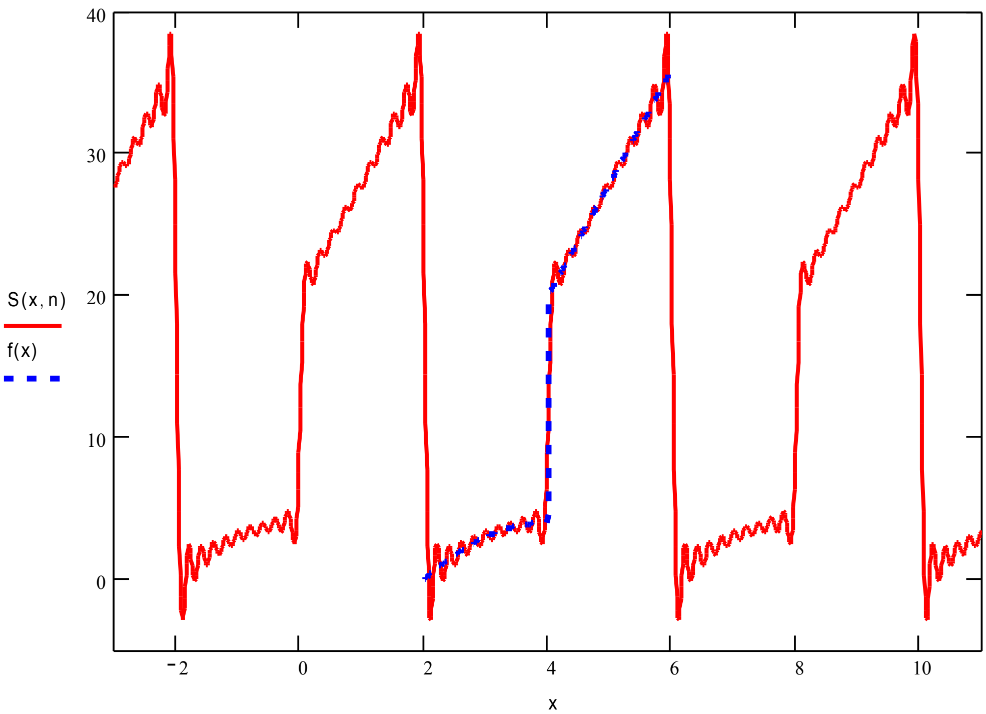


n := 10



n := 20





S(3, 20) = 3.412   S(4, 20) = 12.08   S(5, 20) = 27.586

Листинг 1.5 Лист 2

2 Преобразование Фурье

2.1 Интеграл Фурье

Как было показано выше, всякую функцию $f(x)$, удовлетворяющую на отрезке $-l \le x \le l$ условиям Дирихле (раздел 1.2 данного пособия), можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right), \tag{2.1}$$

где $a_n = \frac{1}{l} \cdot \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot t}{l} dt$, $b_n = \frac{1}{l} \cdot \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot t}{l} dt$

Это разложение справедливо на всей числовой оси, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $2 \cdot l$.

Рассмотрим предельный случай $l \to \infty$, т.е. случай непериодической функции $f(x)$, заданной на всей оси x.

Будем предполагать, что на всяком конечном отрезке оси x, функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, кроме того, $f(x)$ абсолютно интегрируема, то есть существует конечный интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = c \tag{2.2}$$

Замечая, что:

$$a_n \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} = \frac{1}{l} \cdot \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot t}{l} dt \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} +$$

$$+ \frac{1}{l} \cdot \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot t}{l} dt \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} = \frac{1}{l} \cdot \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot (x-t)}{l} dt$$

Запишем разложение (2.1) в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int\limits_{-l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot (x-t)}{l} dt \tag{2.3}$$

Первое слагаемое полученного разложения (2.3) стремится к нулю при $l \to \infty$, т.к. $\left|\frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int\limits_{-l}^{l} f(t) dt\right| \le \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int\limits_{-l}^{l} |f(t)| dt \le \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{c}{2 \cdot l}$

Для выяснения предела второго слагаемого при $l \to \infty$ введем новую переменную α, принимающую значения, образующие бесконечную арифметическую прогрессию: $\alpha_n = \frac{n \cdot \pi}{l}$, $n = 1,2...$

$$\Delta \alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{n}$$

$$\frac{1}{l}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{n\cdot\pi\cdot(x-t)}{l}dt = \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha_n\cdot\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos(\alpha_n\cdot(x-t))dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}F(\alpha_n)\cdot\Delta\alpha_n ,$$

где $F(\alpha_n)=\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos(\alpha_n\cdot(x-t))dt$.

Примем без доказательства, что при $l\to\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(\alpha_n)\cdot\Delta\alpha_n \to \int_0^{\infty}F(\alpha)d\alpha ,$$

где $F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos(\alpha\cdot(x-t))dt$.

Таким образом, разложение (2.1) при $l\to\infty$ преобразуется к виду:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{+\infty}d\alpha\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos(\alpha\cdot(x-t))dt \qquad (2.4)$$

Формула (2.4) называется формулой Фурье, а интеграл в правой части формулы (2.4) называется интегралом Фурье.

Замечания:

1. зная характер сходимости ряда Фурье при конечном l, отмечаем, что если x - точка разрыва функции $f(x)$, то под $f(x)$ в формуле Фурье следует понимать $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;
2. внутренний интеграл в формуле Фурье является четной функцией от α, поэтому $f(x)=\dfrac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos(\alpha\cdot(x-t))dt$ (2.4`)
3. вышеперечисленные условия не являются единственными достаточными условиями представления функции интегралом Фурье, другое достаточное условие:

- $f(x)$ абсолютно интегрируема на каждом конечном отрезке оси x;
- существует положительное число H такое, что при $|x|\geq H$ функция $f(x)$ монотонна и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

2.2 Интеграл Фурье четной и нечетной функций

Преобразуем интеграл Фурье, развернув выражение cos под знаком интеграла:

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{+\infty}d\alpha\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos(\alpha\cdot(x-t))dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot (\cos(\alpha \cdot x) \cdot \cos(\alpha \cdot t) + \sin(\alpha \cdot x) \cdot \sin(\alpha \cdot t))dt$$

Формула Фурье (2.4) принимает вид:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (A(\alpha) \cdot \cos(\alpha \cdot x) + B(\alpha) \cdot \sin(\alpha \cdot x))d\alpha , \qquad (2.5)$$

где $A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot t)dt$, $B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\alpha \cdot t)dt$

Если $f(x)$ - четная функция, то

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot t)dt , \text{ а } B(\alpha) = 0 \qquad (2.6)$$

Если $f(x)$ - нечетная функция, то

$$A(\alpha) = 0 , \ B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\alpha \cdot t)dt \qquad (2.7)$$

Замечание:

в случае, когда функция $f(x)$ определена лишь на полуоси $(0;+\infty)$, то, продолжая $f(x)$ на полуось $(-\infty;0)$ четным или нечетным способом, получаем представление $f(x)$ двумя различными интегралами Фурье.

Ряд Фурье осуществляет разложение периодического колебания на гармоники.

Общий член ряда Фурье представляется в виде:

$$a_n \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} = c_n \cdot \sin(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x + (\varphi_0)_n),$$

где $a_n = c_n \cdot \sin(\varphi_o)_n$, а $b_n = c_n \cdot \cos(\varphi_o)_n$, и, следовательно, $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

и определяет гармонику с частотой $\frac{n \cdot \pi}{l}$, амплитудой c_n и с начальной фазой $(\varphi_0)_n$. Таким образом, ряд Фурье разлагает периодическое колебание на бесконечное множество гармоник, частоты которых образуют арифметическую прогрессию: $\frac{\pi}{l}, \frac{2 \cdot \pi}{l}, ..., \frac{n \cdot \pi}{l}, ...$

Условно рассматривая интеграл Фурье (2.5) как бесконечную сумму и представляя коэффициенты $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$, как выше были представлены коэффициенты a_n и b_n тригонометрического ряда, придадим формуле Фурье механический смысл: формула Фурье осуществляет разложение непериодического колебания на непрерывное бесконечное множество гармоник, частоты которых непрерывно изменяются от $\alpha = 0$ до $\alpha = \infty$.

Пример 2.1.

Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , при \ |x| < 1 \\ 0 & , при \ |x| > 1 \\ 1/2 & , при \ |x| = 1 \end{cases}$$

Решение:

График функции представлен на рисунке 2.1.

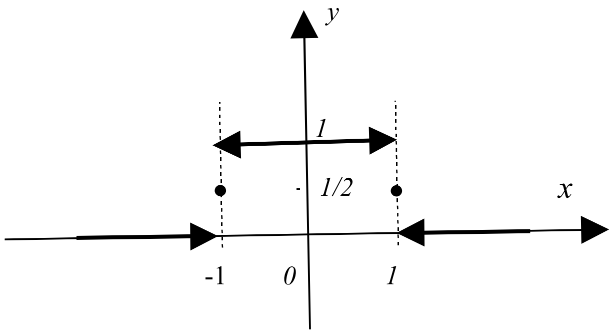


Рисунок 2.1 – График функции

Функция $f(x)$ четная, применим формулу (2.6):

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 1 \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(\alpha) \cdot \cos(\alpha \cdot x) d\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \cos(\alpha \cdot x) d\alpha$$

Замечание:

полученное разложение можно использовать для вычисления несобственного («неберущегося») интеграла.

$f(0) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha} d\alpha$, но $f(0) = 1$. Отсюда $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

2.3 Косинус- и синус-преобразования Фурье

Положим в формулах (2.6), (2.7) $A(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a(\alpha)$ и $B(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot b(\alpha)$. Получим формулу Фурье в симметричной форме записи:

- в случае четной функции $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} a(\alpha) \cdot \cos(\alpha \cdot x) d\alpha$, (2.8)

где $a(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt$ - косинус-преобразование Фурье.

- в случае нечетной функции $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} b(\alpha) \cdot \sin(\alpha \cdot x) d\alpha$, (2.9)

где $b(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\alpha \cdot t) dt$ - синус-преобразование Фурье.

Принята следующая терминология $f(x)$ - оригинал, $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ - изображение.

Пример 2.2.

Найти косинус- и синус-преобразования функции $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$.

Решение.

График функции представлен на рисунке 2.2.

Найдем косинус-преобразование:

$$a(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha^2 + 1}.$$

Найдем синус-преобразование:

$$b(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \cdot \sin(\alpha \cdot t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

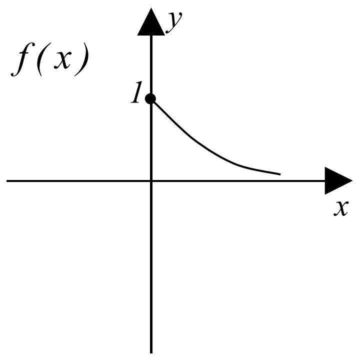


Рисунок 2.2 – График функции

Таким образом, получили следующие представления функции e^{-x} интегралом Фурье, графики представлений – на рисунке 2.3.

$$e^{-x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} a(\alpha) \cdot \cos(\alpha \cdot x) d\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$$

$$e^{-x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} b(\alpha) \cdot \sin(\alpha \cdot x) d\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$$

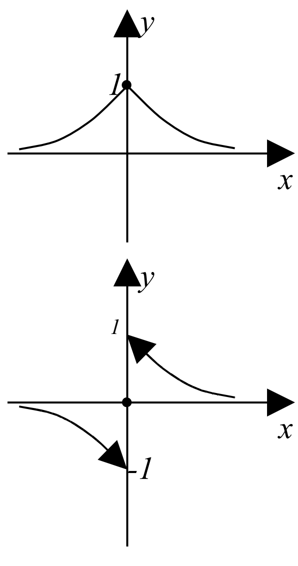


Рисунок 2.3 – Графики представлений функции

Замечания:

1) представление данной функции интегралом Фурье неединственно, так как она задана при $x \geq 0$. Косинус-преобразование мы получили, продолжив данную функцию четным образом, а синус-преобразование – нечетным образом. При $x > 0$ оба интеграла $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$ и $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$ равны функции e^{-x}. При $x < 0$ $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha = e^x$, а $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha = -e^x$. При $x = 0$ несобственный интеграл $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$ сходится к $f(0) = 1$, а несобственный интеграл $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$ сходится к 0.

2) полученные представления используются в математике под названием интегралов Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}, \text{ при } x > 0.$$

2.4 Комплексная форма записи интеграла Фурье

Согласно равенству (2.4`) $f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot (x - t)) dt$.

Кроме того, справедливо равенство $0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\alpha \cdot (x - t)) dt$, так как, внутренний интеграл есть нечетная функция от α. Сложим эти два равенства, умножив предварительно второе на i, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot (\cos(\alpha \cdot (x - t)) + i \cdot \sin(\alpha \cdot (x - t))) dt =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot (x - t)} dt$$

Получаем интеграл Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha \cdot x \cdot i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \cdot t \cdot i} \cdot f(t) dt \tag{2.10}$$

Положим $c(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t\cdot i}dt$, (2.11)

тогда $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} c(\alpha)\cdot e^{\alpha\cdot x\cdot i}d\alpha$ (2.12)

Комплексная функция $c(\alpha)$ действительной переменной называется преобразованием Фурье функции $f(x)$. Формулы (2.11) и (2.12) осуществляют прямое и обратное преобразование Фурье.

По аналогии с рядом Фурье (1.16) и спектральной последовательностью (1.17), осуществляющей дискретный спектр функции $f(x)$, комплексная функция $c(\alpha)$ называется спектральной функцией для функции $f(x)$, осуществляющей непрерывный спектр (α непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$). Модуль $|c(\alpha)|$ спектральной функции называется амплитудным спектром функции $f(x)$, а аргумент сопряженной функции $\arg\overline{c(\alpha)}$ - фазовым спектром.

2.5 Указания к решению задач по теме «Преобразование Фурье» в системе MathCAD

При представлении функции через интеграл Фурье приходится вычислять несобственные интегралы. Для вычисления несобственных интегралов в системе MathCAD используется панель «Операторы математического анализа». Щелкните по кнопке «Определенный интеграл» (или используйте сочетание клавиш Shift+7), введите в отмеченных позициях пределы интегрирования, один из которых бесконечен (символ бесконечности в той же панели или клавиши Ctrl+Shift+Z), подынтегральную функцию и переменную интегрирования, выделите интеграл и щелкните по кнопке «Символическая оценка» (Ctrl+Shift+.) в панели «Символические операторы».

При помощи символьного процессора MathCad можно осуществить прямое и обратное преобразование Фурье, для этого используются операторы *fourier* и *infourier* панели «Символические операторы». При решении задачи выделите функцию, щелкните по кнопке «fourier» (или «infourier») и укажите переменную, по которой совершается преобразование.

Аналогично большинству операций символьного процессора MathCAD интегральные преобразования Фурье можно проводить и при помощи команд меню «Символы/Преобразования», для чего выделите переменную, по которой совершается преобразование, и выберите в меню строку «Символы/Преобразования/Фурье».

Следует иметь в виду, что результаты, получаемые в MathCad, могут содержать обобщенные функции. Например, дельта-функция Дирака (*Dirac(x)* или $\Delta(x)$), которая равна нулю при всех значениях x, отличных от нуля, и принимает значение бесконечность при нулевом значении x: $\begin{cases} \Delta(x) = 0, x \neq 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x)dx = 1 \end{cases}$.

Пример использования этих символьных операторов приводится в листинге № 2.3.

2.6 Примеры решения задач

Задача №1.

Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, продолжив предварительно ее нечетным способом.

Решение.

Функция – нечетная, поэтому используем формулу (2.7):

$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \cdot \sin(\alpha \cdot t)dt$. Для вычисления несобственного интеграла используем MathCAD (листинг № 2.1). Получим $B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$.

Следовательно $f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{1+\alpha^2} d\alpha$.

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \sin(\alpha \cdot t)\, dt \rightarrow \frac{2}{\left[\pi \cdot \left(1+\alpha^2\right)\right]} \cdot \alpha$$

Листинг 2.1

Задача №2.

Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Решение.

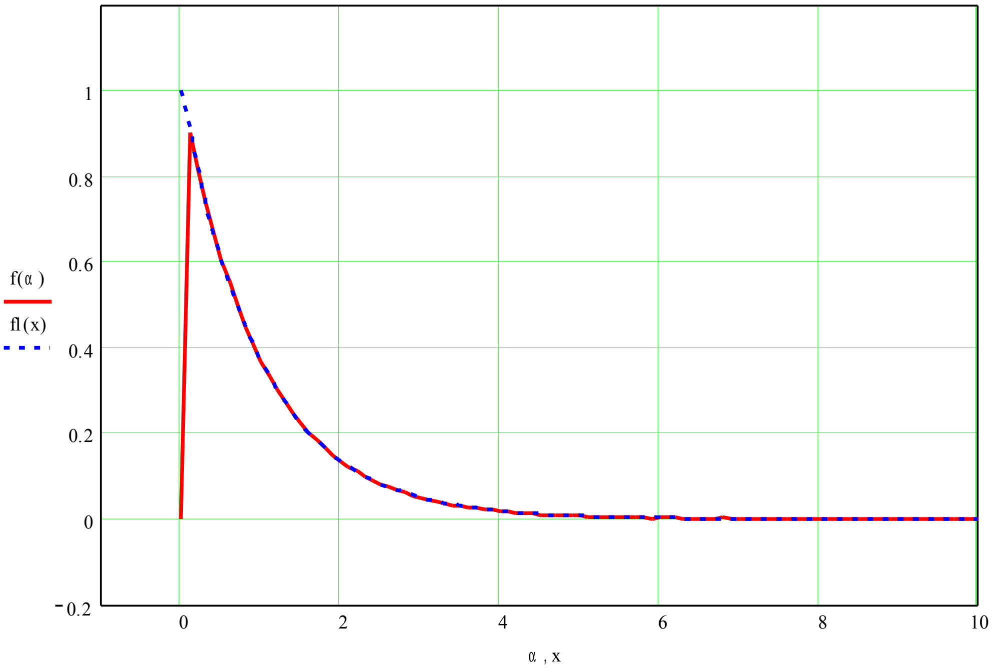
Функция – нечетная, по формуле (2.7) получаем $B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} \cdot \sin(\alpha \cdot t)dt$. Пользуясь результатом задачи №1, данный интеграл равен $e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Если $B(\alpha)$ вычислять при помощи MathCAD, то внешний вид функции $B(\alpha)$ будет отличаться от $e^{-\alpha}$. Это связано с тем, что по умолчанию операции MathCAD совершаются с комплексными числами (листинг 2.2).

$$\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\infty}\frac{t}{1+t^2}\cdot\sin(\alpha\cdot t)\,dt \rightarrow \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{signum}(\alpha)\cdot\pi\cdot\cosh(\alpha)-\frac{1}{2}\cdot i\cdot \mathrm{Ci}(-i\cdot\alpha)\cdot\sinh(\alpha)+\frac{1}{2}\cdot i\cdot\mathrm{Ci}(i\cdot\alpha)\cdot\sinh(\alpha)\right)$$

$$f(\alpha) := \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{1000}\frac{t}{1+t^2}\cdot\sin(\alpha\cdot t)\,dt$$

$\alpha := 0, 0+0.1 .. 10$ $\qquad x := 0, 0+0.1 .. 10$

$f1(x) := e^{-x}$



Листинг 2.2

Задача №3.
Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \sin(x)$.

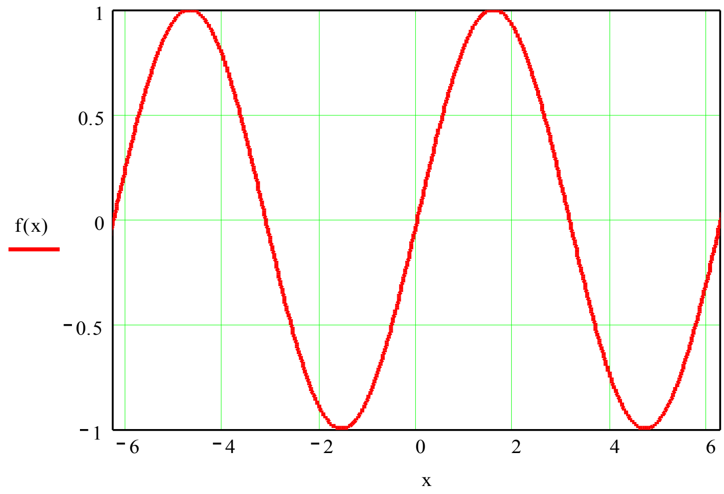
Решение.

По формуле (2.11) $C(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x)\cdot e^{-\alpha\cdot t\cdot i}dt$. При решении задачи в MathCAD используем оператор *fourier* (см. листинг 2.3). Получаем $C(\alpha) = -i\cdot\pi\cdot\Delta(\omega-1)+i\cdot\pi\cdot\Delta(\omega+1)$, где $\Delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Совершим обратное преобразование Фурье: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}c(\alpha)\cdot e^{\alpha\cdot x\cdot i}d\alpha$. При решении задачи в MathCAD используем оператор *infourier*. Получаем: $f(t) = \frac{1}{2} \cdot i \cdot (-e^{i \cdot t} + e^{-i \cdot t})$. Используя команду меню «Символы/Упростить», получаем $f(t) = \sin(t)$.

$f(x)$ fourier, $x \rightarrow -i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega - 1) + i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega + 1)$

$x := -10, -10 + 0.01 .. 10$

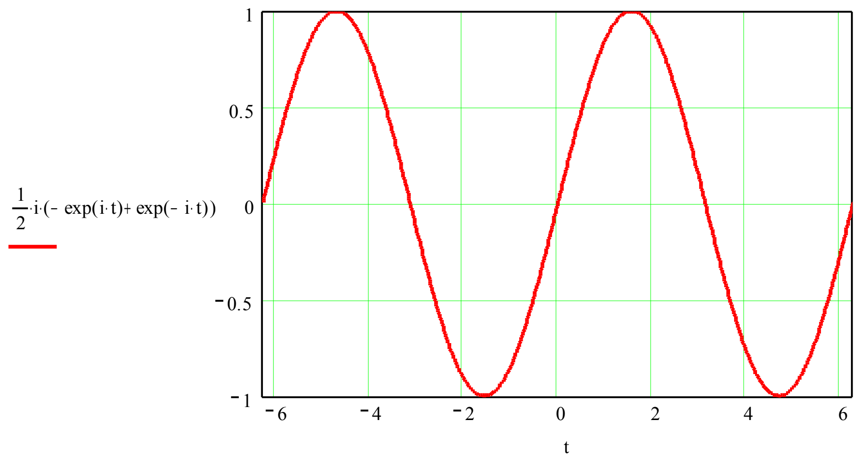


$-i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega - 1) + i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega + 1)$ invfourier, $\omega \rightarrow \frac{1}{2} \cdot i \cdot (-\exp(i \cdot t) + \exp(-i \cdot$

$-i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega - 1) + i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega + 1)$

$\frac{}{2} \cdot i \cdot (-\exp(i \cdot t) + \exp(-i \cdot t))$

$\sin(t)$



Листинг 2.3

3. Задачи для самостоятельного решения

1. Указанные ниже функции разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$, определить сумму ряда на концах интервала, графически исследовать сходимость частичных сумм полученного ряда:

1.1 $f(x)=x^2+2x$	1.6 $f(x)=\cos 2x+x$
1.2 $f(x)=\sqrt{x}+x$	1.7 $f(x)=\sin 2x-x$
1.3 $f(x)=\sqrt[3]{x}-x$	1.8 $f(x)=x^2+\cos x$
1.4 $f(x)=e^{2x}$	1.9 $f(x)=Ln(x+5)$
1.5 $f(x)=x+e^{x}$	1.10 $f(x)=e^{-x}+x$

2. Разложить в интервале $(0;1)$ в неполные ряды Фурье: а) по синусам кратных дуг; б) по косинусам кратных дуг следующие функции. Построить график самой функции и частичных сумм рядов Фурье при $n=$ 1, 2, 5, 10, 20 (также и вне интервала $(0;1)$.

2.1 $f(x)=x^2+2x$	2.6 $f(x)=\cos 2x+x$
2.2 $f(x)=\sqrt{x}+x$	2.7 $f(x)=\sin 2x-x$
2.3 $f(x)=\sqrt[3]{x}-x$	2.8 $f(x)=x^2+\cos x$
2.4 $f(x)=e^{2x}$	2.9 $f(x)=Ln(x+5)$
2.5 $f(x)=x+e^{x}$	2.10 $f(x)=e^{-x}+x$

3. Указанные ниже функции разложить в ряд Фурье на области определения, определить сумму ряда в точках разрыва и на концах интервала, графически исследовать сходимость частичных сумм полученного ряда:

3.1 $f(x)=\begin{cases}-2 & при\ -3<x<-1\\ 2+x & при\ -1<x<1\end{cases}$	3.6 $f(x)=\begin{cases}1-x\ при\ 1<x<2\\ x+1\ при\ 2<x<3\end{cases}$
3.2 $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & при\ -1<x<1\\ 2 & при\ 1<x<2\end{cases}$	3.7 $f(x)=\begin{cases}3x+2\ при\ -1<x<0\\ 5-x\ при\ 0<x<2\end{cases}$
3.3 $f(x)=\begin{cases}x+1 & при\ 1<x<2\\ 1 & при\ 2<x<3\end{cases}$	3.8 $f(x)=\begin{cases}5 & при\ 1<x<5\\ x+1 & при\ 5<x<7\end{cases}$
3.4 $f(x)=\begin{cases}-x & при\ -3<x<-1\\ x+1 & при\ -1<x<1\end{cases}$	3.9 $f(x)=\begin{cases}-x\ при\ -3<x<-2\\ x\ при\ -2<x<1\end{cases}$
3.5 $f(x)=\begin{cases}2x-1\ при\ -2<x<-1\\ 1+x\ при\ -1<x<2\end{cases}$	3.10 $f(x)=\begin{cases}2-x\ при\ -1<x<1\\ 2+x\ при\ 1<x<3\end{cases}$

4. Для заданной в интервале $(-\pi;\pi)$ функции найти тригонометрический многочлен наилучшего приближения наименьшей степени со среднеквадратическим отклонением, меньшим 0.02. Построить график зависимости среднеквадратического отклонения от степени многочлена.

4.1 $f(x)=\lvert\sin(x)+x\rvert$	4.6 $f(x)=\lvert x-2\cdot\sin(x)\rvert$
4.2 $f(x)=\lvert\sin(x)+2\cdot x\rvert$	4.7 $f(x)=\left\lvert\frac{1}{2}\cdot x+\sin(x)\right\rvert$
4.3 $f(x)=\lvert\sin(x)-x\rvert$	4.8 $f(x)=\left\lvert\sin(\frac{1}{2}\cdot x)\right\rvert$
4.4 $f(x)=\lvert\sin(x)-2\cdot x\rvert$	4.9 $f(x)=\left\lvert\sin(\frac{1}{2}\cdot x)+x\right\rvert$
4.5 $f(x)=\lvert 2\cdot\sin(x)+x\rvert$	4.10 $f(x)=\left\lvert x-\sin(\frac{1}{2}\cdot x)\right\rvert$

5. Построить графики данных функций и представить их интегралами Фурье:

5.1 $f(x)=\begin{cases}\sin(x),\lvert x\rvert<\pi\\ 0,\lvert x\rvert\geq\pi\end{cases}$	5.6 $f(x)=\begin{cases}\cos(x),\lvert x\rvert\leq\pi\\ 0,\lvert x\rvert>\pi\end{cases}$
5.2 $f(x)=\begin{cases}1+x,-1<x\leq 0\\ 1-x,0<x<1\\ 0,\lvert x\rvert\geq 1\end{cases}$	5.7 $f(x)=\begin{cases}0,x\leq 0\\ \sin x,0<x<\pi\\ 0,x\geq\pi\end{cases}$
5.3 $f(x)=\begin{cases}0,x\leq 0\\ \cos x,0<x<\pi\\ 0,x\geq\pi\end{cases}$	5.8 $f(x)=\begin{cases}2-x,-1<x<0\\ x-2,0\leq x<1\\ 0,\lvert x\rvert\geq 1\end{cases}$
5.4 $f(x)=\begin{cases}3-x,-1<x<0\\ x-3,0\leq x<1\\ 0,\lvert x\rvert\geq 1\end{cases}$	5.9 $f(x)=\begin{cases}x-2,-1<x<0\\ 2-x,0\leq x<1\\ 0,\lvert x\rvert\geq 1\end{cases}$
5.5 $f(x)=\begin{cases}1-x,-1<x\leq 0\\ 1+x,0<x<1\\ 0,\lvert x\rvert\geq 1\end{cases}$	5.10 $f(x)=\begin{cases}x-3,-1<x<0\\ 3-x,0\leq x<1\\ 0,\lvert x\rvert\geq 1\end{cases}$

Список использованных источников

1 **Вся высшая математика**: учебник/ М.Л.Краснов [и др.] Изд. 2-е, исп. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 240 с. – ISBN 5-354-01050-0.

2 **Босс В**., Лекции по математике. Т.5. Функциональный анализ/ В.Босс. – М.: КомКнига, 2005. – 216 с. – ISBN 5-484-00190-0.

3 **Данко П.Е.**, Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: учебное пособие для втузов/ П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. – М.: «Высшая школа», 1996. – 416 с. – ISBN 5-06-003071-7.

4 **Запорожец Г.И.**, Руководство к решению задач по математическому анализу/ Г.И.Запорожец.- М.: «Высшая школа», 1966. – 460 с. – ISBN 5-06-003071-7.

5 **Ильин В.А.** Математический анализ. Продолжение курса/ В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Под ред. А.Н.Тихонова. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с. – ISBN 5-7107-4294-5.

6 **Кирьянов Д.В.** Самоучитель MathCAD 13/ Д.В.Кирьянов – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с. – ISBN 5-94157-849-0.

7 **Кудрявцев Л.Д.** Краткий курс математического анализа. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ: учебник/ Л.Д.Кудрявцев.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 424 с. – ISBN 5-9221-0185-4.

8 **Плис А.И.** MathCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: учеб.пособие/ А.И.Плис, Н.А.Сливина – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с. – ISBN 5-279-02155-5.