МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

А. Н. ПАВЛЕНКО

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2007

УДК 514.743.4 (076.5)

ББК 22.151.5 я 73
П 12

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент С. А. Герасименко

Павленко А. Н.
П 12 **Элементы тензорного анализа: методические указания к практическим занятиям / А. Н. Павленко – Оренбург: ОГУ, 2007.- 46 с.**

Методические указания содержат все необходимые материалы для проведения 3 практических занятий по темам тензорного исчисления, включая: необходимые теоретические сведения, аудиторные и домашние задания, 6 вариантов аудиторных самостоятельных работ и 30 вариантов индивидуальных заданий.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Векторный и тензорный анализ» для студентов специальностей 010801, 010707, 010708.

ББК 22.151.5 я 73

Содержание

Введение..4

1 Теоретические сведения.. 5

1.2 Определение тензора..7
1.2.1 Аффинные тензоры.. 7
1.2.2 Евклидовы тензоры.. 11
1.3 Тензорная алгебра.. 13
1.4 Евклидовы тензоры второго ранга в трехмерном пространстве........... 18
1.4.1 Симметричные и антисимметричные тензоры....................................18
1.4.2 Понятие о тензорном анализе... 20
1.4.3 Примеры применения тензоров (механика)...22
2 Практические занятия..27

2.1 ПЗ 1. Понятие тензора..27
2.2 ПЗ 2. Действия над тензорами...28
2.3 ПЗ 3. Действия над тензорами...29
3 Индивидуальные задания.. 32

4 Решение задач с помощью ПК.. 42

Список использованных источников.. 46

Введение

Понятие те́нзора относится к числу основных фундаментальных математических понятий и широко применяется в различных разделах физики: механике, электродинамики, теории относительности и т. д. /1/.

Первоначально понятие тензора возникло в работах 19 века по теории упругости. Затем оно было систематически исследовано в 1886-1901 гг. итальянским геометром Г. Риччи-Курбастро (1853-1925) и итальянским математиком и механиком Т. Леви-Чевитта (1873-1942). Внимание к этому новому математическому понятию существенно возросло после создания в 1915-1916 гг. А. Эйнштейном (1879-1955) общей теории относительности, математическая часть которой полностью основана на тензорном исчислении.

Физические величины, которые нам встречались до сих пор, были либо скалярными, либо векторными.

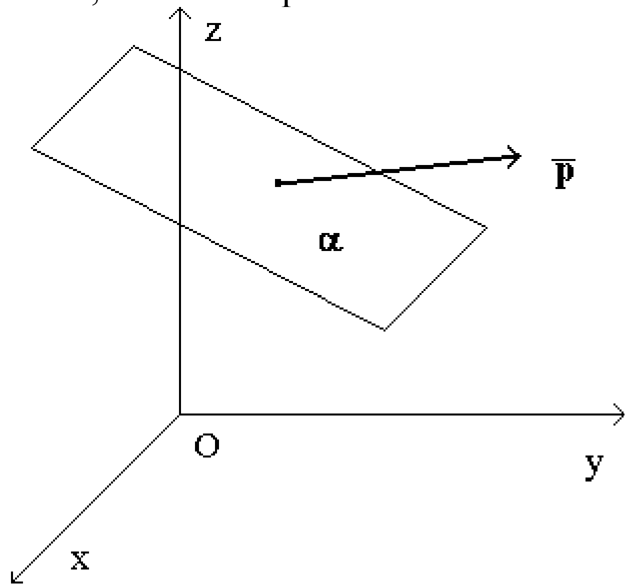

Рисунок 1.

Однако существуют физические величины более сложной природы. Например, напряженное состояние упругого тела характеризуется плотностью силы, с которой одна часть тела действует на другую через мысленно выделенную плоскость. Очевидно, что плотность силы для различных направлений плоскости будет разной. Таким образом, величина, характеризующая напряженное состояние, уже не является вектором, она представляет собой тензор 2-го ранга. Кроме того, многие другие важные величины, характеризующие состояние сплошных сред, также являются тензорами.

В настоящее время тензорная алгебра и тензорный анализ представляют собой значительно разработанные разделы высшей математики, которые, тем не менее, продолжают интенсивно развиваться.

1 Теоретические сведения

1.1 Обоснование целесообразности введения понятия «тензор»

Пусть имеется векторное пространство $\Re^n$, в котором выделены два аффинных базиса (углы между базисными векторами и их длины – произвольны):

1) $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ (старый базис);

2) $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n\}$ (новый базис).

Очевидно, что векторы нового базиса можно выразить через векторы старого базиса:

$$\bar{e}'_j = s^1_j \cdot \bar{e}_1 + s^2_j \cdot \bar{e}_2 + \ldots + s^n_j \cdot \bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} s^i_j \cdot \bar{e}_i .$$

Знак суммирования $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\right)$ можно не писать, считая, что если индекс стоит вверху и внизу, то по нему происходит суммирование от 1 до n. Индекс, по которому происходит суммирование, будем называть немым. Тогда в, так называемой, сокращенной записи суммирования получим:

$$\bar{e}'_j = s^i_j \cdot \bar{e}_i .$$

Как известно из курса линейной алгебры:

1) матрица $S = \begin{pmatrix} s^1_1 & s^1_2 & \ldots & s^1_n \\ s^2_1 & s^2_2 & \ldots & s^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s^n_1 & s^n_2 & \ldots & s^n_n \end{pmatrix}$ называется матрицей перехода от старого базиса к новому базису;

2) матрица $\widetilde{S} = S^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{s}^1_1 & \widetilde{s}^1_2 & \ldots & \widetilde{s}^1_n \\ \widetilde{s}^2_1 & \widetilde{s}^2_2 & \ldots & \widetilde{s}^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widetilde{s}^n_1 & \widetilde{s}^n_2 & \ldots & \widetilde{s}^n_n \end{pmatrix}$ называется матрицей перехода от нового базиса к старому базису;

Нам уже известно, что при переходе от одного базиса к другому происходит изменение координат векторов, элементов матриц линейных операторов и т. д.

Рассмотрим следующие примеры.

1. Вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$.

При переходе от старого базиса к новому базису происходит преобразование координат вектора в соответствии с матричным равенством:

$X' = \widetilde{S} \cdot X$.

Запишем это равенство в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \dots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1^1 & \tilde{s}_2^1 & \dots & \tilde{s}_n^1 \\ \tilde{s}_1^2 & \tilde{s}_2^2 & \dots & \tilde{s}_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{s}_1^n & \tilde{s}_2^n & \dots & \tilde{s}_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Для получения j'-той координаты вектора в новом базисе, умножим j'-тую строку матрицы $\widetilde{S}$ на матрицу-столбец X:

$$x'^{j'} = \tilde{s}_1^{j'} \cdot x^1 + \tilde{s}_2^{j'} \cdot x^2 + \dots + \tilde{s}_n^{j'} \cdot x^n = \sum_{j=1}^{n} \tilde{s}_j^{j'} \cdot x^j = \tilde{s}_j^{j'} \cdot x^j.$$

Получили формулу преобразования координат вектора при переходе от старого базиса к новому базису:

$$\boxed{x^{j'} = \tilde{s}_j^{j'} \cdot x^j}$$

Новые координаты $x'^{j'}$ будем для упрощения записей обозначать: $x^{j'}$.

2. Линейный функционал (линейная форма) $f : \Re^n \to \Re$. Пусть в базисе B существует представление

$f(\bar{x}) = f_1 \cdot x^1 + f_2 \cdot x^2 + \dots + f_n \cdot x^n = f_i \cdot x^i$.

Здесь f_i - некоторые числа. Их можно записать матрицей-строкой $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix}$.

При переходе к новому базису B' верна формула $F' = F \cdot S$.

Запишем это равенство в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} f_1' & f_2' & \dots & f_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_n^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^n & s_2^n & \dots & s_n^n \end{pmatrix}.$$

Для получения i'-того коэффициента линейной формы в новом базисе, умножим матрицу-строку F на i'-тый столбец матрицы S:

$$f_{i'} = f_1 \cdot s_{i'}^1 + f_2 \cdot s_{i'}^2 + \ldots + f_n \cdot s_{i'}^n = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot s_{i'}^i = s_{i'}^i \cdot f_i .$$

Получили формулу преобразования коэффициентов линейной формы при переходе от старого базиса к новому базису:

$$\boxed{f_{i'} = s_{i'}^i \cdot f_i}$$

3. Линейный оператор $A : \Re^n \to \Re^n$. Пусть он в базисе B имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

В новом базисе B' он будет иметь матрицу $A' = \widetilde{S}AS$. Тогда, аналогично рассуждая, можно получить формулу преобразования элементов матрицы линейного оператора при переходе от старого базиса к новому базису:

$$\boxed{a_{i'}^{j'} = s_{i'}^i \, \widetilde{s}_j^{j'} \, a_i^j}$$

Рассмотрим все полученные формулы:

1) $x^{j'} = \widetilde{s}_j^{j'} \cdot x^j$;

2) $f_{i'} = s_{i'}^i \cdot f_i$;

3) $a_{i'}^{j'} = s_{i'}^i \, \widetilde{s}_j^{j'} \, a_i^j$.

Очевидно, что координаты векторов, коэффициенты линейных функционалов и элементы матриц линейных операторов при смене базиса преобразуются по однотипным формулам. Отсюда следует, что целесообразно ввести более общее понятие, частными случаями которого будут: вектор, линейный функционал, линейный оператор и т. д. Это общее понятие носит название «*те́нзор*» (от латинского слова tendo – напрягаю, растягиваю).

1.2 Определение тензора

1.2.1 Аффинные тензоры

Системы координат с произвольными углами между базисными векторами и с произвольными длинами самих базисных векторов будем называть аффинными системами координат.

Определение 1. Пусть p и q - неотрицательные целые числа. p раз ковариантным и q раз контравариантным аффинным тензором называется заданный в аффинном базисе $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ упорядоченный набор $\widehat{T}$, состоящий из n^{p+q} действительных (комплексных) чисел $T^{j_1,j_2,\dots,j_q}_{i_1,i_2,\dots,i_p}$, если при переходе от аффинного базиса $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n\}$ к аффинному базису $B'=\{\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\dots,\bar{e}'_n\}$ числа $T^{j_1,j_2,\dots,j_q}_{i_1,i_2,\dots,i_p}$ преобразуются по закону

$$T^{j'_1,j'_2,\dots,j'_q}_{i'_1,i'_2,\dots,i'_p}=s^{i_1}_{i'_1}\cdot s^{i_2}_{i'_2}\cdot\ldots\cdot s^{i_p}_{i'_p}\cdot\tilde{s}^{j'_1}_{j_1}\cdot\tilde{s}^{j'_2}_{j_2}\cdot\ldots\cdot\tilde{s}^{j'_q}_{j_q}\cdot T^{j_1,j_2,\dots,j_q}_{i_1,i_2,\dots,i_p}.$$

Определение 2. Числа $T^{j_1,j_2,\dots,j_q}_{i_1,i_2,\dots,i_p}$ называются компонентами (координатами) тензора $\hat{T}$.

Определение 3. Число $p+q$ называется рангом (валентностью) тензора.

Определение 4. p раз ковариантный и q раз контравариантный тензор называется тензором типа (p, q).

Определение 5. Два тензора называются равными, если они имеют одинаковый тип и в каком-нибудь базисе все их соответствующие компоненты равны.

Очевидно, что и в любом другом базисе они будут иметь одинаковые соответствующие компоненты.

Замечание 1. Верхним (контравариантным) индексам в записи $T^{j_1,j_2,\dots,j_q}_{i_1,i_2,\dots,i_p}$ отвечают множители, являющиеся элементами матрицы $\tilde{S}$, а нижним (ковариантным) индексам – матрицы S.

Замечание 2. Матрица S является матрицей перехода от старого базиса к новому базису, поэтому соответствующие индексы и получили название ковариантных, то есть согласованно изменяющихся.

Матрица $\tilde{S}$ является матрицей перехода от нового базиса к старому базису, поэтому соответствующие индексы и получили название контравариантных, то есть противоположно изменяющихся.

Замечание 3. Исходя из данного определения, можно сделать вывод, что:

1) вектор – тензор типа (0, 1), он имеет ранг: $p+q=0+1=1$;

2) линейный функционал – тензор типа (1, 0) (такой тензор называется ковектором), он имеет ранг: $p+q=1+0=1$;

3) линейный оператор – тензор типа (1, 1), он имеет ранг: $p+q=1+1=2$.

Замечание 4. Скаляр можно рассматривать как тензор типа (0, 0). При переходе к новому базису он не меняется.

При обозначении тензоров матрицами будем придерживаться следующих правил.

1. Тензор типа (1, 0) обозначается матрицей-строкой.

Пример: $T=\begin{pmatrix}T_1 & T_2 & \dots & T_n\end{pmatrix}$.

2. Тензор типа (0, 1) обозначается матрицей-столбцом.

Пример: $T = \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \ldots \\ T^n \end{pmatrix}$.

3. Будем считать, что верхние индексы предшествуют нижним.

Пример: в тензоре $T_{i,l,m}^{j,k}$ индексы располагаются в следующем порядке: j, k, i, l, m.

4. Тензоры второго ранга будем обозначать матрицей, в которой первый индекс обозначает номер строки, а второй индекс – номер столбца.

Примеры:

1) тензор T_i^j будет обозначаться матрицей $T = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & \ldots & T_n^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & \ldots & T_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_1^n & T_2^n & \ldots & T_n^n \end{pmatrix}$;

2) тензор $T^{i,j}$ будет обозначаться матрицей

$$T = \begin{pmatrix} T^{1,1} & T^{1,2} & \ldots & T^{1,n} \\ T^{2,1} & T^{2,2} & \ldots & T^{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T^{n,1} & T^{n,2} & \ldots & T^{n,n} \end{pmatrix}.$$

4. Тензоры (с рангом более 2) в матричном виде обозначаются блочными матрицами, то есть матрицами, элементы которых сами являются матрицами. Рассмотрим конкретный пример тензора $T_i^{j,k}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$. Индексы здесь располагаются в следующем порядке: j, k, i.

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} T_1^{1,1} & T_1^{1,2} & T_2^{1,1} & T_2^{1,2} \\ T_1^{2,1} & T_1^{2,2} & T_2^{2,1} & T_2^{2,2} \end{array}\right).$$

Первый индекс (j) определяет номер строки, в которой находится данный компонент в числовых матрицах (2×2).

Второй индекс (k) определяет номер столбца, в котором находится данный компонент в числовых матрицах (2×2).

Третий индекс (i) определяет номер числовой матрицы (с данным компонентом) в строке матриц.

Если бы тензор был четвертого ранга, то четвертый индекс будет определять номер строки, в котором находится числовая матрица (2×2) (с данным компонентом) в блочной матрице.

Задача 1.

Доказать, что оператор $A : \Re^n \times \Re^n \to \Re^n \times \Re^n$, задаваемый равенством

$$A(\bar{x},\ \bar{y}) = \begin{pmatrix} x^1 y^1 & x^1 y^2 & \dots & x^1 y^n \\ x^2 y^1 & x^2 y^2 & \dots & x^2 y^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n y^1 & x^n y^2 & \dots & x^n y^n \end{pmatrix}$$

является тензором. Определить его тип и ранг.

Решение.

Элемент объекта A, стоящий в j_1 строке и j_2 столбце можно записать в виде $x^{j_1} \cdot y^{j_2}$.

В новом базисе этот элемент будет иметь вид:

$$x^{j_1'} \cdot y^{j_2'} =$$

$$\boxed{x^{j'} = \tilde{s}_j^{j'} \cdot x^j}$$

$$= \tilde{s}_{j_1}^{j_1'} \cdot x^{j_1} \cdot \tilde{s}_{j_2}^{j_2'} \cdot y^{j_2} = \tilde{s}_{j_1}^{j_1'} \cdot \tilde{s}_{j_2}^{j_2'} \cdot x^{j_1} \cdot y^{j_2} .$$

Получили формулу преобразования элементов объекта A при переходе от старого базиса к новому базису:

$$x^{j_1'} \cdot y^{j_2'} = \tilde{s}_{j_1}^{j_1'} \cdot \tilde{s}_{j_2}^{j_2'} \cdot (x^{j_1} \cdot y^{j_2}) .$$

Формула соответствует определению тензора, следовательно, объект A является тензором. В полученной формуле есть два множителя, являющихся элементами матрицы $\tilde{S}$, которым соответствуют верхние (контравариантные) индексы компонента тензора.

Таким образом, для тензора $\hat{A}$ выполняется:

1) он является тензором типа (0, 2);

2) его ранг: $p + q = 0 + 2 = 2$;

3) компонент тензора имеет вид $a^{j_1, j_2} = x^{j_1} x^{j_2}$;

4) формула преобразования компонентов тензора при переходе от старого базиса к новому базису:

$$a^{j_1', j_2'} = \tilde{s}_{j_1}^{j_1'} \cdot \tilde{s}_{j_2}^{j_2'} \cdot a^{j_1, j_2} .$$

Задача 2. Дан тензор $\boxed{H_{i_1, i_2}^j}$ в базисе $\boxed{B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}}$:

$$H = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Найти координату $H_{2,1}'^{1}$ этого тензора в базисе $\boxed{B' = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2'\}}$, где $\boxed{\bar{e}_1' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2}$, $\boxed{\bar{e}_2' = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2}$.

Решение.

1. Используя, что для базисных векторов нового базиса выполняются

соотношения $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ и $\bar{e}_2' = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$, получим матрицу перехода от старого базиса к новому базису:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица перехода от нового базиса к старому базису будет иметь вид:

$$\widetilde{S} = S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

2. Используя формулу преобразования компонент из определения тензора $T^{j_1', j_2', \dots, j_q'}_{i_1', i_2', \dots, i_p'} = s^{i_1}_{i_1'} \cdot s^{i_2}_{i_2'} \cdot \ldots \cdot s^{i_p}_{i_p'} \cdot \widetilde{s}^{j_1'}_{j_1} \cdot \widetilde{s}^{j_2'}_{j_2} \cdot \ldots \cdot \widetilde{s}^{j_q'}_{j_q} \cdot T^{j_1, j_2, \dots, j_q}_{i_1, i_2, \dots, i_p}$, в данном случае получим:

$$H^{j'}_{i_1', i_2'} = s^{i_1}_{i_1'} \cdot s^{i_2}_{i_2'} \cdot \widetilde{s}^{j'}_{j} \cdot H^{j}_{i_1, i_2}.$$

Тогда:

$$H'^{1}_{2,1} = s^{i_1}_{2} \cdot s^{i_2}_{1} \cdot \widetilde{s}^{1}_{j} \cdot H^{j}_{i_1, i_2} = s^{1}_{2} \cdot s^{1}_{1} \cdot \widetilde{s}^{1}_{1} \cdot H^{1}_{1,1} + s^{1}_{2} \cdot s^{1}_{1} \cdot \widetilde{s}^{1}_{2} \cdot H^{2}_{1,1} +$$

$$+ s^{1}_{2} \cdot s^{2}_{1} \cdot \widetilde{s}^{1}_{1} \cdot H^{1}_{1,2} + s^{1}_{2} \cdot s^{2}_{1} \cdot \widetilde{s}^{1}_{2} \cdot H^{2}_{1,2} + s^{2}_{2} \cdot s^{1}_{1} \cdot \widetilde{s}^{1}_{1} \cdot H^{1}_{2,1} +$$

$$+ s^{2}_{2} \cdot s^{1}_{1} \cdot \widetilde{s}^{1}_{2} \cdot H^{2}_{2,1} + s^{2}_{2} \cdot s^{2}_{1} \cdot \widetilde{s}^{1}_{1} \cdot H^{1}_{2,2} + s^{2}_{2} \cdot s^{2}_{1} \cdot \widetilde{s}^{1}_{2} \cdot H^{2}_{2,2} =$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 +$$

$$+ (-2) \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 + (-2) \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{11}{8}.$$

1.2.2 Евклидовы тензоры

Системы координат с прямыми углами между базисными векторами и с единичными длинами самих базисных векторов называются ортонормированными системами координат.

При переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису матрица перехода является ортогональной, то есть выполняется равенство $S^{-1} = S^{T}$. Тогда элементы матриц и связаны соотношением $S^{j}_{i} = \widetilde{S}^{i}_{j}$. Отсюда следует, что в формуле преобразования компонент тензора при переходе к новому базису можно не различать верхние и нижние индексы тензора. Для определенности индексы будем писать внизу.

Дадим определение тензора, рассматриваемого только в ортонормированных базисах. Такие тензоры носят название евклидовых.

Определение 5. Пусть - неотрицательное целое число. Евклидовым тензором ранга (валентности) называется заданный в ортонормированном базисе $B=\{\bar e_1,\bar e_2,\ldots,\bar e_n\}$ упорядоченный набор , состоящий из действительных (комплексных) чисел $T_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$, если при переходе от ортонормированного базиса $B=\{\bar e_1,\bar e_2,\ldots,\bar e_n\}$ к ортонормированному базису $B'=\{\bar e_1',\bar e_2',\ldots,\bar e_n'\}$ числа $T_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$ преобразуются по закону

$$T_{i_1',i_2',\ldots,i_s'}=s_{i_1'}^{i_1}\cdot s_{i_2'}^{i_2}\cdot\ldots\cdot s_{i_s'}^{i_s}\cdot T_{i_1,i_2,\ldots,i_s}.$$

Задача 3. Евклидовый тензор задан матрицей $T=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Новая система координат получена из старой системы координат поворотом на угол $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ против часовой стрелки. Найти матрицу тензора в новой системе координат.

Решение.

Если новая ортогональная система координат получена из старой ортогональной системы координат поворотом на угол против часовой стрелки, то матрица перехода от старого базиса к новому базису будет иметь вид:

$$S=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{6} & \sin\dfrac{\pi}{6}\\ -\sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt3}{2} & \dfrac12\\ -\dfrac12 & \dfrac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}.$$

Из определения евклидового тензора имеем $T_{i'j'}=s_{i'}^{i}\cdot s_{j'}^{j}\cdot T_{ij}$.

Тогда:

1) $T_{11}'=s_1^i\cdot s_1^j\cdot T_{ij}=s_1^1s_1^1T_{11}+s_1^1s_1^2T_{12}+s_1^2s_1^1T_{21}+s_1^2s_1^2T_{22}=$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot1+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\left(-\frac12\right)\cdot(-2)+\left(-\frac12\right)\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot3+\left(-\frac12\right)\cdot\left(-\frac12\right)\cdot4=$$

$$=\frac{7-\sqrt3}{4};$$

2) $T_{12}'=s_1^i\cdot s_2^j\cdot T_{ij}=s_1^1s_2^1T_{11}+s_1^1s_2^2T_{12}+s_1^2s_2^1T_{21}+s_1^2s_2^2T_{22}=$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac12\cdot1+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot(-2)+\left(-\frac12\right)\cdot\frac12\cdot3+\left(-\frac12\right)\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot4=$$

$$=-\frac{9+3\sqrt3}{4};$$

3) $T_{21}'=s_2^i\cdot s_1^j\cdot T_{ij}=s_2^1s_1^1T_{11}+s_2^1s_1^2T_{12}+s_2^2s_1^1T_{21}+s_2^2s_1^2T_{22}=$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4 =$$

$$= \frac{11-3\sqrt{3}}{4};$$

4) $$T'_{22} = s_2^i\cdot s_2^j\cdot T_{ij} = s_2^1 s_2^1 T_{11} + s_2^1 s_2^2 T_{12} + s_2^2 s_2^1 T_{21} + s_2^2 s_2^2 T_{22} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 =$$

$$= \frac{13+\sqrt{3}}{4}.$$

Получили матрицу данного евклидового тензора в новом базисе:

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{7-\sqrt{3}}{4} & -\frac{9+3\sqrt{3}}{4} \\ \frac{11-3\sqrt{3}}{4} & \frac{13+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Если тензор имеет второй ранг, то его компоненты в новом базисе удобнее найти с помощью матричного равенства $T' = S^T T S$.

1.3 Тензорная алгебра

В данном пункте рассмотрим действия над аффинными тензорами. Определения действий с евклидовыми тензорами совершенно аналогичны.

Операции над тензорами обладают следующим важным свойством: если в некотором базисе выполняется равенство с данными операциями, то оно будет выполняться и при переходе к любому другому базису.

Сложение тензоров. Пусть даны два тензора $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ одинакового типа, заданные в одном базисе. Суммой тензоров $\widehat{A}+\widehat{B}$ называется тензор $\widehat{C}$ того же типа, компоненты которого равны сумме соответствующих компонент тензоров $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$:

$$C_{i_1,i_2,\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q} = A_{i_1,i_2,\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q} + B_{i_1,i_2,\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q}.$$

Умножение тензора на скаляр. Произведением тензора $\widehat{A}$ на скаляр λ называется тензор $\widehat{C}$, компоненты которого равны произведениям соответствующих компонент тензора $\widehat{A}$ на скаляр λ:

$$C_{i_1,i_2,\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q} = \lambda\cdot A_{i_1,i_2,\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q}.$$

Множество всех тензоров одного типа вместе с операциями сложения тензоров и умножения тензора на скаляр образует линейное векторное пространство с размерностью n^{p+q}.

Тензорное произведение. Пусть даны два тензора: $\widehat{A}$ типа $(p,\ q)$ и $\widehat{B}$

типа $(r,\ s)$, заданные в одном базисе. Тензорным произведением $\widehat{A}\otimes\widehat{B}$ данных тензоров $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ называется тензор $\widehat{C}$ типа $(p+r,\ q+s)$, компоненты, которого равны всем возможным произведениям компонент тензора $\widehat{A}$ на компоненты тензора $\widehat{B}$:

$$C^{j_1,j_2,\dots,j_q,l_1,l_2,\dots,l_s}_{i_1,i_2,\dots,i_p,k_1,k_2,\dots,k_r} = A^{j_1,j_2,\dots,j_q}_{i_1,i_2,\dots,i_p} \cdot B^{l_1,l_2,\dots,l_s}_{k_1,k_2,\dots,k_r}.$$

Задача 4. В некотором базисе пространства $\Re^2$ даны два тензора A_i^j и B^k, заданные матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

соответственно. Найти тензоры $\widehat{C} = \widehat{A}\otimes\widehat{B}$ и $\widehat{D} = \widehat{B}\otimes\widehat{A}$, сравнить и сделать вывод.

Решение.

Используем определение тензорного произведения тензоров.

Так как тензор $\widehat{A}$ имеет тип $(1,\ 1)$, а тензор $\widehat{B}$ - тип $(0,\ 1)$, то тип тензоров $\widehat{C}$ и $\widehat{D}$ будет $(1+0,\ 1+1)$, то есть тип $(1,\ 2)$.

Найдем компоненты тензора $\widehat{C}$:

$$C_i^{j,k} = A_i^j \cdot B^k.$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} C_1^{1,1} & C_1^{1,2} & C_2^{1,1} & C_2^{1,2} \\ C_1^{2,1} & C_1^{2,2} & C_2^{2,1} & C_2^{2,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} A_1^1\cdot B^1 & A_1^1\cdot B^2 & A_2^1\cdot B^1 & A_2^1\cdot B^2 \\ A_1^2\cdot B^1 & A_1^2\cdot B^2 & A_2^2\cdot B^1 & A_2^2\cdot B^2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 3\cdot(-5) & 3\cdot 2 & 4\cdot(-5) & 4\cdot 2 \\ 1\cdot(-5) & 1\cdot 2 & -1\cdot(-5) & -1\cdot 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -15 & 6 & -20 & 8 \\ -5 & 2 & 5 & -2 \end{array}\right).$$

Найдем компоненты тензора $\widehat{D}$:

$$D_i^{k,j} = B^k \cdot A_i^j.$$

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} D_1^{1,1} & D_1^{1,2} & D_2^{1,1} & D_2^{1,2} \\ D_1^{2,1} & D_1^{2,2} & D_2^{2,1} & D_2^{2,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} B^1\cdot A_1^1 & B^1\cdot A_1^2 & B^1\cdot A_2^1 & B^1\cdot A_2^2 \\ B^2\cdot A_1^1 & B^2\cdot A_1^2 & B^2\cdot A_2^1 & B^2\cdot A_2^2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} -5\cdot 3 & -5\cdot 1 & -5\cdot 4 & -5\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 2\cdot(-1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -15 & -5 & -20 & 5 \\ 6 & 2 & 8 & -2 \end{array}\right).$$

Сравнивая значения компонент полученных тензоров, делаем вывод, что тензоры $\widehat{A}\otimes\widehat{B}$ и $\widehat{B}\otimes\widehat{A}$ состоят из одинаковых компонент, но компоненты различно упорядочены. Отсюда следует, что $\widehat{A}\otimes\widehat{B} \neq \widehat{B}\otimes\widehat{A}$, то есть тензорное произведение – некоммутативная операция.

Свертка тензора. Пусть дан тензор $T^{j_1,j_2,\dots,j_q}_{i_1,i_2,\dots,i_p}$, причем $p \ge 1,\ q \ge 1$.

Выберем произвольно один нижний индекс i_k и один верхний индекс j_l. Сверткой тензора $T_{i_1,i_2,...,i_p}^{j_1,j_2,...,j_q}$ по нижнему индексу i_k и верхнему индексу j_l называется тензор $T_{i_1,i_2,...,i_{k-1},j,i_{k+1},...,i_p}^{j_1,j_2,...,j_{l-1},j,j_{l+1},...,j_q}$. Здесь индексы i_k и j_l отождествляются, и по полученному немому индексу j происходит суммирование. При этом получится тензор типа $(p-1,\ q-1)$.

Задача 5. Задан тензор $C_i^{j,k}$:

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} -15 & 6 & -20 & 8 \\ -5 & 2 & 5 & -2 \end{array}\right).$$

Найти его свертку по индексам i и k.

Решение.

Данный тензор имеет тип $(1,\ 2)$, тогда искомая свертка (обозначим ее $\widehat{D}$) будет иметь тип $(1-1,\ 2-1)$, то есть тип $(0,\ 1)$. По определению свертки тензора, получим:

$$D^j = C_i^{j,i};$$

$$D^1 = C_1^{1,1} + C_2^{1,2} = -15 + 8 = -7;$$

$$D^2 = C_1^{2,1} + C_2^{2,2} = -5 + (-2) = -7.$$

Получили один раз ковариантный тензор $\widehat{D}$, заданный матрицей $D = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Замечание 5. Если свернуть тензор типа $(1,\ 1)$, то получится тензор типа $(0,\ 0)$, который не меняется при переходе к новому базису. Отсюда следует, что сумма диагональных элементов матрицы линейного оператора будет инвариантом при переходе к новому базису.

Следует отметить, что, например, матрица коэффициентов билинейной формы (см. задачу 1 из ДЗ 1) не обладает таким свойством. Данный факт объясняется тем, что здесь мы имеем тензор типа (2, 0), который нельзя свернуть.

Транспонирование тензора (перестановка индексов). В определении тензора есть требование упорядоченности его компонент, поэтому, переставив два его верхних или нижних индекса, мы получим другой тензор – результат транспонирования исходного тензора.

Транспонируя тензор $\widehat{C}$ (задача 4), мы получим тензор $\widehat{D}$ и наоборот.

Задача 6. Дан тензор $T_{i_1,i_2,...,i_p}^{j_1,j_2,...,j_q}$. Сколько тензоров можно получить из данного тензора с помощью одной операции транспонирования?

Решение.

Индекс j_1 можно переставить с индексами $j_2,\ j_3,\ldots,j_q$. Здесь получаем всего $q-1$ вариантов транспонирования. Индекс j_2 можно переставить с индексами $j_3,\ j_4,\ldots,j_q$ Перестановка с индексом j_1 уже учтена. Здесь получаем всего $q-2$ вариантов транспонирования. Таким образом, транспонируя по верхним индексам, можно получить тензоров

$$(q-1)+(q-2)+\ldots+2+1=\frac{1+q-1}{2}\cdot(q-1)=\frac{1}{2}q(q-1).$$

Аналогично, транспонируя по нижним индексам, можно получить $\frac{1}{2}p(p-1)$ тензоров, а всего будем иметь $\frac{p(p-1)+q(q-1)}{2}$ тензоров.

Симметрирование и альтернирование.

Симметрирование. Выделим в тензоре $T_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{j_1,j_2,\ldots,j_q}$ любые k верхних (или нижних) индексов. Симметрирование по верхним индексам $j_1,\ j_2,\ldots,$ j_k - это получение нового тензора

$$T_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)j_{k+1},\ldots,j_q}=\frac{1}{k!}\sum_{r_1,\ldots,r_k} T_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{r_1,r_2,\ldots,r_k,j_{k+1},\ldots,j_q}.$$

Суммирование производится по всем перестановкам $r_1,r_2,\ldots,r_k$ индексов $j_1,j_2,\ldots j_k$.

Аналогично определяется операция симметрирование по нижним индексам.

Задача 7. Выразить компоненты тензора $T_{l,m}^{(i,j,k)}$ через компоненты тензора $T_{l,m}^{i,j,k}$.

Решение.

Используем определение симметрирования тензоров.

В данном случае $k=3$ и имеется $k!=3!=6$ перестановок индексов i,j,k:

1) i,j,k;
2) i,k,j;
3) j,i,k;
4) j,k,i;
5) k,i,j;
6) k,j,i.

Тогда получим:

$$T_{l,m}^{(i,j,k)}=\frac{1}{6}\left(T_{l,m}^{i,j,k}+T_{l,m}^{i,k,j}+T_{l,m}^{j,i,k}+T_{l,m}^{j,k,i}+T_{l,m}^{k,i,j}+T_{l,m}^{k,j,i}\right).$$

Замечание. Очевидно, что если в тензоре $T_{l,m}^{(i,j,k)}$ переставить любые два индекса из группы верхних индексов i, j, k, то тензор не изменится.

Альтернирование. Выделим в тензоре $T_{i_1,i_2,\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q}$ любые k нижних (или верхних) индексов. Альтернирование по нижним индексам $i_1,\ i_2,\dots,\ i_k$ - это получение нового тензора

$$T_{[i_1,i_2,\dots,i_k]i_{k+1},\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q} = \frac{1}{k!}\sum_{r_1,\dots,r_k}(-1)^t T_{r_1,r_2,\dots,r_k,i_{k+1},\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q}.$$

Суммирование производится по всем перестановкам $r_1, r_2, \dots, r_k$ индексов $i_1,\ i_2,\dots,\ i_k$. Здесь t - количество транспозиций (перестановок двух индексов), за которое из верхнего размещения индексов можно сделать нижнее в перестановке $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ r_1 & r_2 & \dots & r_k \end{pmatrix}$. Нахождение значения t рассмотрим при решении задачи 8.

Аналогично определяется операция альтернирование по верхним индексам.

Задача 8. Выразить компоненты тензора $T_{[i,j,k]}^{l,m}$ через компоненты тензора $T_{i,j,k}^{l,m}$.

Решение.

Используем определение альтернирования тензоров.

В данном случае $k = 3$ и имеется $k! = 3! = 6$ перестановок индексов i, j, k:

1) $\begin{pmatrix} i & j & k \\ i & j & k \end{pmatrix}$, здесь нет переставленных индексов, и $(-1)^t = (-1)^0 = 1$;

2) $\begin{pmatrix} i & j & k \\ i & k & j \end{pmatrix}$, здесь требуется одна транспозиция, и $(-1)^t = (-1)^1 = -1$;

3) $\begin{pmatrix} i & j & k \\ j & i & k \end{pmatrix}$, здесь требуется одна транспозиция, и $(-1)^t = (-1)^1 = -1$;

4) $\begin{pmatrix} i & j & k \\ j & k & i \end{pmatrix}$, здесь требуется две транспозиции, и $(-1)^t = (-1)^2 = 1$;

5) $\begin{pmatrix} i & j & k \\ k & i & j \end{pmatrix}$, здесь требуется две транспозиции, и $(-1)^t = (-1)^2 = 1$;

6) $\begin{pmatrix} i & j & k \\ k & j & i \end{pmatrix}$, здесь требуется одна транспозиция, и $(-1)^t = (-1)^1 = -1$.

Тогда получим:

$$T^{l,m}_{[i,j,k]} = \frac{1}{6}\left(T^{l,m}_{i,j,k} - T^{l,m}_{i,k,j} - T^{l,m}_{j,i,k} + T^{l,m}_{j,k,i} + T^{l,m}_{k,i,j} - T^{l,m}_{k,j,i}\right).$$

Замечание 6. Если в тензоре $T^{l,m}_{[i,j,k]}$ переставить любые два индекса из группы нижних индексов i, j, k, то тензор только поменяет знак.

Будем говорить, что тензор называется симметричным по группе верхних (нижних) индексов, если тензор не меняется при перестановке любых двух индексов из данной группы индексов; если же тензор только меняет знак при перестановке любых двух индексов из данной группы индексов, то он называется антисимметричным.

1.4 Евклидовы тензоры второго ранга в трехмерном пространстве

В данном пункте будем рассматривать евклидовы тензоры второго ранга в трехмерном пространстве, которые широко применяются в различных разделах физики (см. 1.4.3).

1.4.1 Симметричные и антисимметричные тензоры

Теорема 1. Евклидовый тензор второго ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Рассмотрим евклидовый тензор второго ранга . Применим к данному тензору операции симметрирования и альтернирования: $T_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right)$, $T_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$. Тогда: $T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}$.

Симметричные и антисимметричные части тензоров второго ранга часто обозначаются и соответственно.

Очевидно, что матрицы тензоров и при $n = 3$ имеют общий вид:

$$T_S = \begin{pmatrix} d & a & b \\ a & e & c \\ b & c & f \end{pmatrix}, \quad T_A = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. Для любого симметричного евклидового тензора второго ранга существует такой ортонормированный базис, в котором матрица этого тензора будет диагональной.

Нахождение такого базиса называется приведением тензора к главным осям.

Так как симметричный евклидовый тензор второго ранга описывается симметричной матрицей, то данная теорема непосредственно следует из соответствующего свойства симметрической матрицы /2/.

Приведение тензора к главным осям совершенно аналогично процессу диагонализации симметричной матрицы /2/. В п. 4 рассмотрено решение соответствующей задачи с помощью персонального компьютера.

Теорема 3. Для любого антисимметричного евклидового тензора второго ранга существует такой вектор , что для всех векторов выполняется равенство $T \cdot \overline{x} = \overline{w} \times \overline{x}$, причем направление и длина вектора не меняется при переходе к новому ортонормированному базису. Таким образом, вектор - векторный инвариант тензора .

Доказательство.

Покажем, что вектор $\overline{w} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию теоремы.

Рассмотрим линейный оператор, заданный матрицей антисимметричного тензора:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем:

1) $$\overline{y} = T \cdot \overline{x} = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax^2 + bx^3 \\ ax^1 - cx^3 \\ -bx^1 + cx^2 \end{pmatrix};$$

2) $$\overline{b} \times \overline{x} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ c & b & a \\ x^1 & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = bx^3\overline{e}_1 + ax^1\overline{e}_2 + cx^2\overline{e}_3 - bx^1\overline{e}_3 - cx^3\overline{e}_2 -$$

$$- ax^2\overline{e}_1 = \left(bx^3 - ax^2\right)\overline{e}_1 + \left(ax^1 - cx^3\right)\overline{e}_2 + \left(cx^2 - bx^1\right)\overline{e}_3 = \begin{pmatrix} -ax^2 + bx^3 \\ ax^1 - cx^3 \\ -bx^1 + cx^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует выполнимость равенства $T \cdot \overline{x} = \overline{w} \times \overline{x}$ при любом векторе .

При переходе к новому базису вектора и не меняются (меняются их координаты, но не меняются их длины и направления). Рассмотрим равенство $\bar{y} = \bar{w} \times \bar{x}$. Из того, что не зависят от выбора базиса ни векторное произведение, ни вектора и , следует, что вектор так же не зависит (неизменны его длина и направление, а координаты – меняются) от выбора базиса.

Таким образом, вектор $\bar{w} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ является векторным инвариантом антисимметричного тензора , заданного матрицей $T = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.2 Понятие о тензорном анализе.

Компоненты тензора могут быть не только постоянными величинами, но и функциями, определенными на некотором множестве $D \subset \Re^3$:

$T_{i_1, i_2, \ldots, i_s}(x, y, z)$.

В этом случае будем говорить, что на множестве $D \subset \Re^3$ задано тензорное поле.

Тензорные поля очень часто встречаются в различных приложениях. Например, при изучении деформации тела рассматривают тензоры деформации (см. п. 1.4.3.) во всех точках тела.

Одно из важнейших понятий математического анализа – производная, характеризует скорость изменения функций. В тензорном анализе существует аналог этого понятия - тензорная производная.

Определение. Пусть дан евклидовый тензор $T_{i_1, i_2, \ldots, i_s}$ ранга , тогда тензорной производной данного тензора назовем тензор ранга $s+1$:

$$\frac{d\hat{T}}{d\bar{r}} = \left(\frac{\partial T_{i_1, i_2, \ldots, i_s}}{\partial x^{i_{s+1}}} \right).$$

Тензорная производная характеризует скорость изменения тензорных полей.

Пример 1. Рассмотрим заданное на некотором подмножестве трехмерного пространства скалярное поле $u(x, y, z)$. Его можно рассматривать как поле тензора нулевого ранга. В этом случае тензорная производная $\frac{du}{d\bar{r}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ представляет собой градиент функции $u(x, y, z)$. Как известно направление вектора $grad\ u(x, y, z)$ показывает направление, в котором функция $u(x, y, z)$ растет наиболее быстро, а длина вектора $\boxed{grad\ u(x,y,z)}$ соответствует скорости этого изменения. Таким образом, тензорная производная скалярного поля характеризует скорость изменения этого поля.

Пример 2. Рассмотрим заданное на некотором подмножестве трехмерного пространства векторное поле

$$\boxed{\overline{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\cdot\bar{i} + A_y(x,y,z)\cdot\bar{j} + A_z(x,y,z)\cdot\bar{k}}.$$

Его будем рассматривать как поле евклидового тензора первого ранга.

Тензорная производная

$$\boxed{\frac{d\overline{A}}{d\bar{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

является евклидовым тензором второго ранга.

1. Свертка этого тензора представляет собой меру расходимости векторного поля – дивергенцию (см. /3-5/)

$$\boxed{div\ \overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}.$$

Она является тензором нулевого ранга, то есть инвариантом. Отсюда сразу следует, что величина $\boxed{div\ \overline{A}}$ не меняется при преобразовании координат.

2. Антисимметричная часть тензора $\boxed{\frac{d\overline{A}}{d\bar{r}}}$ определяет вращение (см. /3-5/) векторного поля $\boxed{\overline{A}(x,y,z)}$ вокруг точки $\boxed{M(x,y,z)}$ в пространстве:

$$\boxed{\left(\frac{d\overline{A}}{d\bar{r}}\right)_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} =}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -W_z & W_y \\ W_z & 0 & -W_x \\ -W_y & W_x & 0 \end{pmatrix}$$, здесь: $(W_x, W_y, W_z) = rot\ \overline{A}$.

Таким образом, тензор $\left(\frac{d\overline{A}}{d\overline{r}}\right)_A$ определяет вращение векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ вокруг точки $M(x,y,z)$ в пространстве. Кроме того, из предыдущего пункта следует, что $rot\ \overline{A}$ является векторным инвариантом антисимметричного тензора $\left(\frac{d\overline{A}}{d\overline{r}}\right)_A$.

1.4.3 Примеры применения тензоров (механика)

1.4.1 Тензор деформации /5/

Пусть нам дано некоторое тело T, внутри которого выделим точку M.

Окрестностью точки M назовем шар с центром в этой точке, целиком лежащий в теле T.

Предположим, что из-за действия внешних сил произошло изменение объема окрестности:

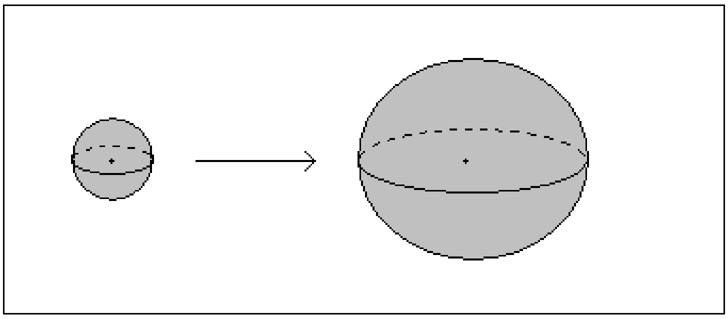

Рисунок 2.

или ее формы:

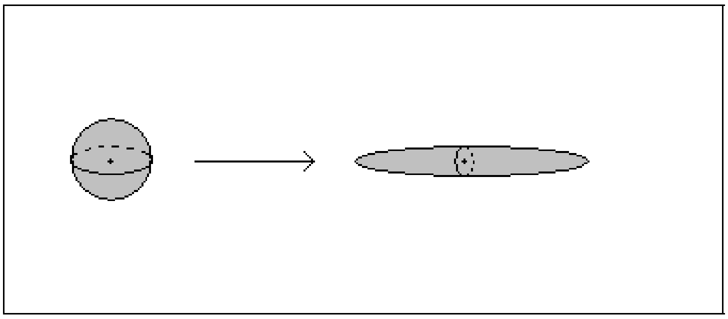

Рисунок 3.

В этих случаях будем говорить, что тело T деформировано в окрестности точки M.

Для того чтобы деформацию описать математически, каждой точки окрестности поставим в соответствие вектор смещения $\bar{U} = \bar{r}_1 - \bar{r}$, где $\bar{r}$ - радиус-вектор точки до деформации тела, а $\bar{r}_1$ - после. Начало декартовой системы координат поместим в точку M.

Очевидно, что вектор смещения не может характеризовать деформацию тела, так как, например, при параллельном переносе вектор смещения не равен нулевому вектору, но деформации тела не происходит. Деформацию тела будет определять относительное изменение вектора смещения в окрестности точки M.

Для описания относительного изменения вектора смещения попробуем использовать тензорную производную $\dfrac{d\bar{U}}{d\bar{r}}$ векторной функции $\bar{U}(\bar{r}) =$ $= \left(U_x(\bar{r}),\ U_y(\bar{r}),\ U_z(\bar{r})\right)$, найденную в точке M. Производную будем выражать тензором второго ранга $\hat{P}$:

$$P = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_x}{\partial x} & \dfrac{\partial U_x}{\partial y} & \dfrac{\partial U_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial x} & \dfrac{\partial U_y}{\partial y} & \dfrac{\partial U_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U_z}{\partial x} & \dfrac{\partial U_z}{\partial y} & \dfrac{\partial U_z}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_M .$$

Замечание. С целью упрощения обозначений, в дальнейшем не будем специально указывать, что все частные производные вычисляются в точке M.

Этот тензор представим в виде суммы антисимметричного и симметричного тензоров:

$$\hat{P} = \hat{P}_A + \hat{P}_S .$$

1. Антисимметричная часть тензора $\hat{P}_A$ описывает поворот окрестности точки M как целого.

2. Симметричная часть $\hat{D} = \hat{P}_S$ характеризует деформацию тела в точке. Преобразование радиус-векторов точек окрестности точки M при

деформации производится по формуле $\boxed{\bar{r}_1 = D\bar{r}}$. Этот тензор можно представить в виде суммы двух тензоров:

$$\boxed{\hat{D} = \hat{D}_c + \hat{D}_д}.$$

Здесь:

1) $$\boxed{D_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}div\,\overline{U} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}div\,\overline{U} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}div\,\overline{U} \end{pmatrix}}$$ - сферический тензор деформации; он описывает изменение объема окрестности точки $\boxed{M}$;

2) $\boxed{\hat{D}_д = \hat{D} - \hat{D}_c}$ - девиатор тензора деформации; он описывает изменение формы окрестности точки $\boxed{M}$.

В общем случае тензор не имеет геометрического смысла, но тензор деформации может быть наглядно представлен с помощью, так называемого, эллипсоида деформации.

Предположим, что нам надо изучить деформацию тела в окрестности точки M. Еще до того как тело было деформировано, построим сферу с центром в этой точке. Если начало ортонормированной системы координат поместить в эту точку, то уравнение сферы будет иметь вид $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ или $(\bar{r}, \bar{r}) = 1$, где $\bar{r} = (x, y, z)$ - радиус-вектор точки, лежащей на сфере.

Пусть нам известна матрица D тензора деформации в точке M. Тогда точка сферы с радиус-вектором $\bar{r}$ перейдет в точку с радиус-вектором $\bar{r}' = D\bar{r}$.

Выразив из последнего равенства $\bar{r}$, получим $\bar{r} = D^{-1} \cdot \bar{r}'$. После подстановки полученного результата в уравнение сферы $(\bar{r}, \bar{r}) = 1$ будем иметь уравнение поверхности, в которую при деформации перейдет сфера:

$$\left(D^{-1} \cdot \bar{r}',\ D^{-1} \cdot \bar{r}'\right) = 1.$$

Из физического смысла задачи следует, что сфера должна перейти в эллипсоид, который называется эллипсоидом деформации.

1.4.2 Тензор инерции /5/

Пусть нам дано некоторое тело $\boxed{T}$. Поместим в его центр масс начало декартовой системы координат. Предположим, что тело вращается вокруг оси, проходящей через начало координат с угловой скоростью $\boxed{\ }$.

Разобьем тело на большое число ($\boxed{N}$) малых тел, которые будем считать материальными точками. Пусть $\boxed{k}$-я материальная точка имеет массу $\boxed{m_k}$ и радиус-вектор $\boxed{\ }$.

Как известно, в данном случае кинетическая энергия вращательного движения тела будет равна

$$W_{вращ} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left[\overline{\omega},\ \overline{r_k}\right]^2.$$

Рассмотрим $\left[\overline{\omega},\ \overline{r_k}\right]^2 =$

Из курса векторной алгебры известно, что

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right]^2 = a^2b^2 - \left(\overline{a},\overline{b}\right)^2.$$

$$= \omega^2 r_k^2 - (\overline{\omega},\overline{r_k})^2 =$$

$\overline{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, $\overline{r_k} = (x_k, y_k, z_k)$;

$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$,

$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$;

$(\overline{\omega},\overline{r_k}) = \omega_x \cdot x_k + \omega_y \cdot y_k + \omega_z \cdot z_k$.

$$= \left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right)\left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right) - \left(\omega_x \cdot x_k + \omega_y \cdot y_k + \omega_z \cdot z_k\right)^2 =$$

[После преобразований имеем:]

$$= \left(y_k^2 + z_k^2\right)\omega_x^2 + \left(z_k^2 + x_k^2\right)\omega_y^2 + \left(x_k^2 + y_k^2\right)\omega_z^2 -$$

$$- 2\left(x_k y_k \omega_x \omega_y + y_k z_k \omega_y \omega_z + z_k x_k \omega_z \omega_x\right).$$

Итак, получили формулу для кинетической энергии вращательного движения тела:

$$W_{вращ} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left\{\left(y_k^2 + z_k^2\right)\omega_x^2 + \left(z_k^2 + x_k^2\right)\omega_y^2 + \left(x_k^2 + y_k^2\right)\omega_z^2 -\right.$$

$$\left.- 2\left(x_k y_k \omega_x \omega_y + y_k z_k \omega_y \omega_z + z_k x_k \omega_z \omega_x\right)\right\}.$$

Если ввести понятие тензора инерции (он является симметричным тензором второго ранга)

$$I = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} m_k\left(y_k^2 + z_k^2\right) & -\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k & -\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k \\ -\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k & \sum_{k=1}^{N} m_k\left(z_k^2 + x_k^2\right) & -\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k \\ -\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k & -\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k & \sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right) \end{pmatrix},$$

то формула для кинетической энергии вращательного движения тела примет вид: $W_{вращ} = \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}, I\overline{\omega}\right)$, а, например, формула для момента импульса тела будет иметь вид $\overline{L} = I\overline{\omega}$.

Тензор инерции может быть записан в интегральной форме:

$$\boxed{I = \begin{pmatrix} \iiint\limits_T \left(y^2 + z^2\right)\rho\, dV & -\iiint\limits_T xy\rho\, dV & -\iiint\limits_T xz\rho\, dV \\ -\iiint\limits_T xy\rho\, dV & \iiint\limits_T \left(z^2 + x^2\right)\rho\, dV & -\iiint\limits_T yzdV \\ -\iiint\limits_T xz\rho\, dV & -\iiint\limits_T yz\rho\, dV & \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right)\rho\, dV \end{pmatrix}}.$$

Здесь $\boxed{\rho = \rho(x, y, z)}$ - функция, задающая плотность тела в точке с координатами $\boxed{(x, y, z)}$.

Диагональные элементы тензора инерции являются моментами инерции тела относительно координатных осей, а остальные элементы с обратным знаком – так называемые центробежные моменты инерции.

Так как тензор инерции является симметричным, то его можно привести к главным осям. Вокруг главных осей инерции тело может вращаться в отсутствии внешних сил.

2 Практические занятия

2.1 ПЗ 1. Понятие тензора

Задача 1. Доказать, что символ Кронекера

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

является тензором. Определить его тип.

Задача 2. Доказать, что квадратичная форма (квадратичный функционал) $f : \Re^n \to \Re$, заданный равенством

$$f(\bar{x}) = a_{ij} x^i x^j$$

является тензором. Определить его тип.

Задача 3. Тензор $\widehat{T}$ имеет тип (2, 0). Он задан матрицей $\widehat{T} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица перехода от старого базиса к новому базису имеет вид $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу тензора в новом базисе.

Задача 4. Даны координаты тензора $T_i^{j_1, j_2}$ в базисе $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$:

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -5 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & -8 \end{array}\right).$$

Найти координату $T_2'^{\,2,1}$ этого тензора в базисе $B' = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2'\}$, где $\bar{e}_1' = -5\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$.

Самостоятельная работа.

Найти указанную координату данного тензора в новом базисе:

Вариант 1: $T_1'^{\,1,1}$.

Вариант 2: $T_2'^{\,1,1}$.

Вариант 3: $T_2'^{\,1,2}$.

Вариант 4: $T_1'^{\,2,1}$.

Вариант 5: $T_1'^{\,2,2}$.

Вариант 6: $T_2'^{\,2,2}$.

Домашнее задание.

Задача 1. Доказать, что билинейная форма (билинейный функционал) $f : \Re^n \times \Re^n \to \Re$, заданный равенством

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = a_{ij} x^i y^j$$

является тензором. Определить его тип.

Задача 2. В условиях задачи 4 найти координату $T'^{1,2}_{1}$. Используя персональный компьютер, определить остальные координаты тензора.

2.2 ПЗ 2. Действия над тензорами

Задача 1. Тензорное произведение двух векторов ^{i} и ^{j} называется бивектором B^{ij}. Выразить координаты тензора B^{ij} через координаты векторов ^{i} и ^{j}.

Задача 2. Даны тензоры A^{ij}_{k} и B^{i}_{jk}. Выразить компоненты тензоров $A \otimes B$ и $B \otimes A$ через компоненты тензоров A^{ij}_{k} и B^{i}_{jk}.

Задача 3. Даны тензоры A^{i}_{j} и B_{ij}, заданные матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найти тип и матрицы тензоров $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Задача 4. Дан тензор T^{ij}_{klm}. По каким парам индексов этот тензор можно свернуть?

Задача 5. Тензор T^{i}_{jk} задан матрицей

$$T = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 0 & -7 & 1 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & -4 & 0 & 1 & -1 & 8 \end{array}\right).$$

Найти матрицы тензоров T^{i}_{ik} и T^{i}_{ji}.

Задача 6. Пусть $\bar{x}$ - вектор, а a - ковектор (линейная форма). Найти свертку тензора $a \otimes \bar{x}$. Определить ее смысл.

Самостоятельная работа.

Найти все возможные свертки тензора $\widehat{C} = \widehat{A} \otimes \widehat{B}$, где тензоры A^{j}_{i} и [illegible] заданы матрицами [illegible] и [illegible].

Вариант 1. $A = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 5 \\ -6 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = (0 \quad -8 \quad 1)$;

Вариант 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 9 & 6 & -2 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = (9 \quad -4 \quad 1)$;

Вариант 3. $A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 0 \\ -2 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = (5 \quad -2 \quad 8)$;

Вариант 4. $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -9 \\ 9 & -2 & 9 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = (-2 \quad 3 \quad 0)$;

Вариант 5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ и $B = (-6 \quad 0 \quad 7)$;

Вариант 6. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -8 & 1 & -6 \\ 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = (0 \quad 1 \quad -5)$.

Домашнее задание.

Задача 1. Даны тензоры A^{ij}_{kl} и B^{ij}_{k}. Выразить компоненты тензоров $A \otimes B$ и $B \otimes A$ через компоненты данных тензоров.

Задача 2. Найти все возможные свертки тензора $\hat{C} = \hat{A} \otimes \hat{B}$, где тензоры A^{ij} и B_{ij} заданы матрицами A и B.

$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3 ПЗ 3. Действия над тензорами

Задача 1. Тензор T^{ij}_{k} задан матрицей

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 9 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right).$$

Транспонировать данный тензор.

Задача 2. Выразить компоненты тензоров $T^{i}_{(jk)l}$, $T^{i}_{(jkl)}$ и $T^{i}_{[jkl]}$ через компоненты тензора T^{i}_{jkl}.

Задача 3. Дана матрица тензора T^{ij}:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Представить данный тензор в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

Задача 4. Тензор T_{ijk} задан матрицей

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & 7 & 3 \end{array}\right).$$

Получить матрицы тензоров $T_{i(jk)}$, $T_{[ij]k}$, $T_{(ijk)}$ и $T_{[ijk]}$.

Задача 5. Написать общий вид матрицы тензора $T_{(ijk)}$ при $n = 2$.

Задача 6. К чему приведет симметрирование антисимметричного тензора и альтернирование симметричного тензора.

Самостоятельная работа.

Тензор T^{ijk} задан матрицей T. Получить матрицы тензоров $T^{(ij)k}$, $T^{i[jk]}$, $T^{(ijk)}$ и $T^{[ijk]}$.

Вариант 1. $T = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -4 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$;

Вариант 2. $T = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 8 & -3 \\ -7 & 8 & 1 & 3 \end{array}\right)$;

Вариант 3. $T = \left(\begin{array}{cc|cc} -4 & 0 & 8 & 4 \\ 2 & 9 & -6 & 1 \end{array}\right)$;

Вариант 4. $T = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -3 & -4 & 2 \\ 8 & 7 & 0 & 6 \end{array}\right)$;

Вариант 5. $T = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 7 & -9 \\ 8 & -7 & 2 & 9 \end{array}\right)$;

Вариант 6. $T = \left(\begin{array}{cc|cc} 9 & -5 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 2 \end{array}\right)$.

Домашнее задание.

Задача 1. Написать общий вид матрицы тензора $T_{[ijk]}$ при $n = 3$.

Задача 2. Дана матрица тензора T^{ij}:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

Представить данный тензор в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

Задача 3. Симметрировать и альтернировать тензор T^{ijk}, заданный матрицей

$$\boxed{T = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 0 & -7 & 1 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & -4 & 0 & 1 & -1 & 8 \end{array}\right)}.$$

3 Индивидуальные задания

1. Получить компоненты тензора T_i^j (для нечетных вариантов) или T^{j_1,j_2} (для четных вариантов) в новом базисе. Тензор задан матрицей T; матрица перехода задана матрицей S.

Решить задачу, используя формулу преобразования компонент из определения тензора.

1.1. $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.2. $T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3. $T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4. $T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.5. $T = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.6. $T = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

1.7. $T = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.

1.8. $T = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.9. $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$.

1.10. $T = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$.

1.11. $T = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$.

1.12. $T = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$.

1.13. $T = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$.

1.14. $T = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.15. $T = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

1.16. $T = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$.

1.17. $T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.18. $T = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

1.19. $T = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$.

1.20. $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

1.21. $T = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$.

1.22. $T = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.23. $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$.

1.24. $T = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$.

1.25. $T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$.

1.26. $T = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

1.27. $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

1.28. $T = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$.

1.29. $T = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

1.30. $T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Тензоры A_{i_1,i_2} и B^j заданы матрицами A и B. Найти тензорное произведение $\widehat{A} \otimes \widehat{B}$. Произвести свертку полученного тензора по первому ковариантному и первому контравариантному индексам.

2.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.2. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}$.

2.3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.4. $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2.6. $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.7. $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}$.

2.8. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2.9. $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2.10. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2.11. $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}$.

2.12. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.13. $A=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2.14. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2.15. $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}$.

2.16. $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$.

2.17. $A=\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.18. $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2.19. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.20. $A=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.21. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2.22. $A=\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$.

2.23. $A=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

2.24. $A=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$.

2.25. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2.26. $A=\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.27. $A=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

2.28. $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.29. $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2.30. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3. Представить тензор в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

3.1 $T = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

3.2 $T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -5 \\ -5 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

3.3 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.4 $T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3.5 $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3.6 $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3.7. $T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

3.8 $T = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3.9 $T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3.10 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3.11 $T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -4 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

3.12 $T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3.13 $T = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3.14 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

3.15 $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

3.16 $T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -5 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

3.17 $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

3.18 $T = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.19 $T = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

3.20 $T = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ -4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

3.21 $T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

3.22 $T = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

3.23 $T = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

3.24 $T = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

3.25 $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & -1 & -1 \\ -4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

3.26 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

3.27 $T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3.28 $T = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 \\ -4 & -5 & -5 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

3.29 $T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3.30 $T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & -5 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. Тензор $T^{i,j,k}$ задан матрицей . Найти компоненты тензоров $T^{(i,j,k)}$ и $T^{[i,j,k]}$.

4.1. $T = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -4 & -5 & -1 & 0 & -4 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4.2. $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -4 & -1 & 1 & -4 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4.3. $T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 & -2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -4 & 2 & -1 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.4. $T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 & -4 & -1 & -4 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

4.5. $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & -1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

4.6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 & -4 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ -5 & -3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.7. $T = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 & -4 & 2 & 1 & -5 & 1 & -4 \\ -4 & -2 & -2 & 2 & -1 & 2 & -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

4.8. $T = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 & -5 & -1 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -5 & -2 & -2 & 3 & -1 & 1 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

4.9. $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & -4 & 1 & -5 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & 3 & -3 & -2 & -4 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

4.10. $T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 & 0 & 3 & 3 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & -5 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.11. $T = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & -2 & 3 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & -5 & -4 & 0 & 1 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

4.12. $$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 & -4 & -3 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -5 & 2 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

4.13. $$T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

4.14. $$T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 & 3 & -5 & -4 & -5 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 0 & -1 & -5 & -3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

4.15. $$T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -5 & 1 & -4 & -5 & -5 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -4 & -1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

4.16. $$T = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4.17. $$T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -4 & -4 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.18. $$T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4.19. $T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 & -4 & -3 & 2 & 2 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & 2 & -5 & -4 & -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4.20. $T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & -1 & -3 & -4 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & -3 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

4.21. $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & -4 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

4.22. $T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 3 & 0 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & -4 & 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

4.23. $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & -4 & -1 & -5 \\ -1 & -4 & -4 & 2 & 0 & 2 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

4.24. $T = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 3 & -5 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & -4 & 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

4.25. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -2 & -1 & -5 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4.26. $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -3 & -2 & -3 & -2 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4.27. $T = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 & 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ -5 & -5 & -3 & -3 & 2 & -5 & -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

4.28. $T = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & -3 & 2 & -4 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & -4 & -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

4.29. $T = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & 2 & -2 & 1 & -5 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 3 & -3 & -2 & -3 & -4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

4.30. $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 & -5 & -2 & -1 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & 1 & 2 & -3 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

4 Решение задач с помощью ПК.

Задача 1. Дан тензор H_{i_1,i_2}^{j} в базисе $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$:

$$H=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Используя персональный компьютер, определить компоненты тензора в базисе $B'=\{\bar{e}_1',\bar{e}_2'\}$, где $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+2\bar{e}_2$, $\bar{e}_2'=3\bar{e}_1-2\bar{e}_2$.

Решение.

1. Используя, что для базисных векторов нового базиса выполняются соотношения $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+2\bar{e}_2$ и $\bar{e}_2'=3\bar{e}_1-2\bar{e}_2$, получим матрицу перехода от старого базиса к новому базису:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от нового базиса к старому базису будет иметь вид: $\widetilde{S}=S^{-1}$.

2. Используя формулу преобразования компонент из определения тензора $T_{i_1',i_2',\dots,i_p'}^{j_1',j_2',\dots,j_q'}=s_{i_1'}^{i_1}\cdot s_{i_2'}^{i_2}\cdot\ldots\cdot s_{i_p'}^{i_p}\cdot\widetilde{s}_{j_1}^{j_1'}\cdot\widetilde{s}_{j_2}^{j_2'}\cdot\ldots\cdot\widetilde{s}_{j_q}^{j_q'}\cdot T_{i_1,i_2,\dots,i_p}^{j_1,j_2,\dots,j_q}$, в данном случае получим:

$$H_{i_1',i_2'}^{j'}=s_{i_1'}^{i_1}\cdot s_{i_2'}^{i_2}\cdot\widetilde{s}_{j}^{j'}\cdot H_{i_1,i_2}^{j}.$$

Найдем координаты тензора в новом базисе по полученной формуле. Для вычислений используем математический пакет MathCAD /6/.

Установка нумерации элементов матриц, начиная с 1: ORIGIN := 1

$$H:=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода от старого базиса к новому: $Son:=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Матрица перехода от нового базиса к старому: $Sno:=Son^{-1}$

$jn1:=1..2 \quad in1:=1..2 \quad in2:=1..2$

$$Hn_{jn1,in1+2\cdot(in2-1)}:=\sum_{j1=1}^{2}\sum_{i1=1}^{2}\sum_{i2=1}^{2} Son_{i1,in1}\cdot Son_{i2,in2}\cdot Sno_{jn1,j1}\cdot H_{j1,i1+2\cdot(i2-1)}$$

Матрица данного тензора в новом базисе:

$$Hn=\begin{pmatrix} 5.125 & 1.375 & 1.375 & -13.875 \\ -0.375 & 0.875 & 0.875 & 0.625 \end{pmatrix}$$

Итак, получили матрицу данного тензора в новом базисе

$$H' = \begin{pmatrix} 5.125 & 1.375 & 1.375 & -13.875 \\ -0.375 & 0.875 & 0.875 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Евклидовый тензор задан матрицей $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Новая система координат получена из старой системы координат поворотом на угол $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ против часовой стрелки. Найти матрицу тензора в новой системе координат.

Решение.

Если новая ортогональная система координат получена из старой ортогональной системы координат поворотом на угол против часовой стрелки, то матрица перехода от старого базиса к новому базису будет иметь вид:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & \sin\dfrac{\pi}{6} \\ -\sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Из определения евклидового тензора имеем $T_{i'j'} = s^i_{i'} \cdot s^j_{j'} \cdot T_{ij}$. Проведем вычисления в среде MathCAD.

Установка нумерации элементов матриц, начиная с 1: ORIGIN := 1

Матрица данного евклидового тензора в старом базисе:

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Угол поворота новой системы координат относительно старой: $\alpha := \dfrac{\pi}{6}$

Матрица перехода от старого базиса к новому: $S := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

in := 1,2..2 jn := 1,2..2

$$Tn_{in,jn} := \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} S_{i,in} \cdot S_{j,jn} \cdot T_{i,j}$$

Матрица данного евклидового тензора в новом базисе:

$$Tn = \begin{pmatrix} 1.317 & -3.549 \\ 1.451 & 3.683 \end{pmatrix}$$

Если тензор имеет второй ранг, то его компоненты в новом базисе удобнее найти с помощью матричного равенства $T' = S^T T S$.

Матрица данного евклидового тензора в старом базисе:

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Угол поворота новой системы координат относительно старой: $\alpha := \frac{\pi}{6}$

Матрица перехода от старого базиса к новому: $S := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$$Tn := S^{T} \cdot T \cdot S$$

Матрица данного евклидового тензора в новом базисе:

$$Tn = \begin{pmatrix} 1.317 & -3.549 \\ 1.451 & 3.683 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу тензора в новом базисе:

$$\boxed{T' = \begin{pmatrix} 1{,}317 & -3{,}549 \\ 1{,}451 & 3{,}683 \end{pmatrix}}.$$

Задача 3. Привести симметричный евклидовый тензор второго ранга, заданный матрицей

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

к главным осям.

Решение.

Матрица тензора будет иметь диагональный вид в базисе, составленном из собственных векторов матрицы $\boxed{\ }$. Причем на главной диагонали матрицы тензора будут соответствующие собственные значения матрицы $\boxed{\ }$.

Вычисления проведем в среде математического пакета MathCAD, так как в нем есть специальные функции, возвращающие собственные значения и собственные вектора.

Матрица евклидового симметричного тензора второго ранга:

$$T := \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Нахождение матрицы нормированных собственных векторов:

$S := \mathrm{eigenvecs}(T)$

$$S = \begin{pmatrix} 0.553 & -0.469 & 0.689 \\ -0.833 & -0.331 & 0.443 \\ -0.02 & 0.819 & 0.574 \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы матрицы тензора, приведенного к главным осям:

$Td := \mathrm{eigenvals}(T)$

$$Td = \begin{pmatrix} 4.384 \\ 1.472 \\ 9.144 \end{pmatrix}$$

Получили, что в новом базисе $\boxed{B' = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}}$, где $\boxed{\overline{e}'_1 = 0{,}553 \cdot \overline{e}_1 - 0{,}833 \cdot \overline{e}_2 - 0{,}02 \cdot \overline{e}_3}$, $\boxed{\overline{e}'_2 = -0{,}469 \cdot \overline{e}_1 - 0{,}331 \cdot \overline{e}_2 + 0{,}819 \cdot \overline{e}_3}$, $\boxed{\overline{e}'_3 = 0{,}689 \cdot \overline{e}_1 + 0{,}443 \cdot \overline{e}_2 + 0{,}574 \cdot \overline{e}_3}$ данный тензор будет иметь матрицу:

$$\boxed{T' = \begin{pmatrix} 4{,}384 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}472 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}144 \end{pmatrix}}.$$

Список использованных источников

1. **Мышкис А. Д.** Математика для технических вузов: специальные курсы / А. Д. Мышкис. - 2-е изд. – СПб: Лань, 2002. – 640 с.
2. **Беклемишев Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 9-е изд. испр. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 376 с.
3. **Борисенко А. И., Тарапов И. Е.** Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко. – М.: Высшая школа, 1966. – 251 с.
4. **Мышкис А. Д.** Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
5. **Несис Е. И.** Методы математической физики: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / Е. И. Несис. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
6. **Дьяконов В. П.** MathCAD 2001: специальный справочник / В. П. Дьяконов. – СПб.: Питер, 2002. – 832 с.