МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Кафедра прикладной математики

Т.А. ТАРАСОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Ч.1
МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2006

УДК 512.64 (07)
ББК 22.143я7
Т 19

Рецензент
Доктор технических наук, доцент кафедры прикладной математики ГОУ ОГУ Болодурина И.П.

Тарасова Т.А.
Т 19 **Высшая математика. Ч.1. Матрицы, определители, исследование и решение линейных систем: Сборник заданий. / Т.А.Тарасова – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. – 23 с.**

Сборник заданий для студентов всех специальностей, изучающих данные разделы высшей математики.

ББК 22.143я7

Содержание

Введение………………………………………………………………….. 4
1 Теоретические вопросы……………………………………………….. 5
2 Задания для проведения самостоятельных работ……………………. 6
2.1 Самостоятельная работа № 1………………………………………….. 6
2.2 Самостоятельная работа № 2………………………………………….. 9
2.3 Самостоятельная работа № 3………………………………………….. 13
3 Задание для проведения контрольной работы……………………….. 17

Введение

Предлагаемый сборник заданий состоит из трех разделов.

1 раздел: теоретические вопросы по разделам программы «Матрицы, определители, исследование и решение линейных систем».

2 раздел: задания для проведения проверочных самостоятельных работ на практических занятиях. Эти задания составлены с учетом тех теоретических вопросов и практических задач, которые студент должен выучить и решить к тому занятию, на котором проводится эта самостоятельная работа.

В каждой из трех тем самостоятельных работ предлагается 10 вариантов заданий, содержащих по 5 вопросов. Ответы на вопросы заданий не требуют длительного времени, если студент добросовестно готовится к занятиям; поэтому, рекомендуется на выполнение каждого задания тратить 12-15 минут. Задания самостоятельных работ составлены так, что в новых темах часть вопросов относится к темам, изучаемым ранее, это сделано для того, чтобы студенты постоянно повторяли вопросы программы.

3 раздел: задания для проведения контрольной работы «Матрицы, системы, исследование и решение линейных систем». Каждый из 10 вариантов содержит как теоретические, так и практические вопросы. На выполнение контрольной работы рекомендуется выделять два академических часа.

При написании методических указаний автор ставил цель не только помочь студентам работать самостоятельно, но и эффективно контролировать эту работу преподавателем.

1 Теоретические вопросы

1) Определение $A_{m\times n}$.
2) Основные виды матриц.
3) $\det A$: а) определение $\det A$;

   б) свойства $\det A$;

   в) M_{ij} - определение;

   г) A_{ij} - определение;

   д) правило вычисления $\det A$.
4) Линейные действия над матрицами: определение, свойства, примеры.
5) Произведение матриц: определение, свойства, примеры.
6) Матрица обратная для данной: определение, теорема $\exists!$ обратной матрицы, схема построения обратной матрицы.
7) Определение линейной однородной и неоднородной системы.
8) Матричная запись однородной и неоднородной системы.
9) Определение совместной системы.
10) Определение минора матрицы.
11) Определение базисного минора матрицы.
12) Определение ранга матрицы.
13) Определение линейно зависимой и линейно независимой системы матриц.
14) Теорема о базисном миноре матрицы.
15) Теорема о ранге матрицы.
16) Определение эквивалентных матриц.
17) Определение элементарных преобразований матрицы.
18) Теорема о ранге эквивалентных матриц.
19) Теорема Кронекера-Капелли.
20) Решение невырожденной системы:

    а) матричный метод;

    б) метод Крамера.
21) Свойства решений однородной системы.
22) Теорема о количестве линейно независимых частных решений однородной системы.
23) Определение фундаментальной системы решений однородной системы.
24) Определение общего решения системы.
25) Теорема о структуре общего решения однородной системы.
26) Теорема о структуре общего решения неоднородной системы.

2 Задания для проведения самостоятельных работ

2.1 Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1) Записать в общем виде матрицу $A_{2\times 3}$.
2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. Записать и вычислить M_{22} этого определителя.
3) Вычислить определитель из задания 2), разлагая его по элементам третьей строки.
4) Найти решение системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$ методом Крамера.
5) Дать определение суммы двух матриц.

Вариант 2

1) Записать в общем виде определитель третьего порядка.
2) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ разлагая его по элементам третьего столбца.
3) Дать определение A_{ij}.
4) Найти A_{12} для определителя из задания 2).
5) Каким должно быть число α, чтобы система $\begin{cases} \alpha x_1 - 2x_2 = 1 \\ 4x_1 + 8x_2 = 3 \end{cases}$ имела единственное решение?

Вариант 3

1) Записать произвольный определитель третьего порядка.
2) Найти A_{23} для определителя из задания 1).
3) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ рационально.

4) Найти решение системы $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases}$ методом Крамера.
5) Дать определение произведения двух матриц.

Вариант 4

1) Записать в общем виде матрицу $A_{4\times 1}$.
2) Написать произвольный определитель третьего порядка, для которого $A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$.
3) Система $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение. Найти методом Крамера значение неизвестного x_1 из этого решения.
4) Дать определения обратной матрицы.
5) Известно, что $\begin{vmatrix} 2 & -\alpha \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$. Найти α .

Вариант 5

1) Указать размерность матрицы $A \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
2) Написать произвольный определитель третьего порядка.
3) Для определителя из задания 2) найти A_{21}.
4) Дать определение M_{ij} .
5) При каком значении β система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \beta x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ будет иметь единственное решение?

Вариант 6

1) Записать в общем виде $A_{1\times 3}$.
2) Сформулировать правило вычисления определителя.
3) Написать произвольный определитель, для которого $M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$.
4) Вычислить определитель из задания 3), разлагая его по элементам второго столбца.

5) Найти решение системы $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ методом Крамера.

Вариант 7

1) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.
2) Для определителя из задания 1) записать A_{32}.
3) Может ли система $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ иметь единственное решение?
4) Записать формулу Крамера для нахождения решения системы $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases}$.
5) Сформулировать теорему существования и единственности обратной матрицы.

Вариант 8

1) При каком α $\begin{vmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$?
2) Для определителя из задания 1) записать A_{12} и вычислить его.
3) Найти значение неизвестного x_2 методом Крамера из системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.
4) Дать определение обратной матрицы.
5) Может ли матрица $A\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -20 \end{pmatrix}$ иметь обратную?

Вариант 9

1) Дать определение $A_{m \times n}$.
2) Записать такой определитель третьего порядка, чтобы его $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

3) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & -2 \\ -8 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

4) Чему должно равняться число p, чтобы существовало произведение $A_{4\times p} \cdot B_{5\times 2}$?

5) Найти решение системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$.

Вариант 10

1) Продолжить запись $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + \dots$.

2) Для определителя $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ записать A_{22}.

3) Вычислить определитель из задания 2).

4) Даны матрицы $A_{3\times 2}$ и $B_{4\times 3}$. Какое из произведений $A \cdot B$ или $B \cdot A$ существует и какую размерность имеет матрица – произведение?

5) Каким должно быть число α, чтобы у матрицы $A\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ существовала обратная?

2.2 Самостоятельная работа № 2

Вариант 1

1) Вычислить $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 10 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

2) Найти $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}^{-1}$.

3) Записать в матричном виде систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases}$.

4) Дать определение A^{-1}.

5) Какой минор матрицы называется ее базисным минором?

Вариант 2

1) Найти решение системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ матричным способом.

2) Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

3) Указать размерность матриц $A \times B$ и $B \times A$, если $A_{4\times 1}$, $B_{1\times 4}$.

4) Сформулировать теорему о $\exists ! A^{-1}$.

5) Дать определение ранга матрицы.

Вариант 3

1) Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными в матричном виде записывается как $AX = B$, где $A\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; $X\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Записать эту систему в обычном виде.

2) Каким должно быть число β, чтобы у матрицы $\begin{pmatrix} 3 & \beta \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ существовала обратная?

3) Найти $A \times B$, если $A\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4) Дать определение суммы двух матриц.

5) Сформулировать теорему о базисном миноре матрицы.

Вариант 4

1) Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$.

2) Найти решение системы $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$ матричным способом.

3) Существует ли у матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ обратная?

4) Дать определение произведения двух матриц.

5) Сформулировать теорему о ранге матрицы.

Вариант 5

1) Решить матричное уравнение $AX + B = C$.

2) Найти решение системы $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$ методом Крамера.

3) Найти для матрицы $A\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ обратную. Сделать проверку решения.

4) $A_{n\times n}(a_{ij})$. Из каких элементов состоит матрица A^{v} и как она называется?

5) Дать определение эквивалентных матриц.

Вариант 6

1) Какая система называется совместной? Является ли система
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ совместной?

2) Даны две матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ являются ли они взаимно-обратными?

3) Матрица $A_{5\times 2}$, $\beta_{4\times p}$. Каким должно быть число p, чтобы существовало произведение $B\times A$?

4) Записать схему построения A^{-1} для матрицы $A_{n\times n}(a_{ij})$.

5) Что можно сказать о рангах эквивалентных матриц?

Вариант 7

1) Сформулировать правило вычисления определителя.
2) Найти решение системы $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$ матричным способом.
3) Найти произведение матриц $A \times B$ и $B \times A$, если $A\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
4) Какой должна быть матрица A, чтобы у нее существовала обратная?
5) Сформулировать теорему Кронекера – Капелли.

Вариант 8

1) Найти число α , для которого определитель $\begin{vmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.
2) Можно ли решение системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 = 10 \end{cases}$ найти методом Крамера?
3) Найти произведение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
4) Дать определение M_{ij}.
5) Что называется рангом матрицы?

Вариант 9

1) Решить матричное уравнение $AX - B = 0$, где $A\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ разлагая его по элементам третьего столбца.
3) Найти произведение $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4) $A_{n\times n}(a_{ij})$. Из каких элементов состоит союзная матрица для данной и как она обозначается?
5) Известно, что у матрицы A три линейно независимые строки. Чему равен RgA?

Вариант 10

1) Записать матричный вид системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$.

2) Чтобы система $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 - \alpha x_2 = 4 \end{cases}$ имела единственное решение, каким должно быть число α ?

3) Для матрицы $A\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ найти обратную.

4) Какие действия над матрицами называются линейными?

5) Из каких элементов состоят основная и расширенная матрица линейной неоднородной системы?

2.3 Самостоятельная работа № 3

Вариант 1

1)Найти $Rg\,A$, если $A\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

2) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$ - решить матричным способом

3) Найти $det\,A$, если $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

4) Дать определение совместной системы.
5) Может ли минор матрицы, стоящий на пересечении ее линейно зависимых строк и столбцов, быть ее базисным минором?

Вариант 2

1) Найти какой-либо базисный минор матрицы $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ - решить методом Крамера.

3) Известно, что $A \sim A'$. Что можно сказать о рангах этих матриц?
4) Дать определение $A \times B$
5) У однородной системы $Rg\ A = 3$, а число неизвестных равно 5. Из скольки частных решений состоит ее Ф.С.Р.?

Вариант 3

1) Систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$ исследовать на совместность.

2) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

3) Сформулировать теорему о базисном миноре матрицы.

4) Известно, что базисный минор матрицы A имеет вид $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$.

   чему равен $Rg\ A$?

5) Сформулировать теорему о структуре общего решения линейной однородной системы.

Вариант 4

1) Определить количество частных решений, составляющих Ф.С.Р. однородной системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$.

2) Найти $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

3) Сформулировать теорему о ранге матриц.

4) Какая линейная система называется невырожденной.
5) Сформулировать теорему о структуре общего решения линейной неоднородной системы.

Вариант 5

1) Найти $Rg\ A$, если $A\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2) Какому условию должно удовлетворять α, чтобы у матрицы $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ существовала обратная?

3) Найти $A \times B$, если $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4) Решить матричное уравнение $AX = B$.
5) Сформулировать теорему о количестве линейно независимых решений однородной системы.

Вариант 6

1)Исследовать систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ на совместность.

2) Найти $det\ A$, если $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Чему должно равняться число k, чтобы существовало произведение $A_{3\times k} \times B_{5\times 2}$?
4) Дать определение базисного минора матрицы.
6) Сформулировать теорему о свойствах решений однородной системы.

Вариант 7

1) Из какого количества частных линейно независимых решений состоит Ф.С.Р. однородной системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$?

2) Указать какой-либо базисный минор матрицы $A\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Что называется рангом матрицы?

4) Решить матричное уравнение $XA+B = C$

5) У неоднородной системы $RgA = RgC = 3$, а число неизвестных равно 4. Записать вид общего решения этой системы.

Вариант 8

1) Чему равен $Rg\,A$, если $A\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$?

2) Найти решение системы $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$ матричным способом.

3) Дать определение A_{ij}.

4) Сформулировать теорему Кронекера Капелли.

5) У линейной неоднородной системы три уравнения, два из этих уравнений являются линейно независимыми. Чему равен ранг основной и расширенной матрицы системы?

Вариант 9

1) Записать в общем виде $X^{он}$ для системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2) Найти обратную матрицу для $A\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3) Сделать проверку правильности решения задачи 2).

4) Сформулировать правило вычисления определителя.

5) Может ли быть линейная однородная система несовместной? Ответ обосновать.

Вариант 10

1) Каким должно быть число α, чтобы ранг матрицы $A\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ равнялся 3?

2) Решить матричное уравнение $AX + B = C$, где $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Сформулировать теорему о $\exists! A^{-1}$.
4) Какой минор матрицы называется базисным минором?
5) Общее решение неоднородной системы

$$X^{он} = X^{чн} + C_1 X^1 + C_2 X^2 + C_3 X^3.$$

Если в системе 5 неизвестных, то чему равен RgA и RgC этой системы?

3 Контрольная работа «Матрицы, определители, исследование и решение линейных систем»

Каждый вариант контрольной работы состоит из двух частей:

Задание к части I: ответить на вопросы.

Задание к части II: каждую систему исследовать на совместимость. Если система совместна и имеет единственное решение, то найти это решение матричным способом. Если система совместна и имеет бесчисленное множество решений, то построить общее решение и указать Ф.С.Р. для однородной системы, соответствующей данной.

Вариант 1

I 1) Дать определение A^{-1}

2) Каким должно быть число p, чтобы для $A\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}$ существовала обратная?

3) Найти $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$.

4) Что называется фундаментальной системой решений однородной системы?

5) $Rg\,A=3$, $Rg\,C=2$

Может ли матрица A быть основной, а C - расширенной матрицей системы линейных неоднородных уравнений? Ответ обосновать.

II 6) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4; \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1; \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 12; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 6x_5 = 3. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Вариант 2

I 1) Дать определение A_{ij}.

2) $A\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X - решение уравнения $2A + 3B = B$.

3) Дать определение ранга матрицы.
4) Записать систему трех линейных неоднородных уравнений с четырьмя неизвестными в матричном виде.
5) Сформулировать теорему о количестве частных линейно-независимых решений однородной системы.

II 6) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 3; \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 15x_5 = 9; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 5. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$

Вариант 3

I 1) Дать определение M_{ij}.

2)Чему равен определитель, если известно, что две его строки пропорциональны?

3) $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = A \cdot B$ Найти элемент c_{21} матрицы C.

4)Решить матричное уравнение $XA - B = C$.

5)Сформулировать теорему Кронекера - Капелли.

II 6) $\begin{cases} 4x + 2x_2 - x_3 = 1; \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

$$8)\begin{cases} -3x_1+x_2+x_3+x_4=1; \\ x_1-3x_2+x_3+x_4=-1; \\ 2x_1-2x_2=5. \end{cases}$$

Вариант 4

I 1) Сформулировать правило вычисления определителя.

2) Дать определение $A\times B$.

3) Написать схему построения A^{-1}.

4) Линейная система состоит из 5 уравнений и имеет 7 неизвестных. Какой максимальный порядок может иметь базисный минор основной матрицы системы?

5) Сформулировать теорему о ранге матрицы.

II 6) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=6; \\ x_1-2x_2+x_3=9; \\ x_1-4x_4-2x_3=3. \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3-4x_4=1; \\ 2x_4-2x_2+2x_3+3x_4=2; \\ -x_1+x_2-13x_3-18x_4=-1. \end{cases}$

$$8)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1; \\ 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4; \\ 3x_3+x_4=0. \end{cases}$$

Вариант 5

I 1) Дать определение базисного минора матрицы.

2) Сформулировать теорему об общем решении однородной системы.

3) Дана система $\begin{cases} 2x_1-x_2=5 \\ \alpha\cdot x_1+4x_2=1 \end{cases}$

Какому условию должно удовлетворять α, чтобы система имела единственное решение.

4) $A_{4\times 1}, B_{1\times 4}$. Существует ли произведение AB и BA? Если существуют, то какую размерность имеет каждая из матриц – произведений?

5) Сколько решений может иметь линейная неоднородная система?

II 6) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2; \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3; \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2; \\ x_4 + x_5 = -4. \end{cases}$

Вариант 6

I 1) Дать определение линейно независимой системы матриц.

2) Записать неоднородную систему линейных уравнений в матричной форме. Если эта система является невырожденной, то как можно найти её решение?

3) Какие две матрицы называются эквивалентными?

4) Сформулировать теорему о количестве частных линейно независимых решений линейной однородной системы.

5)Каким должна быть α, чтобы существовала A^{-1} для $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?

II 6) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1; \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 4. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = -1. \end{cases}$

8) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

Вариант 7

I 1) Дать определение произведения двух матриц. Какими свойствами обладает это действие?

2) Какая матрица называется обратной для данной? Существует ли A^{-1} для

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$?

3) Что называется фундаментальной системой решений однородной системы?

4) Сформулировать теорему о базисном миноре матрицы.

5) Может ли ранг основной матрицы линейной системы быть больше числа неизвестных этой системы? Ответ обосновать.

II 6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$

Вариант 8

I 1) Дать определение матрицы. Для какой матрицы существует детерминант?

2) Сформулировать теорему о существовании и единственности A^{-1}.

3) Что называется элементарными преобразованиями матрицы?

4) Сформулировать теорему о структуре общего решения системы линейных однородных уравнений.

5) Являются ли две матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ взаимообратными?

II 6) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -1; \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

$$8)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 9

I 1) Дать определение линейно зависимой системы матриц.

2) Что называется минором элемента определителя?

3) $RgA = RgC = r$, n – число неизвестных в неоднородной системе. Сколько базисных и свободных неизвестных у этой системы?

4) Сформулировать теорему о ранге матрицы.

5) Указать размерность $A \times B$ и $B \times A$, если $A_{3\times 1}$, а $B_{1\times 3}$.

II 6) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9; \\ x + 2y - 3z = 14; \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

$$8)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 10

I 1) Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя? Привести пример.

2) Какая матрица называется невырожденной?

3) Какие матрицы называются эквивалентными? Как связаны между собой ранг эквивалентных матриц?

4) Сформулировать теорему о структуре общего решения неоднородной системы.

5) $A_{4\times n}, B_{3\times 6}$. Каким должен быть n, чтобы существовало произведение $A\times B$?

II 6) $\begin{cases} x+y+z=1; \\ 2x+y+2z=1; \\ x+y+3z=2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$