

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

Е.М. КРИПАК, В.И. ВАСЯНИНА

# **ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОМУ  
ПРАКТИКУМУ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом  
государственного образовательного учреждения высшего профессионального  
образования "Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2006

УДК 33.7:519.86  
ББК 65.292+65.290-2  
К 82

Рецензент

кандидат экономических наук, доцент С.В. Дьяконова

**Крипак Е. М.**  
**Построение и анализ производственной функции:**  
К 82 **методические указания к лабораторному практикуму и самостоятельной работе студентов/ Е.М. Крипак, В.И. Васянина. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. – 23 с.**

Методические указания предназначены для проведения лабораторного практикума и самостоятельной работы студентов специальностей 080116 – Математические методы в экономике, 080601 – Статистика, 010502 – Прикладная информатика (в экономике), а также других экономических специальностей при изучении экономико-математических моделей.

ББК 65.292

© Крипак Е. М.,  
Васянина В.И., 2006  
© ГОУ ОГУ, 2006

## Содержание

Введение.....	4
1 Описание лабораторной работы.....	5
2 Постановка задачи.....	5
3 Порядок выполнения лабораторной работы.....	7
4 Содержание письменного отчета.....	17
5 Вопросы к защите.....	18
6 Варианты для индивидуальных заданий.....	18
7 Литература, рекомендуемая для изучения темы.....	19
Приложение А.....	20

## Введение

Для исследования производственной системы экономики как на макро- так и на микроэкономическом уровне широко применяются производственные функции. Экономика страны или отдельной фирмы рассматривается как система, на вход которой поступают ресурсы, а на выходе получается результат в виде годовых объемов производства различных видов продукции.

Любой процесс производства связан с потреблением различных ресурсов. В число ресурсов входит все то, что необходимо для производственной деятельности: сырье, энергия, труд, оборудование, природная среда. Для того чтобы описать поведение фирмы, необходимо знать, какое количество продукта она может произвести, используя ресурсы в тех или иных объемах. Зависимость объема продукции, которое может произвести фирма, от объемов затраченных ресурсов получила название производственной функции.

Но предприятие может по-разному организовать производственный процесс, используя различные технологические способы, варианты организации производства, так что и количество продукта, получаемое при одних и тех же затратах ресурсов, может быть разным. На основе анализа производственной функции фирмы имеется возможность отклонить варианты производства, дающие меньший выход продукта, если при тех же самых затратах каждого вида ресурса можно получить больший результат, используя альтернативные технологии. Точно так же возможно отклонить варианты, требующие больших затрат хотя бы одного ресурса без увеличения выпуска продукции и сокращения затрат других ресурсов.

Технически эффективными называют варианты производства, которые нельзя улучшить ни увеличением производства продукта без увеличения расхода ресурсов, ни сокращением затрат какого-либо ресурса без снижения выпуска и без увеличения затрат других ресурсов. Производственная функция позволяет определить технически эффективные варианты.

В комплексном анализе хозяйственной деятельности производственные функции применяют для решения следующих задач:

- оценки отдачи ресурсов в производственном процессе;
- прогнозирования экономического роста;
- разработки планов развития производства;
- оптимизации функционирования хозяйственной единицы;
- сравнения эффективности деятельности различных экономических объектов.

## 1 Описание лабораторной работы

Производственные функции предназначены для моделирования процесса производства самостоятельной хозяйственной единицы: фирмы, отрасли или экономики государства в целом.

В общем случае производственная функция имеет вид:  $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, \bar{\varepsilon}) = 0$ , где  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор ресурсов;  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  – вектор результатов;  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  – вектор параметров производственной функции;  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$  – вектор случайных ошибок, учитывающих влияние неучтенных в модели факторов.

Вместо общего представления производственной функции, как правило, рассматривают два частных случая:

1) функцию выпуска, в которой в качестве независимых переменных берутся затраты ресурсов, а зависимой переменной является выпуск  $\bar{y} = F(\bar{x}, \bar{a}, \bar{\varepsilon})$ ;

2) функцию производственных затрат, в которой независимой переменной является выпуск, а зависимой переменной – затраты  $\bar{x} = \Psi(\bar{y}, \bar{a}, \bar{\varepsilon})$ .

В качестве ресурсов (факторов производства) на макроуровне наиболее часто рассматриваются накопленный труд в форме производственных фондов (капитал)  $K$  и настоящий (живой) труд  $L$ , а в качестве результата – валовой выпуск  $Y$  (валовой внутренний продукт, либо национальный доход).

Ставится задача построения и анализа макроэкономической производственной функции наиболее качественно описывающей исходные данные.

Целью лабораторной работы является приобретение навыков построения производственной функции и проведения содержательного экономического анализа.

Выполнение лабораторной работы включает следующие этапы:

- 1) изучение теоретического материала по тематике работы;
- 2) построение и исследование производственной функции с помощью пакетов прикладных программ (Statistica, Mathcad или Excel);
- 3) подготовку письменного отчета;
- 4) защиту лабораторной работы.

## 2 Постановка задачи

На основе данных об индексах реального объема производства, реальных капитальных затрат и реальных затрат труда по экономике страны в соответствии с вариантом индивидуального задания построить производственную функцию, выраженную как функция регрессии выпуска ( $Y$ ) от двух переменных – капитала ( $K$ ) и труда ( $L$ ).

Провести экономический анализ производственной функции по следующим направлениям:

- установить характер отдачи от увеличения масштаба производства;
- рассчитать среднюю и предельную эффективности ресурсов;
- определить эластичности выпуска по ресурсам; предельную норму замещения одного ресурса другими.

Построить изокванты и изоклинали для трех произвольных значений выпуска и предельных норм замещения соответственно.

Используя построенную производственную функцию определить затраты капитала, если известно, что выпуск требуется увеличить на  $z$  % по отношению к базовому периоду, при этом затраты труда должны:

- а) оставаться на прежнем уровне;
- б) уменьшиться на  $w$  %.

### Пример 0 варианта задания.

Вариант	0
№ таблицы	1,2
Результативный признак	Y
Факторы производства	K,L

Таблица 1 – Индексы реального объема производства, реальных капитальных затрат и реальных затрат труда (промышленность США)

Годы	$Y$	$K$	$L$
1	2	3	4
1899	100	100	100
1900	101	107	105
1901	112	114	110
1902	122	122	118
1903	124	131	123
1904	122	138	116
1905	143	149	125
1906	152	163	133
1907	151	176	138
1908	126	185	121
1909	155	198	140
1910	159	208	144
1911	153	216	145
1912	177	226	152
1913	184	236	154
1914	169	244	149

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
1915	189	266	154
1916	225	298	182
1917	227	335	196
1918	223	366	200
1919	218	387	198
1920	231	407	193
1921	179	417	147
1922	240	431	161

Таблица 2 – Варианты индивидуальных заданий для анализа

№ варианта	Объем выпуска в базовом периоде, $Y_0$	Затраты труда в базовом периоде, $L_0$	$z, \%$	$w, \%$
1	2	3	4	5
0	100	100	15	10

### 3 Порядок выполнения лабораторной работы

На начальном этапе построения производственной функции (ПФ) необходимо выбрать тип производственной функции. Так как представленная информация характеризует макроэкономический уровень развития системы, то целесообразно строить ПФ в классе степенных производственных функций от двух факторов.

Для выбранного типа производственной функции имеет смысл исследовать характер эластичности производства ( $E_{общ}$ ), значение которой может быть как меньше единицы («падающая» экономика), равное единице (стабильная экономика), так и больше единицы («растущая» экономика).

Пусть  $\bar{E}_{общ}$  – оценка коэффициента эластичности, имеющая нормальный закон распределения. Для уточнения спецификации модели целесообразно проверить гипотезу  $H_0: M(\bar{E}_{общ})=1$  и альтернативную ей гипотезу  $H_1: M(\bar{E}_{общ}) \neq 1$ .

Для проверки нулевой гипотезы построим статистику  $t$ :

$$t = \frac{\bar{E}_{общ} - 1}{\hat{S}_{общ}} \sqrt{n-1},$$

которая в случае справедливости гипотезы  $H_0$  имеет распределение Стьюдента с  $\nu = n-1$  степеней свободы.

Оценим эластичности по отдельным ресурсам, используя определение коэффициента эластичности:

$$E_x \Big|_{x=x_t} = \frac{\partial y(x_t)}{\partial x_t} \Big/ \frac{y(x_t)}{x_t}, \text{ где } x_t = \{K_t, L_t\}.$$

Для расчетов аппроксимируем производные конечными разностями первого порядка:

$$\frac{\partial y(x_t)}{\partial x} \Big|_{x=x_t} \approx \frac{y_{t+1} - y_t}{x_{t+1} - x_t}, \text{ тогда } E_x^* = \frac{(y_{t+1} - y_t) \cdot x_t}{(x_{t+1} - x_t) \cdot y_t}.$$

где  $t = \overline{1;24}$ ;  $E_x^*$  - приближенное значение эластичности в соответствующей точке.

Результаты расчетов приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Расчет эластичностей выпуска по ресурсам и общей эластичности

$t$	$Y$	$K$	$L$	$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{K_{t+1} - K_t}$	$\frac{K_t}{Y_t}$	$E_K^*(Y_t)$	$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{L_{t+1} - L_t}$	$\frac{L_t}{Y_t}$	$E_L^*(Y_t)$	$E_{общ}^* = E_K^*(Y_t) + E_L^*(Y_t)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	100	100	100		1,00			1,00		
2	101	107	105	0,14	1,06	0,15	0,20	0,98	0,20	0,35
3	112	114	110	1,57	1,02	1,60	2,20	0,96	2,12	3,72
4	122	122	118	1,25	1,00	1,25	1,25	0,97	1,21	2,46
5	124	131	123	0,22	1,06	0,23	0,40	0,94	0,38	0,61
6	122	138	116	-0,29	1,13	-0,32	0,29	0,84	0,24	-0,08
7	143	149	125	1,91	1,04	1,99	2,33	0,84	1,96	3,95
8	152	163	133	0,64	1,07	0,69	1,13	0,82	0,92	1,61
9	151	176	138	-0,08	1,17	-0,09	-0,20	0,78	-0,16	-0,25
10	126	185	121	-2,78	1,47	-4,08	1,47	0,65	0,96	-3,12
11	155	198	140	2,23	1,28	2,85	1,53	0,71	1,08	3,93
12	159	208	144	0,40	1,31	0,52	1,00	0,69	0,69	1,22
13	153	216	145	-0,75	1,41	-1,06	-6,00	0,67	-4,03	-5,09
14	177	226	152	2,40	1,28	3,06	3,43	0,67	2,31	5,37
15	184	236	154	0,70	1,28	0,90	3,50	0,65	2,28	3,18
16	169	244	149	-1,88	1,44	-2,71	3,00	0,61	1,83	-0,88
17	189	266	154	0,91	1,41	1,28	4,00	0,58	2,32	3,60
18	225	298	182	1,13	1,32	1,49	1,29	0,61	0,79	2,28



Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
19	227	335	196	0,05	1,48	0,08	0,14	0,59	0,08	0,16
20	223	366	200	-0,13	1,64	-0,21	-1,00	0,55	-0,55	-0,76
21	218	387	198	-0,24	1,78	-0,42	0,71	0,50	0,36	-0,07
22	231	407	193	0,65	1,76	1,15	2,60	0,49	1,26	2,41
23	179	417	147	-5,20	2,33	-12,11	1,02	0,35	0,36	-11,75
24	240	431	161	4,36	1,80	7,82	4,36	0,37	1,63	9,45

Оценим среднюю общую эластичность и среднеквадратическое отклонение:  $\bar{E}_{общ} = 0,97$ ,  $\hat{S}_{\bar{E}_{общ}} = 4,05$  ( $\bar{E}_{общ}$  - это оценка  $E_{общ}$ ).

Для проверки гипотезы  $H_0$  строим двустороннюю критическую область. При заданном уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и числе степеней свободы  $\nu = 23$ , находим  $t_{кр}$ . Сравнивая расчетное значение с критическим:  $|t_H| = 0,035 < t_{кр} = 2,074$ , делаем вывод о том, что гипотеза  $H_0$  принимается.

Так как  $M(\bar{E}_{общ}) = 1$ , то целесообразно производственную функцию строить в виде степенной функции при условии равенства единице суммы эластичностей.

Перейдем к этапу идентификации.

Будем искать производственную функцию в следующем виде:

$$\tilde{y} = AK^{\alpha_1}L^{1-\alpha_1}$$

Исходя из модели  $y_t = AK_t^{\alpha_1}L_t^{1-\alpha_1}e^{\varepsilon_t}$  ( $t = \overline{1,24}$ ) для оценки параметров методом наименьших квадратов проведем предварительно ее линеаризацию:

$$\ln y_t = \ln A + \alpha_1 \ln K_t + (1 - \alpha_1) \ln L_t + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,24}.$$

Оценим параметры линеаризованной модели, воспользовавшись возможностями ППП Statistica. Результаты оценивания представлены на рисунках 1 и 2.

```

Model is: y1=a0+a1*k1+(1-a1)*l1
Dependent variable: y1                Independent variables: 2
Loss function: least squares
Final value: ,07164273
Proportion of variance accounted for: ,95702818    R = ,97827817
    
```

Рисунок 1 – Диалоговое окно оценивания параметров производственной функции

Model is: $y_1 = a_0 + a_1 \cdot k_1 + (1 - a_1) \cdot l_1$ (Данные по мод макр)						
Dep. Var. : $y_1$						
Level of confidence: 95.0% ( alpha=0.050)						
	Estimate	Standard error	t-value df = 22	p-level	Lo. Conf Limit	Up. Conf Limit
a0	0,014545	0,019979	0,727985	0,474300	-0,026890	0,055979
a1	0,254134	0,041224	6,164777	0,000003	0,168642	0,339627

Рисунок 2 – Результаты оценивания параметров производственной функции

Оценка уравнения регрессии имеет вид:

$$\hat{\ln y}_t = 0,0145 + 0,254 \ln K_t + 0,746 \ln L_t,$$

(0,04)                      (0,04)

в которой оценка коэффициента детерминации высокая  $\hat{R}^2 = 0,957$ . Следовательно, построенная функция хорошо аппроксимирует исходные данные.

Поскольку есть основание предполагать, что регрессионные остатки имеют нормальный закон распределения (рисунок 3), то на основании отчета (рисунок 2) можно сделать вывод, что оценки коэффициентов при логарифмах  $K$  и  $L$  являются значимыми.

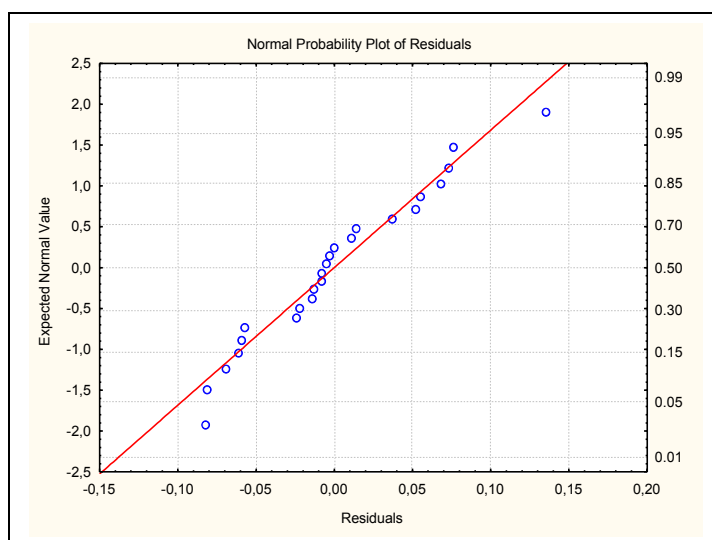


Рисунок 3 - Проверка регрессионных остатков на нормальный закон распределения.

Выполнив обратное преобразование, получим следующую степенную производственную функцию:

$$\hat{y}_t = 1,015 K_t^{0,254} L_t^{0,746}$$

На следующем этапе исследования с целью отражения фактора времени и влияния научно-технического прогресса может быть построена производственная функция с учетом НТП вида:

$$\tilde{y} = AK^{\alpha_1} L^{1-\alpha_1} e^{\lambda t}.$$

Исходя из модели  $y_t = AK_t^{\alpha_1} L_t^{1-\alpha_1} e^{\lambda t} e^{\varepsilon_t}$  ( $t = \overline{1,24}$ ) для оценки параметров методом наименьших квадратов проведем предварительно ее линеаризацию:

$$\ln y_t = \ln A + \alpha_1 \ln K_t + (1 - \alpha_1) L_t + \lambda t + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,24}.$$

Воспользовавшись ППП Statistica, оценим параметры линеаризованной модели. Результаты представлены на рисунках 4 и 5.

```

Model is: y1=a0+a1*k1+(1-a1)*l1+h*t
Dependent variable: y1                Independent variables: 3
Loss function: least squares
Final value: ,0683175
Proportion of variance accounted for: ,95902268    R = ,97929703
    
```

Рисунок 4 – Диалоговое окно оценивания параметров ПФ с учетом НТП

Model is: y1=a0+a1*k1+(1-a1)*l1+h*t (Данные по мод макр)						
Dep. Var. : y1						
Level of confidence: 95.0% ( alpha=0.050)						
	Estimate	Standard error	t-value df = 21	p-level	Lo. Conf Limit	Up. Conf Limit
a0	-0,005384	0,028059	-0,191881	0,849679	-0,063736	0,052968
a1	0,108681	0,149653	0,726219	0,475722	-0,202540	0,419902
h	0,006176	0,006109	1,011007	0,323521	-0,006528	0,018880

Рисунок 5 – Результаты оценивания параметров ПФ с учетом НТП

Оценка уравнения регрессии имеет вид:

$$\ln \hat{y}_t = -0,005 + \underset{(0,149)}{0,109} \ln K_t + \underset{(0,149)}{(1 - 0,109)} L_t + \underset{(0,006)}{0,006} t,$$

в которой оценка коэффициента детерминации высокая  $\hat{R}^2 = 0,959$ .

Поскольку есть основание предполагать, что регрессионные остатки имеют нормальный закон распределения (рисунок 6), то на основании отчета (рисунок 5) можно сделать вывод, что оценки коэффициентов при

логарифмах  $K$  и  $L$ , а также оценка  $\ln A$  и  $\lambda$  не являются значимыми. Следовательно, от дальнейшего рассмотрения данной производственной функции имеет смысл отказаться.

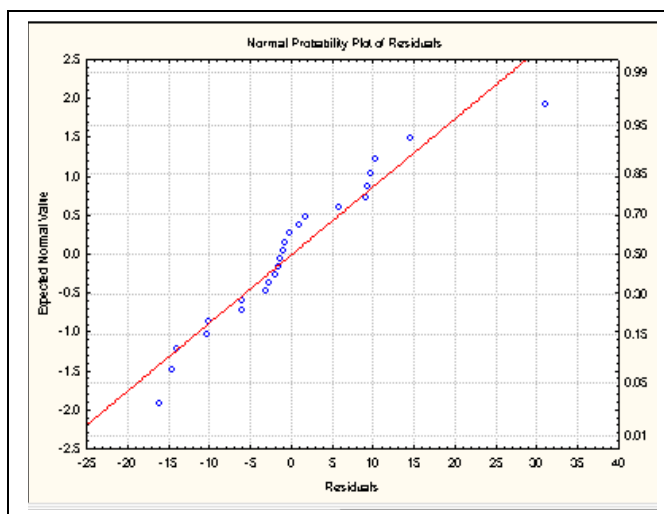


Рисунок 6 - Проверка регрессионных остатков на нормальный закон распределения

Из построенных моделей в ППП Statistica, в дальнейшем исследовании будем рассматривать производственную функцию вида:

$$\hat{y}_t = 1,015 K^{0,254} L^{0,746}$$

Данное уравнение регрессии обладает высоким коэффициентом детерминации, его коэффициенты являются значимыми и экономически обоснованными.

Замечание. На микроэкономическом уровне помимо степенных моделей могут использоваться линейная ПФ; функция Солоу, Леонтьева, Аллена. Выбор спецификации модели во многом определяется особенностями исследуемого объекта.

Построение и исследование производственных функций также можно осуществить с помощью других ППП (Mathcad, Stadia, Microsoft Excel).

Перейдем к анализу построенной производственной функции, опустив в дальнейших рассуждениях индекс  $t$ :

$$y = F(K, L) = 1,015 K^{0,254} L^{0,746}$$

1) Установим характер отдачи от изменения масштаба производства.

Увеличим объем ресурсов в  $m$  раз, тогда

$$y = F(mK, mL) = 1,015(m \cdot K)^{0,254} \cdot (m \cdot L)^{0,746} =$$

$$m^{0,254+0,746} 1,015 K^{0,254} L^{0,746} = m^1 F(K, L)$$

Следовательно, степень однородности  $p=1$ , что соответствует постоянной эффективности производства при росте его масштаба.

Имеет смысл заметить, что, так как построенная производственная функция является классической функцией Кобба-Дугласа, соответственно

выполняются все свойства, предъявляемые к ПФ и наблюдается постоянная отдача от изменения масштаба производства.

2) Для оценки эффективности использования ресурсов рассчитаем среднюю и предельную эффективности ресурсов.

Средняя производительность (эффективность) фондов (фондоотдача) -

$$AF_k = \frac{F(K, L)}{K} = 1,015K^{-0,746}L^{0,746};$$

средняя эффективность труда (производительность труда) -

$$AF_L = \frac{F(K, L)}{L} = 1,015K^{0,254}L^{-0,254};$$

предельная эффективность фондов (предельная фондоотдача) -

$$MF_k = \frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 AK^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2} = 0,254 \cdot 1,015K^{-0,746}L^{0,746} = 0,258K^{-0,46}L^{0,746};$$

предельная эффективность труда (предельная производительность труда) -

$$MF_L = \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2 - 1} = 0,746 \cdot 1,015K^{0,254}L^{-0,254} = 0,757K^{0,254}L^{-0,254}.$$

Зависимость суммарных, средних и предельных эффективностей капитала при фиксированных ресурсах труда на уровне 100 единиц представлена на рисунке 7. На рисунке 8 показана зависимость суммарных, средних и предельных эффективностей по труду при фиксированных ресурсах капитала на уровне 100 единиц.

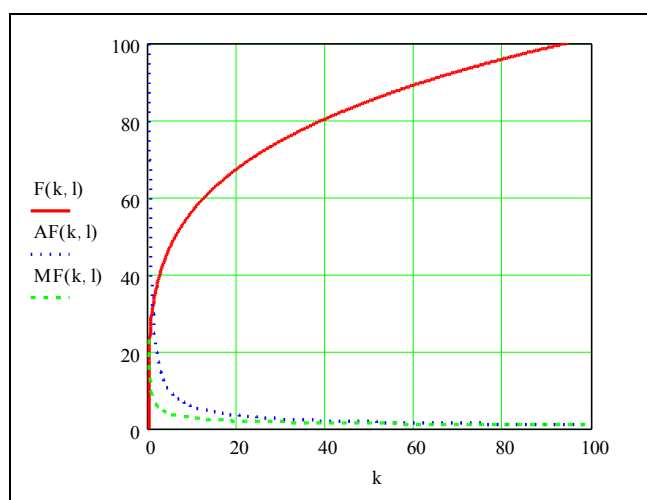


Рисунок 7 – Соотношение между суммарными, средними и предельными эффективностями капитала при L=100 ед.

3) Рассчитаем коэффициент эластичности выпуска по капиталу:

$$E_K = \left[ \frac{\partial F(K, L)}{\partial (K)} \right] \bigg/ \left[ \frac{F(K, L)}{K} \right] = \frac{A \alpha_1 K^{\alpha_1 - 1} L^{1 - \alpha_1}}{A K^{\alpha_1 - 1} L^{1 - \alpha_1}} = \alpha_1 = 0,254.$$

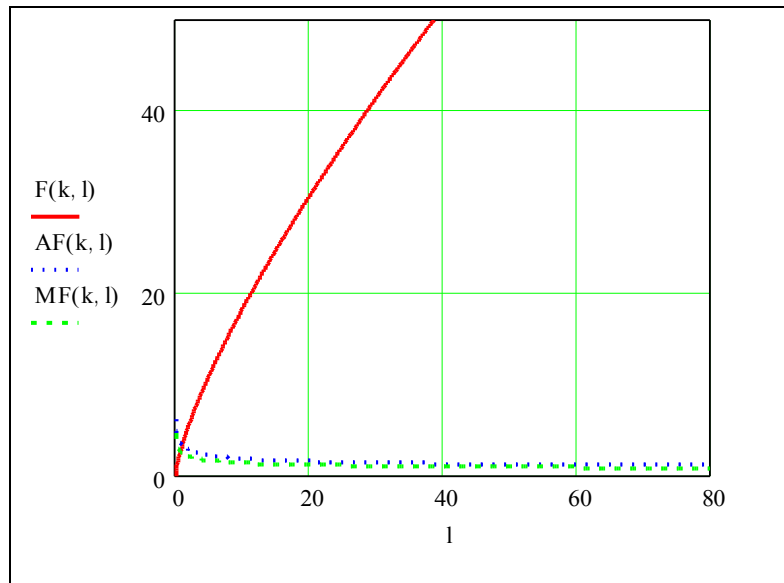


Рисунок 8 – Соотношение между суммарными, средними и предельными эффективностями труда при  $K=100$  ед.

То есть, при изменении величины капитала на 1 % объем выпуска увеличивается на 0,254 %;

4) Рассчитаем коэффициент эластичности выпуска по труду:

$$E_L = \left[ \frac{\partial F(K, L)}{\partial (L)} \right] \bigg/ \left[ \frac{F(K, L)}{L} \right] = \frac{A K^{\alpha_1} (1 - \alpha_1) L^{(1 - \alpha_1) - 1}}{A K^{\alpha_1} L^{(1 - \alpha_1) - 1}} = 1 - \alpha_1 = 0,746,$$

то есть при изменении величины труда на 1 % объем выпуска увеличивается на 0,746 %.

Так как  $\alpha_2 > \alpha_1$ , то имеет место экстенсивный (фондосберегающий) характер использования ресурсов.

Таким образом, оцененные параметры производственной функции имеют четкую экономическую интерпретацию:  $\alpha_1$  и  $(1 - \alpha_1)$  – эластичности выпуска по ресурсам, кроме того параметр  $A=1,015$  – коэффициент нейтрального технического прогресса, показывает выпуск при единичных вложениях ресурсов.

5) Для исследуемой производственной функции рассчитаем предельную норму замещения одного ресурса другим, которая показывает, на сколько единиц увеличатся затраты второго ресурса, если затраты первого уменьшатся на одну единицу (или наоборот):

$$R_{12} = \left( \frac{\partial F}{\partial K} \right) \bigg/ \left( \frac{\partial F}{\partial L} \right) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{L}{K} = 0,340 \cdot \frac{L}{K}.$$

Аналогично для второго ресурса:

$$R_{21} = \left( \frac{\partial F}{\partial L} \right) / \left( \frac{\partial F}{\partial K} \right) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{K}{L} = 2,937 \cdot \frac{K}{L}.$$

б) Построим изокванты и изоклинали анализируемой производственной функции.

Для степенной производственной функции изокванта имеет вид  $AK^{\alpha_1}L^{(1-\alpha_1)} = Y_0 = const$ , или  $K = \left( \frac{Y_0}{A} L^{-(1-\alpha_1)} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ , т.е. изокванта является степенной гиперболой, асимптотами которой служат оси координат.

Для производственной функции  $\hat{y} = 1,015 K^{0,254} L^{0,746}$  в качестве уровней объема выпуска продукции были выбраны значения  $Y_0=50, 100, 150$  (рисунок 9).

Для разных  $K$  и  $L$ , лежащих на конкретной изокванте, выпуск равен одному и тому же значению  $Y_0$ , что эквивалентно утверждению о взаимозаменяемости ресурсов вдоль изокванты.

$$g1(l) := \left( \frac{50}{A \cdot l^{a2}} \right)^{\frac{1}{a1}} \quad g2(l) := \left( \frac{100}{A \cdot l^{a2}} \right)^{\frac{1}{a1}} \quad g3(l) := \left( \frac{150}{A \cdot l^{a2}} \right)^{\frac{1}{a1}}$$

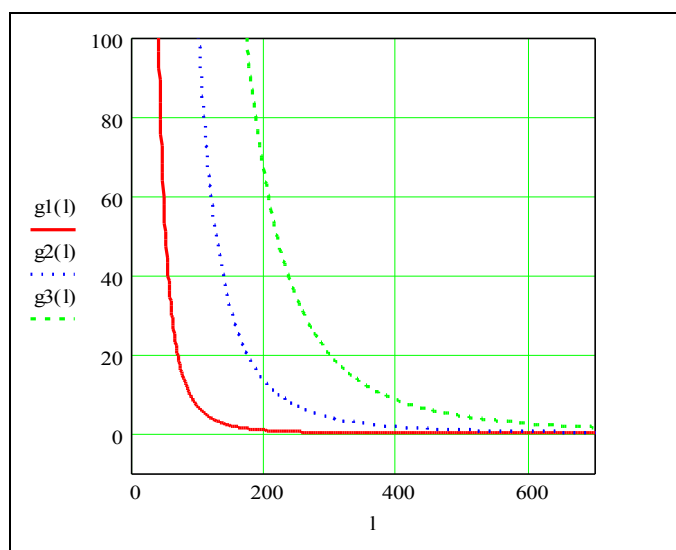


Рисунок 9 – Изокванты производственной функции для  $Y_0=50, 100, 150$

Для степенной ПФ изоклинали задается дифференциальным уравнением:  $\frac{1}{\alpha_1} K dK = \frac{1}{\alpha_2} L dL$ , которая имеет решение:  $K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + \alpha}$ ,

$\alpha = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2$ , где  $(K_0; L_0)$  – координаты точки, через которую проходит

изоклинали.

Изоклинали изображены на рисунке 10.

Изоклинали – линии наибольшего роста ПФ – ортогональны изоквантам.

$$a(K_0, L_0) := K_0^2 - \frac{a_1}{a_2} L_0^2$$

$$s_1(l) := \sqrt{\frac{a_1 \cdot l^2}{a_2} + a(0, 0)} \quad s_2(l) := \sqrt{\frac{a_1 \cdot l^2}{a_2} + a(120, 100)} \quad s_3(l) := \sqrt{\frac{a_1 \cdot l^2}{a_2} + a(100, 180)}$$

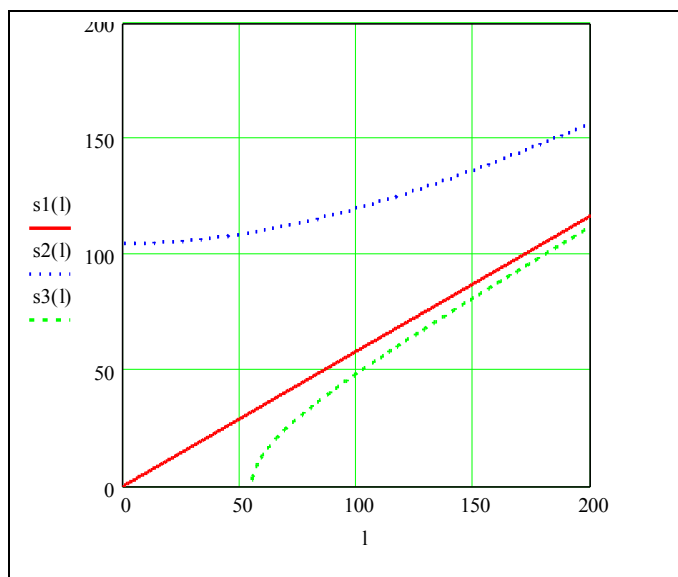


Рисунок 10 – Изоклинали производственной функции

Воспользуемся построенной производственной функцией для решения задач планирования. Определим затраты капитала, если известно, что выпуск требуется увеличить на  $z\%$  ( $z=15$ ) по отношению к базовому периоду, при этом трудозатраты должны а) оставаться на прежнем уровне; б) уменьшиться на  $w\%$  ( $w=10$ ).

Рассмотрим первый случай – увеличение выпуска на 15% при условии, что трудозатраты остаются на прежнем уровне. Таким образом, будем иметь два соотношения:

$$\hat{y} = 1,015K^{0,254}L^{0,746} \text{ - для базового периода;}$$



$$1,15\hat{y} = 1,015 K^{*0,254} L^{0,746} \quad - \text{ для планового периода,}$$

где  $K^*$  - количество капитала в плановом периоде.

Разделив второе уравнение на первое, получим следующее соотношение:

$$1,15 = \left( \frac{K^*}{K} \right)^{0,254}.$$

Разрешая его относительно  $K^*$  получим, что  $K^* = 1,73K$ , то есть для достижения требуемого результата в плановом периоде необходимо увеличить затраты капитала в 1,73 раз по сравнению с базовым периодом – количество капитала должно составить величину 173 единицы.

Рассмотрим второй случай – увеличение выпуска на 15% при условии уменьшения затрат на 10%. Будем иметь два соотношения:

$$\hat{y} = 1,015 K_t^{0,254} L_t^{0,746} \quad - \text{ для базового периода;}$$

$$1,15\hat{y} = 1,015 K_t^{*0,254} (0,9L_t)^{0,746} \quad - \text{ для планового периода.}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим следующее соотношение:

$$1,15 = \left( \frac{K^*}{K} \right)^{0,254} 0,9^{0,746}.$$

Разрешая относительно  $K^*$ , получим, что  $K^* = 2,4K$ , следовательно, для достижения требуемого результата необходимо увеличить основные производственные фонды в 2,4 раза, что составляет необходимую величину капитала – 240 единиц. Исходя из возможностей экономического объекта по наращиванию капитала, выбирается оптимальный вариант управленческого решения. Таким образом, в результате исследования построена производственная функция  $\hat{y}_t = 1,015 K_t^{0,254} L_t^{0,746}$ , которая может использоваться как для анализа текущего состояния, так и для прогнозирования развития экономической системы.

#### 4 Содержание письменного отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется на листах формата А4 и должен иметь следующую структуру:

- 1) постановка задачи;
- 2) краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач;
- 3) результаты построения и исследования производственной функции с помощью пакетов прикладных программ (Statistica, Mathcad или Excel);
- 4) анализ полученных результатов и выводы.

## 5 Вопросы к защите

- 1) Какая производственная функция называется неоклассической?
- 2) Какой экономический смысл имеют коэффициенты  $A$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  степенной производственной функции  $F(K, L) = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ ?
- 3) Назовите основные свойства, которым должна удовлетворять производственная функция.
- 4) Как определяются средняя производительность труда и капиталовооруженность (фондовооруженность) труда?
- 5) Что такое изокванта? В чем ее экономический смысл? Что такое изоклиналь? Приведите уравнения изоквант и изоклиналей?
- 6) Как определяется средняя производительность капитала (капиталоотдача)?
- 7) Как определяется предельная производительность капитала и предельная производительность труда?
- 8) Сформулируйте определение эластичности выпуска по  $i$ -му ресурсу ( $i$ -му фактору производства) ( $i=1,2$ ) и определение эластичности производства. Дайте содержательную интерпретацию эластичности выпуска по  $i$ -му ресурсу.
- 9) Сформулируйте определение предельной нормы замены одного ресурса другим. Дайте содержательную интерпретацию этому понятию.

## 6 Варианты для индивидуальных заданий

Исходные данные для индивидуальных заданий приводятся в приложении А на основе информации, приведенной в таблицах 4 и 5.

Таблица 4 – Информация для определения варианта индивидуального задания для построения производственной функции

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ таблицы	A.1	A.2	A.3	A.3	A.4	A.4	A.4	A.4	A.4	A.4
Результатив. признак	$Y$	$Y$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{1A}$	$Y_{2A}$	$Y_{1U}$	$Y_{2U}$	$Y_{1A}$	$Y_{2U}$
Факторы производства	$K, L$	$K, L$	$K, L$	$K, L$	$I_A, L_A$	$I_A, L_A$	$I_U, L_U$	$I_U, L_U$	$I_U, L_U$	$I_A, L_A$
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
№ таблицы	4	4	3	3	4	3	4	2	1	4
Результатив. признак	$Y_{2A}$	$Y_{1U}$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_{2A}$	$Y_1$	$Y_{1A}$	$Y$	$Y$	$Y_{2U}$
Факторы производства	$I_U, L_U$	$I_A, L_A$	$I, L$	$I, L$	$I_A, L_A$	$K, L$	$I_A, L_A$	$K, L$	$K, L$	$I_U, L_U$

Таблица 5 – Варианты индивидуальных заданий для анализа ПФ

№ варианта	Объем выпуска в базовом периоде, $Y_0$	Затраты труда в базовом периоде, $L_0$	$z, \%$	$w, \%$
1	2	3	4	5
1	122,76	103,87	12	7
2	80,85	91,24	10	5
3	95,00	98,04	14	8
4	45,87	84,92	15	6
5	95,18	95,80	13	7
6	95,27	96,00	16	6
7	100,43	95,71	17	8
8	101,01	99,88	16	5
9	97,20	97,29	18	7
10	121,95	101,83	19	10
11	114,53	101,18	18	6
12	102,77	97,19	16	9
13	103,09	100,37	15	7
14	100,10	100,37	18	6
15	137,80	102,25	17	5
16	103,09	100,37	14	7
17	98,92	98,96	10	5
18	164,82	124,72	16	5
19	141,96	112,38	14	9
20	120,38	101,18	12	8

## 7 Литература, рекомендуемая для изучения темы

7.1 Айвазян С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики [Текст]/ Айвазян С. А., Мхитарян В.С. – М.: Юнити,1998.-1022 с.

7.2 Замков О.О. Математические методы в экономике [Текст]: учебник/ О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных.– М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство «ДИС», 1998. – 368 с.

7.3 Колемаев В.А. Математическая экономика [Текст]/ В.А. Колемаев – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.

7.4 Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе [Текст]: курс лекций / Замков О.О. – М.: ГУВШЭ, 2001. – 122 с.

7.5 Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel [Текст]/ О.Н. Салманов. - СПб.: БХВ - Петербург, 2003. – 464 с.

## Приложение А

(обязательное)

Таблица А.1 - Индексы валового выпуска, фондов и труда для СССР (западные оценки по всему народному хозяйству, за исключением сельского хозяйства и сферы услуг, 1966 г. = 100)

Год	<i>Y</i>	<i>K</i>	<i>L</i>
1950	38.84	37.87	80.79
1951	43.66	41.35	84.51
1952	47.47	45.13	87.09
1953	51.99	49.39	89.71
1954	57.80	54.30	93.87
1955	64.36	59.93	95.47
1956	70.26	66.55	93.65
1957	77.60	73.93	94.50
1958	84.71	81.86	98.10
1959	92.38	90.51	100.88
1960	100.00	100.00	100.00
1961	107.54	110.49	98.73
1962	115.51	121.96	100.96
1963	122.76	134.22	103.87
1964	131.12	147.33	108.01
1965	141.96	161.27	112.38
1966	151.97	175.86	114.90

*Y* – произведенный национальный доход в сопоставимых ценах,

*K* – все основные фонды в сопоставимых ценах в среднем за год, рассчитано как полусумма значений соседних лет;

*L* – численность рабочих и служащих.

Таблица А.2 - Индексы выпуска, фондов и труда для СССР (1970 г. = 100)

Год	<i>Y</i>	<i>K</i>	<i>L</i>
1958	43.20	30.83	61.97
1959	46.45	33.94	64.19
1960	50.17	38.10	68.74
1961	53.59	41.59	73.06
1962	56.63	44.97	75.72
1963	58.90	49.79	78.16
1964	64.38	54.31	81.26
1965	68.81	60.16	85.25
1966	74.39	68.11	88.36
1967	80.85	78.00	91.24
1968	87.55	86.68	94.35
1969	91.68	93.01	97.45
1970	100.00	100.00	100.00
1971	105.65	107.84	102.88
1972	109.81	116.64	105.54

Продолжение таблицы А.2

1973	119.62	125.98	108.09
1974	125.98	135.32	110.64
1975	131.73	145.69	113.30
1976	139.48	156.78	115.52
1977	145.81	167.69	117.96
1978	153.32	179.45	120.40
1979	157.10	191.56	122.62
1980	164.82	203.74	124.72
1981	173.55	216.58	126.39
1982	186.64	230.20	127.72
1983	195.43	244.73	128.71
1984	203.11	259.80	129.49
1985	206.29	274.32	130.60
1986	211.03	288.73	131.37
1987	214.41	303.50	131.49
1988	223.85	318.14	129.93
1989	229.43	333.94	127.94
1990	220.26	349.49	125.17

$Y$  – произведенный национальный доход в сопоставимых ценах;

$K$  – все основные фонды в сопоставимых ценах в среднем за год,

$L$  – численность рабочих и служащих.

Таблица А.3 - Индексы выпуска, фондов, инвестиций и труда для России (годовые данные, 1990 г. = 100)

Год	$Y_1$	$Y_2$	$K$	$C$ (%)	$I$	$L$
1989	103.09	100.10	95.70		99.90	100.37
1990	100.00	100.00	100.00		100.00	100.00
1991	95.00	90.59	103.74		85.00	98.04
1992	81.23	76.93	106.48		51.00	95.68
1993	74.16	66.59	107.75	61.00	44.88	94.06
1994	64.74	49.36	107.91	50.25	34.11	90.92
1995	62.09	47.22	107.86	46.00	30.70	88.21
1996	59.98	43.34	107.86	42.75	25.17	87.55
1997	60.51	43.62	107.59	39.50	23.91	85.81
1998	57.55	41.58	107.16	41.50	21.04	84.49
1999	60.66	45.87	107.00	47.50	22.10	84.92
2000	66.12	49.52	107.26	51.00	25.94	85.40
2001	69.42	51.49		55.50	28.20	86.29

$Y_1$  – валовой внутренний продукт в сопоставимых ценах;

$Y_2$  – индекс промышленного производства (данные Госкомстата);

$K$  – основные фонды в сопоставимых ценах в среднем за год;

$C$  – среднегодовой уровень загрузки производственных мощностей в промышленности, %, получено осреднением квартальных значений;

$I$  – индекс инвестиций в основной капитал в сопоставимых ценах;

$L$  – среднегодовая численность занятых в экономике.

Таблица А.4 - Индексы выпуска, инвестиций и труда для России  
(квартальные данные, сезонно корректированное значение 1 кв. 1994 г. = 100)

Год	$Y_{1A}$	$Y_{2A}$	$I_A$	$L_A$	$Y_{1U}$	$Y_{2U}$	$I_U$	$L_U$
1991.1		187.97	254.82	106.07		189.10	194.71	106.07
1991.2		176.74	256.47	106.53		174.34	241.46	106.50
1991.3		175.58	252.76	106.62		169.25	308.62	106.65
1991.4		167.46	172.65	105.74		174.06	190.91	105.78
1992.1		161.61	148.06	105.08		165.40	109.04	105.06
1992.2		155.10	136.41	104.10		151.03	125.54	104.06
1992.3		142.69	126.17	102.88		137.01	151.24	102.91
1992.4		138.55	129.84	102.70		146.73	148.92	102.76
1993.1		143.71	135.58	102.68		143.19	105.77	102.62
1993.2		137.80	126.72	102.25		134.01	115.50	102.19
1993.3		126.48	111.59	101.83		121.95	127.02	101.90
1993.4		114.53	110.07	101.09		120.38	132.52	101.18
1994.1	100.00	100.00	100.00	100.00	93.43	101.01	76.15	99.88
1994.2	98.92	95.38	93.32	98.96	95.57	92.48	83.13	98.88
1994.3	98.09	94.34	86.66	98.05	103.52	90.45	95.19	98.16
1994.4	97.20	96.59	81.47	97.19	102.77	101.12	103.33	97.29
1995.1	94.58	95.27	80.24	96.00	87.82	95.90	60.18	95.85
1995.2	95.18	92.86	79.56	95.80	91.74	90.05	69.28	95.71
1995.3	95.44	93.62	79.90	95.57	100.43	89.49	86.41	95.71
1995.4	93.28	88.68	79.81	95.18	98.66	92.99	103.02	95.28
1996.1	92.81	86.49	72.54	95.44	86.14	88.02	53.94	95.28
1996.2	91.98	85.16	66.62	95.07	88.66	82.65	57.11	94.99
1996.3	90.44	83.89	62.99	94.68	95.01	79.83	68.11	94.85
1996.4	90.69	82.75	63.12	94.33	95.95	87.61	83.55	94.41
1997.1	91.87	82.97	62.36	93.74	85.20	83.37	46.01	93.55
1997.2	90.74	84.12	62.24	93.02	87.54	81.78	53.83	92.98
1997.3	92.93	87.34	62.35	92.77	97.44	83.81	67.58	92.98
1997.4	93.80	87.20	65.09	92.63	99.03	91.36	84.51	92.69
1998.1	90.81	84.60	59.34	92.39	84.08	84.90	43.47	92.11
1998.2	89.44	82.63	57.58	91.68	86.61	80.53	50.56	91.68
1998.3	85.15	77.41	55.88	91.11	89.60	73.72	61.03	91.39
1998.4	86.07	81.24	50.63	91.05	90.90	85.22	66.63	91.10
1999.1	88.68	84.97	55.57	91.50	81.84	85.38	40.83	91.10
1999.2	91.23	89.43	56.39	92.38	88.57	87.28	50.13	92.40
1999.3	94.07	92.27	58.16	92.46	99.22	88.81	63.99	92.83
1999.4	95.31	92.32	61.82	92.18	100.43	96.41	79.11	92.26
2000.1	97.07	95.22	64.30	91.75	89.22	96.58	46.22	91.25
2000.2	98.90	95.78	67.10	92.27	96.13	93.81	59.86	92.26
2000.3	101.92	97.76	69.66	92.98	108.00	94.05	76.57	93.41
2000.4	101.76	98.45	72.56	93.43	107.16	101.91	91.91	93.55
2001.1	102.15	98.67	70.02	93.81	93.61	99.05	48.86	93.26
2001.2	104.23	99.65	72.97	93.50	101.37	97.78	64.83	93.41
2001.3	106.56	102.00	75.97	93.41	113.33	98.37	83.13	93.84
2001.4		102.63	80.21	93.40		106.53	101.64	93.55

Продолжение таблицы А.4

$Y_{1A}$  – валовой внутренний продукт в сопоставимых ценах, проведена сезонная корректировка;  
 $Y_{2A}$  – индекс промышленного производства,  
 $I_A$  – индекс инвестиций в основной капитал в сопоставимых ценах;  
 $L_A$  – численность занятого в экономике населения в среднем за квартал;  
 $Y_{1U}$ ,  $Y_{2U}$ ,  $I_U$ ,  $L_U$  – соответствующие данные, не подвергавшиеся сезонной корректировке, но отнормированные так, чтобы их сезонно корректированное значение 1 квартала 1994 г. равнялось 100.