**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Оренбургский государственный университет”

**Кафедра прикладной математики**

В.П. МАТВЕЙКИНА

# РЯДЫ ФУРЬЕ

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
“Оренбургский государственный университет”

Оренбург 2006

УДК 517.5 (076.5)
ББК 22.161.5 я73
М 33

Рецензент
ст. преподаватель кафедры математического анализа ОГУ
кандидат физико–математических наук С.Е. Тычинина

**Матвейкина В.П.**
**М 33 Ряды Фурье: методические указания / В.П. Матвейкина- Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. – 24с.**

Методические указания предназначены для проведения практических занятий и по теме «Ряды Фурье», со студентами специальностей «Геологическая съемка, поиск и разведка месторождений полезных ископаемых», «Геология нефти и газа» дневного, вечернего и заочного отделений, а также могут быть использованы студентами других специальностей.

# СОДЕРЖАНИЕ

## Введение

Ряды Фурье используются для представления и приближения периодических функций во многих важных приложениях. В частности, в науке и технике часто приходится иметь дело с периодическими явлениями, т.е. с такими, которые воспроизводятся в прежнем виде через определенный промежуток времени $T$, называемый периодом. Различные величины, связанные с рассматриваемым периодическим явлением, представляют собой периодические функции от времени, определенные на всей числовой оси и характеризуемые равенством

$$\varphi(t+T)=\varphi(t)\ ,\ t\in(-\infty;+\infty)$$

Таковы, например, сила и напряжение переменного тока, касательное усилие в пальце кривошипа и т.д.

Простейшей из периодических функций (если не считать постоянной) является синусоидальная величина $A\sin(\omega t+\alpha)$, называемая гармоникой. Такое название объясняется тем, что эта функция описывает так называемое гармоническое, колебательное движение. Здесь $A$- амплитуда колебания, $(\omega t+\alpha)$- фаза колебания, $\alpha$ - начальная фаза колебания, $\omega$ - частота колебания. Функция $\sin(\omega t+\alpha)$ имеет период $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Из подобных простейших периодических функций могут быть составлены и более сложные. Например, если сложить синусоидальные величины разных частот $A_k\sin(k\omega t+\alpha_k)$, то получится периодическая функция с периодом $T$ существенно отличная от ее составляющих. В случае суммы бесконечного ряда указанных величин отличие будет еще более существенным.

Естественным представляется и встречный вопрос, можно ли данную периодическую функцию $\varphi(t)$ периода $T$ представить в виде суммы конечного или хотя бы бесконечного числа синусоидальных величин вида $A_k\sin(k\omega t+\alpha_k)$. Оказывается на этот вопрос можно дать утвердительный ответ по отношению к довольно широким классам функций. Они будут описаны ниже. Для функций из таких классов имеет место разложение:

$$\varphi(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\alpha_n), \tag{1}$$

где $A_0, A_1, \alpha_1, A_2\alpha_2, \ldots$ суть постоянные, имеющие свои значения для каждой функции.

Геометрически это означает, что график периодической функции получается путем наложения ряда синусоид. Если истолковать каждую синусоидальную величину механически как представляющую гармоническое, колебательное движение, то можно также сказать, что сложное колебание, характеризуемое функцией $\varphi(t)$, разлагается на отдельные гармонические колебания. Если за независимую переменную выбрать $x = \omega t = \frac{2\pi}{T} t$, то получится снова периодическая функция

$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right)$ со стандартным периодом $2\pi$ . Разложение (1) примет вид:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n) \tag{2}$$

Развернув члены этого ряда по формуле для суммы и положив

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n \sin\alpha_n = a_n, A_n \cos\alpha_n = b_n, n = 1,2 \ldots,$$

мы придем к следующему разложению:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3}$$

Ряд, стоящий справа в (3) , называется тригонометрическим рядом. Задача о возможности представления функции тригонометрическим рядом,

по-видимому, впервые была поставлена Эйлером в 1753 г. в связи с появившейся в то время работой Даниила Бернулли «О колеблющихся струнах ». Мы пришли к разложению (3), отправляясь от периодических колебательных явлений. Однако подобные разложения часто оказываются полезными и при исследовании функций, заданных лишь в определенном конечном промежутке и не порожденных колебательными движениями. Фурье в 1911 г. указал на возможность представления (3) и дал много частных примеров разложения функций в тригонометрические ряды в связи с изучением проблем теплопроводности. В частности, ему пришлось представить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, -\pi < x < 0, \\ 1, 0 < x < \pi \end{cases} \tag{4}$$

в виде ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Однако, он не доказал, что полученный ряд $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ сводится к функции (4). Самое ценное, что им впервые было указано, как следует определять коэффициенты тригонометрического ряда для заданной функции $f(x)$.

## 1 Определение коэффициентов Фурье

Пусть функция $f(x)$ является суммой равномерного сходящегося тригонометрического ряда (3). Тогда для определения коэффициентов этого ряда достаточно умножить обе части равенства (3) последовательно на 1, $\cos mx, \sin mx$ и проинтегрировать обе его части в пределах

от $-\pi$ до $+\pi$. В первом случае получим: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)$.

Замечая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0, n = 1,2,... \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx = -\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0, n = 1,2,... \tag{6}$$

получаем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Далее, умножив обе части (3) на $\cos mx, m = 1,2,...$, получаем

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx\right]\end{aligned} \tag{8}$$

Вычислим интегралы в правой части:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x)dx = 0 \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right)dx = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ \pi, m = n \end{cases} \tag{10}$$

В силу (5), (9), (10) в правой части (8) ненулевым является только член $a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx$ и потому

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, n = 0,1,2,.... \tag{11}$$

Заметим, что в формуле (11) добавлено $n = 0$, т.к. при $n = 0$ она совпадает с формулой (7), что и оправдывает представление свободного члена в (3) в виде $\frac{a_0}{2}$.

Наконец, умножая равенство (3) на $\sin mx, m = 1,2,...,$ интегрируя обе части и учитывая (6), (9), а также легко проверяемое соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mxdx = \begin{cases} 0, n \neq m, \\ \pi, n = m, \end{cases} \tag{12}$$

определяем коэффициенты

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, n = 1,2,... . \tag{13}$$

Формулы (11), (13) известны под названием формул Фурье (хотя они были известны еще Эйлеру и Лагранжу, но Фурье стал ими пользоваться систематически, потому по традиции их называют его именем). Числа $a_n, b_n$ называются коэффициентами Фурье, и ряд (3) с этими коэффициентами называется тригонометрическим рядом Фурье.

Вид коэффициентов Фурье для функции $f(x)$ получен в предположении, что ряд (3) сходится равномерно к $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Однако, чтобы функция могла быть суммой равномерно сходящегося на $[-\pi, \pi]$ ряда из непрерывных функций, необходимо, чтобы она была сама непрерывна.

Поэтому может показаться, что, желая изобразить функцию рядом Фурье, необходимо от нее требовать непрерывности на $[-\pi,\pi]$. На самом деле теория рядов Фурье охватывает гораздо более широкий класс функций.

Заметим, что для всякой интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ функции можно по формулам (11), (13) определить числа $a_n$ и $b_n$ , и формально составить тригонометрический ряд Фурье, соответствующий этой функции. Однако между функцией и этим рядом не всегда можно поставить знак равенства, поэтому логичнее использовать знак соответствия и записывать так:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (14)$$

## 2 Условия сходимости тригонометрического ряда Фурье

В задачах математической физики и в ряде других разделов математики существенную роль играет вопрос об условиях, при выполнении которых тригонометрический ряд Фурье представляет в некотором смысле функцию $f(x)$. Речь идет о различных понятиях сходимости тригонометрического ряда к функции, которая порождает этот ряд.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на $[a,b]$, если она непрерывна всюду на этом отрезке, исключая, быть может, конечное число точек разрыва первого рода.

**Теорема 1.** (об абсолютной и равномерной сходимости). Если функция непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции на $[-\pi,\pi]$ абсолютно и равномерно.

*Замечание* 1. Если функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1, периодически продолжить (с периодом $2\pi$ ) на всю числовую прямую, то теорема 1 будет гарантировать равномерную и абсолютную сходимость ряда Фурье к функции на всей числовой прямой.

Определение 2. Функция называется кусочно-гладкой в промежутке $[a,b]$, если она и ее первая производная имеют на нем не более конечного числа точек разрыва, причем лишь первого рода.

Определение 3. Функция называется кусочно-монотонной в промежутке $[a,b]$, если этот промежуток можно разбить на конечное число частичных промежутков, внутри каждого из которых по отдельности функция ограничена и монотонна (возрастает или убывает).

Приведем условие для представления функции рядом Фурье, которое вполне удовлетворяет практическим потребностям анализа и приложений.

**Теорема 2.** (Признак Дирихле о поточечной сходимости). Если функция $f(x)$ с периодом $2\pi$ кусочно-гладкая или кусочно-монотонная на сегменте

$[-\pi,\pi]$, то ее тригонометрический ряд сходится к $f(x)$ в каждой точке ее непрерывности и сходится к значению $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ (среднему арифметическому правого и левого пределов $f(x)$) в каждой точке ее разрыва.

*Замечание* 2. В ряд Фурье можно разложить и любую функцию, заданную только на сегменте $[-\pi,\pi]$. Следует лишь ее периодически продолжить на всю числовую ось, полагая при этом $F(x)=f(x)$ при $-\pi<x\leq\pi$, $F(-\pi)=f(\pi)$. Суммой ряда Фурье для полученной функции в точках $-\pi$ и $\pi$ будет число

$$\frac{1}{2}\left(f(-\pi)+f(+\pi)\right).$$

*Замечание* 3. Если тригонометрический ряд сходится на $[-\pi,\pi]$ к функции $f(x)$, то ввиду того, что его члены имеют период $2\pi$, сумма ряда будет также периодической функцией с периодом $2\pi$. Однако эта сумма вне указанного промежутка уже не обязана совпадать с функцией $f(x)$ (если $f(x)$ определена и вне промежутка $[-\pi,\pi]$ и не является периодической).

В формулах (11), (13) вместо промежутка $[-\pi,\pi]$ можно брать любой промежуток $[\alpha,\alpha+2\pi]$ длины $2\pi$, так как легко проверить, что интеграл от периодической функции на любом отрезке длины $2\pi$ имеет одно и тоже значение.

Если функция задана в промежутке $[-l,l]$ произвольной длины $2l\ (l>0)$, то сделав постановку $x=\dfrac{ly}{\pi}, [-\pi\leq y\leq\pi]$, получим функцию $f\left(\dfrac{ly}{\pi}\right)$ от $y$ в промежутке $[-\pi,\pi]$. Эту функцию при соблюдении выше перечисленных условий можно также разложить в ряд Фурье

$$f\left(\frac{yl}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos ny+b_n\sin ny\right),$$

коэффициенты которого определяются формулами (11), (13):

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\,dy. \qquad (15)$$

Если вернуться к прежней переменной $x$, положив $y=\dfrac{\pi x}{l}$, то из (15) получим разложение заданной функции $f(x)$ в тригонометрический ряд несколько измененного вида

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (16)$$

с коэффициентами

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,..., \qquad (17)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,..., \qquad (18)$$

В отношении концов промежутка $x=\pm l$ сохраняют силу замечания, сделанные относительно точек $x=\pm\pi$.

Если функция $f(x)$ задана на произвольном интервале $(a,b)$, то продолжая ее периодически с периодом $T=2l=b-a$ на всю числовую ось и учитывая, что интеграл от периодической функции на любом интервале длины $T$ один и тот же, получим ряд Фурье в виде (16) с коэффициентами, выраженными формулами (17), (18), где $l=\frac{b-a}{2}$. Сумма полученного ряда при выполнении ранее сформулированных условий совпадает с исходной функцией только на интервале $(a,b)$.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x\le 0,\\ x, 0<x<\pi.\end{cases}$$

Продолжая ее периодически, как показано на рисунке 1, получаем функцию $F(x)$

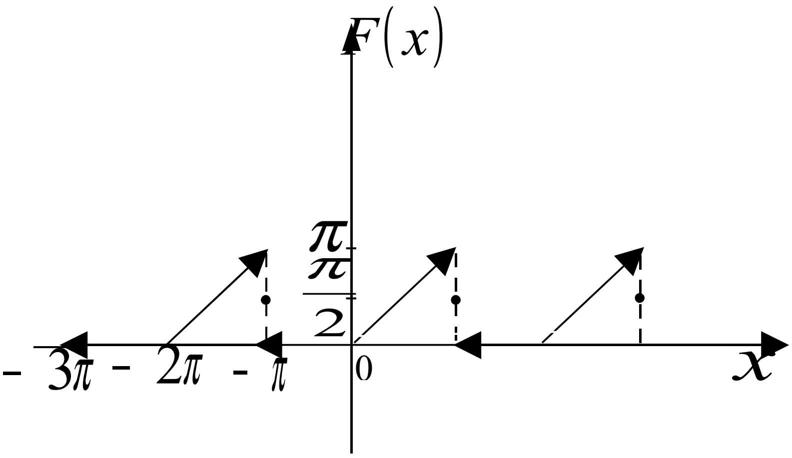



Рисунок 1

Вычисляем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\left. x\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{\cos nx}{n^2}\right|_0^{\pi}\right] = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} =$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2k \\ -\dfrac{2}{\pi n^2}, n = 2k-1; \end{cases} k = 1,2,..,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\left. -x\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{\sin nx}{n^2}\right|_0^{\pi}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

$n = 1,2,....$

Окончательно имеем

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.$$

Так как функция $f(x)$ кусочно-гладкая, то по теореме 2 ряд, стоящий справа, в каждой точке интервала $(-\pi,\pi)$ сходится к значению функции $f(x)$ в этой точке, в частности,

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

В точках разрыва функции ряд сходится к значению $\frac{1}{2}\pi$. Обратим внимание на то, что представление функции рядом Фурье позволило получить сумму числового ряда.

## 3 Разложение в тригонометрический ряд Фурье симметричных функций

Функция, заданная на симметричном интервале $(-l,l)$, называется нечетной, если для любого значения $x$ из $(-l,l)$

$f(x) = -f(-x)$,

и четной, если для всех $x$ из $(-l,l)$

$f(x) = f(-x)$.

Если функция, заданная в интервале $(-l,l)$, интегрируема и симметрична, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0$ в случае нечетной функции $f(x)$, $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx$ - в случае четной функции $f(x)$.

В этом легко убедиться, представив интеграл $\int\limits_{-l}^{l}$ в виде суммы интегралов $\int\limits_{-l}^{0}$ и $\int\limits_{0}^{l}$ и заменив в первом из них $x$ на $-x$.

Если $f(x)$ - четная функция на $(-l,l)$, то произведение $f(x)\sin nx$ есть нечетная функция, и в силу этого $b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0$.

Таким образом, ряд Фурье четной функции содержит только косинусы, т.е. $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$.

При этом, учитывая, что $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ функция четная, получаем

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0,1,\ldots.$$

Если $f(x)$ - нечетная функция на $(-l,l)$, то функция $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ тоже нечетная и потому

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0, n = 0,1,\ldots.$$

Таким образом, ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы, т.е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

При этом ввиду четности произведения $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ коэффициенты

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ задана лишь в интервале $(0,l)$. Желая разложить ее в этом интервале в ряд Фурье, мы доопределим заданную функцию для значения $x$ в интервале $(-l,0)$ произвольно. Это дает возможность получить таким путем различные тригонометрические ряды.

Например, если положить $f(-x) = f(x)$ при $0 < x < l$ и продолжить ее периодически, то получится четная функция, имеющая период $2l$. Ее разложение будет содержать одни только косинусы.

Пример 2. Функцию $f(x) = x$ в промежутке $[0,\pi]$ разложить по косинусам. Доопределим ее на $[-\pi, 0]$ четным образом и продолжим периодически на всю числовую ось. Получим функцию $F(x)$: (см. рисунок 2).

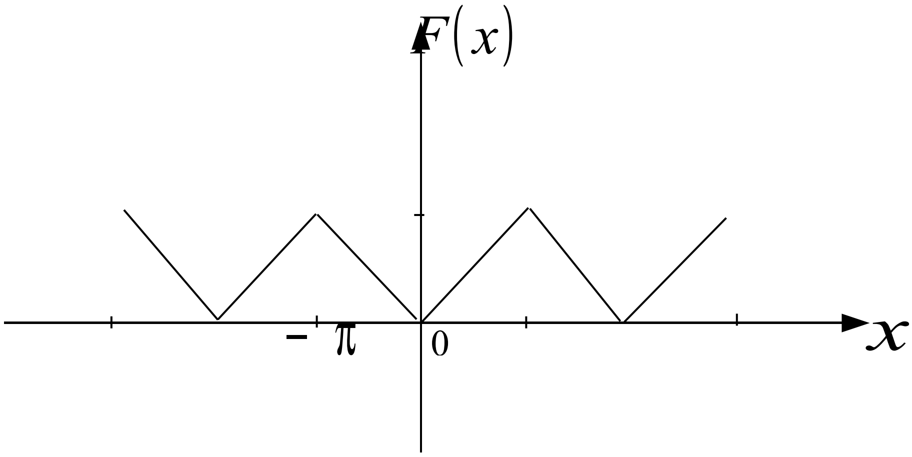



Рисунок 2

Вычислим коэффициенты

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi\,;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+2\frac{\cos nx}{n^2\pi}\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\end{cases}\qquad (k=1,2,\ldots)$$

Искомое разложение имеет вид:

$$F(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Полученная функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому ее ряд Фурье сходится к $F(x)$ на всей числовой оси абсолютно и равномерно.

Если доопределить заданную на $[0,\pi]$ функцию $f(x)$ для $x\in(-\pi,0)$, полагая, $f(-x)=-f(x)$, то полученная функция будет нечетной.

Если продолжить ее периодически, получится функция $F(x)$, в разложении которой будут участвовать только члены с синусами.

Пример 3. Функцию $f(x)=x$ в промежутке $[0,\pi)$ разложить по синусам. Доопределим ее на $(-\pi,0)$ нечетно и продолжим периодически на всю числовую ось, как показано на рисунке 3.

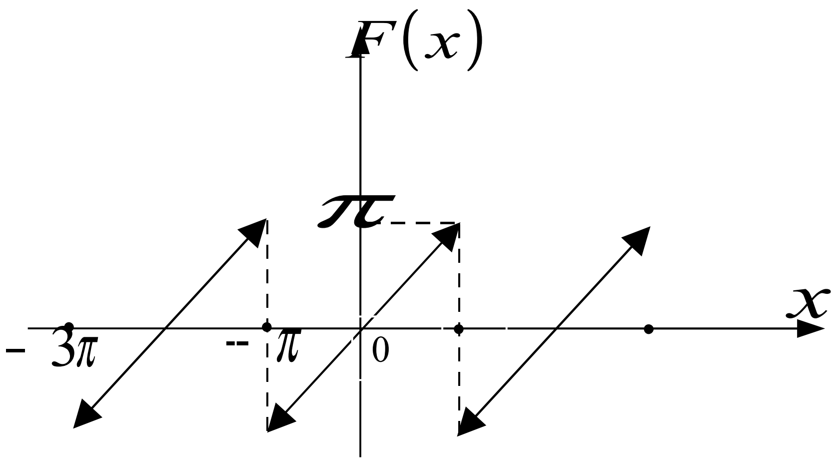





Рисунок 3

Вычислим коэффициенты:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left( -x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} \right) = \frac{(-1)^{n+1}2}{n}, n = 1,2,...$$

Искомое разложение для полученной функции имеет вид:

$$F(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, поэтому ряд, стоящий справа, в каждой точке непрерывности функции $F(x)$ сходится к ее значению в этой точке, а в точках разрыва – к нулю.

Примеры 1-3 показывают, что одна и та же функция, заданная в интервале $(0,\pi)$ представлена различными тригонометрическим рядами, но все они в точках указанного интервала сходятся к одному и тому же значению, равному $x$.

## 4 Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Если заменить $\cos nx$ и $\sin nx$ их выражениями, получающимися из известного тождества Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

то ряд (14) можно записать в виде:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + ib_n \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}.$$

Полагая

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \tag{19}$$

Получим

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \qquad (20)$$

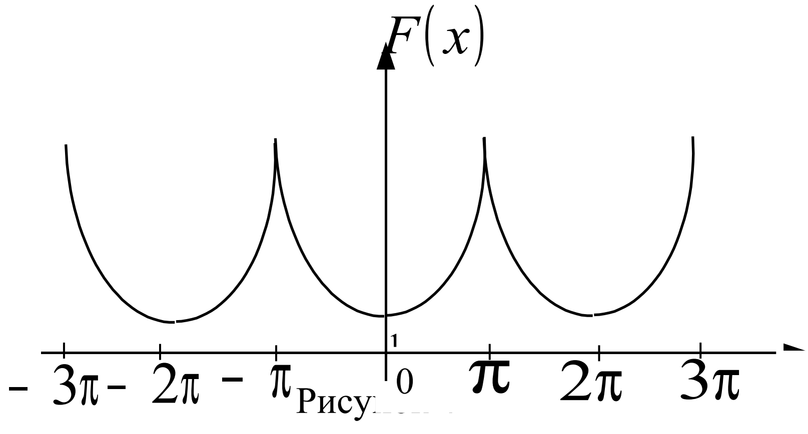
где коэффициенты можно представить в виде:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx, n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots.$$

Так как в ряде (14) числа $a_n$ и $b_n$ действительные, то из формул (19) видно, что числа $c_n$ и $c_{-n}$ являются сопряженными комплексными числами, т.е. $c_{-n} = \bar{c}_n$. Представление (20) называется комплексной формой тригонометрического ряда. Оно удобно своей краткостью. Последовательность коэффициентов $\{c_n\}$ называется спектральной последовательностью функции $f(x)$, последовательности $\{|c_n|\}$ и $\{Argc_n\}$ называются соответственно амплитудным и фазовым спектрами. Амплитудный и фазовый спектры играют важную роль при изучении периодических явлений.

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = chx$ на интервале $(-\pi, \pi)$. Так как $chx = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$, то удобно использовать комплексную форму ряда Фурье.

Продолжая функцию $f(x)$ с периодом $2\pi$ на всю ось $Ox$, получим периодическую функцию $F(x)$, изображенную на рисунке 4.




Вычислим

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}dx+\int_{-\pi}^{\pi}e^{-(1+in)x}dx\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{e^{-(1+in)x}}{1+in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{4\pi}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1-in}+\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1+in}\right)=\frac{(-1)^n}{4\pi}\left(\frac{2sh\pi}{-in+1}+\frac{2sh\pi}{1+in}\right)=\frac{(-1)^n sh\pi}{\pi\left(1+n^2\right)}.$$

Получим ряд Фурье в комплексной форме, равномерно сходящийся на всей числовой оси к $F(x)$.

В частности, $f(x)=\frac{sh\pi}{\pi}\sum\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{inx}$, если $x\in[-\pi,\pi]$ (была использована формула $e^{in\pi}=\cos n\pi+i\sin n\pi=(-1)^n$).

Спектральной последовательностью этой функции является

$$\left\{\frac{(-1)^n sh\pi}{\pi\left(1+n^2\right)}\right\}.$$

## 5 Задания для индивидуальной работы

Задача 1. Разложить ряд Фурье функции $f(x)$ и построить график суммы ряда.

1.а) $f(x)=x-1,-1\le x\le 1$; б) $f(x)=\begin{cases}-2,-\pi\le x<0\\ 3,0\le x\le\pi\end{cases}$

2.а) $f(x)=|x|,-\pi\le x\le\pi$; б) $f(x)=\begin{cases}-x,-2\le x<0\\ 0,0\le x\le 2\end{cases}$

3.а) $f(x)=\begin{cases}1,-\pi\le x\le 0\\ 2,0\le x\le\pi\end{cases}$; б) $f(x)=x+2,-2\le x\le 2$

4. а) $f(x)=2+|x|,-1\le x\le 1$; б) $f(x)=\begin{cases}-4,-\pi\le x<0\\ 4,0\le x\le\pi\end{cases}$

5. а) $f(x)=\frac{\pi-x}{2},-\pi\le x\le\pi$; б) $f(x)=\begin{cases}-5,-3\le x<0\\ 5,0\le x\le 3\end{cases}$

6. а) $f(x)=x+1,-2\le x\le 2$; б) $f(x)=\begin{cases}-2,-\pi\le x<0\\ 1,0\le x\le\pi\end{cases}$

7. а) $f(x)=\begin{cases}0,-1\le x<0\\ x,0\le x\le 1\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi\le x<0\\ 2,0\le x\le\pi\end{cases}$

8. а) $f(x)=x+2,-2\le x\le 2$; б) $f(x)=\begin{cases}2,-\pi\le x<0\\ 1,0\le x\le\pi\end{cases}$

9. а) $f(x)=x+1,-\pi\le x\le\pi$; б) $f(x)=\begin{cases}-2,-2\le x\le 0\\ 3,0<x\le 2\end{cases}$

10. а) $f(x)=x-2, -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x)=\begin{cases} -2, -4 \le x < 0 \\ 1, 0 \le x \le 4 \end{cases}$

11. а) $f(x)=2x-1, -1 \le x \le 1$; б) $f(x)=\begin{cases} -3, -\pi \le x < 0 \\ 2, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

12. а) $f(x)=2|x|, -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x)=\begin{cases} 1, -3 \le x < 0 \\ -2, 0 \le x \le 3 \end{cases}$

13. а) $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi \le x < 0 \\ 2, 0 \le x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x)=\frac{x}{2}+1, -2 \le x \le 2$

14. а) $f(x)=3+|x|, -1 \le x \le 1$; б) $f(x)=\begin{cases} -2, -\pi \le x < 0 \\ 1, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

15. а) $f(x)=x+2, -2 \le x \le 2$; б) $f(x)=\begin{cases} 1, -\pi \le x < 0 \\ 2, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

16. а) $f(x)=\begin{cases} 3, -\pi \le x < 0 \\ 2, 0 \le x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1, -2 \le x < 0 \\ 1, 0 \le x \le 2 \end{cases}$

17. а) $f(x)=1-x, -2 \le x \le 2$; б) $f(x)=\begin{cases} -2, -\pi \le x < 0 \\ 2, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

18. а) $f(x)=2x+1, -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x)=\begin{cases} -4, -2 \le x < 0 \\ 4, 0 \le x \le 2 \end{cases}$

19. а) $f(x)=x+2, -\pi \ge x \le \pi$; б) $f(x)=\begin{cases} -2, -4 \le x < 0 \\ 3, 0 \le x \le 4 \end{cases}$

20 а) $f(x)=x-1, -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x)=\begin{cases} 3, -4 \le x < 0 \\ 2, 0 \le x \le 4 \end{cases}$

21. а) $f(x)=3x-1, -2 \le x \le 2$; б) $f(x)=\begin{cases} 2, -\pi \le x \le 0 \\ 4, 0 < x \le \pi \end{cases}$

22. а) $f(x)=|x|, -3 \le x \le 3$; б) $f(x)=\begin{cases} -2, -\pi \le x < 0 \\ 4, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

23. а) $f(x)=\frac{\pi-4}{4}, -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x)=\begin{cases} 1, -2 \le x < 0 \\ 2, 0 \le x \le 2 \end{cases}$

24. а) $f(x)=2x+1, -1 \le x \le 1$; б) $f(x)=\begin{cases} 1, -\pi \le x < 0 \\ 3, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

25. а) $f(x)=2-x, -1 \le x \le 1$ б) $f(x)=\begin{cases} -1, -\pi \le x < 0 \\ 2, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Задача 2.

Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам и построить график суммы ряда.

1. $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$;

2. $f(x)=\sin 3x, 0\le x\le\pi$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}-x, 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$;

4. $f(x)=\sin 2x, 0\le x\le\pi$

5. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-x, 0\le x\le\pi$ ;

6. $f(x)=x-1, 0\le x\le 2$

7. $f(x)=2-x, 0\le x\le 2$ ;

8. $f(x)=\begin{cases} 2, 0\le x<2 \\ 1, 2\le x\le\pi \end{cases}$

9. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{6}, 0\le x\le\pi$ ;

10. $f(x)=2-\dfrac{x}{2}, 0\le x\le\pi$

11. $f(x)=\sin\dfrac{3x}{2}, 0\le x\le\pi$ ;

12. $f(x)=1-\dfrac{x}{2}, 0\le x\le 2$

13. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, 0\le x\le\pi$ ;

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье по синусам и построить график суммы ряда.

14. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{5}, 0\le x\le\pi$ ;

15. $f(x)=\cos 4x, 0\le x\le\pi$

16. $f(x)=x-1, 0\le x\le 2$;

17. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-x, 0\le x\le\pi$

18. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{4}, 0\le x\le\pi$ ;

19. $f(x)=\cos 3x, 0\le x\le\pi$

20. $f(x)=\cos 2x, 0\le x\le\pi$ ;

21. $f(x)=\dfrac{x}{2}-1, 0\le x\le 4$

22. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}, 0\le x\le\pi$ ;

23. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}, 0\le x\le\pi$

24. $f(x)=\begin{cases} 0, 0\le x\le 1 \\ x-1, 1\le x\le 2 \end{cases}$;

25. $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}, 0\le x\le\pi$

# 6 Пример оформления решений заданий «Нулевого варианта»

Задача 1. Разложить функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье. Построить график суммы ряда.

1. $f(x) = x + 1, -2 \le x \le 2$ б) $f(x) = \begin{cases} -1, -\pi \le x < 0 \\ 2, 0 < x \le \pi \\ 0{,}5 \quad x = 0 \end{cases}$

*Решение*

а) Функция задана на отрезке $[-2,2]$ $(l = 2)$ и являются на нем кусочно-гладкой. Вычисляем ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x+1)\,dx = \frac{1}{4}(x+1)^2\Big|_{-2}^{2} = 2 \;;$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x+1)\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \left[\begin{matrix} u = x+1, du = dx \\ dv = \cos\frac{k\pi x}{2}dx, v = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{(x+1)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{k\pi}\int_{-2}^{2}\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2} = 0$$

$(k = 1,2,...)$;

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x+1)\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \left[\begin{matrix} u = x+1, du = dx \\ dv = \sin\frac{k\pi x}{2}dx, v = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\end{matrix}\right] =$$

$$= -\frac{x+1}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2} + \frac{1}{k\pi}\int_{-2}^{2}\cos\frac{k\pi x}{2}dx = -\frac{4}{k\pi}\cos k\pi + \frac{2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= -\frac{4}{k\pi}(-1)^k = (-1)^{k+1}\frac{4}{k\pi}$$

$(k = 1,2,...)$

Таким образом, получаем ряд Фурье данной функции

$$f(x) \sim 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{2} = S(x),$$

где через $S(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ обозначена сумма полученного ряда Фурье. Согласно основной теореме о сходимости тригонометрического ряда Фурье имеем:

$$S(x) = x + 1 \text{ при } -2 < x < 2$$

$$S(-2) = S(2) = \frac{f(-2) + f(2)}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

Функция $S(x)$ определена на интервале $]-\infty, +\infty[$ и является периодическим продолжением с периодом $4$ данной функции. График функции $S(x)$ представлен на рисунке 5.

В точках $x_n = (2n-1)2 (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ функция $S(x)$ имеет разрыв и $S(x_n) = 1$

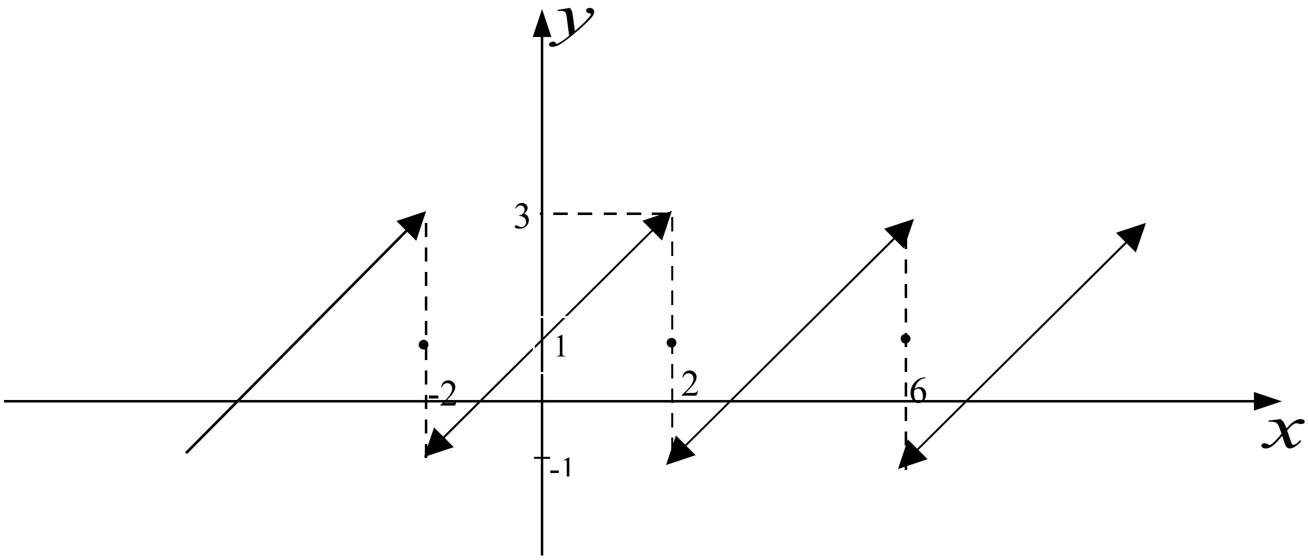



Рисунок 5

б) Функция заданна на отрезке $[-\pi, \pi]$ $(l = \pi)$ и является на нем кусочно-гладкой. Вычисляем ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2dx = -\frac{x}{\pi}\bigg|_{\pi}^{0} + \frac{2x}{\pi}\bigg|_{0}^{\pi} = -1 + 2 = 1;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\cos kx dx =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{k\pi}\sin kx\Big|_{0}^{\pi} = 0$$

$(k = 1,2,...)$;

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{k\pi}\cos kx\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{k\pi}(1-\cos k\pi) - \frac{2}{k\pi}(\cos k\pi - 1) =$$

$$= \frac{3}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \frac{3}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \dfrac{6}{(2n-1)\pi}, & k = 2n-1 \end{cases} \quad (n = 1,2,...).$$

Ряд Фурье данной функции имеет вид

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x = S(x)$$

Согласно основной теореме имеем:

$$S(x) = -1 \text{ при } -\pi < x < 0,$$
$$S(x) = 2 \text{ при } 0 < x < \pi,$$
$$S(0) = S(-\pi) = S(\pi) = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

График функции $S(x)$ представлен на рисунке 6.

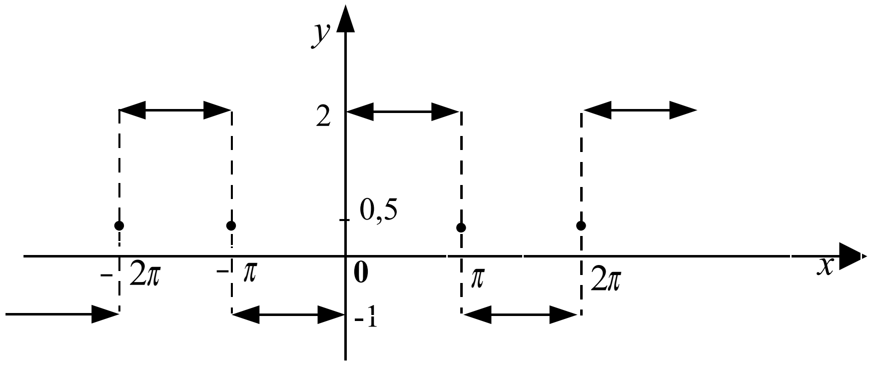



Рисунок 6

Функция $S(x)$ есть периодическое продолжение (с периодом $2\pi$ ) данной функции $f(x)$. В точках $x_n = n\pi \quad (n = 0;\pm 1;\pm 2;...)$ функции $S(x)$ терпит разрыв и $S(x_n) = \frac{1}{2}$

Задача 2. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = 2x - 1, 0 \le x \le 1.$$

Построить график суммы ряда.

*Решение.*

Функция задана на отрезке $[0;1]$ $(l = 1)$ и является на нем кусочно- гладкой. Ряд Фурье по косинусам функции имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x \qquad (21)$$

Вычислим его коэффициенты:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = 2\int_0^1 (2x-1)\,dx = 2\left(x^2 - x\right)\Big|_0^1 = 0;$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 (2x-1)\cos k\pi x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x-1, du = 2dx, \\ dv = \cos k\pi x\,dx, v = \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2(2x-1)}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\Big|_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x\,dx = \frac{2}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, k = 2n, \\ -\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}, k = 2n-1 \end{cases} \qquad (n = 1,2,...).$$

Подставляя найденные коэффициенты $a_k (k = 0,1,2,...)$ в ряд (21) получим:

$$f(x) \sim -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} = S(x)$$

По основной теореме имеем:

$S(x) = 2x - 1,$ при $0 \le x \le 1$

Функция $S(x)$ есть периодическое продолжение с периодом 2 четной функции

$$F(x) = \begin{cases} f(x) = 2x - 1, 0 \le x \le 1 \\ f(-x) = -2x - 1, -1 \le x \le 0, \end{cases}$$

определенной на отрезке $[-1,1]$. Последняя является четным продолжением данной функции $f(x)$ на отрезке $[-1,0]$. Функция $S(x)$ непрерывна на интервале $]-\infty,+\infty[$ . Ее график представляет собой бесконечную ломаную линию (рисунок 7).

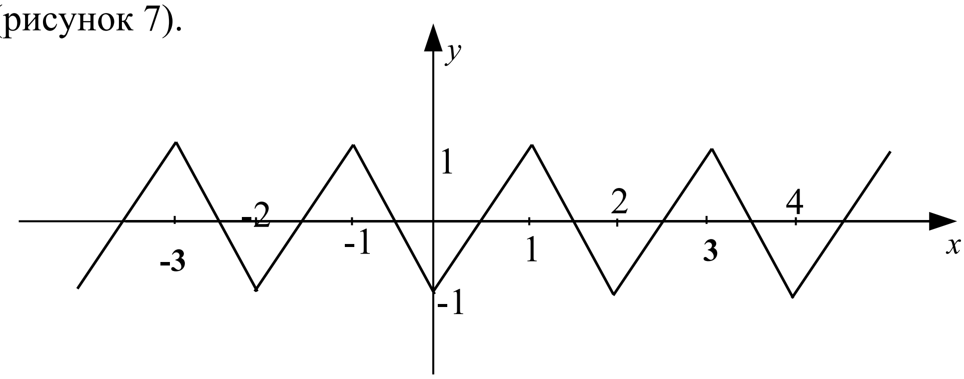



Рисунок 7

## Список использованных источников

1 **Бугров, Я.С.** Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного/Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981. – 448с.

2 **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1986. – 415с.

3 **Воробьев, Н.Н.** Теория рядов: 6-е издание, стереотипное / Н.Н. Воробьев. – СПб.: Издательство Линь, 2002. – 408с.

4 **Волкова, И.Г.** Задания для типового расчета по теме: «Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье» / И.Г. Волкова, В.С. Ким, Т.А. Тарасова. – Оренбург: 1998. – 37с.

5 **Балашова, Г.С.** Ряды Фурье / Г.С. Балашова. – М.: Издательство МЭИ, 1995. –36с.