МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры

Г. А. СИКОРСКАЯ, Д.У.ЖАПАЛАКОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСУ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ, ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ЧАСТЬ I

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного
образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2005

УДК 512.64: 514.12 (076.5)
ББК 22.1 я73
С 35

Рецензенты
кандидат физико-математических наук, Герасименко С. А.

Сикорская Г. А.
С 35 **Линейная алгебра и аналитическая геометрия: методические указания по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии, задания для типового расчета / Г. А. Сикорская, Д.У. Жапалакова/. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005.– 49 с**.

Настоящие методические указания представляют обобщение курса алгебры и аналитической геометрии изучаемого на первом семестре транспортного факультета, и содержат в себе задания типового расчета по алгебре и аналитической геометрии, а также решения подобных заданий.

ББК 22.1 я73

Содержание

Введение

Курс алгебры и геометрии предлагаемый к изучению студентам технических специальностей представляет собой математическую теорию, охватывающую векторную алгебру, линейные пространства, линейные операторы и аналитическую геометрию.

Целью математического образования является развитие математической культуры студента, навыков его математического мышления, навыков использования математических методов и развитие умения создавать адекватные математические модели реальных ситуаций.

Математическое образование будущего инженера основывается на фундаментальных понятиях математики. Фундаментальность подготовки в области математики включает в себя достаточную общность математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, точность формулировки математических свойств изучаемых объектов, логическую строгость изложения математики, опирающуюся на адекватный современный математический язык.

Изучение курса алгебры и геометрии помогает сформировать понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке, представление о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре, умение оперировать абстрактными объектами и корректно использовать математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Изучение курса линейной алгебры и аналитической геометрии ставит перед студентом цель овладеть аксиоматическим методом, методами векторной и матричной алгебры и их приложениями, используемыми в математике и специальных дисциплинах.

Аксиоматический метод, положенный в основу линейной алгебры делает теорию менее наглядной и более сложной для восприятия, но трудности в освоении линейной алгебры окупаются тем, что удается уловить связи между весьма отдаленными разделами математики, между которыми на первый взгляд не может быть ничего общего.

1 Содержание курса линейной алгебры и аналитической геометрии (I семестр)

Тема 1. Элементы теории чисел

Предмет курса. Понятие группы, кольца и поля. Поле комплексных чисел. Расширение понятия числа. Комплексные числа: основные определения, алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы записи, операции над комплексными числами, геометрическая интерпретация. Элементы теории чисел. Отображения (гомоморфизм, изоморфизм и др.)

Тема 2. Теория многочленов

Многочлены: основные понятия, делимость, свойства корней. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Разложение рациональных дробей на простейшие. Теоремы о корнях многочленов.

Тема 3. Матрицы: простейшие операции

Матрицы: основные определения, классификация, операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение), элементарные преобразования матриц, приведение к треугольному виду, транспонирование матриц; их свойства. След матрицы. Коммутативные матрицы, идемпотентные матрицы, матрицы блочной структуры: определения, свойства. Кронекерово произведение матриц.

Тема 4. Определители

Определители: формулы для вычисления определителей 1,2,3 порядков. Простейшие свойства определителей. Дополнительный минор и алгебраические дополнения для элемента определителя, их свойства. Практические правила вычисления определителей $n \geq 4$.Определитель произведения матриц.

Тема 5. Линейные системы

Системы m линейных уравнений с n неизвестными: основные определения, классификация, метод Гаусса решения системы m линейных уравнений с n неизвестными; правило Крамера решения системы m линейных уравнений с n неизвестными. Исследование систем линейных алгебраических уравнений. Свойства линейной зависимости.

Тема 6. Обратная матрица

Обратная матрица: определение, свойства, вывод формулы для вычисления. Применение обратных матриц для решения систем. Матричные уравнения.

Тема 7. Ранг матрицы

Ранг матрицы, базисный минор. Различные теоремы о рангах. Теорема Кронекера - Капелли о совместности неоднородной линейной системы.

Тема 8. Векторная алгебра

Векторы в R^3: основные определения (равенство, коллинеарность компланарность), линейные операции. Свойства множества векторов, плоскости (реального пространства), исходящих из одной точки: линейное пространство, базис, размерность. Прямоугольная система координат в R^3, координаты вектора, действия над векторами, заданными в координатной форме. Скалярная проекция вектора на ось: определение, свойства, геометрический смысл координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов: определения, свойства, формулы для вычисления, приложения.

Тема 9. Линейное пространство

Линейное пространство: определение, примеры линейных пространств. Понятие линейной зависимости независимости системы векторов, критерий линейной зависимости системы векторов в произвольном пространстве. Конечномерное линейное пространство: определение, базис, способ выбора базиса, координаты вектора. Критерий линейной независимости векторов в конечномерном пространстве. Матрица перехода от одного базиса к другому. Формулы для связи координат одного и того же вектора в двух базисах одного и того же линейного пространства.

Тема 10. Евклидово пространство

Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского, длина вектора, угол между векторами, ортогональные, ортонормированные системы векторов. Независимость ортонормированной системы векторов. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Изоморфизм евклидовых пространств.

2 Вопросы к зачету (линейная алгебра и аналитическая геометрия, I семестр)

1 Определение комплексного числа.
2 Действия над комплексными числами (алгебраическая форма).
3 Тригонометрическая форма комплексного числа.
4 Умножения комплексных чисел в тригонометрической форме.
5 Деление комплексных чисел в тригонометрической форме.
6 Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме.
7 Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа в тригонометрической форме.
8 Матрица (определение, размерность).
9 Матрицы: столбцевая, квадратная, нулевая, единичная, диагональная, треугольная, трапецевидная, симметрическая.
10 Линейные операции над матрицами.
11 Умножение матриц (условие, правило, свойства).
12 Многочлены от матриц.
13 Транспонирование матриц (свойства).
14 Определитель матрицы. Способы вычисления определителей 2-го, 3-го порядков.
15 Свойства определителей.
16 Миноры и алгебраические дополнения.
17 Определитель высшего порядка, способы его вычисления разложением по элементам строки (столбца).
18 Вычисление определителя приведением к треугольному виду.
19 Разложение определителя по теореме Лапласа.
20 Определитель произведения матриц.
21 Обратная матрица (определение, условие существования).
22 Метод нахождения обратной матрицы посредством элементарных преобразований.
23 Метод нахождения обратной матрицы через алгебраические дополнения.
24 Ранг матрицы (определение, свойства).
25 Метод нахождения ранга матрицы посредством элементарных преобразований.
26 Метод окаймляющих миноров для вычисления ранга матрицы.
27 Определение системы линейных уравнений (различные записи системы линейных уравнений).
28 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
29 Решение систем линейных уравнений посредством правила Крамера.
30 Решение систем линейных уравнений матричным методом.
31 Теорема Кронекера-Капелли.

32 Теоремы о ранге матрицы и количестве решений системы линейных уравнений.
33 Система однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
34 Вектор (определение, координаты, длина, эквивалентность, коллинеарность, компланарность).
35 Линейные операции над векторами.
36 Линейные операции над векторами (свойства).
37 Базис на плоскости, в пространстве.
38 Разложение вектора по базису.
39 Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.
40 Декартово прямоугольная система координат (ориентация векторов).
41 Скалярное произведение векторов (определения, свойства).
42 Выражение скалярного произведения через координаты векторов.
43 Векторное произведение векторов и его свойства.
44 Выражение векторного произведения через координаты векторов.
45 Геометрическое применение векторного произведения векторов.
46 Смешанное произведение векторов (определение, обозначение, геометрическое применение).
47 Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.
48 Линейное пространство: определение, примеры линейных пространств.
49 Понятие линейной зависимости независимости системы векторов, критерий линейной зависимости системы векторов в произвольном пространстве.
50 Конечномерное линейное пространство: определение, базис, способ выбора базиса, координаты вектора.
51 Критерий линейной независимости векторов в конечномерном пространстве.
52 Матрица перехода от одного базиса к другому.
53 Формулы для связи координат одного и того же вектора в двух базисах одного и того же линейного пространства.
54 Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского, длина вектора, угол между векторами, ортогональные, ортонормированные системы векторов.
55 Независимость ортонормированной системы векторов.
56 Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве.
57 Изоморфизм евклидовых пространств.

3 Комплексные числа

1^0. Определение.

Комплексным числом называется выражение вида x+iy, в котором x и y – вещественные числа, а i – некоторый символ. При этом приняты условия:

1) $x+0i=x,\ 0+yi=yi$
2) $x+yi=x_1+y_1i$ тогда и только тогда, когда $x=x_1$ и $y=y_1$.
3) $(x+yi)+(x_1+y_1i)=(x+x_1)+(y+y_1)i,$
4) $(x+yi)(x_1+y_1i)=(x x_1-yy_1)+(xy_1+x_1y)i.$

Из условий 1) и 4) получаются степени числа i:

$$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,\quad i^5=i \quad \text{и т. д.} \tag{1}$$

Комплексное число x+iy, в котором y$\neq$ 0, называется *мнимым числом.*

i- мнимая единица, такая что $i^2=-1$.

2^0. Действия над комплексными числами.

Сложение, вычитание, умножение и возведение в степень комплексных чисел можно выполнять по правилам этих действий над многочленами с заменой степеней числа i по формулам (1).

Деление комплексных чисел и извлечение корня из комплексного числа определяются как действия обратные умножению и возведению в степень.

3^0. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное число x+iy определяется парой вещественных чисел (x, y) и поэтому изображается точкой M (x, y) плоскости или ее радиус - вектором $r=\overrightarrow{OM}$. Длина этого вектора $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* комплексного числа, а его угол φ с осью Ox называется *аргументом* комплексного числа. Так как $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, то

$$x+yi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{2}$$

4^0. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=(rr_1)[\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)], \tag{3}$$

$$\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}=(\frac{r}{r_1})[\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)], \tag{4}$$

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \tag{5}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), \tag{6}$$

где k=0,1,2,….(n-1).

Формулы (5)и (6) называют формулами Моавра.

5^0.ФормулаЭйлера: $\ell^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$.. (7)

6^0. Логарифм комплексного числа:

$$\ln z=\ln r+i\varphi_0+i2\pi k, \tag{8}$$

где φ_0- значение аргумента φ, удовлетворяющее неравенствам $-\pi<\varphi\leq\pi$. Выражение $\ln r+i\varphi_0$ называется *главным значением* логарифма.

Задача 1. Пусть $z_1 = i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -3i$, $z_4 = 1 + i$

Найти значение $\dfrac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 \cdot z_4}$.

Решение. Комплексное число отличающееся от данного только знаком мнимой части называется сопряженным данному. Так, сопряженное числу $z_2 = 2 - i$, будет число $\overline{z_2} = 2 + i$. Выполним задачу по действиям:

1) $z_1 + \overline{z_2} = i + 2 + i = 2 + 2i$

2) $z_3 \cdot z_4 = -3i \cdot (1 + i) = -3i + 3 = 3 - 3i$

3) $\dfrac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 \cdot z_4} = \dfrac{2 + 2i}{3 - 3i} = \dfrac{(2 + 2i)\cdot(3 + 3i)}{(3 - 3i)\cdot(3 + 3i)} = \dfrac{6 + 6i + 6i - 6}{9 + 9} = \dfrac{12i}{18} = \dfrac{2}{3}i$

Ответ: $\dfrac{2}{3}i$

Задача 2. Представить числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Решение. а) $z_1 = 1 + i$ (z= x+iy)

x=1, y=1 $\Rightarrow$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ $\quad\varphi = arctg\dfrac{y}{x} = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$

Следовательно, $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

б) $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

В данном случае x=1, y=$-\sqrt{3}$, следовательно $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$\varphi = arctg\dfrac{y}{x} = arctg\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$. Запишем угол положительным $2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$. Таким образом, $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Задача 3. Найти все значения $\sqrt[4]{\sqrt{3} + 3i}$.

Решение. В начале представим число $z = \sqrt{3} + 3i$ в тригонометрической форме. В данном случае x=$\sqrt{3}$, y=3, таким образом $r = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\varphi = arctg\dfrac{3}{\sqrt{3}} = arctg\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$. Используя формулу (6), имеем: $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right)$, $k = 0,1,2,3.$ Запишем все значения $\sqrt[4]{z}$.

1) при к=0; $\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

2) при к=1; $\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{12}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{12}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

3) при к=2; $\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{12}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

4) при к=3; $\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{12}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

4 Матрицы. Действия над матрицами.

Матрицей $A_{m\times n}$ называется таблица, элементы которой записаны в m строк и n столбцов. Пусть матрицы A и B имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}; \ B = \begin{bmatrix} b_{11} \ b_{12} \ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21} \ b_{22} \ldots\ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1} \ b_{m2} \ldots\ldots b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица, такой же размерности, элементы которой есть сумма соответствующих элементов матриц A и B и называется их *суммой*: A+B=C.

Свойства сложения матриц.

1. Сложение матриц коммутативно: A+B=B+C.
2. Сложение матриц ассоциативно: (A+B)+C=A+(B+C).
3. Операция сложения матриц обратима, т. е. для матриц A и B найдется такая матрица X, что A+X=B.

Произведением матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

на число α называется матрица

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} \ \alpha a_{12} \ldots\ldots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} \ \alpha a_{22} \ldots\ldots \alpha a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha a_{m1} \ \alpha a_{m2} \ldots\ldots \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрица (-1)А обычно записывается как –А и называется *матрицей, противоположной матрице* А.

Из определения умножения матрицы на число и сложения матриц следуют свойства.

1. $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$
2. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.
3. $(\alpha\beta) \cdot A = \alpha(\beta A)$.
4. $\alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$.

Если количество элементов в строках матрицы А равно количеству элементов в столбцах матрицы В, то матрицы называют *соответственными (согласованными)*. Их можно перемножать.

Произведением матрицы $A_{m\times p}$ на матрицу $B_{p\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элемент c_{ij} которой есть сумма произведений элементов i – ой строки матрицы А на соответственные элементы j – того столбца матрицы В, т. е. $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}$

Произведение матриц может быть нуль-матрицей, хотя оба сомножителя не являются нуль-матрицами.

Умножение матриц обладает следующими свойствами.

1. Умножение матриц в общем случае некоммутативно: АВ$\neq$ ВА. (Если матрицы А и В обладают свойством АВ=ВА, то говорят, что они перестановочны или что они коммутируют).
2. Умножение матриц ассоциативно: (АВ)С=А(ВС).
3. Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения: (А+В)С=АС+ВС, С(А+В)=СА+СВ.
4. Для умножения матриц справедливо равенство α(АВ)=А(αВ).

Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Суммой этой матрицы и любой матрицы А дает матрицу А: А+0=А.

Единичной матрицей называется матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении этой матрицы слева или справа на матрицу А получается матрица А: ЕА=АЕ=А.

Матрица В называется обратной по отношению к матрице А, если произведения АВ и ВА равны единичной матрице: АВ=ВА=Е.

Для матрицы, обратной по отношению к матрице А, принято обозначение A^{-1}, то есть $B= A^{-1}$.

Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет обратную матрицу. Обратная матрица находится по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

где A_{ij}- алгебраическое дополнение элемента матрицы a_{ij} в ее определителе, то есть произведение минора второго порядка, полученного вычеркиванием i–й строки и j-го столбца в определителе матрицы A, на $(-1)^{i+j}$, а |A|- определитель матрицы A.

Задача 4. Найти произведение AB данных матриц третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Перемножим соответственные элементы первой строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B, и результаты сложим. Далее первая строчка A и второй столбец B, далее первая строчка A и третий столбец B. Получили первую строку AB. Далее аналогично поступаем со второй строкой матрицы A и поочередно со всеми столбцами матрицы B и т. д.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0\cdot 4 + 2\cdot 3 - 1\cdot 1 & 0\cdot 3 + 2\cdot 2 - 1\cdot 3 & 0\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 5 \\ -2\cdot 4 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & -2\cdot 3 - 1\cdot 2 + 2\cdot 3 & -2\cdot 2 - 1\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ 3\cdot 4 - 2\cdot 3 - 1\cdot 1 & 3\cdot 3 - 2\cdot 2 - 1\cdot 3 & 3\cdot 2 - 2\cdot 1 - 1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Найти значение матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$ при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, если E – единичная матрица третьего порядка.

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, $2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix}$,

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}, 5E = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ 2A^2 + 3A + 5E = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найти матрицу, обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как |A|=-1$\neq$ 0, то данная матрица невырожденная. Вычислим алгебраические дополнения: $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27$. Аналогично, находим $A_{21} = 1$, $A_{22} = -41$, т $A_{23} = 29$, $A_{31} = -1$, $A_{32} = 34$, $A_{33} = -24$. Таким образом,

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Вычислим произведение:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что доказывает правильность полученного результата.

5 Определители.

Определителем 2 –го порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{9}$$

Определителем 3-го порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3. \tag{10}$$

Числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ называются элементами определителя. Элементы a_1, b_2, b_3, c_3 расположены на диагонали определителя, называемой *главной*; элементы a_3, b_2, b_3, c_1 составляют его *побочную* диагональ. Для практики вычислений полезно заметить, что первые три слагаемые в правой части равенства (10) представляют собой произведения элементов определителя главной диагонали и элементов находящихся в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Следующие три слагаемых – произведение элементов побочной диагонали, элементов, находящихся в вершинах треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали, взятых с противоположным знаком.

Свойства определителей.

1^0. Определитель не изменится, если строки определителя заменить столбцами, а столбцы – соответствующими строками.

2^0. Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.

3^0. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

4^0. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

5^0. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (теорема о линейной комбинации параллельных рядов определителя).

Определитель, число строк (столбцов) которого выше трех, называется *определителем высшего порядка*, который вычисляется на основе теоремы:

Определитель равен сумме произведений элементов некоторой его строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов.

Задача 7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение. При вычислении данного определителя используем теорему разложения определителя по элементам строк (столбца). Прежде чем раскладывать определитель выберем “удобную” для нас строку (столбец) и путем допустимых преобразований “обнулим” все элементы выбранной строки (столбца), кроме одного. Итак, выбираем второй столбец, так как он содержит больше всего нулей. Далее, пользуясь выше названной теоремой разложим определитель по элементам этой выбранной, и уже преобразованной строки (столбца), но поскольку все элементы, кроме одного нулевые мы приходим к вычислению только одного определителя порядка на единицу ниже исходного.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$=2\cdot 0-(-3)\cdot 1=0+3=3.$

Задача 8. Решить неравенство $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14.$

Решение. Пользуясь способом вычисления определителя второго порядка, приходим к следующему неравенству:

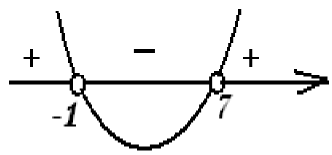
$$2x^2 - 12x < 14$$

$$2x^2 - 12x - 14 < 0 \quad |:2$$

$$x^2 - 6x - 7 < 0$$

$$D = 36 + 4\cdot 7 = 36 + 28 = 64 = 8^2$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \left| \begin{array}{l} 7 \\ -1 \end{array} \right.$$



Таким образом, решением неравенства является промежуток (-1; 7).

Задача 9. Решить матричное уравнение ABX=C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. 1. Выполним умножение AB.

$$D = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Итак, имеем уравнение DX=C. Решим его в общем виде. Для этого умножим обе части уравнения слева на матрицу D^{-1}, $D^{-1}DX=D^{-1}C$, так как $D^{-1}D=E$, то $X=D^{-1}C$. Вычислим определитель.

$$\det D=(12+90-45)-(45+36+30)=18 \neq 0.$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 9 \qquad D_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 21 \qquad D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 30$$

$$D_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -3 \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -11 \qquad D_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -20$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9 \qquad D_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -15 \qquad D_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -24$$

3. Находим матрицу обратную матрице D по формуле

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Таким образом, подставив найденное в формулу (*), имеем

$$D^{-1} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -3 & -9 \\ 21 & -11 & -15 \\ 30 & -20 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} & -\frac{11}{18} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{10}{9} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Окончательно, получаем решение исходного уравнения.

$$X=D^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} & -\frac{11}{18} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{10}{9} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{31}{18} & -\frac{10}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{20}{9} & -\frac{19}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{31}{18} & -\frac{10}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{20}{9} & -\frac{19}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

6 Ранг матрицы. Способы нахождения ранга матрицы.

Пусть дана матрица размером $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Выделим в матрице А *к* строк и *к* столбцов, где *к*- число, меньшее или равное наименьшему из чисел m и n.

Определитель порядка *к*, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, называется *минором к-го порядка матрицы А.*

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Из этого определения следует, что ранг имеет всякая матрица. Если все элементы матрицы равны нулю, то и ранг ее равен нулю, а сама матрица называется *нуль-матрицей* и обозначается О. Ранг матрицы А будем обозначать r(A) или rang A.

Заметим, что если равны нулю все миноры порядка t данной матрицы А, то ее ранг меньше t.

Количество миноров различного порядка той или иной матрицы обычно очень велико. Поэтому вычисление ранга матрицы, основанное на вычислении этих миноров, весьма затруднительно. Однако существуют особые приемы, значительно облегчающие вычисление ранга. Один из приемов основан на приведенной ниже теореме.

Теорема. Ранг матрицы не меняется, если: 1) матрицу протранспонировать; 2) поменять местами две строки (столбца); 3) умножить каждый элемент строки (столбца) на один и тот же множитель, отличный от нуля; 4) сложить одну строку (столбец) с другой строкой (столбцом), умноженный на λ.

Преобразования 1-4 называются *элементарными.*

Метод нахождения ранга матрицы основанный на этой теореме заключается в том, что посредством элементарных преобразований матрица, ранг которой находим, приводится к, так называемому, “ступенчатому” виду, при котором элементы главной диагонали не равны нулю, а элементы, расположенные левее главной диагонали обнуляются. При этом ранг матрицы равен количеству оставшихся ненулевых строк (или, что все равно, количеству элементов стоящих на главной диагонали).

Базисным минором матрицы называют минор, определяющий ранг матрицы. Понятно, что базисный минор может быть определен не единственным способом.

Задача 10. Найти ранг матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Преобразуем матрицу (обозначение S_i – i строчка).

$$A\xrightarrow{\substack{S_2+(-2)S_1\\ S_3+(-3)S_1\\ S_4+(-2)S_1\\ S_5+(-1)S_1\\ S_6+(-3)S_1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow$$

так как действие $-S_2+S_3$ дает нулевую строчку, то вычеркивая нуль строчки полагаем

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{S_3+(-2)S_2\\ S_4+(-3)S_2}}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow[-S_3+S_4]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

В результате проверенных элементарных преобразований исходной матрицы получим трапецивидную матрицу, ранг которой равен трем. Следовательно, rang A=3.

Заметим, что последовательность элементарных преобразований матрицы приведенная в примере не является обязательной, поскольку, повторимся, ранг матрицы не меняется вследствии проведения элементарных преобразований матрицы как над строками так и над столбцами.

Задача 12. Определить ранг и найти базисные миноры матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\2&0&4&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\1&0&2&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\end{pmatrix}$$

r(A)=2. Базисными минорами являются миноры второго порядка этой матрицы, отличные от нуля:

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&2\\4&0\end{vmatrix}.$$

Таким образом, матрица А имеет 8 базисных миноров.

7 Системы линейных уравнений. Условия совместности системы линейных уравнений. Методы решений Системы линейных уравнений.

Пусть дана произвольная система линейных уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.\end{cases}$$

Обозначим через А матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных системы, через В – матрицу – столбец, составленную из свободных членов, а через (А,В) – матрицу, полученную из А присоединением столбца свободных членов:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}\ a_{12}\ldots\ldots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ldots\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots\ldots a_{mn}\end{bmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \cdots\\ b_m\end{pmatrix}\quad (A,B)=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}&b_2\\ \ldots&\ldots&\ldots&..&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}&b_m\end{array}\right)$$

Матрица *A* называется *матрицей системы уравнений*, а матрица (*A, B*) – *расширенной* матрицей этой системы.

Теорема (Кронекера – Капелли.) Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы *A* равнялся рангу расширенной матрицы (*A, B*).

Следствием из теоремы Капелли:

1) Если ранг матрицы *A* системы меньше ранга расширенной матрицы (*A, B*), т. е. $r_A<r_{(A,B)}$, то данная система несовместна, т. е. решения не существует;
2) Если ранги матриц *A* и (*A, B*) одинаковы, т.е. $r_A=r_{(A,\ B)}=r$; то данная система имеет хотя бы одно решение, при этом:
   если $r=n$, то система имеет единственное решение;
   если $r<n\ (m\le n)$, то система имеет бесконечное число решений, которые вычисляются по следующей схеме:

а) выделяется в матрице A минор Δ_r r-го порядка, отличный от нуля $\Delta_r \neq 0$;

б) выделяется подсистема, состоящая из уравнений, коэффициенты при неизвестных которых входят в минор Δ_r;

в) полученная подсистема решается по формулам Крамера ($\Delta_r \neq 0$) при произвольных значениях (n-r) неизвестных, коэффициенты которых не входят в минор Δ_r ($x_i = \frac{\Delta i}{\Delta}$). Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены уравнений равны нулю

Однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

всегда совместна. Это следует из теоремы Кронекера – Капелли. Кроме того, ясно, что значения неизвестных x_1=0, x_2=0, …x_n=0 образуют решение системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным.*

Для однородной системы важно установить, имеет ли она ненулевые решения. Ответ на этот вопрос следует из теоремы Кронекера – Капелли.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2; \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3. \end{cases}$$

с неизвестными x, y, z (коэффициенты $a_1, b_1, \ldots c_3$ и свободные члены h_1, h_2, h_3 предположим данными).

Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных системы, называется определителем системы.

Определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ получаются из определителя Δ при помощи замены соответственно его первого, второго и, наконец, третьего столбца – столбцом свободных членов данной системы.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение; оно определяется формулами $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$. - *формулы Крамера.*

Предположим теперь, что определитель системы равен нулю: Δ =0. Если в случае Δ =0 хотя бы один из определителей $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ отличен от нуля, то система совсем не имеет решений.

В случае, когда Δ =0 и одновременно $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0,$ система также может совсем не иметь решений; но если система при этих условиях имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесконечно много различных решений.

Задача 13. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу системы А и расширенную матрицу системы (А,В):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (A,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь преобразуем матрицу В, последний столбец (чтобы отдельно можно было усмотреть и преобразование матрицы А). произведем элементарные преобразования. Оперируя строками (сначала первой, затем второй), получаем

$$(A,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отбросив нулевую строку, будем иметь матрицу

$$(A,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно, система совместна (ранги матриц А и (А,В) равны двум).

Теперь видно, что третье уравнение системы является линейной комбинацией первых двух уравнений, поэтому его можно отбросить. Получим так называемую “укороченную” систему, в которой число уравнений меньше числа неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Поскольку уравнений два, а неизвестных четыре, надо два каких-либо неизвестных выразить через два других.

Поскольку определитель, составленный из их коэффициентов, равен нулю, то систему нельзя решить относительно x_1 и x_2. Можно, например, решить систему относительно x_1 и x_3, перенеся в правую часть x_1 и x_4:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_1 - x_4; \\ x_2 + 2x_3 = -x_1 - x_4. \end{cases}$$

Неизвестные x_2 и x_3 называют *главными (базисными)*, а x_1 и x_4 – *свободными*. Решая эту систему, находим: x_2=2-x_1-x_4, x_3=-1. Система имеет бесконечное множество решений, так как свободным неизвестным x_1 и x_4 можно придавать произвольные значения. Например, полагая $x_1=0$, $x_4=1$, получаем одно из решений системы: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$ $x_4=1$. Легко убедиться, что это решение удовлетворяет исходной системе.

Задача 14. Решить систему линейных уравнений, выяснив предварительно вопрос о совместности

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы системы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Если сложить первые три строки и эту сумму вычесть из четвертой строки, получим

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21$$

то ранг матрицы равен трем. Следовательно, исходная система имеет и ненулевые решения.

Заданная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

ибо отличен от нуля минор (=21). Конечно, можно было бы взять и какой-нибудь другой минор матрицы A. Мы взяли тот, который получили в результате выполненных выше преобразований над матрицей A.

Так как определитель, состоящий из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3, отличен от нуля, то, перенеся x_4 в правую часть, решим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = \quad -x_4; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \quad 2_4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3x_4. \end{cases}$$

Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & -x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-31x_4}{21}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{43x_4}{21}; \; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-28x_4}{21} = \frac{-4x_4}{3}.$$

Пусть $x_4 = c$, тогда общее решение системы будет иметь вид $\left\{\left(-\frac{31}{21}c; \frac{43}{21}c; -\frac{4}{3}c\right), c - const\right\}$. Запишем одно из решений системы. Например, при c=1, имеем $\left\{\left(-\frac{31}{21}; \frac{43}{21}; -\frac{4}{3}\right)\right\}$. Проверкой можно убедиться в верности решения.

Метод последовательного исключения неизвестных (*метод Гаусса*) заключается в следующем:

1) составляют *(A,B)* – расширенную матрицу системы;
2) посредством элементарных преобразований матрицы (только со строками) преобразуем матрицу *(A,B)* к треугольному (трапециевидному) виду. (Главную диагональ занимают единицы, ниже – нули.)
3) Восстанавливаем уравнения системы по полученной матрице, начиная с последней строчки.

Например. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2S_1+S_3]{-3S_1+S_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{S_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\xrightarrow{S_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{2S_2+S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Восстанавливая уравнения системы, начиная с последней строчки, имеем $z = \frac{1}{2}$, вторая строчка дает уравнение

$$y - \frac{1}{2}z = \frac{5}{2};$$

$$y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}z;$$

$$y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{11}{4}.$$

Далее, используем первую строчку

$$x + y - z = 2;$$

$$x = 2 - y + z;$$

$$x = 2 - \frac{11}{4} + \frac{1}{2};$$

$$x = -\frac{1}{4}.$$

Итак, система совместна и определена и имеет решение $\left\{\left(-\frac{1}{4}; \frac{11}{4}; \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Суть решения системы линейных уравнений *матричным способом* раскроем на нижеследующей задаче.

Задача 15.

Решить систему линейных уравнений, представив ее в виде матричного уравнения (матричным способом)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9; \\ x + 2y - 3z = 14; \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Тогда исходная система запишется следующим матричным уравнением *AX=B*. Решение которого вид $X = A^{-1}B$. Найдем A^{-1}. Имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$ откуда

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126 + 70 - 208 \\ -90 - 56 + 128 \\ -18 + 14 + 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = 2,\ y = 3,\ z = -2$.

8 Векторы, действия над векторами, разложение вектора по базису.

Свободный вектор a (т.е. такой вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесен в любую точку пространства), заданный в координатном пространстве $Oxyz$, может быть представлен в виде $a = a_x i + a_y j + a_z k$. Такое представление вектора a называется его *разложением по осям координат*, или *разложение по ортам*.

Здесь a_x, a_y, a_z - проекции вектора a на соответствующие оси координат (их называют координаты вектора a), i, j, k – орты этих осей (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси).

Векторы $a_x i, a_y j$ *и* $a_z k$, в виде суммы которых представлен вектор a, называются *составляющими* (компонентами) вектора a по осям координат.

Длина (модуль) вектора a обозначается a или $|a|$ и определяется по формуле $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Если векторы a и b заданы их разложениями по ортам, то их сумма и разность определяется формулами:

$$a+b=(a_x+b_x)\cdot i+(a_y+b_y)\cdot j+(a_z+b_z)\cdot k,$$
$$a-b=(a_x-b_x)\cdot i+(a_y-b_y)\cdot j+(a_z-b_z)\cdot k.$$

Произведение вектора a на скалярный множитель m определяется формулой

$$ma=ma_x\cdot i+ma_y\cdot j+ma_z\cdot k.$$

Напомним, что векторы a и ma параллельны (коллинеарны) и направлены в одну и ту же сторону, если $m>0$, и в противоположные стороны, если $m<0$.

В частности, если $m=1/a$, то вектор $a/|a|$ имеет длину, равную единице, и направление, совпадающее с направлением вектора a. Этот вектор называется *единичным вектором* (ортом) вектора a и обозначают a_0. Нахождение единичного вектора того же направления, что и данный вектор a, называется *нормированием вектора a*.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется базисной системой векторов (базисом) пространства.

Теорема разложения. Всякий вектор может быть представлен как линейная комбинация базисной системы векторов; это представление («разложение по базисной системе») единственно.

Координатами вектора в заданном базисе называются коэффициенты разложения вектора по базисной системе векторов.

Итак, если задана базисная система векторов e_1, e_2, e_3 и $a=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3$, то координатами вектора a в заданном базисе e_1, e_2, e_3 называются числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Записываются координаты вектора в заданном базисе в виде строчки: $a=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Таким образом, если задан базис e_1, e_2, e_3 и в этом базисе $a=\{3, 1, -2\}$, то $a= 3e_1+e_2-2e_3$.

Очевидно, если задан некоторый базис, то задание координат вектора в этом базисе полностью определяет сам вектор и, следовательно, два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты в каком-либо заданном базисе.

Используя правило линейных операций, получаем следующие теоремы:

При умножении вектора на число все его координаты в заданном базисе умножаются на это число.

При сложении векторов складываются соответственные координаты этих векторов.

Очень важно уметь находить связь между координатами одного и того же вектора в различных базисах.

Для определенности базис *B* назовем исходным («старым») базисом, а базис *B`* - «новым» базисом. Чтобы задать «новый» базис *B`,* надо задать координаты его векторов $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'$ в исходном («старом») базисе.

Матрица перехода *C* – это матрица, столбцы которой – координаты векторов нового базиса в исходном («старом») базисе:

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$, отметим сразу, что матрица *C* всегда невырожденная, то есть *det C≠0* – это принцип базисности (линейной независимости) векторов B'.

Задача 16.

Фиксирован некоторый исходный базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Векторы $\vec{a}_1' = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$, $\vec{a}_2' = \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3$, $\vec{a}_3' = 5\vec{a}_3$ образуют новый базис. Указать матрицу перехода *C*.

Решение. Запишем по столбцам координаты векторов нового базиса в исходном базисе и получим матрицу перехода С.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $det\ C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, *det C=5≠0* подтверждает, что $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'$ образуют базис.

Отметим еще, что так как *det C≠0,* то существует C^{-1}.

Формулы связи между старыми (x, y, z) и новыми (x`, y`, z`) координатами вектора (точки):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Задача 17. В некотором исходном базисе В векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеют следующие координаты $\vec{a} = (5;0;2), \vec{b} = (0;1;1), \vec{c} = (0;-5;-1)$. Установить, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис (обозначим В\`), и найти координаты вектора $\vec{d} = (10;6;6)$ в новом базисе В\`.

Решение. Найдем предполагаемую матрицу С перехода от базиса в к базису В\`, для этого в качестве столбцов матрицы С запишем столбцы координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det C = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$. Поскольку det C≠0, то В\`={ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ } действительно образуют базис.

Далее $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, где первая формула выражает старые координаты через новые, вторая – наоборот.

Найдем $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Далее находим новые координаты вектора $\vec{d}$ (в базисе В\`):

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: координаты вектора в базисе В\`: (2; 1; -1).

9 Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов a и b называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла φ между ними:

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos\varphi.$$

Свойства скалярного произведения.

1^0 $a\cdot a=a^2$, или $|a|^2=a^2$.

2^0 $a\cdot b=0$, если $a=0$, либо $b=0$, либо $a\perp b$ (ортогональность ненулевых векторов).

3^0 $a\cdot b=b\cdot a$ (переместительный закон).

4^0 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (распределительный закон).

5^0 $(ma)\cdot b=a\cdot(mb)=m(a\cdot b)$ (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю).

Скалярные произведения ортов осей координат:

$$i^2=j^2=k^2=1, i\cdot j=i\cdot k=j\cdot k=0.$$

Пусть векторы a и b заданы своими координатами: $a=x_1i+y_1j+z_1k$, $b=x_2i+y_2j+z_2k$. Тогда скалярное произведение этих векторов находится по формуле $a\cdot b=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Задача 18. Определить угол между векторами $a=i+2j+3k$ и $b=6i+4j-2k$.

Решение. Так как $a\cdot b=|a||b|\cos\varphi$, то $\cos\varphi=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}$. Имеем $a\cdot b=1\cdot 6+2\cdot 4+3\cdot(-2)=8$, $|a|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$, $|b|=\sqrt{36+16+4}=2\sqrt{14}$.

Следовательно, $\cos\varphi=\dfrac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}}=\dfrac{2}{7}$ и $\varphi=\arccos\dfrac{2}{7}$.

Ответ. $\varphi=\arccos\dfrac{2}{7}$.

Задача 19. Найти (a, b), если $a=2m-3n$, $b=m+2n$, $|m|=2, |n|=3$, $(\widehat{m,n})=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение**.** Используя свойство и определение скалярного произведения, получим

$$(a,b)=(2m-3n,m+2n)=(2m,m+2n)+(-3n,m+2n)=2(m+2n,m)-$$
$$-3(m+2n,n)=2((m,m)+2(n,m))-3((m,n)+2(n,n))=2(m,m)+4(n,m)-$$
$$-3(m,n)-6(n,n)=2|m|^2-6|n|^2+|n||m|\cos(m,n)=2\cdot 2^2-6\cdot 3^2+2\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=$$
$$=8-54+3=-43.$$

Ответ. (a, b)= - 43.

10 Векторное произведение векторов.

Векторным произведение вектора a на вектор b называется третий вектор c, определяемый следующим образом:

1) модуль вектора c равен площади параллелограмма, построенного на векторах a и b ($|c| = |a| \cdot |b| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами a и b);
2) вектор c перпендикулярен векторам a и b;
3) векторы, a, b, c после приведения к общему началу ориентированы по отношению друг к другу соответственно как орты i, j, k (в правой системе координат образуют так называемую правую тройку векторов).

Векторное произведение a и b обозначается через $a \times b$.

Свойства векторного произведения.

1^0 $b \times a = -a \times b$, т.е. векторное произведение не обладает переместительным свойством.

2^0 $a \times b = 0$, если a=0, либо b=0, либо $a||b$ (коллинеарность ненулевых векторов).

3^0 $(ma) \times b = a \times (mb) = m(a \times b)$ (сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю).

4^0 $a \times (b + 1) = a \times b + a \times c$ (распределительное свойство).

Векторные произведения координат ортов i, j и k:

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$,

$i \times j = -j \times i = k;\ j \times k = -k \times j = i;\ k \times i = -i \times k = j$.

Векторное произведение векторов $a = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ и $b = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ удобнее всего находить по формуле

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Задача 20.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = 6i + 3j - 2k$ и $b = 3i - 2j + 6k$.

Решение. Находим векторное произведение a и b:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14i - 42j - 21k.$$

Так как модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, то $S = |a \times b| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49$ (кв.ед.).

Ответ. $S = 49$ (кв. ед.)

Задача 21.

Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;\,1;\,1)$, $B(2;\,3;\,4)$, $C\,(4;\,3;\,2)$.

Решение.

Находим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB} = (2-1)i + (3-1)j + (4-1)k = i + 2j + 3k$,
$\overline{AC} = (4-1)i + (3-1)j + (2-1)k = 3i + 2j + k$.

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, поэтому находим векторное произведение этих векторов:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4i + 8j - 4k.$$

Следовательно, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{16 + 64 + 16} = \sqrt{24}$ (кв. ед.)

Ответ. $S = \sqrt{24}$ (кв. ед.).

Задача 22.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b, если $a = p + 3q,\ b = 3p + q,\ |p| = 1,\ |q| = 2,\ (\widehat{p,q}) = \pi/6$.

Решение.

Так как $S_{пар} = |a \times b|$, для начала найдем вектор $a \times b$ и его длину, имеем

$$a \times b = (p + 3q) \times (3p + q) = (p \times 3p) + (p \times q) + (3q \times 3p) + (3q \times q) =$$

$$= 3(p \times q) + (p \times q) + 9(q \times p) + 3(q \times q) = \left| \begin{matrix} p \times p = q \times q = 0, \\ q \times p = -(p \times q) \end{matrix} \right| = 3 \cdot 0 + (p \times q) -$$

$$- 9(p \times q) + 3 \cdot 0 = -8(p \times q).$$ Итак, $S = 8|p \times q| = 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = 16 \cdot \dfrac{1}{2} = 8$ (кв. ед.)

Ответ. $S = 8$ (кв. ед.).

11 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов a, b и c называется скалярное произведение вектора $a \times b$ на вектор c, т.е. $(a \times b) \cdot c$.

Смешанное произведение трех векторов *a*, *b* и *c* по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения.

1^0 Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:

а) хоть один из перемножаемых векторов равен 0;

б) два из перемножаемых векторов коллинеарны;

в) три ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости (компланарность).

2^0 Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного (×) и скалярного (·) умножения, т.е. $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$. В силу этого свойства смешанное произведение векторов *a*, *b* и *c* условимся записывать в виде *abc*.

3^0 Смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке: $abc = bca = cab$.

4^0 При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак: $bac = -abc$; $cba = -abc$; $acb = -abc$.

Пусть векторы заданы их разложения по ортам: $a = x_1 i + y_1 j + z_1 k$; $b = x_2 i + y_2 j + z_2 k$; $c = x_3 i + y_3 j + z_3 k$. Тогда

$$abc = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Из свойства смешанного произведения трех векторов вытекает следующее: необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие *abc*=0;

Объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах *a*, *b* и *c*, и объем V_2 образованной ими треугольной пирамиды находятся по формулам

$$V_1 = |abc|, \; V_2 = \frac{1}{6} V_1 = \frac{1}{6}|abc|.$$

Задача 23. Показать, что векторы $a = \{2; 5; 7\}$, $b = \{1; 1; -1\}$, $c = \{1; 2; 2\}$ компланарны.

Решение. Находим смешанное произведение векторов:

$$abc=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8-15+7=0.$$

Так как abc=0, то заданные векторы компланарны.

Задача 24.

Вычислить объем тетраэдра с вершинами $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(-5,-4,8)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение.

Из вершины A_1 проведем векторы

$\overline{A_1A_2}=\{2,-2,-3\}, \overline{A_1A_3}=\{4,0,6\}, \overline{A_1A_4}=\{-7,-7,7\}$.

Вычислим смешанное произведение:

$$\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ -7 & -7 & 7\end{vmatrix}=2\cdot 42+2\cdot 70+(-3)\cdot(-28)=308 \text{ и}$$

находим объем тетраэдра по формуле: $V_2=\frac{1}{6}\cdot V_1=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|$

$$V_2=\frac{1}{6}\cdot 308 \text{ (ед.длины)}^3.$$

С другой стороны $V_2=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot h$, где $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right]\right|$.

Отсюда получаем формулу нахождения высоты: $h=\dfrac{3V_{m.}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}}=\dfrac{\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|}{\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right)\right|}$.

Вычислим координаты векторного произведения:

$$\left[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=\{-12,-24,8\}$$

и его модуль $\left|\left[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right]\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=28.$ Затем находим высоту h по формуле:

$$h=\frac{\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|}{\left|\left[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right]\right|}=\frac{308}{28}=11 \text{ (ед.длины)}$$

Ответ: $V_{m.}=\frac{154}{3}$ (ед.длины)^3, $h=11$ (ед.длины).

12 Задания типового расчета по линейной алгебре и аналитической геометрии (I семестр)

Задача № 1

Произвести действия над комплексными числами $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1 - i$, $z_4 = 2 - i$, $z_5 = 1 + 3i$.

$\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot \overline{z_3}}$

1.2 $\dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_1 - z_3}$

1.3 $\dfrac{z_2 + \overline{z_3}}{z_1 \cdot z_2}$

1.4 $\dfrac{\overline{z_1} - z_2}{z_3 \cdot z_4}$

1.5 $\dfrac{z_4 + \overline{z_1}}{z_3 \cdot z_2}$

1.6 $\dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_4 - z_1}$

1.7 $\dfrac{z_1 \cdot z_3}{\overline{(z_4 + z_2)}}$

1.8 $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 - \overline{z_3}}$

1.9 $\dfrac{\overline{z_1} \cdot z_4}{z_2 + z_3}$

1.10 $\dfrac{\overline{z_4} - z_1}{z_2 \cdot z_3}$

1.11 $\dfrac{z_1 + \overline{z_2}}{z_4 \cdot z_3}$

1.12 $\dfrac{\overline{z_4} - z_5}{z_5 \cdot z_1}$

1.13 $\dfrac{z_5 + \overline{z_3}}{z_1 \cdot z_2}$

1.14 $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot \overline{z_5}}$

1.15 $\dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_1 - z_5}$

1.16 $\dfrac{z_5 + \overline{z_3}}{z_1 \cdot z_2}$

1.17 $\dfrac{\overline{z_1} - z_5}{z_3 \cdot z_4}$

1.18 $\dfrac{z_4 + \overline{z_5}}{z_3 \cdot z_2}$

1.19 $\dfrac{z_5 \cdot \overline{z_2}}{z_4 - z_1}$

1.20 $\dfrac{z_1 \cdot z_3}{\overline{(z_4 + z_5)}}$

1.21 $\dfrac{z_2 \cdot z_5}{z_1 - \overline{z_3}}$

1.22 $\dfrac{\overline{z_1} \cdot z_4}{z_2 + z_5}$

1.23 $\dfrac{\overline{z_4} - z_1}{z_2 \cdot z_5}$

1.24 $\dfrac{z_1 + \overline{z_5}}{z_4 \cdot z_3}$

1.25 $\dfrac{\overline{z_4} - z_3}{z_5 \cdot z_1}$

Задача № 2

Найти все значения $\sqrt[3]{z}$, если

2.1 $z = i$

2.9 $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

2.17 $z = \sqrt{3} + i$

2.2 $z = -i$

2.10 $z = -\sqrt{3}i$

2.18 $z = \sqrt{3}i$

2.3 $z = 1 + i$

2.11 $z = -2 - 2i$

2.19 $z = 3 - \sqrt{3}i$

2.4 $z = 1 - i$

2.5 $z = -1 + i$

2.6 $z = 2 + 2i$

2.7 $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

2.8 $z = 3 - 3i$

2.12 $z = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$

2.13 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2.14 $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2.15 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2.16 $z = 2 - 2i$

2.20 $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

2.21 $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

2.22 $z = 1 - \sqrt{3}i$

2.23 $z = 3 + 3i$

2.24 $z = \sqrt{3} - i$

2.25 $z = 1 + \sqrt{3}i$

Задача № 3

Найти значение матричного многочлена, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ Д = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.1 $2A - B^2 + E$

3.2 $A^2 - B + 3E$

3.3 $AB - 3B + E$

3.4 $BA - 2A - E$

3.5 $B^2 - A + 3E$

3.6 $A^2 - B + E$

3.7 $2A^2 - C + E$

3.8 $AB + 3E - B$

3.9 $2C^2 - 3A + E$

3.10 $2C - B^2 + E$

3.14 $C^2 - A + 2E$

3.15 $AC - B + E$

3.16 $BC - A + 2E$

3.17 $C^2 - 2B + 3E$

3.18 $2B^2 - 3A + E$

3.19 $2A - D^2 + 2E$

3.20 $D^2 - 2B + E$

3.21 $AD - 3C + E$

3.22 $DA + 2A - E$

3.23 $D^2 - A + 3E$

3.11 $C^2 - 2B - E$

3.12 $CB - 3A + 2E$

3.13 $BC - 2A + E$

3.24 $D^2 - B + E$

3.25 $2D^2 - C + 2E$

Задача № 4

Решить матричное уравнение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.1 AXB=C

4.2 CX+D=A

4.3 XA+C=D

4.4 DX-A=B

4.5 A+CX=D

4.6 BX-D=A

4.7 XB-C=D

4.8 AXC=B

4.9 BDX=A

4.10 XC+A=K

4.11 DX-B=K

4.12 CDX=A

4.13 BKX=D

4.14 DXC=K

4.15 KXB=C

4.16 KX+D=B

4.17 XK+C=D

4.18 KX-A=C

4.19 A+KX=D

4.20 KX-D=A

4.21 XK-C=D

4.22 KXC=B

4.23 KDX=A

4.24 KXB=C

4.25 AX-K=B

Задача № 5

Вычислить ранг матрицы.

5.1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.5 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5.2 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5.6 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5.7 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

5.8 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

5.9 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5.14 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5.10 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.15 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5.11 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5.16 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

5.12 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.17 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.13 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5.18 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$5.19\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 5.23\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.20\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad 5.24\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$5.21\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 5.25\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.22\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача № 6

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, по формулам Крамера и матричным методом, установив предварительно совместность системы на основании теоремы Кронекера – Капелли.

$$6.1\ \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9; \\ x + 2y - 3z = 14; \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases} \qquad 6.2\ \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0; \\ x + 5y - 4z + 5 = 0; \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

6.3 $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0; \\ x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$

6.4 $\begin{cases} x + 2y - z = 4; \\ 2x + y - z = 3; \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$

6.5 $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0; \\ 2x - y + 3z = 0; \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$

6.6 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4; \\ 2x + y - z = 3; \\ 3x + 3y + 2z = 10. \end{cases}$

6.7 $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8; \\ 2x + 4y - 5z = 11; \\ 4x - 3y + 2z = 1. \end{cases}$

6.8 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$

6.9 $\begin{cases} x - 2y + z = 4; \\ 2x + 3y - z = 3; \\ 4x - y + z = 11. \end{cases}$

6.10 $\begin{cases} 5x - y - z = 0; \\ x + 2y + 3z = 14; \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

6.11 $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12; \\ 3x + 2y + 5z = -10; \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$

6.12 $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0; \\ x - y + 3z = 0; \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

6.13 $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1; \\ x - 2y + 4z = 3; \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

6.14 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0; \\ 2x + 4y + 6z = 0; \\ 3x + y - z = 0. \end{cases}$

6.15 $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2; \\ 4x - 5y + 2z = 1; \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$

6.16 $\begin{cases} 2x - y + z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

6.17 $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0; \\ 2x + 3y - 5z = 0; \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

6.18 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0; \\ 2x - y + 4z = 5; \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$

6.19 $\begin{cases} -5x + y + z = 0; \\ x - 6y + z = 0; \\ x + y - 7z = 0. \end{cases}$

6.20 $\begin{cases} x + y + z = 0; \\ 3x + 6y + 5z = 0; \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$

6.21 $\begin{cases} 2x+y-z=0; \\ x+2y+z=0; \\ 2x-y+3z=0. \end{cases}$

6.22 $\begin{cases} x-y-z=0; \\ x+4y+2z=0; \\ 3x+7y+3z=0. \end{cases}$

6.23 $\begin{cases} x+y-z=36; \\ x+z-y=13; \\ y+z-x=7. \end{cases}$

6.24 $\begin{cases} 2x-4y+9z=28; \\ 7x+3y-6z=-1; \\ 7x-9y-9z=5. \end{cases}$

6.25 $\begin{cases} x+y+z=36; \\ 2x-3z=-17; \\ 6x-3z=7. \end{cases}$

Задача № 7

Установить, что векторы p, q, r образуют базис (B`), и найти координаты вектора x в новом базисе (B`).

7.1 $x=\{-2,4,-7\}$, $p=\{0,1,2\}$, $q=\{1,0,1\}$, $r=\{-1,2,4\}$.

7.2 $x=\{6,12,-1\}$, $p=\{1,3,0\}$, $q=\{2,-1,1\}$, $r=\{0,-1,2\}$.

7.3 $x=\{1,-4,4\}$, $p=\{2,1,-1\}$, $q=\{0,3,2\}$, $r=\{1,-1,1\}$.

7.4 $x=\{-9,5,5\}$, $p=\{4,1,1\}$, $q=\{2,0,-3\}$, $r=\{-1,2,1\}$.

7.5 $x=\{-5,-5,5\}$, $p=\{-2,0,1\}$, $q=\{1,3,-1\}$, $r=\{0,4,1\}$.

7.6 $x=\{13,2,7\}$, $p=\{5,1,0\}$, $q=\{2,-1,3\}$, $r=\{1,0,-1\}$.

7.7 $x=\{-19,-1,7\}$, $p=\{0,1,1\}$, $q=\{-2,0,1\}$, $r=\{3,1,0\}$.

7.8 $x=\{3,-3,4\}$, $p=\{1,0,2\}$, $q=\{0,1,1\}$, $r=\{2,-1,4\}$.

7.9 $x=\{-1,7,0\}$, $p=\{0,3,1\}$, $q=\{1,-1,2\}$, $r=\{2,-1,0\}$.

7.10 $x=\{11,-1,4\}$, $p=\{1,-1,2\}$, $q=\{3,2,0\}$, $r=\{-1,1,1\}$.

7.11 $x=\{-13,2,18\}$, $p=\{1,1,4\}$, $q=\{-3,0,2\}$, $r=\{1,2,-1\}$.

7.12 $x=\{0,-8,9\}$, $p=\{0,-2,1\}$, $q=\{3,1,-1\}$, $r=\{4,0,1\}$.

7.13 $x=\{8,-7,-13\}$, $p=\{0,1,5\}$, $q=\{3,-1,2\}$, $r=\{-1,0,1\}$.

7.14 $x=\{2,7,5\}$, $p=\{1,0,1\}$, $q=\{1,-2,0\}$, $r=\{0,3,1\}$.

7.15 $x=\{15,-20,-1\}$, $p=\{0,2,1\}$, $q=\{0,1,-1\}$, $r=\{5,-3,2\}$.

7.16 $x=\{3,3,-1\}$, $p=\{3,1,0\}$, $q=\{-1,2,1\}$, $r=\{-1,0,2\}$.

7.17 $x=\{-1,7,-4\}$, $p=\{-1,2,1\}$, $q=\{2,0,3\}$, $r=\{1,1,-1\}$.

7.18 $x=\{6,5,-14\}$, $p=\{1,1,4\}$, $q=\{0,-3,2\}$, $r=\{2,1,-1\}$.

7.19 $x=\{6,-1,7\}$, $p=\{1,-2,0\}$, $q=\{-1,1,3\}$, $r=\{1,0,4\}$.

7.20 $x=\{5,15,0\}$, $p=\{1,0,5\}$, $q=\{-1,3,2\}$, $r=\{0,-1,1\}$.

7.21 $x=\{2,-1,11\}$, $p=\{1,1,0\}$, $q=\{0,1,-2\}$, $r=\{1,0,3\}$.

7.22 $x=\{11,5,-3\}$, $p=\{1,0,2\}$, $q=\{-1,0,1\}$, $r=\{2,5,-3\}$.

7.23 $x=\{8,0,5\}$, $p=\{2,0,1\}$, $q=\{1,1,0\}$, $r=\{4,1,2\}$.

7.24 $x=\{3,1,8\}$, $p=\{0,1,3\}$, $q=\{1,2,-1\}$, $r=\{2,0,-1\}$.

7.25 $x=\{8,1,12\}$, $p=\{1,2,-1\}$, $q=\{3,0,2\}$, $r=\{-1,1,1\}$.

Задача № 8

Найти угол между векторами c_1 и c_2.

8.1 $a = \{1, -2, 3\},\ b = \{3, 0, -1\}, c_1 = 2a + 4b,\ c_2 = 3b - a$.

8.2 $a = \{1, 0, 1\},\ b = \{-2, 3, 5\}, c_1 = a + 2b,\ c_2 = 3a - b$.

8.3 $a = \{-2, 4, 1\},\ b = \{1, -2, 7\}, c_1 = 5a + 3b,\ c_2 = 2a - b$.

8.4 $a = \{1, 2, -3\},\ b = \{2, -1, -1\}, c_1 = 4a + 3b,\ c_2 = 8a - b$.

8.5 $a = \{3, 5, 4\},\ b = \{5, 9, 7\}, c_1 = -2a + b,\ c_2 = 3a - 2b$.

8.6 $a = \{1, 4, -2\},\ b = \{1, 1, -1\}, c_1 = a + b,\ c_2 = 4a + 2b$.

8.7 $a = \{1, -2, 5\},\ b = \{3, -1, 0\}, c_1 = 4a - 2b,\ c_2 = b - 2a$.

8.8 $a = \{3, 4, -1\},\ b = \{2, -1, 1\}, c_1 = 6a - 3b,\ c_2 = b - 2a$.

8.9 $a = \{-2, -2, -2\},\ b = \{1, 0, 5\}, c_1 = 3a + 9b,\ c_2 = -a - 3b$.

8.10 $a = \{-1, 4, 2\},\ b = \{3, -2, 6\}, c_1 = 2a - b,\ c_2 = 3b - 6a$.

8.11 $a = \{5, 0, -1\},\ b = \{7, 2, 3\}, c_1 = 2a - b,\ c_2 = 3b - 6a$.

8.12 $a = \{1, 3, -2\},\ b = \{1, -2, 1\}, c_1 = 5a - 2b,\ c_2 = 3a + 5b$.

8.13 $a = \{-2, 7, -1\},\ b = \{-3, 5, 2\}, c_1 = 2a + 3b,\ c_2 = 3a + 2b$.

8.14 $a = \{3, 7, 0\},\ b = \{1, -3, 4\}, c_1 = 4a - 2b,\ c_2 = b - 2a$.

8.15 $a = \{-1, 2, -1\},\ b = \{2, -7, 1\}, c_1 = 6a - 2b,\ c_2 = b - 3a$.

8.16 $a = \{7, 9, -2\},\ b = \{3, 4, 3\}, c_1 = 4a - b,\ c_2 = 4b - a$.

8.17 $a = \{5, 0, -2\},\ b = \{6, 4, 3\}, c_1 = 5a - 3b,\ c_2 = 6b - 10a$.

8.18 $a = \{8, 3, -1\},\ b = \{4, 1, 3\}, c_1 = 2a - b,\ c_2 = 2b - 4a$.

8.19 $a = \{3, -1, 6\},\ b = \{5, 7, 10\}, c_1 = 4a - 2b,\ c_2 = b - 2a$.

8.20 $a = \{1, -2, 4\},\ b = \{7, 3, 5\}, c_1 = 6a - 3b,\ c_2 = b - 2a$.

8.21 $a = \{3, 7, 0\},\ b = \{4, 6, -1\}, c_1 = 3a + 2b,\ c_2 = 5a - 7b$.

8.22 $a = \{2, -1, 4\},\ b = \{3, -7, -6\}, c_1 = 2a - 3b,\ c_2 = 3a - 2b$.

8.23 $a = \{5, -1, -2\},\ b = \{6, 0, 7\}, c_1 = 3a - 2b,\ c_2 = 4b - 6a$.

8.24 $a = \{-9, 5, 3\},\ b = \{7, 1, -2\}, c_1 = 2a - b,\ c_2 = 3a + 5b$.

8.25 $a = \{4, 2, 9\},\ b = \{0, -1, 3\}, c_1 = 4a - 3b,\ c_2 = 4a - 3b$.

Задача № 9

Вычислить скалярное произведение векторов a, b, если

9.1 $a = p + 2q, b = 3p - q,\ |p| = 1, |q| = 2,\ (\widehat{pq}) = \pi/6$.

9.2 $a = 3p + q, b = p - 2q,\ |p| = 4, |q| = 1,\ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

9.3 $a = p - 3q, b = p + 2q,\ |p| = 1/5, |q| = 1,\ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

9.4 $a = 3p - 2q, b = p + 5q,\ |p| = 4, |q| = 1/2,\ (\widehat{pq}) = 5\pi/6$.

9.5 $a = p - 2q, b = 2p + q,\ |p| = 2, |q| = 3,\ (\widehat{pq}) = 3\pi/4$.

9.6 $a = p + 3q, b = p - 2q, \quad |p| = 2, |q| = 3, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

9.7 $a = 2p - q, b = p + 3q, \quad |p| = 3, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

9.8 $a = 4p + q, b = p - q, \quad |p| = 7, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

9.9 $a = p - 4q, b = 3p + q, \quad |p| = 1, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/6$.

9.10 $a = p + 4q, b = 2p - q, \quad |p| = 7, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

9.11 $a = 3p + 2q, b = p - q, \quad |p| = 10, |q| = 1, \ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

9.12 $a = 4p - q, b = p + 2q, \quad |p| = 5, |q| = 4, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

9.13 $a = 2p + 3q, b = p - 2q, \quad |p| = 6, |q| = 7, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

9.14 $a = 3p - q, b = p + 2q, \quad |p| = 3, |q| = 4, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

9.15 $a = 2p + 3q, b = p - 2q, \quad |p| = 2, |q| = 3, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

9.16 $a = 2p - 3q, b = 3p + q, \quad |p| = 4, |q| = 1, \ (\widehat{pq}) = \pi/6$.

9.17 $a = 5p + q, b = p - 3q, \quad |p| = 1, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

9.18 $a = 7p - 2q, b = p + 3q, \quad |p| = 1/2, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

9.19 $a = 6p - q, b = p + q, \quad |p| = 3, |q| = 4, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

9.20 $a = 10p + q, b = 3p - 2q, \quad |p| = 4, |q| = 1, \ (\widehat{pq}) = \pi/6$.

9.21 $a = 6p - q, b = p + 2q, \quad |p| = 8, |q| = 1/2, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

9.22 $a = 3p + 4q, b = q - p, \quad |p| = 2{,}5, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

9.23 $a = 7p + q, b = p - 3q, \quad |p| = 3, |q| = 1, \ (\widehat{pq}) = 3\pi/4$.

9.24 $a = p + 3q, b = 3p - q, \quad |p| = 3, |q| = 5, \ (\widehat{pq}) = 2\pi/3$.

9.25 $a = 3p + q, b = p - 3q, \quad |p| = 7, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

Задача №10

Вычислить площадь треугольника с вершинами $A_1\ A_2\ A_3$.

10.1 $A_1(2,-1,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(3,2,1)$.

10.2 $A_1(-3,4,-7)$, $A_2(1,5,-4)$, $A_3(-5,-2,0)$.

10.3 $A_1(1,-1,1)$, $A_2(-2,0,3)$, $A_3(2,1,-1)$.

10.4 $A_1(1,0,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(2,-2,1)$.

10.5 $A_1(1,2,02)$, $A_2(1,-1,2)$, $A_3(0,1,-1)$.

10.6 $A_1(4,-1,3)$, $A_2(-2,1,0)$, $A_3(0,-5,1)$.

10.7 $A_1(1,2,-3)$, $A_2(1,0,1)$, $A_3(-2,-1,6)$.

10.8 $A_1(1,3,6)$, $A_2(2,2,1)$, $A_3(-1,0,1)$.

10.9 $A_1(-1,-5,2)$, $A_2(-6,0,-3)$, $A_3(3,6,-3)$.

10.10 $A_1(-4,2,6)$, $A_2(2,-3,0)$, $A_3(-10,5,8)$.

10.11 $A_1(-1,2,-3)$, $A_2(4,-1,0)$, $A_3(2,1,-2)$.

10.12 $A_1(3,10,-1)$, $A_2(-2,3,-5)$, $A_3(-6,0,-3)$.

10.13 $A_1(-1,2,4)$, $A_2(-1,-2,-4)$, $A_3(3,0,-1)$.

10.14 $A_1(1,2,0)$, $A_2(3,0,-3)$, $A_3(5,2,6)$.

10.15 $A_1(7,2,4)$, $A_2(7,-1,-2)$, $A_3(3,3,1)$.

10.16 $A_1(2,1,4)$, $A_2(-1,5,-2)$, $A_3(-7,-3,2)$.

10.17 $A_1(2,-1,-2)$ $A_2(1,2,1)$, $A_3(5,\ 0,-6)$.

10.18 $A_1(1,1,2)$, $A_2(-1,1,3)$, $A_3(2,-2,4)$.

10.19 $A_1(0,-1,-1)$ $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$.

10.20 $A_1(5,2,0)$, $A_2(2,5,0)$, $A_3(1,2,4)$.

10.21 $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$.

10.22 $A_1(1,5,-7)$, $A_2(-3,6,3)$, $A_3(-2,7,3)$.

10.23 $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,\ 3,\ 1)$, $A_3(3,\ 2,\ 1)$.

10.24 $A_1(14,4,5)$, $A_2(-5,-3,2)$, $A_3(-2,-6,-3)$.

10.25 $A_1(-2,0,-4)$, $A_2(-1,7,1)$, $A_3(4,-8,-4)$.

Задача №11

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b.

11.1 $a = 10p + q,\ b = 3p - 2q,\ \ |p| = 4, |q| = 1,\ (\widehat{pq}) = \pi/6$.

11.2 $a = 2p + 3q,\ b = p - 2q,\ \ |p| = 2, |q| = 3,\ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

11.3 $a = p + 3q,\ b = 3p - q,\ \ |p| = 3, |q| = 5,\ (\widehat{pq}) = 2\pi/3$.

11.4 $a = 2p - 3q,\ b = 3p + q,\ \ |p| = 4, |q| = 1,\ (\widehat{pq}) = \pi/6$.

11.5 $a = 7p - 2q,\ b = p + 3q,\ \ |p| = 1/2, |q| = 2,\ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

11.6 $a = 6p - q, b = p + q, \ |p| = 3, |q| = 4, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

11.7 $a = 3p - 2q, b = p + 5q, \ |p| = 4, |q| = 1/2, \ (\widehat{pq}) = 5\pi/6$.

11.8 $a = 2p - q, b = p + 3q, \ |p| = 3, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

11.9 $a = 4p + q, b = p - q, \ |p| = 7, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

11.10 $a = 2p + 3q, b = p - 2q, \ |p| = 6, |q| = 7, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

11.11 $a = 3p + q, b = p - 2q, \ |p| = 4, |q| = 1, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

11.12 $a = p + 2q, b = 3p - q, \ |p| = 1, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/6$.

11.13 $a = p - 2q, b = 2p + q, \ |p| = 2, |q| = 3, \ (\widehat{pq}) = 3\pi/4$.

11.14 $a = p - 4q, b = 3p + q, \ |p| = 1, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/6$.

11.15 $a = p + 4q, b = 2p - q, \ |p| = 7, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

11.16 $a = 3p + 2q, b = p - q, \ |p| = 10, |q| = 1, \ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

11.17 $a = 6p - q, b = p + 2q, \ |p| = 8, |q| = 1/2, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

11.18 $a = 7p + q, b = p - 3q, \ |p| = 3, |q| = 1, \ (\widehat{pq}) = 3\pi/4$.

11.19 $a = p - 3q, b = p + 2q, \ |p| = 1/5, |q| = 1, \ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

11.20 $a = p + 3q, b = p - 2q, \ |p| = 2, |q| = 3, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

11.21 $a = 4p - q, b = p + 2q, \ |p| = 5, |q| = 4, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

11.22 $a = 3p - q, b = p + 2q, \ |p| = 3, |q| = 4, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

11.23 $a = 3p + q, b = p - 3q, \ |p| = 7, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/4$.

11.24 $a = 5p + q, b = p - 3q, \ |p| = 1, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/3$.

11.25 $a = 3p + 4q, b = q - p, \ |p| = 2{,}5, |q| = 2, \ (\widehat{pq}) = \pi/2$.

Задача №12

Компланарны ли векторы *a*, *b* и *c*?

12.1 $a = \{2, 3, 1\}$, $b = \{-1, 0, -1\}$, $c = \{2, 2, 2\}$.
12.2 $a = \{3, 2, 1\}$, $b = \{2, 3, 4\}$, $c = \{3, 1, -1\}$.
12.3 $a = \{1, 5, 2\}$, $b = \{-1, 1, -1\}$, $c = \{1, 1, 1\}$.
12.4 $a = \{1, -1, -3\}$, $b = \{3, 2, 1\}$, $c = \{2, 3, 4\}$.
12.5 $a = \{3, 3, 1\}$, $b = \{1, -2, 1\}$, $c = \{1, 1, 1\}$.
12.6 $a = \{3, 1, -1\}$, $b = \{-2, -1, 0\}$, $c = \{5, 2, -1\}$.
12.7 $a = \{4, 3, 1\}$, $b = \{1, -2, 1\}$, $c = \{2, 2, 2\}$.
12.8 $a = \{4, 3, 1\}$, $b = \{6, 7, 4\}$, $c = \{2, 0, -1\}$.
12.9 $a = \{3, 2, 1\}$, $b = \{1, -3, -7\}$, $c = \{1, 2, 3\}$.
12.10 $a = \{3, 7, 2\}$, $b = \{-2, 0, -1\}$, $c = \{2, 2, 1\}$.
12.11 $a = \{1, -2, 6\}$, $b = \{1, 0, 1\}$, $c = \{2, -6, 17\}$.
12.12 $a = \{6, 3, 4\}$, $b = \{-1, -2, -1\}$, $c = \{2, 1, 2\}$.
12.13 $a = \{7, 3, 4\}$, $b = \{-1, -2, -1\}$, $c = \{4, 2, 4\}$.
12.14 $a = \{2, 3, 2\}$, $b = \{4, 7, 5\}$, $c = \{2, 0, -1\}$.
12.15 $a = \{5, 3, 4\}$, $b = \{-1, 0, -1\}$, $c = \{4, 2, 4\}$.
12.16 $a = \{3, 10, 5\}$, $b = \{-2, -2, -3\}$, $c = \{2, 4, 3\}$.
12.17 $a = \{-2, -4, -3\}$, $b = \{4, 3, 1\}$, $c = \{6, 7, 4\}$.
12.18 $a = \{3, 1, -1\}$, $b = \{1, 0, -1\}$, $c = \{8, 3, -2\}$.
12.19 $a = \{4, 2, 2\}$, $b = \{-3, -3, -3\}$, $c = \{2, 1, 2\}$.
12.20 $a = \{4, 1, 2\}$, $b = \{9, 2, 5\}$, $c = \{1, 1, -1\}$.
12.21 $a = \{5, 3, 4\}$, $b = \{4, 3, 3\}$, $c = \{9, 5, 8\}$.
12.22 $a = \{3, 4, 2\}$, $b = \{1, 1, 0\}$, $c = \{8, 11, 6\}$.
12.23 $a = \{4, -1, -6\}$, $b = \{1, -3, -7\}$, $c = \{2, -1, -4\}$.
12.24 $a = \{3, 1, 0\}$, $b = \{-5, -4, -5\}$, $c = \{4, 2, 4\}$.
12.25 $a = \{3, 0, 3\}$, $b = \{8, 1, 6\}$, $c = \{1, 1, -1\}$.

Задача №13

Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2, A_3$.

13.1 $A_1(1,3,6)$, $A_2(2,2,1)$, $A_3(-1,0,1)$, $A_4(-4,6,-3)$.
13.2 $A_1(-4,2,6)$, $A_2(4,-3,0)$, $A_3(-10,5,8)$, $A_4(-5,2,-4)$.
13.3 $A_1(7,2,4)$, $A_2(7,-1,-2)$, $A_3(3,3,1)$, $A_4(-4,2,1)$.
13.4 $A_1(2,1,4)$, $A_2(-1,5,-2)$, $A_3(-7,-3,2)$, $A_4(-6,-3,6)$.
13.5 $A_1(-1,-5,2)$, $A_2(-6,0,-3)$, $A_3(3,6,-3)$, $A_4(-10,6,7)$.
13.6 $A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$.
13.7 $A_1(5,2,0)$, $A_2(2,5,0)$, $A_3(1,2,4)$, $A_4(-1,1,1)$.
13.8 $A_1(2,-1,-2)$, $A_2(1,2,1)$, $A_3(5,0,-6)$, $A_4(-10,9,-7)$.
13.9 $A_1(-2,0,-4)$,. $A_2(-1,7,1)$, $A_3(4,-8,-4)$, $A_4(1,-4,6)$

13.10 $A_1(14,4,5)$, $A_2(-5,-3,2)$, $A_3(-2,-6,-3)$, $A_4(-2,2,-1)$.
13.11 $A_1(1,2,0)$, $A_2(3,0,-3)$, $A_3(5,2,6)$, $A_4(8,4,-9)$.
13.12 $A_1(2,-1,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(-4,2,5)$.
13.13 $A_1(1,1,2)$, $A_2(-1,1,3)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,0,-2)$.
13.14 $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(7,5,-3)$.
13.15 $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,3,1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(5,9,-8)$.
13.16 $A_1(1,5,-7)$, $A_2(-3,6,3)$, $A_3(-2,7,3)$, $A_4(-4,8,-12)$.
13.17 $A_1(-3,4,-7)$, $A_2(1,5,-4)$, $A_3(-5,-2,0)$, $A_4(2,5,4)$.
13.18 $A_1(-1,2,-3)$, $A_2(4,-1,0)$, $A_3(2,1,-2)$, $A_4(3,4,5)$.
13.19 $A_1(4,-1,3)$, $A_2(-2,1,0)$, $A_3(0,-5,1)$, $A_4(3,2,-6)$.
13.20 $A_1(1,-1,1)$, $A_2(-2,0,3)$, $A_3(2,1,-1)$, $A_4(2,-2,-4)$.
13.21 $A_1(1,2,0)$, $A_2(1,-1,2)$, $A_3(0,1,-1)$, $A_4(-3,0,1)$.
13.22 $A_1(1,0,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(2,-2,1)$, $A_4(2,1,0)$.
13.23 $A_1(1,2,-3)$, $A_2(1,0,1)$, $A_3(-2,-1,6)$, $A_4(0,-5,-4)$.
13.24 $A_1(3,10,-1)$, $A_2(-2,3,-5)$, $A_3(-6,0,-3)$, $A_4(1,-1,2)$.
13.25 $A_1(-1,2,4)$, $A_2(-1,-2,-4)$, $A_3(3,0,-1)$, $A_4(7,-3,1)$.

13 Рекомендуемая литература

1 **Беклемишев, Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. / Д. В.Беклемишев - М.: Наука, 1971. - 320 с.

2 **Беклемишев, Д.В.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб. пособие / Д.В. Беклемишев., А. Ю. Петрович, И.А. Чубаров; под ред. Д.В. Беклемишева - М.: Наука, 1987. - 496 с.

3 **Бугров, Я.С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - М.: Наука, 1984. - 256 с.

4 **Виноградова, И. М.** Элементы высшей математики.(Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел): учеб. для вузов/ И. М. Виноградова. - М.: Высш. шк.,1999. - 511с

5 **Гусак, А. А.** Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач/ А. А. Гусак. - М.: Наука, 2000. - 288 с.

6 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах.Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов ,Г. Я. Кожевникова. – Харьков: [б. и.], 1973.

7 **Канатников, А. Н.** Линейная алгебра**:** учеб. для вузов. 3-е изд. / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. - 336 с.

8 **Ким, Г. Д.** Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи / Г. Д. Ким, А. В. Крицков. - М.: Зерцало-М, 2003.-358 с.

9 **Кострикин, А. И.** Введение в алгебру. Ч. II. Основы алгебры: учеб. для вузов/ А. И. Кострикин. – 2-е изд., исправл. - М.: Физико-математическая литература, 2001. -368 с.

10 **Письменный, Д.** Конспект лекций по высшей математике. Ч.1. / Д. Письменный. - 2-е изд., испр. - М.: Айрис-пресс, 2003. - 288 с.

11 **Шевцов, Г.С.** Линейная алгебра: учеб. пособие / Г. С. Шевцов. - 2-е изд., исп. и доп. - М.: Гардарики, 1999. - 269 с.

12 **Шипачев, В.С.** Высшая математика: учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 5-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2002. - 479 с.

13 **Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии**: учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов / Р.Ф. Апатенок, А. М. Маркина,Н. В. Попова, В. Б. Хейнман; под ред. В. Т. Воднева. - 2-е изд., перераб. и доп. - Минск: Высшая школа, 1986. - 272 с.