МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры

Л.Б. УСОВА, Д.У. ЖАПАЛАКОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(ЧАСТЬ I)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного
образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2007

УДК 512.6+514.1 (07)

ББК 22.143я73
У76

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент Герасименко С.А.

Усова Л.Б.
У 76 Линейная алгебра и аналитическая геометрия: методические указания / Л.Б.Усова, Д.У. Жапалакова. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007 – 104 с.

Методические указания содержат основные теоретические сведения по следующим разделам: комплексные числа, линейная алгебра и векторная алгебра, а также практические занятия по каждому параграфу с решениями и пояснениями, которые необходимы для студентов. В конце каждого параграфа имеются домашние задания с ответами и вопросы для самопроверки. Для каждой главы предложены расчетно-графические задания, которые содержат 30 вариантов.

Методические указания предназначены для студентов инженерно-технических специальностей очного и заочного отделения.

ББК 22.143я73

Содержание

Глава 1 Комплексные числа

§ 1 Комплексные числа. Основные понятия. Геометрическое изображение комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел

Комплексным числом z называется упорядоченная пара $(x;\ y)$ действительных чисел, записанных в виде $z = x + iy$.

Символ i называется ***мнимой единицей***.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется ***чисто мнимым***, если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество R действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т.е. $R \subset C$.

Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — ***мнимой частью***, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными*** тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_{2.} \end{cases}$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются ***сопряженными***.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ *можно изобразить точкой M(x;y)* плоскости *Oxy* такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной*** плоскостью (ее также обозначают *C*). Ось абсцисс называется ***действительной осью***, а ось ординат – ***мнимой***.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x;\ y)$.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z (см. рисунок 1), называется ***модулем*** этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. (1)

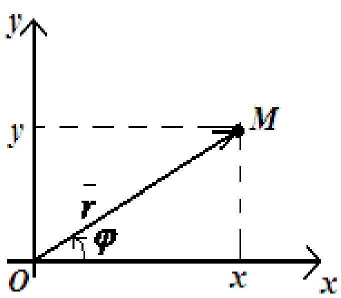


Рисунок 1

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого числа, обозначается Arg *z*.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная:

$Argz = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$

где $\arg z = \varphi$ - *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $[0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$, то есть

$-\pi < \arg z \leq \pi$ или $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

Запись числа z в виде $\boxed{z = x + iy}$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Запись числа *z* в виде

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ - ***тригонометрической формой*** комплексного числа.

Аргумент φ определяется из формул: $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$,где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то из формулы $tg\varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, & при\ \ x > 0; \\ arctg\frac{y}{x} + \pi, & при\ x < 0,\ y > 0; \\ arctg\frac{y}{x} - \pi, & при\ \ x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Запись числа z в виде

$\boxed{z = r^{i\varphi}}$ или $\boxed{z = |z|e^{i\arg z}}$ - ***показательная форма*** комплексного числа.

§ 2 Действия над комплексными числами

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданнымие в *алгебраической форме*, определяются следующими равенствами:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \qquad (2)$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \qquad (3)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2), \qquad (4)$$

$$\frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad (5)$$

при $z_2 \neq 0$.

Из равенства (3) следует, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,, \tag{6}$$

т.е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Из равенства (4) следует, что

$$\boxed{i^2 = -1}\,.$$

При умножении комплексных чисел

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются, т.е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел* в натуральную степень:

$$\boxed{z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}\,. \tag{7}$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \\ \text{где } k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1 \end{array}}\,, \tag{8}$$

Все n комплексных корней из комплексного числа z на комплексной плоскости образуют правильный n-угольник и лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[n]{r}$.

Практическое занятие № 1

Задание 1 Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

Решение. Используя формулы (2) – (5), находим:

$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i$;

$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i$;

$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 - i - 2 \cdot (-1) = 4 + 3i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \frac{2 + 5i + 2 \cdot (-1)}{4 - (-1)} = \frac{5i}{5} = i\,.$$

Задание 2 Найти $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$.

Решение. Запишем число $z=-1-i\sqrt{3}$ тригонометрической форме:

$z=x+iy$, $x=-1$, $\quad y=-\sqrt{3}$.

$|z|=r=\sqrt{1+3}=2$, $tg\varphi=\dfrac{\left(-\sqrt{3}\right)}{(-1)}=\sqrt{3}$, $\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$ т.е.

$$-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right).$$

По формуле Муавра (7) имеем

$$\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}=\left[2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right]^{15}=$$

$$=2^{15}\cdot\left(\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi)\right)=2^{15}\left(1+0i\right)=2^{15}=32768.$$

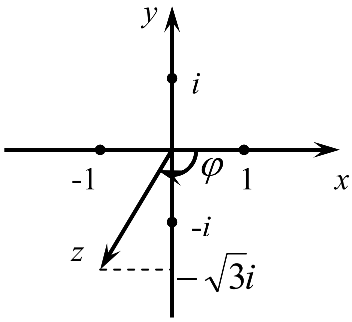


Рисунок 2

Задание 3 Решить уравнение $z^5+32=0$ на множестве комплексных чисел.

Решение. Перепишем уравнение в виде

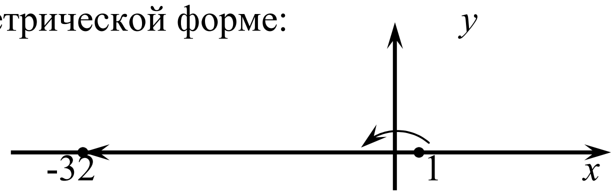
$z=\sqrt[5]{-32}$.

Число (-32) представим в тригонометрической форме:

где, $x=-32$, $y=0$ (по рисунку 3).

$-32=32\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$.

По формуле (8) находим



$$z=\sqrt[5]{32\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right),$$

Рисунок 3

где $k=0,1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Полагая $k=0,1,\ 2,\ 3,\ 4$, получим пять различных значений, которые отмечены на рисунке 4

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\approx 1{,}6180+1{,}1756\cdot i,$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right)\approx -0{,}6180+1{,}9021\cdot i,$$

$$z_2=2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-2,$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right) \approx -0{,}6180 - 1{,}9021 \cdot i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right) \approx 1{,}6180 - 1{,}1756 \cdot i$$

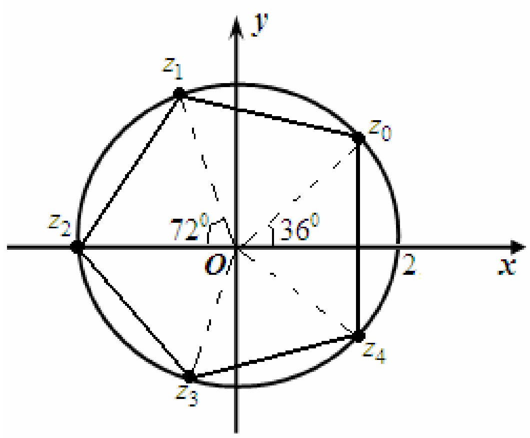


Рисунок 4

Задание 4 Изобразить на комплексной плоскости C множество точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$; б) $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$; в) $0 \le \operatorname{Im} z < 1{,}5$;

г) $\operatorname{Re} z > 1$; д) $\begin{cases} |z| \le 1, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{3}{4}\pi; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 1 \le z \cdot \bar{z} \le 2, \\ -\sqrt{3} \le \operatorname{Im} z \le 0; \end{cases}$

ж) $|z - i| = |z + 2|$; з) $\begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \ge \dfrac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Решение. а) Согласно формуле (1), имеем

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2,$$

т.е. $x^2 + y^2 = 4$. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z| = 2$, т.е. $x^2 + y^2 = 4$, представляет собой окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (рисунок 5).

б) Точки z, аргумент которых равен $\dfrac{\pi}{3}$ лежат на луче, выходящем из точки $O(0;\,0)$ под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к действительной оси (рисунок 6).

в) Неравенство $0 \le \operatorname{Im} z < 1{,}5$ можно переписать так $0 \le y < 1{,}5$ (рисунок 7).

г) Условие $\operatorname{Re} z > 1$ или $x > 1$ определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$ (рисунок 8).

д) множество точек, расположенных внутри и на границе круга $|z| \le 1$. Заключенных между лучами $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ удовлетворяют условию

$$\begin{cases} |z| \le 1, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{3}{4}\pi. \end{cases}$$

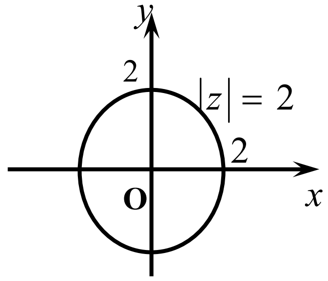


Рисунок 5

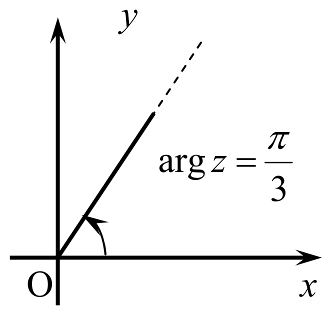


Рисунок 6

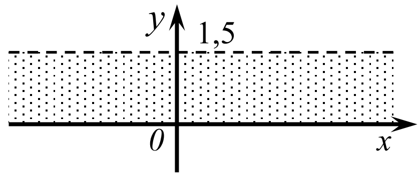


Рисунок 7

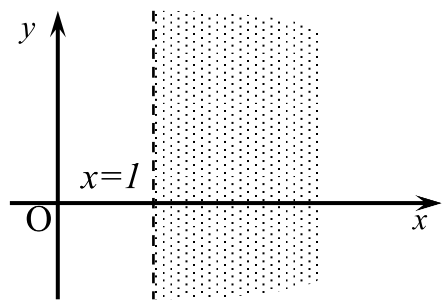


Рисунок 8

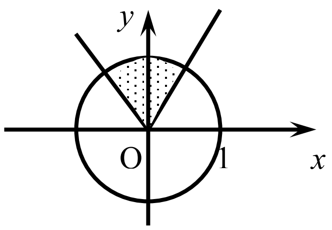


Рисунок 9

е) Так как $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, а $\operatorname{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде

$$\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 2, \\ -\sqrt{3} \le y \le 0. \end{cases}$$

Неравенства $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ задают кольцо между окружностями, включая их границы, радиусов $R_1 = 1$ и $R_2 = 2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3} \le y \le 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$, включая прямые $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$. Искомое множество точек заштриховано на рисунке 10

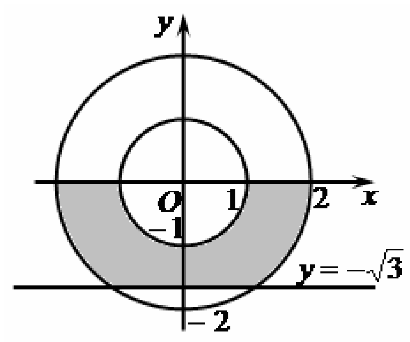


Рисунок 10

ж) I способ. Согласно формуле (6), равенству $|z-i|=|z-(-2)|$ удовлетворяет множество точек z, равноудаленных от точек $z_1=i$ и $z_2=-2$. Это множество точек представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z_1=i$ и $z_2=-2$ (смотри рисунок 11).

II способ. $|z-i|=|x+iy-i|=|x+i(y-1)|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$,

$|z+2|=|x+iy+2|=|x+2+iy|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$,

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Rightarrow x^2+(y-1)^2=(x+2)^2+y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2-2y+1=x^2+4x+4+y^2$,

$4x+2y+3=0 \Rightarrow 2y=-4x-3 \Rightarrow y=-2x-\dfrac{3}{2}$ - прямая.

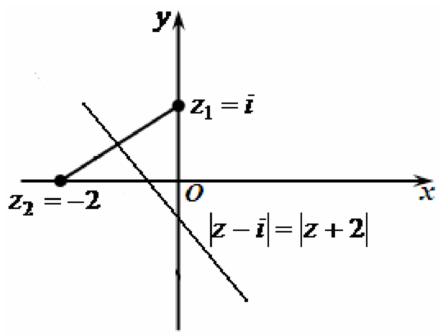


Рисунок 11

з) Изобразим на отдельных рисунках множества точек, удовлетворяющих каждому из неравенств условия (смотри рисунок 12).

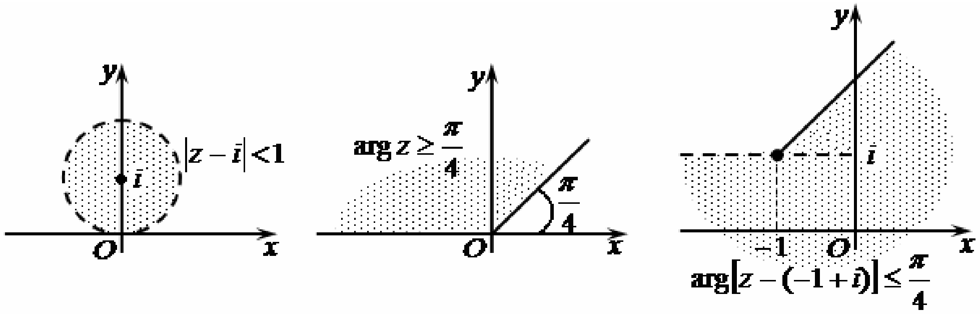


Рисунок 12

Находим пересечение трех полученных областей – это и будет искомое множество (выделено на рисунке 13).

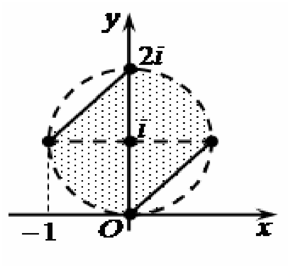


Рисунок 13

Задание 5 Решить квадратное уравнение $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Решение. $z^2 + 2z + 5 = 0$.

$D = 4 - 4 \cdot 5 = -16 = 16i^2$,

$z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

Ответ. $z_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Задание 6 Решить биквадратное уравнение $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$.

Решение. $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$.

$z^2 = t$,

$t^2 + 18t + 81 = 0 \;\Rightarrow\; (t+9)^2 = 0 \;\Rightarrow\; z^2 + 9 = 0 \;\Rightarrow\; z^2 - 9i^2 = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; z^2 = 9i^2 \;\Rightarrow\; z_{1,2} = \pm 3i$.

Ответ. $z_{1,2} = \pm 3i$.

Задание 7 Решить уравнение $|z| - z = 1 + 2i$.

Решение. $\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 1 + 2i$.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1, \\ -y = 2, \end{cases} \begin{cases} y = -2, \\ \sqrt{x^2 + 4} - x = 1, \end{cases} \begin{cases} y = -2, \\ \sqrt{x^2 + 4} = 1 + x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2, \\ x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2, \end{cases} \begin{cases} y = -2, \\ 2x = 3, \end{cases} \begin{cases} y = -2, \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

$z = \dfrac{3}{2} - 2i$.

Ответ. $z = \dfrac{3}{2} - 2i$.

Задание 8 Разложить на сумму простейших дробей над полем $\mathbb{C}$ $\dfrac{(-1+i)z-11-5i}{z^2+2z+5}$.

Решение. Разложим на множители квадратный трехчлен, для этого решим квадратное уравнении: $z^2+2z+5=0$.

$D=4-4\cdot 5=4-20=-16=16i^2 \Rightarrow z_{1,2}=-1\pm 2i$.

$$\frac{(-1+i)z-11-5i}{(z+1-2i)(z+1+2i)}=\frac{A}{z+1-2i}+\frac{B}{z+1+2i}=\frac{A(z+1+2i)+B(z+1-2i)}{z^2+2z+5}=$$

$$=\frac{Az+A+2Ai+Bz+B-2Bi}{z^2+2z+5}=\frac{z(A+B)+A+B+2Ai-2Bi}{z^2+2z+5}.$$

$$\begin{cases} A+B=-1+i, \\ A+B+2Ai-2Bi=-11-5i, \end{cases} \begin{cases} A+B=-1+i, \\ -1+i+2Ai-2Bi=-11-5i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=-1+i, \\ 2Ai-2Bi=-10-6i, \end{cases} \begin{cases} A=-1=i-B, \\ 2i\left(-1+i-B\right)-2Bi=-10-6i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1+i-B, \\ -4Bi=8-4i, \ /\cdot i \end{cases} \begin{cases} A=-1+i-B, \\ 4b=-8i+4, \ /:4 \end{cases} \begin{cases} A=-1+i-B, \\ B=-2i+1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1+i+2i-1, \\ B=-2i+1, \end{cases} \begin{cases} A=3i-2, \\ B=-2i+1. \end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{(-1+i)z-11-5i}{z^2+2z+5}=\dfrac{3i-2}{z+1-2i}+\dfrac{1-2i}{z+1+2i}$.

Задание 9 Найти многочлен второй степени $f(z)$, если $f(0)=2$, $f(-i)=4+i$, $f(2+i)=6+7i$.

Решение. $f(z)=az^2+bz+c$.

$f(0)=c$,

$f(-i)=a(-i)^2+b(-i)+c=ai^2-bi+c=-a-bi+c$,

$f(2+i)=a(2+i)^2+b(2+i)+c=a(4+4i+i^2)+b(2+i)+c=$
$=a(4+4i-1)+b(2+i)+c=a(3+4i)+b(2+i)+c$.

$$\begin{cases} c=2, \\ -a-bi+c=4+i, \\ a(3+4i)+b(2+i)+c=6+7i, \end{cases} \begin{cases} c=2, \\ a=-bi-2-i, \\ (-bi-2-i)(3+4i)+b(2+i)=4+7i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2, \\ a = -bi - 2 - i, \Rightarrow b = \dfrac{3(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \dfrac{3(3+i+9i-3)}{9-i^2} = \dfrac{3(10i)}{10} = 3i \Rightarrow \\ b = \dfrac{3(1+3i)}{3-i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2, \\ a = -bi - 2 - i, \\ b = 3i, \end{cases} \begin{cases} c = 2, \\ a = 1 - i, \\ b = 3i. \end{cases}$$

Ответ. $f(z) = (1-i)z^2 + 3iz + 2$.

Домашнее задание № 1

Задание 1 Выполнить действия над комплексными числами $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3i - 5$.

Ответ. $z_1 + z_2 = 5i - 2$, $z_1 - z_2 = 8 - i$, $z_1 \cdot z_2 = -i - 21$, $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{9}{34} - \dfrac{19}{34}i$.

Задание 2 Вычислить: а) $(1+2i)^3 - \dfrac{4i}{4-3i}$; б) $i^3 + i^{13} + i^{23} + \ldots + i^{53}$;

в) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \ldots \cdot i^{100}$; г) $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + \ldots + i^{84}$.

Ответ. а) $\dfrac{-66i - 263}{25}$; б) 0; в) -1; г) 1.

Задание 3 Представить в тригонометрической и показательной формах числа:

а) $z = -17{,}2i$; б) $z = 3(\cos 10° - i \sin 10°)$; в) $z = 1 + i \cdot tg1$.

Ответ. а) $z = 17{,}2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $z = 17{,}2e^{\frac{3\pi}{2}i}$;

б) $z = 3(\cos(-10°) + i\sin(-10°))$, $z = 3e^{-\frac{\pi}{18}i}$;

в) $z = \dfrac{1}{\cos 1}(\cos 1 + i \sin 1)$, $z = \dfrac{1}{\cos 1}e^i$.

Задание 4 Решить уравнения:

а) $z^2 - 4z + 8 = 0$; б) $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$;

в) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$; г) $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$;

д) $z^3 - 1 = 0$; е) $(z+1)^4 - 16 = 0$;

ж) $|z| + z = 2 + i$; з) $z^3 + 1 = 0$.

Ответ. а) $2 \pm 2i$; б) $\pm 2i;\ \pm\sqrt{5}i$;

в) $z_{1,2} = \pm 1,\ z_{3,4} = \pm i,\ z_{5,6} = \pm 2,\ z_{7,8} = \pm 2i$;

г) $z_1 = 1,\ z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $z_1 = 1,\quad z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

е) $z_1 = 1,\quad z_2 = -3,\quad z_3 = 2i - 1,\quad z_4 = -1 - 2i$;

ж) $z = \frac{3}{4} + i$; з) $-1;\ \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задание 5 Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$; б) $|z - 2i| \le \left|\sin\frac{3}{2} - i\cos\frac{3}{2}\right|$; в) $|z - 3| = 2 \cdot |z|$;

в) $|z - 1 - i| < 1$; в) $2 \le |z - 2 + 3i| \le 3$.

Задание 6 Вычислить:

а) $\frac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24} - i \cdot (1+i)^{24}}$; б) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$

Ответ. а) $-2 - 2i$; б) $512\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

Задание 7 Найти все значения корня $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$.

Ответ. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

Задание 8 Найти многочлен второй степени $f(z)$, если его коэффициент перед первой степенью z равен (-3), $f(i) = 3 - 6i$, $f(2 - i) = 9 + 4i$.

Ответ. $f(z) = (1 + 2i)z^2 - 3z + 4 - i$.

Задание 9 Представить в виде суммы простейших дробей над полем C $\frac{3z - 1 - 2i}{z^2 + 1}$.

Ответ. $\frac{1 + i}{2(z - i)} + \frac{5 - i}{2(z + i)}$.

Задание 10 Найти решение системы уравнений

а) $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x + (3 + 3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$

Ответ. а) $y = 2 - i,\quad x = 2 + i$; б) $x = 1 + i,\ y = i$.

Вопросы для самопроверки

1 Напишите тригонометрическую форму комплексного числа.
2 Напишите алгебраическую форму комплексного числа z.
3 Запишите формулу Муавра.
4 Вычислите i^7 на $\mathbb{C}$.
5 Вычислите $\sqrt[3]{1}$ на $\mathbb{C}$.
6 Вычислите $\frac{1}{3+i}$.
7 Решите уравнение $z^2 + 1 = 0$ на множестве $\mathbb{C}$.
8 Запишите показательную форму комплексного числа $i-1$.
9 Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих равенству $z \cdot \bar{z} = 1$.
10 Записать в тригонометрической форме комплексное число $-1-\sqrt{3}i$.
11 Вычислите $3e^{\frac{\pi}{2}i}$.
12 Изобразить на комплексной плоскости множество точек $\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z = 2$.
13 Найти $|z|$ и $\arg z$, если $z = 1-\sqrt{3}i$.
14 Изобразить на комплексной плоскости множество точек $|z| \le 2$.
15 Вычислить $\sqrt{-4}$ на $\mathbb{C}$.
16 Вычислить $\sqrt{i}$ на $\mathbb{C}$.
17 Вычислить $\sqrt{16}$ на $\mathbb{C}$.
18 Запишите формулу извлечения корня $n-$й степени из комплексного числа.
19 Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих данному равенству $|z+1| = |z-i|$.
20 Вычислить i^{2006}.

Расчетно графические задания (РГЗ)

I Выполнить действия. $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{z_2}{z_1}$.

1. $z_1=3-2i$ $z_2=5-i$;
2. $z_1=4+i$ $z_2=3-4i$;
3. $z_1=5i-1$ $z_2=i-3$;
4. $z_1=i+2$ $z_2=4+3i$;
5. $z_1=3+2i$ $z_2=1-3i$;
6. $z_1=i-2$ $z_2=3+6i$;
7. $z_1=4+3i$ $z_2=i+4$;
8. $z_1=i+1$ $z_2=i-5$;
9. $z_1=3i-4$ $z_2=8i+2$;
10. $z_1=2i-3$ $z_2=5+2i$;
11. $z_1=4i-2$ $z_2=7i+1$;
12. $z_1=3-5i$ $z_2=2+3i$;
13. $z_1=6i-5$ $z_2=3+2i$;
14. $z_1=i+4$ $z_2=2i-9$;
15. $z_1=4i-1$ $z_2=i-3$;
16. $z_1=3i+5$ $z_2=i-4$;
17. $z_1=8i-3$ $z_2=i+6$;
18. $z_1=3+5i$ $z_2=2i-6$;
19. $z_1=6i-5$ $z_2=5i+4$;
20. $z_1=i+10$ $z_2=4i+7$;
21. $z_1=4i-2$ $z_2=i+3$;
22. $z_1=4-3i$ $z_2=2i-1$;
23. $z_1=i-4$ $z_2=3+2i$;
24. $z_1=4+5i$ $z_2=i+2$;
25. $z_1=i+2$ $z_2=3-2i$;
26. $z_1=2+i$ $z_2=i-5$;
27. $z_1=4+5i$ $z_2=2i-3$;
28. $z_1=2i-3$ $z_2=4+3i$;
29. $z_1=3-2i$ $z_2=4-7i$;
30. $z_1=i+3$ $z_2=6-2i$.

2. Возвести в степень n число z.

1. $z=1-\sqrt{3}i$ $n=12$;
2. $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ $n=24$;
3. $z=\sqrt{3}+i$ $n=8$;
4. $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ $n=10$;
5. $z=-3-3i$ $n=15$;
6. $z=5i-5$ $n=20$;
7. $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $n=16$;
8. $z=-4+4i$ $n=28$;
9. $z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$ $n=30$;
10. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ $n=14$;
11. $z=1-i\sqrt{3}$ $n=15$;
12. $z=\sqrt{3}-i$ $n=17$;
13. $z=6+6i$ $n=10$;
16. $z=5\sqrt{3}+5i$ $n=6$;
17. $z=-3-3\sqrt{3}i$ $n=32$;
18. $z=2+2i$ $n=1000$;
19. $z=4-4i$ $n=998$;
20. $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $n=36$;
21. $z=2\sqrt{3}-2i$ $n=24$.
22. $z=2i-2$ $n=100$;
23. $z=-4-4i$ $n=20$;
24. $z=2\sqrt{3}-2i$ $n=30$;
25. $z=-\sqrt{3}-i$ $n=64$;
26. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ $n=50$;
27. $z=i-\sqrt{3}$ $n=42$;
28. $z=\frac{1}{4}-\frac{i}{4}$ $n=44$;

14. $z = 4\sqrt{3} + 4i$ $n=9;$

15. $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ $n=90;$

29. $z = -i + 1$ $n = 36$;

30. $z = \sqrt{3}i - 1$ $n = 16$.

3. Извлеките $\sqrt[m]{z}$ и отметьте на комплексной плоскости числа (комплексное число z из задания 2)

1. $m=6$
2. $m=4$
3. $m=3$
4. $m=5$
5. $m=6$
6. $m=4$
7. $m=5$
8. $m=6$
9. $m=4$
10. $m=6$
11. $m=4$
12. $m=5$
13. $m=6$
14. $m=3$
15. $m=6$
16. $m=4$
17. $m=6$
18. $m=5$
19. $m=6$
20. $m=3$
21. $m=6$
22. $m=4$
23. $m=6$
24. $m=4$
25. $m=6$
26. $m=3$
27. $m=6$
28. $m=5$
29. $m=5$
30. $m=6$

4. Изобразите на плоскости *XOY* множество точек $z=x+i\cdot y$, удовлетворяющих условию.

1. $|z - 2i + 4| \le 3$;

2. $|2z - 3 + i| \le 1$;

3. $4 \le |z + 2i - 1| \le 6$;

4. $1 + z = |z + 1|$;

5. $|z + 2i - 3| = |z|$;

6. $|z + 2| > |z|$;

7. $|z - 1| = |z + 1| = |z + 1 - 2i|$;

8. $2 \le |2z + 1| \le 4$;

9. $|z - 2 - 3i| > 1$;

10. $\begin{cases} |z| \ge 2 \\ \dfrac{\pi}{6} < \arg z \le \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$

11. $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$;

12. $-\operatorname{Re} z + |z| \le 0$;

16. $\dfrac{\pi}{3} < \arg(z - i) < \dfrac{\pi}{2}$;

17. $|z - 1| \le |z - i|$;

18. $|z - i| + |z + i| = 4$;

19. $1 \le \operatorname{Re}(2z - 3) \le 2$;

20. $|z - 1| = |z + 2| = |z - i|$;

21. $\begin{cases} 2 < |z + 2i - 3| \le 6 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg(z - 1) \le \dfrac{2\pi}{3}; \end{cases}$

22. $|z - 2i| = |z + 3|$;

23. $\operatorname{Im} z - |z| < 0$;

24. $1 \le |z + i - 3| \le 2$;

25. $|z - 3 + i| \le |z|$;

26. $\begin{cases} 1 \le |z| \le 2, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

27. $\begin{cases} 1 < |z| < 3, \\ -1 \le \operatorname{Re} z < 2; \end{cases}$

13. $\frac{\pi}{4} \le \arg(z+1-i) \le \frac{3\pi}{4}$;

14. $2 \le |2z+1| \le 4$;

15. $1 \le |z+2+i| \le 2$;

28. $\begin{cases} \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{6} < \arg(z-1) < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

29. $|z| \ge \operatorname{Re} z$;

30. $2 - z = |z-2|$

II Выполнить действия над матрицей A. Вычислить матрицу B, если дана матрица A.

$B = A^2 - 3A \cdot A^T + 4A \cdot E$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **2.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$; **3.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; **5.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **6.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; **8.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; **9.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$;

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$; **11.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$; **12.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$;

13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **14.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; **15.** $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

16. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$; **17.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$; **18.** $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

19. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **20.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$; **21.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

22. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **23.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$; **24.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 8 & -2 & 1\end{pmatrix}$; **26.** $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 5 & -2 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$; **27.** $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}$;

28. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$; **29.** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ -2 & 3 & 4\\ -6 & 1 & 0\end{pmatrix}$; **30.** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & -4\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

III Решить систему линейных уравнений тремя способами:
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3, \end{cases} \Leftrightarrow \; A\cdot X = B.$$

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}.$$

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5\\ -7\\ -11\end{pmatrix}$; **2.** $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -2 & -4\\ 6 & -1 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 7\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -1 & 5 & 2\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\ -28\\ 13\end{pmatrix}$; **4.** $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ -2 & 4 & 1\\ -1 & 6 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-22\\ -24\\ -25\end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6\\ 2 & 3 & -1\\ -5 & -2 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-5\\ 10\\ -24\end{pmatrix}$; **6.** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 6 & -2\\ -3 & 7 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-5\\ 30\\ 22\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 1 & -2 & 4\\ -2 & 0 & 6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-5\\ -14\\ -4\end{pmatrix}$; **8.** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 6\\ -1 & 4 & -5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -9\end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 6\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-9\\ 3\\ 17\end{pmatrix}$; **10.** $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -2\\ 4 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-8\\ 9\\ -18\end{pmatrix}$;

11. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 3 & -4\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-4\\ -21\\ -16\end{pmatrix}$; **12.** $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}19\\ 7\\ 16\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 5 & -2 & 1\\ -3 & -4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6\\ 17\\ 8\end{pmatrix}$; **14.** $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & -5\\ -1 & -4 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}12\\ 12\\ -9\end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -3 & 5 & 0\\ 4 & 1 & -6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\ -13\\ 8\end{pmatrix}$; **16.** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 2\\ -4 & 1 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\ 17\\ -8\end{pmatrix}$;

17. $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3\\ 9\\ 3\end{pmatrix}$; **18.** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 3 & 4 & -1\\ -2 & 1 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}10\\ 6\\ -5\end{pmatrix}$;

19. $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ -10\end{pmatrix}$; **20.** $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 3 & -5\\ 5 & 1 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ -6\end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 0 & 4 & -1\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-19\\ 0\\ 12\end{pmatrix}$; **22.** $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-2\\ -15\\ 2\end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}10\\ 15\\ -5\end{pmatrix}$; **24.** $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 13\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & -1 & 1\\ 8 & 2 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}20\\ -6\\ -6\end{pmatrix}$; **26.** $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 3\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0\\ 14\\ -8\end{pmatrix}$;

27. $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 13\end{pmatrix}$; **28.** $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 1\\ 2 & 7 & 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1\\ -12\\ -12\end{pmatrix}$;

29. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3\\ 9\\ -6\end{pmatrix}$; **30.** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & -2 & 3\\ -7 & 8 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}11\\ 9\\ 5\end{pmatrix}$.

Ответ: 1. $(2;1;-3)$; 2. $(1;-5;2)$; 3. $(2;-4;-3)$;
4. $(1;-5;-2)$; 5. $(3;1;-1)$; 6. $(2;4;-1)$;
7. $(-4;1;-2)$; 8. $(1;-2;0)$; 9. $(4;1;-1)$;
10. $(1;-1;5)$; 11. $(-1;1;6)$; 12. $(2;3;-1)$;
13. $(2;-3;1)$; 14. $(3;1;-2)$; 15. $(1;-2;-1)$;
16. $(3;2;-1)$; 17. $(1;2;-2)$; 18. $(5;-2;1)$;
19. $(-1;1;3)$; 20. $(-1;2;1)$; 21. $(2;-1;-4)$;
22. $(2;-4;-1)$; 23. $(1;2;-3)$; 24. $(1;2;-1)$;

25. $(-1;4;2)$; 26. $(1;-2;3)$; 27. $(-1;1;2)$;
28. $(-2;1;-3)$; 29. $(2;1;-7)$; 30. $(1;1;2)$.

IV Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$ (сделать рисунок). Найти: 1) длину ребра AB;
2) угол между ребрами AB и AC;
3) площадь грани ABC;
4) объем пирамиды;
5) длину высоты, опущенную на грань ABC.

1. $A\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $B(-1;2;2)$, $C\left(\frac{1}{3};\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$, $D\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)$.

2. $A\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $B(-2;4;4)$, $C\left(\frac{2}{3};\frac{20}{3};\frac{8}{3}\right)$, $D\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3};\frac{22}{3}\right)$.

3. $A(2;2;-1)$, $B(-3;6;6)$, $C(1;10;4)$, $D(5;5;11)$.

4. $A\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $B(-4;8;8)$, $C\left(\frac{4}{3};\frac{40}{3};\frac{16}{3}\right)$, $D\left(\frac{20}{3};\frac{20}{3};\frac{44}{3}\right)$.

5. $A\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3};-\frac{5}{3}\right)$, $B(-5;10;10)$, $C\left(\frac{5}{3};\frac{50}{3};\frac{20}{3}\right)$, $D\left(\frac{25}{3};\frac{25}{3};\frac{55}{3}\right)$.

6. $A(4;4;-2)$, $B(-6;12;12)$, $C(2;20;8)$, $D(10;10;22)$.

7. $A\left(\frac{14}{3};\frac{14}{3};-\frac{7}{3}\right)$, $B(-7;14;14)$, $C\left(\frac{7}{3};\frac{70}{3};\frac{28}{3}\right)$, $D\left(\frac{35}{3};\frac{35}{3};\frac{77}{3}\right)$

8. $A\left(\frac{16}{3};\frac{16}{3};-\frac{8}{3}\right)$, $B(-8;16;16)$, $C\left(\frac{8}{3};\frac{80}{3};\frac{32}{3}\right)$, $D\left(\frac{40}{3};\frac{40}{3};\frac{88}{3}\right)$.

9. $A(6;6;-3)$, $B(-9;18;18)$, $C(3;30;12)$, $D(15;15;33)$.

10. $A\left(\frac{20}{3};\frac{20}{3};-\frac{10}{3}\right)$, $B(-10;20;20)$, $C\left(\frac{10}{3};\frac{100}{3};\frac{40}{3}\right)$, $D\left(\frac{50}{3};\frac{50}{3};\frac{110}{3}\right)$.

11. $A(2;2;-1)$, $B\left(\frac{1}{3};\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{5}{3};\frac{14}{3};\frac{2}{3}\right)$, $D(3;3;3)$.

12. $A(4;4;-2)$, $B\left(\frac{2}{3};\frac{20}{3};\frac{8}{3}\right)$, $C\left(\frac{10}{3};\frac{28}{3};\frac{4}{3}\right)$, $D(6;6;6)$.

13. $A(6;6;-3)$, $B(1;10;4)$, $C(5;14;2)$, $D(9;9;9)$.

14. $A(8;8;-4)$, $B\left(\frac{4}{3};\frac{40}{3};\frac{16}{3}\right)$, $C\left(\frac{20}{3};\frac{56}{3};\frac{8}{3}\right)$, $D(12;12;12)$.

15. $A(10;10;-5)$, $B\left(\frac{5}{3};\frac{50}{3};\frac{20}{3}\right)$, $C\left(\frac{25}{3};\frac{70}{3};\frac{10}{3}\right)$, $D(15;15;15)$.

16. $A(12;12;-6)$, $B(2;20;8)$, $C(10;28;4)$, $D(18;18;18)$.

17. $A(14;14;-7)$, $B\left(\frac{7}{3};\frac{70}{3};\frac{28}{3}\right)$, $C\left(\frac{35}{3};\frac{98}{3};\frac{14}{3}\right)$, $D(21;21;21)$.

18. $A(16;16;-8)$, $B\left(\frac{8}{3};\frac{80}{3};\frac{32}{3}\right)$, $C\left(\frac{40}{3};\frac{112}{3};\frac{16}{3}\right)$, $D(24;24;24)$.

19. $A(18;18;-9)$, $B(3;30;12)$, $C(15;42;6)$, $D(27;27;27)$.

20. $A(20;20;-10)$, $B\left(\frac{10}{3};\frac{100}{3};\frac{40}{3}\right)$, $C\left(\frac{50}{3};\frac{140}{3};\frac{20}{3}\right)$, $D(30;30;30)$.

21. $A\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, $B(2;2;-1)$, $C\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, $D\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3};\frac{5}{3}\right)$.

22. $A\left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$, $B(4;4;-2)$, $C\left(\frac{20}{3};\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$, $D\left(\frac{10}{3};\frac{22}{3};\frac{10}{3}\right)$.

23. $A(2;-1;2)$, $B(6;6;-3)$, $C(10;4;1)$, $D(5;11;5)$.

24. $A\left(\frac{8}{3};-\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, $B(8;8;-4)$, $C\left(\frac{40}{3};\frac{16}{3};\frac{4}{3}\right)$, $D\left(\frac{20}{3};\frac{44}{3};\frac{20}{3}\right)$.

25. $A\left(\frac{10}{3};-\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$, $B(10;10;-5)$, $C\left(\frac{50}{3};\frac{20}{3};\frac{5}{3}\right)$, $D\left(\frac{25}{3};\frac{55}{3};\frac{25}{3}\right)$.

26. $A(6;-3;6)$, $B(18;18;-9)$, $C(30;12;3)$, $D(15;33;15)$.

27. $A\left(\frac{14}{3};-\frac{7}{3};\frac{14}{3}\right)$, $B(14;14;-7)$, $C\left(\frac{70}{3};\frac{28}{3};\frac{7}{3}\right)$, $D\left(\frac{35}{3};\frac{77}{3};\frac{35}{3}\right)$.

28. $A(8;-4;8)$, $B(24;24;12)$, $C(40;16;4)$, $D(20;44;20)$.

29. $A(12;-6;12)$, $B(36;36;-18)$, $C(60;24;6)$, $D(30;66;30)$.

30. $A\left(\frac{20}{3};-\frac{10}{3};\frac{20}{3}\right)$, $B(20;20;-10)$, $C\left(\frac{100}{3};\frac{40}{3};\frac{10}{3}\right)$, $D\left(\frac{50}{3};\frac{110}{3};\frac{50}{3}\right)$.

V Вектор $\overline{a}$ ортогонален векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$ $(\overline{a}\perp\overline{b},\ \overline{a}\perp\overline{c})$. Кроме того, известна длина $|\overline{a}|$. Найти $\overline{a}$, если:

1. $\overline{b}(-1;1;-3)$, $\overline{c}(1;1;-1)$, $|\overline{a}|=\sqrt{6}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

2. $\overline{b}\left(1;1;-\frac{3}{2}\right)$, $\overline{c}\left(-1;1;-\frac{1}{2}\right)$, $|\overline{a}|=3$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

3. $\overline{b}(-1;1;-1)$, $\overline{c}\left(1;1;-\frac{1}{3}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{14}$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

4. $\overline{b}\left(1;1;-\frac{3}{4}\right)$, $\overline{c}\left(-1;1;-\frac{1}{4}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{19}$, $np_{OZ}\,\overline{a}<0$.

5. $\overline{b}\left(-1;1;-\frac{3}{5}\right)$, $\overline{c}(1;1;-0{,}2)$, $|\overline{a}|=\sqrt{30}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

6. $\overline{b}\left(1;1;-\frac{1}{2}\right)$, $\overline{c}\left(-1;1;-\frac{1}{6}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{41}$, $np_{OY}\,\overline{a}>0$.

7. $\overline{b}\left(-1;\,1;\,-\frac{3}{7}\right)$, $\overline{c}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{7}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{5{,}4}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

8. $\overline{b}\left(1;\,1;\,-\frac{3}{8}\right)$, $\overline{c}\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{8}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{69}$, $np_{OZ}\,\overline{a}<0$.

9. $\overline{b}\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{3}\right)$, $\overline{c}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{9}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{86}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

10. $\overline{b}(1;\,1;\,-0{,}3)$, $\overline{c}(-1;\,1;\,-0{,}1)$, $|\overline{a}|=\sqrt{105}$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

11. $\overline{b}\left(-1;\,1;\,-\frac{3}{11}\right)$, $\overline{c}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{11}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{126}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

12. $\overline{b}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{4}\right)$, $\overline{c}\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{12}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{149}$, $np_{OZ}\,\overline{a}>0$.

13. $\overline{b}\left(-1;\,1;\,-\frac{3}{13}\right)$, $\overline{c}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{13}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{174}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

14. $\overline{b}\left(1;\,1;\,-\frac{3}{14}\right)$, $\overline{c}\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{14}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{201}$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

15. $\overline{b}(-1;\,1;\,-0{,}2)$, $\overline{c}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{15}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{230}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

16. $\overline{b}\left(1;\,1;\,-\frac{3}{16}\right)$, $\overline{c}\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{16}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{261}$, $np_{OZ}\,\overline{a}>0$.

17. $\overline{b}\left(-1;\,1;\,-\frac{3}{17}\right)$, $\overline{c}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{17}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{294}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

18. $\overline{b}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{6}\right)$, $\overline{c}\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{18}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{329}$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

19. $\overline{b}\left(-1;\,1;\,-\frac{3}{19}\right)$, $\overline{c}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{19}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{366}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

20. $\overline{b}\left(1;\,1;\,-\frac{3}{20}\right)$, $\overline{c}(-1;\,1;\,-0{,}05)$, $|\overline{a}|=\sqrt{405}$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

21. $\overline{b}\left(-1;\,1;\,-\frac{3}{7}\right)$, $\overline{c}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{21}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{446}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

22. $\overline{b}\left(1;\,1;\,-\frac{3}{22}\right)$, $\overline{c}\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{22}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{489}$, $np_{OZ}\,\overline{a}>0$.

23. $\overline{b}\left(-1;\,1;\,-\frac{3}{23}\right)$, $\overline{c}\left(1;\,1;\,-\frac{1}{23}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{534}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

24. $\overline{b}\left(1;\,1;\,-\frac{3}{8}\right)$, $\overline{c}\left(-1;\,1;\,-\frac{1}{24}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{581}$, $np_{OY}\,\overline{a}>0$.

25. $\overline{b}\left(-1;\,1;\,-\frac{3}{25}\right)$, $\overline{c}(1;\,1;\,-0{,}04)$, $|\overline{a}|=\sqrt{630}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

26. $\overline{b}\left(-1;-1;-\dfrac{3}{2}\right)$, $\overline{c}\left(1;-1;-\dfrac{1}{2}\right)$, $|\overline{a}|=3$, $np_{OZ}\,\overline{a}<0$.

27. $\overline{b}(1;-1;1)$, $\overline{c}\left(-1;-1;\dfrac{1}{3}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{1{,}4}$, $np_{OZ}\,\overline{a}<0$.

28. $\overline{b}\left(-1;-1;\dfrac{3}{4}\right)$, $\overline{c}\left(1;-1;\dfrac{1}{4}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{19}$, $np_{OY}\,\overline{a}>0$.

29. $\overline{b}\left(1;-1;\dfrac{3}{5}\right)$, $\overline{c}(-1;-1;0{,}2)$, $|\overline{a}|=\sqrt{30}$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

30. $\overline{b}(-1;-1;0{,}5)$, $\overline{c}\left(1;-1;\dfrac{1}{6}\right)$, $|\overline{a}|=\sqrt{41}$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

VI Найти вектор $\overline{a}$, если известно, что $\overline{a}\parallel\overline{AB}$, даны длина $|\overline{a}|$ и дополнительные условии:

1. $A(9;-1;6)$, $B(11;-3;7)$, $|\overline{a}|=6$, $np_{OY}\,\overline{a}>0$.

2. $A(8;1;4)$, $B(-2;4;6)$, $|\overline{a}|=14$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

3. $A(7;-1;6)$, $B(9;-3;7)$, $|\overline{a}|=6$, $np_{OZ}\,\overline{a}<0$.

4. $A(6;1;4)$, $B(0;4;6)$, $|\overline{a}|=14$, $np_{OX}\,\overline{a}>0$.

5. $A(5;-1;6)$, $B(7;-3;7)$, $|\overline{a}|=6$, $np_{OZ}\,\overline{a}<0$.

6. $A(4;1;4)$, $B(-2;4;6)$, $|\overline{a}|=14$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

7. $A(3;-1;6)$, $B(5;-3;7)$, $|\overline{a}|=6$, $np_{OY}\,\overline{a}>0$.

8. $A(2;1;4)$, $B(-4;4;6)$, $|\overline{a}|=14$, $np_{OZ}\,\overline{a}>0$.

9. $A(1;-1;6)$, $B(3;-3;7)$, $|\overline{a}|=6$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

10. $A(0;1;4)$, $B(-6;4;6)$, $|\overline{a}|=14$, $np_{OZ}\,\overline{a}>0$.

11. $A(-1;-1;6)$, $B(2;5;4)$, $|\overline{a}|=7/2$, $np_{OX}\,\overline{a}<0$.

12. $A(-2;1;4)$, $B(-6;3;8)$, $|\overline{a}|=3$, $np_{OZ}\,\overline{a}<0$.

13. $A(-3;-1;6)$, $B(0;5;4)$, $|\overline{a}|=7/2$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

14. $A(-4;1;4)$, $B(-8;3;8)$, $|\overline{a}|=3$, $np_{OY}\,\overline{a}<0$.

15. $A(-5;-1;6)$, $B(-2;5;4)$, $|\overline{a}|=7/2$, $np_{OX}\,\overline{a}>0$.

16. $A(-6;1;4)$, $B(-10;3;8)$, $|\overline{a}|=3$, $np_{OY}\,\overline{a}>0$.

17. $A(-7;-1;6)$, $B(-4;5;4)$, $|\overline{a}|=7/2$, $np_{OZ}\,\overline{a}>0$.

18. $A(-8;1;4)$, $B(-12;3;8)$, $|\overline{a}|=3$, $np_{OZ}\,\overline{a}>0$.

19. $A(-9;-1;6)$, $B(-6;5;4)$, $|\overline{a}|=7/2$, $np_{OZ}\,\overline{a}>0$.

20. $A(-10;1;4)$, $B(-14;3;8)$, $|\overline{a}|=3$, $пр_{OZ}\overline{a}<0$.

21. $A(-11;-1;6)$, $B(-8;5;4)$, $|\overline{a}|=7/2$, $пр_{OX}\overline{a}>0$.

22. $A(-12;1;4)$, $B(-16;3;8)$, $|\overline{a}|=3$, $пр_{OX}\overline{a}<0$.

23. $A(-13;-1;6)$, $B(-17;5;4)$, $|\overline{a}|=10$, $пр_{OY}\overline{a}>0$.

24. $A(-14;1;4)$, $B(-18;3;8)$, $|\overline{a}|=3$, $пр_{OY}\overline{a}<0$.

25. $A(-15;-1;6)$, $B(-19;-1;9)$, $|\overline{a}|=10$, $пр_{OZ}\overline{a}>0$.

26. $A(-9;1;-6)$, $B(-11;3;-7)$, $|\overline{a}|=6$, $пр_{OZ}\overline{a}<0$.

27. $A(-8;-1;-4)$, $B(2;-4;-6)$, $|\overline{a}|=14$, $пр_{OY}\overline{a}<0$.

28. $A(-7;1;6)$, $B(-9;3;-7)$, $|\overline{a}|=6$, $пр_{OX}\overline{a}<0$.

29. $A(-5;1;-6)$, $B(-7;3;-7)$, $|\overline{a}|=6$, $пр_{OZ}\overline{a}<0$.

30. $A(-3;1;-6)$, $B(-5;3;-7)$, $|\overline{a}|=6$, $пр_{OY}\overline{a}<0$.

VII Доказать компланарность векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

1. $A(7;4;6)$, $B(5;3;5)$, $C(-12;-7;-11)$, $D(-17;-10;-16)$.
2. $A(1;-1;2)$, $B(2;1;2)$, $C(1;1;4)$, $D(1;2;0)$.
3. $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(2;6;12)$.
4. $A(-4;2;6)$, $B(2;-3;0)$, $C(-10;5;8)$, $D(-2;-1;6)$.
5. $A(7;2;4)$, $B(7;-1;-2)$, $C(3;3;1)$, $D(0;3;-6)$.
6. $A(2;1;4)$, $B(-1;5;-2)$, $C(-7;-3;2)$, $D(1;6;2)$.
7. $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$, $D(-1;-6;3)$.
8. $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$, $D(-1;1;1)$.
9. $A(-2;0;-4)$, $B(-1;7;1)$, $C(4;-8;-4)$, $D(2;0;4)$.
10. $A(14;4;5)$, $B(5;3;-2)$, $C(2;6;3)$, $D(2;-2;1)$.
11. $A(1;1;2)$, $B(-1;1;3)$, $C(2;-2;3)$, $D(1;0;-1)$.
12. $A(1;3;4)$, $B(0;2;3)$, $C(-1;-2;3)$, $D(3;4;-5)$.
13. $A(1;0;3)$, $B(4;2;1)$, $C(0;3;-2)$, $D(-5;-1;2)$.
14. $A(2;-1;-5)$, $B(-2;3;0)$, $C(1;2;4)$, $D(3;0;1)$.
15. $A(-1;0;-3)$, $B(-4;-2;-1)$, $C(0;3;-2)$, $D(-5;-1;2)$.
16. $A(-2;1;5)$, $B(2;-3;0)$, $C(1;2;4)$, $D(3;0;1)$.
17. $A(-1;0;-3)$, $B(4;2;1)$, $C(0;-3;2)$, $D(-5;-1;2)$.
18. $A(2;-1;-5)$, $B(2;-3;0)$, $C(1;2;4)$, $D(-3;0;-1)$.
19. $A(-1;0;-3)$, $B(4;2;1)$, $C(0;3;-2)$, $D(5;1;-2)$.
20. $A(-2;1;5)$, $B(-2;3;0)$, $C(1;2;4)$, $D(-3;0;-1)$.
21. $A(1;0;3)$, $B(2;-1;4)$, $C(-1;-3;5)$, $D(-15;1;-1)$.
22. $A(2;-1;4)$, $B(-1;-3;5)$, $C(-15;1;-1)$, $D(1;0;3)$.

23. $A(1;-1;15)$, $B(-5;3;1)$, $C(-4;1;-2)$, $D(-3;0;-1)$.
24. $A(3;0;1)$, $B(4;-1;2)$, $C(5;-3;-1)$, $D(-1;1;-15)$.
25. $A(1;-1;3)$, $B(5;4;-2)$, $C(2;1;-1)$, $D(15;0;4)$.
26. $A(2;-4;-5)$, $B(0;1;-1)$, $C(1;-1;-2)$, $D(-4;0;-15)$.
27. $A(4;0;15)$, $B(-1;1;2)$, $C(-2;4;5)$, $D(0;-1;1)$.
28. $A(15;0;4)$, $B(2;1;-1)$, $C(5;4;-2)$, $D(1;-1;0)$.
29. $A(1;-1;0)$, $B(-5;4;-2)$, $C(-2;-1;1)$, $D(15;0;-4)$.
30. $A(2;1;-1)$, $B(15;0;4)$, $C(5;4;-2)$, $D(1;-1;0)$.

VIII Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\angle \overline{p},\overline{q}$ - угол между векторами $\overline{p}$, $\overline{q}$.

1. $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=1$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/6$.
2. $\overline{a}=2\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-3\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=2$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/4$
3. $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+3\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=2$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/2$.
4. $\overline{a}=3\overline{p}-5\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=1$, $\angle\overline{p}\overline{q}=5\pi/6$.
5. $\overline{a}=\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=6$, $\angle\overline{p}\overline{q}=3\pi/4$.
6. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}-2\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=2$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/3$.
7. $\overline{a}=2\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=3$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/2$.
8. $\overline{a}=\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-4\overline{q}$, $|\overline{p}|=7$, $|\overline{q}|=1$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/4$.
9. $\overline{a}=4\overline{p}-4\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+3\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=1$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/6$,
10. $\overline{a}=\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=3$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/3$.
11. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=2$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/6$.
12. $\overline{a}=3\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$, $|\overline{p}|=4$, $|\overline{q}|=1$, $\angle\overline{p},\overline{p}=\pi/4$
13. $\overline{a}=\overline{p}-3\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=1/5$, $|\overline{q}|=1$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/2$.
14. $\overline{a}=3\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+5\overline{q}$, $|\overline{p}|=4$, $|\overline{q}|=1/2$, $\angle\overline{p}\overline{q}=5\pi/6$.
15. $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=3$, $\angle\overline{p}\overline{q}=3\pi/4$.
16. $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=3$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/3$.
17. $\overline{a}=2\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+3\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=2$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/2$.
18. $\overline{a}=4\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=7$, $|\overline{q}|=2$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/4$.
19. $\overline{a}=\overline{p}-4\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=2$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/6$.
20. $\overline{a}=\overline{p}+4\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=7$, $|\overline{q}|=2$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/3$.
21. $\overline{a}=3\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=10$, $|\overline{q}|=1$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/2$.
22. $\overline{a}=4\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=5$, $|\overline{q}|=4$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/4$
23. $\overline{a}=2\overline{p}+3\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$, $|\overline{p}|=6$, $|\overline{q}|=7$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/3$.
24. $\overline{a}=3\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=4$, $\angle\overline{p}\overline{q}=\pi/3$.

25. $a- = 2\bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, $\angle\bar{p}\bar{q} = \pi/4$.

26. $\bar{a} = 2\bar{p} - 3\bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1$, $\angle\bar{p}\bar{q} = \pi/6$.

27. $\bar{a} = 5\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 2$, $\angle\bar{p}\bar{q} = \pi/3$.

28. $\bar{a} = 7\bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}$, $|\bar{p}| = 1/2$, $|\bar{q}| = 2$, $\angle\bar{p}\bar{q} = \pi/2$.

29. $\bar{a} = 6\bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 3$, $|\bar{q}| = 4$, $\angle\bar{p}\bar{q} = \pi/4$.

30. $\bar{a} = 10\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1$, $\angle\bar{p}\bar{q} = \pi/6$.

IX Доказать, что вектора $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{x}$ в новом базисе.

1. $\bar{x} = \{-2, 0, 9\}$, $\bar{p} = \{0, -1, 2\}$, $\bar{q} = \{1, 0, -1\}$, $\bar{r} = \{-1, 2, 4\}$.

2. $\bar{x} = \{5, -12, 1\}$, $\bar{p} = \{1, -3, 0\}$, $\bar{q} = \{1, -1, 1\}$, $\bar{r} = \{0, -1, 2\}$.

3. $\bar{x} = \{0, 2, 4\}$, $\bar{p} = \{3, 1, -1\}$, $\bar{q} = \{0, -3, 1\}$, $\bar{r} = \{1, 1, 1\}$.

4. $\bar{x} = \{-1, 5, 5\}$, $\bar{p} = \{2, 1, 1\}$, $\bar{q} = \{-2, 0, -3\}$, $\bar{r} = \{-1, 2, 1\}$.

5. $\bar{x} = \{-1, -2, 3\}$, $\bar{p} = \{2, 0, 1\}$, $\bar{q} = \{1, 2, -1\}$, $\bar{r} = \{0, 4, -1\}$.

6. $\bar{x} = \{-5, 2, -1\}$, $\bar{p} = \{-1, 1, 0\}$, $\bar{q} = \{2, -1, 3\}$, $\bar{r} = \{1, 0, 1\}$.

7. $\bar{x} = \{1, -5, 7\}$, $\bar{p} = \{0, -1, 1\}$, $\bar{q} = \{2, 0, 1\}$, $\bar{r} = \{3, -1, 0\}$.

8. $\bar{x} = \{5, 1, 4\}$, $\bar{p} = \{2, 0, 2\}$, $\bar{q} = \{0, -1, 1\}$, $\bar{r} = \{3, -1, 4\}$.

9. $\bar{x} = \{1, 1, -1\}$, $\bar{p} = \{1, 1, 0\}$, $\bar{q} = \{-1, 0, 1\}$, $\bar{r} = \{-1, 0, 2\}$.

10. $\bar{x} = \{-3, 7, 4\}$, $\bar{p} = \{-2, 2, 1\}$, $\bar{q} = \{2, 0, 1\}$, $\bar{r} = \{1, 1, 1\}$.

11. $\bar{x} = \{-9, 5, 5\}$, $\bar{p} = \{4, 1, 1\}$, $\bar{q} = \{2, 0, -3\}$, $\bar{r} = \{-1, 2, 1\}$.

12. $\bar{x} = \{-5, -5, 5\}$, $\bar{p} = \{-2, 0, 1\}$, $\bar{q} = \{1, 3, -1\}$, $\bar{r} = \{0, 4, 1\}$.

13. $\bar{x} = \{3, -3, 4\}$, $\bar{p} = \{1, 0, 2\}$, $\bar{q} = \{0, 1, 0\}$, $\bar{r} = \{2, -1, 4\}$.

14. $\bar{x} = \{3, 3, -1\}$, $\bar{p} = \{3, 1, 0\}$, $\bar{q} = \{-1, 2, 1\}$, $\bar{r} = \{-1, 0, 2\}$.

15. $\bar{x} = \{-1, 7, -4\}$, $\bar{p} = \{-1, 2, 1\}$, $\bar{q} = \{2, 0, 3\}$, $\bar{r} = \{1, 1, -1\}$.

16. $\bar{x} = \{6, 5, -14\}$, $\bar{p} = \{1, 1, 4\}$, $\bar{q} = \{0, -3, 2\}$, $\bar{r} = \{2, 1, -1\}$.

17. $\bar{x} = \{6, -1, 7\}$, $\bar{p} = \{1, -2, 0\}$, $\bar{q} = \{-1, 1, 3\}$, $\bar{r} = \{1, 0, 4\}$.

18. $\bar{x} = \{5, 15, 0\}$, $\bar{p} = \{1, 0, 5\}$, $\bar{q} = \{-1, 3, 2\}$, $\bar{r} = \{0, -1, 1\}$.

19. $\bar{x} = \{2, -1, 11\}$, $\bar{p} = \{1, 1, 0\}$, $\bar{q} = \{0, 1, -2\}$, $\bar{r} = \{1, 0, 3\}$.

20. $\bar{x} = \{11, 5, -3\}$, $\bar{p} = \{1, 0, 2\}$, $\bar{q} = \{-1, 0, 1\}$, $\bar{r} = \{2, 5, -3\}$.

21. $\bar{x} = \{8, 0, 5\}$, $\bar{p} = \{2, 0, 1\}$, $\bar{q} = \{1, 1, 0\}$, $\bar{r} = \{4, 1, 2\}$.

22. $\bar{x} = \{3, 1, 8\}$, $\bar{p} = \{0, 1, 3\}$, $\bar{q} = \{1, 2, -1\}$, $\bar{r} = \{2, 0, -1\}$.

23. $\bar{x} = \{8, 1, 12\}$, $\bar{p} = \{1, 2, -1\}$, $\bar{q} = \{3, 0, 2\}$, $\bar{r} = \{-1, 1, 1\}$.

24. $\bar{x} = \{-9, -8, -3\}$, $\bar{p} = \{1, 4, 1\}$, $\bar{q} = \{-3, 2, 0\}$, $\bar{r} = \{1, -1, 2\}$.

25. $\bar{x} = \{-5, 9, -13\}$, $\bar{p} = \{0, 1, -2\}$, $\bar{q} = \{3, -1, 1\}$, $\bar{r} = \{4, 1, 0\}$.

26. $\bar{x} = \{-15, 5, 6\}$, $\bar{p} = \{0, 5, 1\}$, $\bar{q} = \{3, 2, -1\}$, $\bar{r} = \{-1, 1, 0\}$.

27. $\bar{x} = \{8, 9, 4\}$, $\bar{p} = \{1, 0, 1\}$, $\bar{q} = \{0, -2, 1\}$, $\bar{r} = \{1, 3, 0\}$.

28. $\bar{x} = \{3, 1, 3\}$, $\bar{p} = \{2, 1, 0\}$, $\bar{q} = \{1, 0, 1\}$, $\bar{r} = \{4, 2, 1\}$.

29. $\bar{x} = \{-1, 7, 0\}$, $\bar{p} = \{0, 3, 1\}$, $\bar{q} = \{1, -1, 2\}$, $\bar{r} = \{2, -1, 0\}$.

30. $\bar{x} = \{0, -8, 9\}$, $\bar{p} = \{0, -2, 1\}$, $\bar{q} = \{3, 1, -1\}$, $\bar{r} = \{4, 0, 1\}$.

Глава 2 Матрицы и определители

§ 1 Матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений a_{ij} (называемых ***элементами матрицы***), $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Матрица A с элементами a_{ij} обозначается также (a_{ij}).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n \times n$. ***Диагональной*** называется квадратная матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов, стоящих на главной диагонали. ***Единичной*** (обозначается E) называется диагональная матрица, у которой по главной диагонали стоят единицы. ***Нулевой*** называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Примеры матриц: а) квадратная; б) диагональная; в) единичная; г) нулевая: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & x & -1 \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Операции над матрицами

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\, i,\, j$.

Свойства операции сложения матриц. Для любых матриц A, B и C одного размера выполняются равенства:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность);
2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность);
3) $A + O = A$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица A, причем $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall\, i,\, j$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (ассоциативность);

2) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

3) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Произведением $A \cdot B$ ***матриц*** A и B (размеров $m \times n$ и $n \times r$ соответственно) называется матрица C размера $m \times r$, такая, что

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} .$$

Таким образом, каждый элемент c_{ij}, находящийся в i-ой строке и j-ом столбце матрицы C, равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. (Говоря популярным языком, чтобы найти элемент c_{ij}, нужно «приложить» i-ю строку матрицы A к j-му столбцу матрицы B, перемножить соответствующие элементы и полученные произведения сложить).

Произведение $A \cdot B$ существует, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства операции умножения матриц:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$ (ассоциативность);

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность);

4) $A \cdot B \neq B \cdot A$ -умножение матриц не коммутативно.

Транспонированной к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji}), \quad \forall\, i, j$ (т.е. все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы A).

Элемент строки матрицы назовем ***крайним***, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется ***ступенчатой***, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки. В матрице A и B отмечены крайние элементы каждой строки:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не ступенчатая ступенчатая

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1. перемена местами двух строк (столбцов);
2. умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3. прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется ***эквивалентной*** матрице A (обозначается $B \sim A$). В дальнейшем будем рассматривать элементарные преобразования только над строками.

Практическое занятие № 2

Задание 1 Выполнить действие:

1) $2A+3B$ с матрицами: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.

Решение: $2A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3}+\begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3}=\begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $A-B$ с матрицами $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{2\times 1}$.

$A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}-\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{2\times 1}$. Данное действие выполнить нельзя, т.к. матрицы разного размера.

Ответ. $\varnothing$.

Задание 2 Умножить две матрицы: $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Правило: Для того чтобы умножить две матрицы необходимо, чтобы количество столбцов первой матрицы совпадало с количеством строк во второй матрице.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}$, $B=(3 \quad 0)_{1\times 2}$

Решение: Матрица $A_{2\times \underline{2}}\cdot B_{\underline{1}\times 2}$ не существует, так как количество столбцов первой матрицы равно 2, а количество строк во второй матрице равно 1.

Матрица $B_{1\times \underline{2}}\cdot A_{\underline{2}\times 2}$ существует, так как количество столбцов первой матрицы равно 2, количество строк во второй матрице равно 2.

$$B_{1\times 2}\cdot A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix}_{1\times \underline{2}}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix}_{\underline{2}\times 2}=\begin{pmatrix}3\cdot 2+0\cdot 4 & 3\cdot 1+0\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6+0 & 3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\end{pmatrix}_{1\times 2}.$$

Ответ. Матрицы $A\cdot B$ не существует, $B\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{2\times 3}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}_{3\times 3}$

Решение: $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 3}=\left(\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\\ \hline 1 & 0 & -1\end{array}\right)_{2\times \underline{3}}\cdot\left(\begin{array}{c|cc}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{array}\right)_{\underline{3}\times 3}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 1 & 1\cdot 5+2\cdot(-2)+3\cdot 8\\ 1\cdot 3+0\cdot 6+(-1)\cdot 7 & 1\cdot 4+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+12+21 & 4+0+3 & 5-4+24\\ 3+0-7 & 4+0-1 & 5+0-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}_{2\times 3}.$$

Ответ. $A\cdot B=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}$.

Матрицы $B_{3\times 3}\cdot A_{2\times 3}$ не существует, т.к. $(3\neq 2)$.

Ответ. Матрицы $B\cdot A$ не существует.

3 $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}_{1\times 5}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}_{5\times 1}$.

Решение:

$$A_{1\times 5}\cdot B_{5\times 1}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}_{1\times \underline{5}}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}_{\underline{5}\times 1}=\begin{pmatrix}4\cdot 3+0\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+3\cdot 5+1\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12+0+2+15+2\end{pmatrix}=(31)_{1\times 1}.$$

$$B_{5\times1}\cdot A_{1\times5}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}_{5\times1}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}_{1\times5}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot4 & 3\cdot0 & 3\cdot(-2) & 3\cdot3 & 3\cdot1\\ 1\cdot4 & 1\cdot0 & 1\cdot(-2) & 1\cdot3 & 1\cdot1\\ -1\cdot4 & -1\cdot0 & -1\cdot(-2) & -1\cdot3 & -1\cdot1\\ 5\cdot4 & 5\cdot0 & 5\cdot(-2) & 5\cdot3 & 5\cdot1\\ 2\cdot4 & 2\cdot0 & 2\cdot(-2) & 2\cdot3 & 2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 0 & -6 & 9 & 3\\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5\\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2\end{pmatrix}_{5\times5}.$$

Ответ. $A\cdot B=(31)$.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}12 & 0 & -6 & 9 & 3\\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5\\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 3 Найти матрицу $C=A\cdot B-3B\cdot A+2A^2-5B^2$, если $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix}_{2\times2}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}_{2\times2}$.

Решение: 1) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-4 & 12-10\\15-8 & 20-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 0\end{pmatrix}$.

2) $B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+20 & -6-16\\6+25 & -4-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & -22\\31 & -24\end{pmatrix}$.

3) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-10 & -6+8\\15-20 & -10+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-5 & 6\end{pmatrix}$.

4) $B^2=\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+8 & 12+20\\6+10 & 8+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 32\\16 & 33\end{pmatrix}$.

5) $3B\cdot A=3\begin{pmatrix}29 & -22\\31 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}87 & -66\\93 & -72\end{pmatrix}$.

6) $2A^2=2\begin{pmatrix}-1 & 2\\-5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\-10 & 12\end{pmatrix}$.

7) $5B^2=5\begin{pmatrix}17 & 32\\16 & 33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}85 & 160\\80 & 165\end{pmatrix}$.

8) $C = A\cdot B - 3B\cdot A + 2A^2 - 5B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 87 & -66 \\ 93 & -72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} -$

$- \begin{pmatrix} 85 & 160 \\ 80 & 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -82 & 68 \\ 86 & 72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 85 & 160 \\ 80 & 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -84 & 72 \\ 76 & 84 \end{pmatrix} -$

$- \begin{pmatrix} 85 & 160 \\ 80 & 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -169 & -88 \\ -4 & -81 \end{pmatrix}.$

Ответ. $C = \begin{pmatrix} -169 & -88 \\ -4 & -81 \end{pmatrix}.$

Задание 4 Привести матрицу к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

1) Первую строку матрицы умножим на (-3) и прибавим ко второй строке матрицы и запишем во вторую строку матрицы, равносильную данной матрице:

$$\begin{array}{r} -3 \quad 0 \quad 3 \quad 3 \\ + \; 3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

2) Умножим первую строку матрицы на (5) и прибавим к третьей строке матрицы и запишем в третью строку матрицы, равносильную данной матрице:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 0 \quad -5 \quad -5 \\ + \; -5 \quad 3 \quad 2 \quad -1. \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad -6 \end{array}$$

3) Умножим вторую строку на (3), а третью на (2) и сложим их.

$$\begin{array}{r} 0 \quad -6 \quad 6 \quad 9 \\ + \; 0 \quad 6 \quad -6 \quad -12. \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \end{array}$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ - ступенчатая матрица.

Задание 5 Привести матрицу $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5 & 7\\ 2 & 3 & 3 & -2\\ 4 & 11 & -13 & 16\\ 7 & -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ к ступенчатому виду.

Решение: $\begin{pmatrix}3 & 4 & -5 & 7\\ 2 & 3 & 3 & -2\\ 4 & 11 & -13 & 16\\ 7 & -2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-2) & \times(-4) & \times(-7)\\ \times 3 & & \\ \times 3 & & \\ \times 3 & & \end{matrix} \sim$

$$\sim\begin{pmatrix}3 & 4 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 19 & -20\\ 0 & 17 & -19 & 20\\ 0 & -34 & 38 & -40\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-17) \quad \times(34)\\ \\ \\ \end{matrix} \sim\begin{pmatrix}3 & 4 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 19 & -20\\ 0 & 0 & -342 & 360\\ 0 & 0 & 684 & -720\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times 2\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}3 & 4 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 19 & -20\\ 0 & 0 & -342 & 360\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$+\begin{array}{rrrr}-6 & -8 & 10 & -14\\ 6 & 9 & 9 & -6\\ \hline 0 & 1 & 19 & -20\end{array} \qquad +\begin{array}{rrrr}-12 & -16 & 20 & -28\\ 12 & 33 & -39 & 48\\ \hline 0 & 17 & -19 & 20\end{array} \qquad +\begin{array}{rrrr}-21 & -28 & 35 & -49\\ 21 & -6 & 3 & 9\\ \hline 0 & -34 & 38 & -40\end{array}$$

$$+\begin{array}{rrr}-17 & -323 & 340\\ 17 & -19 & 20\\ \hline 0 & -342 & 360\end{array} \qquad +\begin{array}{rrr}34 & 646 & -680\\ -34 & 38 & -40\\ \hline 0 & 684 & -720\end{array} \qquad +\begin{array}{rr}-684 & 720\\ 684 & -720\\ \hline 0 & 0\end{array}$$

Ответ. $\begin{pmatrix}3 & 4 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 19 & -20\\ 0 & 0 & -342 & 360\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Задание 6 Найти матрицу $B=A^2-3A\cdot E+2A\cdot A^T$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}_{3\times 3}$.

Решение: 1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 8 & 5 & -34 \\ 2 & 8 & 21 \end{pmatrix}$.

2) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 6 & 29 & -17 \\ -5 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 8 & 5 & -34 \\ 2 & 8 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & 9 & -12 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 12 & -10 \\ 12 & 58 & -34 \\ -10 & -34 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -22 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 4 & 12 & -10 \\ 12 & 58 & -34 \\ -10 & -34 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & -13 \\ 14 & 54 & -56 \\ -8 & -29 & 58 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $B = \begin{pmatrix} 2 & 11 & -13 \\ 14 & 54 & -56 \\ -8 & -29 & 58 \end{pmatrix}$.

Задание 7 Найти произведения матриц, т.е. проверить равенство $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение: $A \cdot B = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$.

$B \cdot C = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ \hline -3 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$.

$A \cdot (B \cdot C) = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 6 & -2 \\ -7 & 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Задание 8 Проверить равенство $(AB)^T = B^T \cdot A^T$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: $(A \cdot B)^T = \left(\left(\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{array}\right) \right)^T = \begin{pmatrix} 19 & -8 \\ 27 & -12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & 27 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$.

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \hline -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 19 & 27 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание № 2

Задание 1 Выполнить действия над матрицами $4A - 5B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -7 & -9 & -40 \\ 18 & 11 & -23 \\ -12 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 2 Выполнить действия $3A - A \cdot E + 5A^2$: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 101 & 31 & -33 \\ 60 & 163 & 25 \\ -91 & 33 & 125 \end{pmatrix}$.

Задание 3 Вычислить матрицу *C*, если: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$C = A \cdot B + 2B \cdot A + A^2 - B^2 + A \cdot E - E \cdot B$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 45 & 9 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}$.

Задание 4 Проверить равенство $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ и $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задание 5 Умножить матрицы: *а*) $A \cdot B - ?$ *б*) $B \cdot A - ?$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ответ: *а)* $\varnothing$; *б)* $\begin{pmatrix} 32 & 41 \\ 15 & 19 \\ 49 & 63 \end{pmatrix}$.

Задание 6 Привести матрицу к ступенчатому виду:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -18 \\ 5 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 19 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§ 2 Определители. Свойства определителей

Любой квадратной матрице n-го порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можно поставить в соответствие число, которое называется ***определителем*** (***детерминантом***) матрицы A, и обозначается так:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ или } |A| \text{ или } \det A.$$

<u>Определитель – это число, характеризующее квадратную матрицу.</u>

Определитель 2-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} + \left(-a_{12}\cdot a_{21}\right). \qquad (1)$$

Определитель 3-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \left(-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}\right) +$$
$$+ \left(-a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}\right) + \left(-a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}\right). \qquad (2)$$

Методы вычисления определителей

1) Правило «треугольников» (правило Саррюса) вычисления определителей 3-го порядка: первое из трех слагаемых, входящих в сумму (2) со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье – произведения элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (2) со знаком «–», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали.

2) **Теорема Лапласа** *Определитель n-го порядка равен сумме произведений любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.*

Разложение определителя 3-го порядка по первой строке:

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

3) Разложение определителя n-го порядка по первой строке. Аналогично последней формуле, имеем:

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$
$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Определителем (***детерминантом***) 1-го порядка квадратной матрицы $A = \left(a_{11}\right)$ называется значение a_{11}: $\det A = a_{11}$.

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы A, оставшихся после вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ называется произведение $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$.

Например, в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ минором M_{21} является определитель, составленный из элементов матрицы, оставшихся после вычеркивания 2-й строки и 1-го столбца: $\begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{7} & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 8 = -24$; соответственно, алгебраическим дополнением A_{21} будет число $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot (-24) = 24$. В новых обозначениях, аналогично формуле (3), записывается формула «разложение определителя 3-го порядка по первой строке»:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} \cdot A_{1j} .$$

Аналогично формуле (4) записывается формула «разложение определителя n-го порядка по первой строке»:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1n-1} \cdot A_{1n-1} + a_{1n} \cdot A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j} .$$

4) *Разложение определителя n-го порядка по i-й строке*:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in-1} \cdot A_{1n-1} + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} ,$$

$$\forall i = \overline{1, n} . \qquad (5)$$

5) *Разложение определителя n -го порядка по j-му столбцу*:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{n-1j} \cdot A_{n-1j} + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} ,$$

$$\forall j = \overline{1, n} . \qquad (6)$$

6) *Метод приведения к треугольному виду* заключается в приведении определителя (с помощью элементарных преобразований) к такому виду, когда все элементы, расположенные по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

7) Метод рекуррентных соотношений состоит в том, что определитель n-го порядка выражают через определители того же вида, но более низкого порядка, используя элементарные преобразования и разложение по строке или столбцу.

Свойства определителей

1. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то определитель равен 0.
2. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен 0.
3. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножится на это число.
4. Если две строки (два столбца) определителя поменять местами, то определитель меняет знак.
5. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить какую-либо другу строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.
6. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей.
7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов любой другой строки (столбца) равна нулю.

Практическое занятие № 3

Задание 1 Вычислить определитель.

а) $\det A = a_{11}$ для $A = \left(a_{11}\right)$.

$A_1 = (4)_{1\times 1}$. $\det A_1 = |4| = 4$.

б) $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}\right)$.

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ или $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_2$.

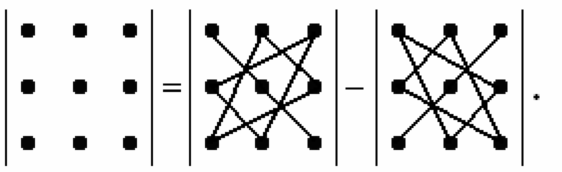
$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 5\cdot 3 = 4 - 15 = -11$.

в) I *способ*. Вычислить определитель третьего порядка по правилу «треугольников» (правило Саррюса).

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}\right) -$$

$$-\left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\right).$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \left(1\cdot 0\cdot 6 + 4\cdot(-5)\cdot 3 + 2\cdot(-1)\cdot 2\right) - \left(3\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 6 + (-1)\cdot(-5)\cdot 1\right.$$

$$= \left(0 - 60 - 4\right) - \left(0 + 48 + 5\right) = -64 - 53 = -117\,.$$

II *способ*. Вычислить определитель третьего порядка через алгебраические дополнения по элементам (например) первой строки.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}\,.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 2\cdot A_{12} + 3\cdot A_{13} = 1\cdot(-1)^{1+1}M_{11} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot M_{12} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+3}M_{13} = 1\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (0-5) - 2\cdot(24-(-2)) + 3\cdot(-20-0) = -5 - 2\cdot 26 + 3\cdot(-20) =$$

$$= -5 - 52 - 60 = -117\,.$$

III *способ*. Вычислить определитель третьего порядка через алгебраические дополнения по элементам (например) второго столбца.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32}\,.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + (-5) \cdot A_{32} = 2 \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22} +$$

$$+ (-5) \cdot (-1)^{3+2} M_{32} = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (-5) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (24 - (-2)) +$$

$$+ 0 \cdot (6 - 6) + 5 \cdot (-1 - 12) = -2 \cdot 26 + 5 \cdot (-13) = -52 - 65 = -117 .$$

г) Вычислить определитель четвертого порядка через алгебраические дополнения.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель четвертого порядка для матрицы A_4 по элементам первого столбца.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = 2 \cdot A_{11} = 2 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} =$$ (вычислим определитель третьего порядка по элементам первого столбца) $= 2 \cdot \big((-4) \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31}\big) =$

$$= 2 \cdot (-4) \cdot M_{11} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot (3 \cdot 10 - 0 \cdot 4) = 2 \cdot (-4) \cdot 3 \cdot 10 = -240 .$$

Так как определитель имеет вид ступенчатой матрицы четвертого порядка, то можно сделать вывод, что определитель ступенчатой матрицы равен произведению элементов, стоящих по главной диагонали.

д) Вычислить определитель четвертого порядка для матрицы A_4:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&0&-1\\-1&3&5&-2\\2&-1&4&6\\-4&2&5&1\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(1)\;\times(-2)\;\times(4)\\ \\ \\ \\\end{matrix}=$$ (приведем определитель матрицы четвертого порядка к ступенчатому виду) $=\begin{vmatrix}1&2&0&-1\\0&5&5&-3\\0&-5&4&8\\0&10&5&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(1)\times(-2)\\ \\ \\\end{matrix}=$

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&-1\\0&5&5&-3\\0&0&9&5\\0&0&-5&3\end{vmatrix}=9\cdot\begin{vmatrix}1&2&0&-1\\0&5&5&-3\\0&0&1&\frac{5}{9}\\0&0&-5&3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(5)\\ \\\end{matrix}=9\cdot\begin{vmatrix}1&2&0&-1\\0&5&5&-3\\0&0&1&\frac{5}{9}\\0&0&0&\frac{52}{9}\end{vmatrix}=$$

$$=9\cdot\left(1\cdot5\cdot1\cdot\frac{52}{9}\right)=260.$$

Домашнее задание № 3

Задание 1 Вычислить определитель второго порядка:

а) $\begin{vmatrix}1&5\\6&2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}-2&-4\\3&5\end{vmatrix}$.

Ответ. а) -28. б) 2.

Задание 2 Вычислить определитель третьего порядка (по правилу «треугольников», по строке и по столбцу):

а) $\begin{vmatrix}3&2&1\\2&5&3\\3&4&2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}2&1&-3\\0&1&-1\\3&-2&1\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&0&1\\4&5&6\end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix}1&2&0\\3&4&0\\5&6&7\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}2&3&5\\0&-1&0\\6&7&8\end{vmatrix}$.

Ответ: а) -3; б) 4; в) 3; г) -14; д) 14.

Задание 3 Вычислить определитель четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 63; б) -40; в) 17.

Задание 4 Вычислить определитель пятого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

Ответ: 52.

§ 3 Обратная матрица. Ранг матрицы

Матрица, определитель которой равен 0, называется ***вырожденной***; матрица, определитель которой не равен 0, называется ***невырожденной***.

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Замечание. Если матрица A^{-1} существует, то она единственная.

Присоединенной матрицей к квадратной матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

Теорема *Для матрицы A обратная матрица существует тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная*:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}}. \qquad (7)$$

Метод присоединенной матрицы вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице A состоит в применении формулы (7).

Метод элементарных преобразований (метод Гаусса) вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице A состоит в следующем. Приписывая справа к матрице A размера $n \times n$ единичную матрицу размера $n \times n$, получим прямоугольную матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований над строками матрицы Γ сначала приведем ее к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, где A_1 - треугольная, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом

$$AX = B \quad \Big| \cdot A^{-1} \text{ (слева)}, \tag{8}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \tag{9}$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B. \tag{10}$$

В этих уравнениях A, B, X - матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения возможны, и с обеих от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Если в уравнениях (8), (9) матрица A невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$.

Минором k-го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

В матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можно указать, например, такие миноры:

- 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right), \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \right),$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right);$$

- 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix};$$

- 1-го порядка

$|2|$ (минор $|a_{12}|$), $|3|$ (минор $|a_{13}|$), $|-7|$ (минор $|a_{34}|$).

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Обозначения: $r(A)$, $rang(A)$.

Базисным минором называется любой из миноров матрицы A, порядок которого равен $r(A)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ r(A) = 1.$$

Любой из миноров 2-го порядка матрицы A равен нулю, и существует хотя бы один минор 1-го порядка, не равный нулю, например $|3| = 3$. Базисным минором матрицы A является каждый из ненулевых миноров 1-го порядка: $|3|(=3)$, $|-2|(=-2)$, $|2|(=2)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \; r(A) = 2,$$

так как существует минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, не равный нулю, а миноров 3-го порядка у матрицы A нет. Единственный базисный минор матрицы A - минор $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Теорема 1 *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.*

Теорема 2 *Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.*

Метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы A.

Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы A состоит в следующем. Необходимо:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (т.е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (*окаймляющие* M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geq 2$. И т.д.

…

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти *всего один* ненулевой минор k-го порядка, причем искать его только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

Практическое занятие № 4

Задание 1 Найти обратную матрицу для матрицы $\grave{A}$: $A=\begin{pmatrix}1&5&0\\4&3&2\\-1&6&7\end{pmatrix}$.

План нахождения обратной матрицы:

1 Найдем определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&5&0\\4&3&2\\-1&6&7\end{vmatrix}=(1\cdot3\cdot7+4\cdot6\cdot0+5\cdot2\cdot(-1))-\big(0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot6\cdot1+4\cdot5\cdot7\big)=$$

$$(21+0-10)-(0+12+140)=11-12-140=-141\neq0.$$

Так как определитель не равен 0, то матрица называется *невырожденной*, а значит для данной матрицы обратная матрица существует.

2 Найдем алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A.

$$\begin{pmatrix}1&5&0\\4&3&2\\-1&6&7\end{pmatrix}.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=(-1)^2\cdot M_{11}=1\cdot\begin{vmatrix}3&2\\6&7\end{vmatrix}=(21-12)=9.$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)^3\cdot M_{12}=-1\cdot\begin{vmatrix}4&2\\-1&7\end{vmatrix}=-1\cdot(28-(-2))=-(28+2)=-30.$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=(-1)^4\cdot M_{13}=1\cdot\begin{vmatrix}4&3\\-1&6\end{vmatrix}=(24-(-1)\cdot3)=(24+3)=27.$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^3\cdot M_{21}=-1\cdot\begin{vmatrix}5&0\\6&7\end{vmatrix}=-1\cdot(35-0)=-1\cdot35=-35.$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{2+2}=(-1)^4\cdot M_{22}=1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\-1&7\end{vmatrix}=(7-(-1)\cdot0)=7+0=7.$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=(-1)^5\cdot M_{23}=-1\cdot\begin{vmatrix}1&5\\-1&6\end{vmatrix}=-1\cdot(6-(-5))=-1\cdot(6+5)=-11.$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=(-1)^4\cdot M_{31}=1\cdot\begin{vmatrix}5&0\\3&2\end{vmatrix}=1\cdot(10-0)=10.$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=(-1)^5\cdot M_{32}=-1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\4&2\end{vmatrix}=-1\cdot(2-0)=-2.$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=(-1)^6\cdot M_{33}=1\cdot\begin{vmatrix}1&5\\4&3\end{vmatrix}=(3-20)=-17.$$

Запишем матрицу из алгебраических дополнений: $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 9 & -30 & 27 \\ -35 & 7 & -11 \\ 10 & -2 & -17 \end{pmatrix}$.

3 Транспонируем данную матрицу, то есть меняем строки и столбцы местами

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 9 & -35 & 10 \\ -30 & 7 & -2 \\ 27 & -11 & -17 \end{pmatrix}.$$

4 Обратная матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^{*}$.

$$A^{-1}=\frac{1}{-141}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -35 & 10 \\ -30 & 7 & -2 \\ 27 & -11 & -17 \end{pmatrix}.$$

5 Проверка $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$ (по определению обратной матрицы).

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{-141}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -35 & 10 \\ -30 & 7 & -2 \\ 27 & -11 & -17 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}=-\frac{1}{141}\cdot\begin{pmatrix} -141 & 0 & 0 \\ 0 & -141 & 0 \\ 0 & 0 & -141 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

$$9-140-10=-141 \qquad 45-105+60=0 \qquad 0-70+70=0$$

$$-30+28+2=0 \qquad -150+21-12=-141 \qquad 0+14-14=0$$

$$27-44+17=0 \qquad 135-33-102=0 \qquad 0-22-119=-141$$

Ответ: $A^{-1}=\dfrac{1}{-141}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -35 & 10 \\ -30 & 7 & -2 \\ 27 & -11 & -17 \end{pmatrix}$.

Задание 2 Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Записывая матрицу $\Gamma=(A|E)$ размера (3×6), с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее сначала к ступенчатому виду $\Gamma_1=(A_1|B)$, а затем к виду $\Gamma_2=\left(E\middle|A^{-1}\right)$:

$$\varGamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-1)\ \times(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \varGamma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \times 1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ III:2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \times(-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = \varGamma_2 .$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3 Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Решение. Сначала приведем матрицу к ступенчатому виду.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-3)\ \times(-1) \\ + \quad\quad + \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times\left(-\frac{3}{7}\right) \\ + \end{matrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{60}{7} \end{pmatrix}, \qquad r(A) = 3 .$$

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\quad r(A)=3$.

в)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times(-2)\times(-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-2)\times(1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(4)\times(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \times(3)\times(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \; r(A)=4.$$

Задание 4 Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad r(A)\geq 1$.

$M_1=\left|1\right|=1\neq 0 \Rightarrow r(A)=1$.

$M_2=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0 \;\Rightarrow\; r(A)=2$.

$$M_3^1=\begin{vmatrix}1&3&3\\0&0&1\\2&6&1\end{vmatrix}=-1\cdot(6-6)=0. \qquad M_3^2=\begin{vmatrix}3&3&4\\0&1&2\\6&1&-2\end{vmatrix}=0.$$

$$M_3^3=\begin{vmatrix}1&3&4\\0&0&2\\2&6&2\end{vmatrix}=12-12=0\,.\, M_3^4=\begin{vmatrix}1&3&4\\0&1&2\\2&1&-2\end{vmatrix}=-2+12-8-2=10-10=0.$$

Так как все определители 3-го порядка равны 0, то $r(A)\neq 3\Rightarrow$ $r(A)<3,\quad r(A)=2$. $M_2-\begin{vmatrix}3&3\\0&1\end{vmatrix}$ - базисный минор.

Задание 5 Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

Решение. $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

$AX=B$. Используя формулы (8), (9), (10) решим уравнение

$AX=B \quad /\cdot A^{-1}$ (слева)

$A^{-1}AX=A^{-1}B$,

$E\cdot X=A^{-1}\cdot B$,

$\boxed{X=A^{-1}B}$.

Для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix}$ найдем обратную матрицу.

I способ.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\5&4&0&1\end{array}\right):2\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\5&4&0&1\end{array}\right)\times(-5)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}&1\end{array}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\end{array}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

II способ. $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix}$.

1) $\det A=3$.

2) $M_{11}=4$, $M_{12}=-5$, $M_{21}=-1$, $M_{22}=2$.

$A^*=\begin{pmatrix}4&-5\\-1&2\end{pmatrix}$.

3) $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Обратную матрицу подставим в уравнение $X = A^{-1}B$. Умножим две матрицы в правой части.

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-7\\ 11\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\ \frac{11}{3}\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\ \frac{11}{3}\end{pmatrix}$.

Домашнее задание № 4

Задание 1 Найти ранг матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$.

Ответ. а) $r(A)=2$ б) $r(A)=3$

Задание 2 Найти обратную матрицу для матрицы A (двумя способами).

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}$.

Задание 3 Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему Лапласа.
2. Сформулируйте определение обратной матрицы.
3. Какая матрица называется квадратной?
4. Дайте определение определителя.
5. Какая матрица называется невырожденной.
6. Что называется рангом матрицы?
7. Сформулируйте определение матрицы.
8. В каком случае можно умножить две матрицы?
9. Напишите формулу вычисления определителя третьего порядка в общем виде.
10. Какая матрица называется вырожденной?
11. Что называется минором M_{ij}?
12. Сформулируйте определение алгебраического дополнения.
13. Когда можно сложить две матрицы?
14. Какая матрица называется диагональной?
15. Какая матрица называется транспонированной к A?
16. Какая матрица называется единичной?
17. Сформулируйте условие существования обратной матрицы.
18. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.
19. Вычислить $A \cdot B$ и $B \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$.
20. Вычислить алгебраическое дополнение A_{23} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
21. При каких условиях равны две матрицы?

22. Найдите обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

23. Найдите M_{21} для матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

24. Сформулируйте свойства определителей.

25. Какие элементарные преобразования матриц вы знаете?

26. Как складываются две матрицы?

27. Когда можно умножить матрицу на число?

28. Вычислите $A+2B$: $A=(1\ 3)$, $B=(4\ 5)$.

29. Когда можно вычесть две матрицы?

30. Найдите ранг матрицы A: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

Глава 3. Системы линейных уравнений

§ 1 Виды систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Формулы Крамера. Метод Гаусса

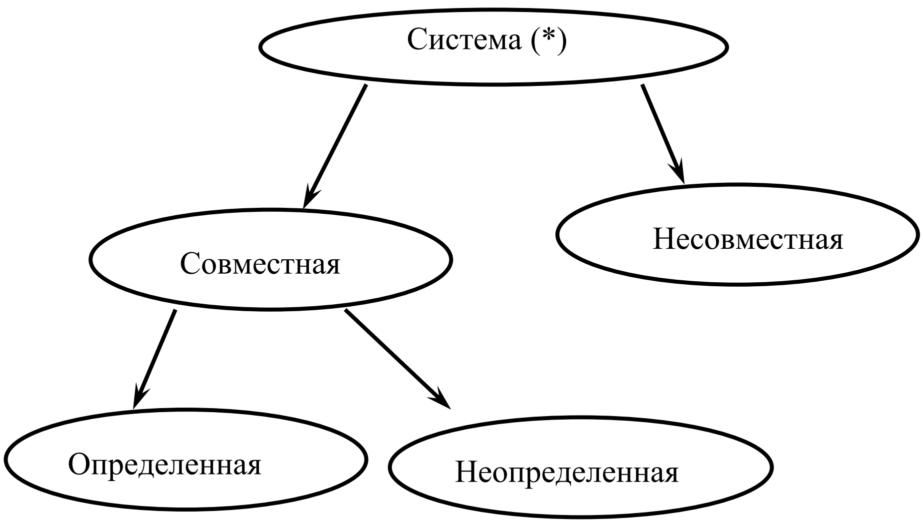
Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

где числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$ называются ***коэффициентами системы***, а числа $b_1, ..., b_m$ - ***свободными членами***.

Решением системы (*) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$, который при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, …, c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращает в тождество.

Если система (*) имеет хотя бы одно решение, то она называется ***совместной***; система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***. Система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.



Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются ***эквивалентными (равносильными)***, если множества всех решений этих систем совпадают.

Если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, то система называется ***однородной***, в противном случае она называется ***неоднородной***.

Систему (*) можно записать в матричной форме:

$AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ - ***матрица системы***, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - ***столбец*** (или столбец-вектор) ***неизвестных***, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - ***столбец свободных членов***.

Матрица $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется ***расширенной матрицей системы***.

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (**)$$

записана в матричной форме:

$AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов.

Если D - определитель матрицы A - не равен нулю, то система совместна и определенна, ее решение задается формулой:

$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$.

Другую форму записи этого утверждения дают *формулы Крамера*:

$$\boxed{x_k = \frac{D_k}{D},\ k = 1, 2, ..., n}.$$

где D_k - определитель, получающийся из D заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

Практическое занятие № 5

Задание 1 Решить систему линейных уравнений тремя способами:
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = -5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = \ 4 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \ A \cdot X = B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

а) Решим систему уравнений по формулам Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (9 + 16 + 1) - (-6 - 4 + 6) = 26 + 4 = 30.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (99 - 40 - 4) - (24 - 44 - 15) = 55 + 35 = 90.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-15 + 16 + 11) - (10 - 4 + 66) = 12 - 72 = -60.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (12 + 88 + 5) - (-33 - 20 + 8) = 105 + 45 = 150.$$

$$x_1 = \frac{90}{30} = 3; \qquad x_2 = \frac{-60}{30} = -2; \qquad x_3 = \frac{150}{30} = 5.$$

Ответ: $(3; -2; 5)$.

б) Решим систему уравнений с помощью обратной матрицы.

$X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу для матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1 $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (9 + 16 + 1) - (-6 - 4 + 6) = 26 + 4 = 30$.

2 $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-4) = 13$.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6 - 1) = -5.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = 11.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 - 8) = 5.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-2) = 5.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 - (-1)) = -5.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 - 4) = 5.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 11 \\ 5 & 5 & -5 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Протранспонируем данную матрицу $\widetilde{A}$: $A^* = \begin{pmatrix} 13 & 5 & -7 \\ -5 & 5 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

4 $A^{-1}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}13 & 5 & -7\\ -5 & 5 & 5\\ 11 & -5 & 1\end{pmatrix}$.

Полученную матрицу подставим в равенство $X=A^{-1}\cdot B$.

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}13 & 5 & -7\\ -5 & 5 & 5\\ 11 & -5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\ -5\\ 4\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}13\cdot 11+5\cdot(-5)+(-7)\cdot 4\\ -5\cdot 11+5\cdot(-5)+5\cdot 4\\ 11\cdot 11+(-5)\cdot(-5)+1\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}143-25-28\\ -55-25+20\\ 121+25+4\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}90\\ -60\\ 150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{90}{30}\\ -\frac{60}{30}\\ \frac{150}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}x_1=3;\\ x_2=-2;\\ x_3=5.\end{array}$$

Ответ: $(3;-2;5)$.

в) Решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 11\\ 2 & 3 & -1 & -5\\ -1 & 4 & 3 & 4\end{array}\right)\times(-2)\times(1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 11\\ 0 & 1 & -5 & -27\\ 0 & 5 & 5 & 15\end{array}\right)\times(-5)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 11\\ 0 & 1 & -5 & -27\\ 0 & 0 & 30 & 150\end{array}\right)\Rightarrow$$

от матрицы перейдем к системе уравнений

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=11,\\ x_2-5x_3=-27,\\ 30x_3=150,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=11,\\ x_2-5x_3=-27,\\ x_3=5,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2+2\cdot 5=11,\\ x_2-5\cdot 5=-27;\\ x_3=5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+10=11,\\ x_2-25=-27,\\ x_3=5,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_2=-2,\\ x_3=5,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1-2=1,\\ x_2=-2,\\ x_3=5,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=3,\\ x_2=-2,\\ x_3=5.\end{cases}$$

Ответ: $(3;-2;5)$.

Домашнее задание № 5

Задание 1 Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=30,\\ -x_1+2x_2-3x_3+4x_4=10,\\ x_2-x_3+x_4=3,\\ x_1+x_2+x_3+x_4=10.\end{cases}$

Ответ. $(1, 2, 3, 4)$.

Задание 2 Решить системы линейных уравнений тремя способами:
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

Ответ: а) $(2; -6; 8)$; б) $(1; 0; -1)$.

§ 2 Исследование систем линейных уравнений по теореме Кронекера - Капелли

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

где числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$ называются ***коэффициентами системы***, а числа $b_1, ..., b_m$ - ***свободными членами***.

Систему (*) можно записать в матричной форме:

$AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ - ***матрица системы***, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - ***столбец*** (или столбец-вектор) ***неизвестных***, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - ***столбец свободных членов***.

Матрица $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется ***расширенной матрицей системы***.

Теорема (***Кронекера-Капелли***) *Система линейных уравнений (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:*

$$r(A) = r\left(A|B\right).$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы – выяснить, определенна она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если $r(A) < r\left(A|B\right)$, то система несовместна.

2) Если $r(A) = r\left(A|B\right) = n$ (где n - число неизвестных), то система совместна и определенна.

3) Если $r(A) = r\left(A|B\right) < n$, то система совместна и неопределенна.

Практическое занятие № 6

Задание 1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \lambda x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + \ \ x_3 = 1, \\ \lambda x_1 + \ x_2 + \ \ x_3 = 1. \end{cases}$

Решение. Будем решать данную систему методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу и приведем к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \times(-1)\times(-\lambda) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda+1 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right) \times 1 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 1-\lambda \end{array}\right).$$

Решим квадратное уравнение

$-\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$,

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$,

$D = 1 - 4 \cdot (-2) = 9$.

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -2 \end{array} \right.$,

т.е. $-(\lambda-1)(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = -2$.

Подставим вместо λ найденные значения в последнюю матрицу и запишем систему уравнений.

1) $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(1 \quad 1 \quad 1 \mid 1 \mid\right) \Rightarrow$$ ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен 1. Следовательно, будет один главный неизвестный x_1 и 2 параметра: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$.

Система при $\lambda = 1$ имеет бесчисленное множество решений:

$(1 - x_2 - x_3;\, x_2;\, x_3)$.

2) $\lambda = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$ ранг основной матрицы равен 2, ранг расширенной матрицы равен 3, следовательно, система не имеет решений.

3) $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$. Система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1, \\ (\lambda - 1)x_2 + (1 - \lambda)x_3 = 0, \\ -(\lambda + 2)(\lambda - 1)x_3 = -(\lambda - 1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\lambda + 2}, \\ x_2 = \dfrac{1}{\lambda + 2}, \\ x_3 = \dfrac{1}{\lambda + 2}. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = \dfrac{1}{\lambda + 2}, \quad x_2 = \dfrac{1}{\lambda + 2}, \quad x_3 = \dfrac{1}{\lambda + 2}$ при $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$;

$x_1 = 1 - c_1 - c_2$; $x_2 = c_1$; $x_3 = c_2$, $c_1, c_2 \in R$, при $\lambda = 1$;

система не имеет решения при $\lambda = -2$.

Задание 2 Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x + 5y + 3z = -2, \\ 2x - 3y + z = 1, \\ 3x - y - z = 4. \end{cases}$

Решение: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ - основная матрица.

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$ - расширенная матрица.

Будем решать данную систему по *теореме Кронекера-Капелли*: Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, т.е. $r(A) = r(A')$.

Так как основная матрица входит в расширенную матрицу, то будем находить ранг расширенной матрицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \times(-2)\ \times(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & -13 & -5 & 5 \\ 0 & -16 & -10 & 10 \end{array}\right) \times\left(-\frac{16}{13}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & -13 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -\dfrac{50}{13} & \dfrac{50}{13} \end{array}\right).$$

Не обращая внимания на последний столбец данной матрицы составим минор 3-го порядка из элементов основной матрицы.

$$M_3(A') = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & -\dfrac{50}{13} \end{vmatrix} = 1\cdot(-13)\cdot\left(-\frac{50}{13}\right) = 50 \neq 0 \Rightarrow$$ ранг основной матрицы равен 3 ($r(A)=3$).

Составим минор 3-го порядка для расширенной матрицы. В минор будет обязательно входить последний столбец.

$$M_3(A') = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & \dfrac{50}{13} \end{vmatrix} = 1\cdot(-13)\cdot\left(\frac{50}{13}\right) = -50 \neq 0 \Rightarrow$$ ранг расширенной матрицы равен 3, т.е. $r(A')=3$.

Так как $r(A)=r(A')$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна, т.е. имеет решения. Так как $M_3(A') = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & -\dfrac{50}{13} \end{vmatrix}$ - базисный минор, в который входят все 3 столбца из основной матрицы $\Rightarrow$ x, y, z - основные переменные. Теперь составим систему, из которой будем находить неизвестные x, y, z.

В данной системе количество неизвестных и ранг совпадают, а, значит, параметров в данной системе нет.

$$\begin{cases} x + 5y + 3z = -2, \\ -13y - 5z = 5, \\ -\dfrac{50}{13}z = \dfrac{50}{13}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y + 3z = -2, \\ -13y - 5z = 5, \\ z = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y + 3\cdot(-1) = -2, \\ -13y - 5\cdot(-1) = 5, \\ z = -1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x+\ \ 5y-3=-2, \\ \ -13y+5=\ \ 5, \\ \qquad\qquad z=-1, \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x+\ \ 5y=1, \\ \ -13y=\ 0, \\ \qquad\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x+5y=1, \\ \qquad y=0, \\ \qquad z=1, \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x+5y=\ 1, \\ \qquad y=\ 0, \\ \qquad z=-1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+5\cdot 0=\ 1, \\ \qquad\ y=\ 0, \\ \qquad\ z=-1, \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} x=\ 1, \\ y=\ 0, \\ z=-1. \end{cases}$$

Ответ: $(1;\,0;\,-1)$.

В данной системе количество неизвестных совпадает с количеством уравнений и $r(A)=r(A')$, поэтому система имеет единственное решение, т.е. данная система линейных уравнений определенная.

Задание 3 Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x\ -y+3z=\ 9, \\ 3x-5y-\ z=-4, \\ 4x-7y+z=\ \ 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+\ 2x+3z=\ 9, \\ -5y+\ 3x+\ \ z=-4, \\ -7y+4x+\ \ z=\ \ 5. \end{cases}$$

Решение: $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ - основная матрица.

$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 9 \\ -5 & 3 & 1 & -4 \\ -7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right)$ - расширенная матрица.

$$\begin{array}{ccc} y & x & z \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 9 \\ -5 & 3 & 1 & -4 \\ -7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right)\times(-5)\times(-7) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & -14 & -49 \\ 0 & -10 & -20 & -58 \end{array}\right)\times\left(-\frac{10}{7}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & -14 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right).$$

$$+\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -15 & -45 \\ -5 & 3 & 1 & -4 \\ \hline 0 & -7 & -14 & -49 \end{array} \qquad\qquad +\begin{array}{ccc|c} 7 & -14 & -21 & -63 \\ -7 & 4 & 1 & 5 \\ \hline 0 & -10 & -20 & -58 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{cccc|c}
0 & 10 & 20 & & 70 \\
0 & -10 & -20 & & -58.
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & & 12
\end{array}
\end{array}
$$

Составим минор третьего порядка для расширенной матрицы (последний столбец записывается обязательно).

$M_3(A') = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -49 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-7) \cdot 12 = 84 \neq 0 \quad \Rightarrow$ ранг расширенной матрицы равен 3, т.е. $r(A') = 3$.

Составим минор 2-го порядка для основной матрицы (т.к. в основной матрице после приведения к ступенчатому виду последнюю строку можно вычеркнуть).

$M_2(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-7) = 7 \neq 0 \Rightarrow$ ранг основной матрицы равен 2, т.е. $r(A) = 2$.

Так как $r(A) \neq r(A')$ $(2 \neq 3)$ $\Rightarrow$ система не совместна, т.е. не имеет решения.

Задание 4 Найти общее и частное решение системы линейных однородных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$.

Решение: $A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 10 & 0 \end{array}\right)$ - расширенная матрица.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ - основная матрица.

Будем решать данную систему линейных однородных уравнений по теореме Кронекера-Капелли.

Так как данная система линейных уравнений является однородной, то $r(A') = r(A)$, т.е. однородная система линейных уравнений совместна.

Найдем ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1)\times(-2)\times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1)\ \times(1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \times\left(-\frac{5}{4}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$r(A) = r(A') = 3$, т.к. количество неизвестных строк равно 3.

Так как $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ - базисный минор $\Rightarrow$ x_1, x_2, x_3 - основные неизвестные. Т.к. 4 – количество неизвестных, 3 – ранг матрицы, то 4 – 3 =1, то 1 параметр, обозначаем через $x_4 = a$.

Теперь от ступенчатой матрицы перейдем к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ \quad 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ \qquad\quad 4x_3 \qquad\ = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - \ x_2 - 2x_3 + 3a = 0, \\ \quad 3x_2 + 2x_3 - 7a = 0, \\ \qquad\quad x_3 \qquad = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 - 2\cdot 0 = -3a, \\ \quad 3x_2 + 2\cdot 0 = \ 7a, \\ \qquad\qquad x_3 = \ 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - \ x_2 = -3a, \\ \quad 3x_2 = \ 7a, \\ \quad\ x_3 = \ 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = -3a, \\ \quad x_2 = \dfrac{7}{3}a, \\ \quad x_3 = \ 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - \dfrac{7}{3}a = -3a, \\ \quad x_2 = \dfrac{7}{3}a, \\ \quad x_3 = \ 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{3}a - 3a, \\ x_2 = \dfrac{7}{3}a, \\ x_3 = \ 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3}a, \\ x_2 = \ \dfrac{7}{3}a, \\ x_3 = \ 0. \end{cases}$$

Мы получили общее решение системы линейных уравнений $\left(-\frac{2}{3}a; \frac{7}{3}a; 0; a\right)$.

Частное решение: пусть $a = 3$ $(-2; 4; 0; 3)$.

Проверка: $\begin{cases} -2 - 7 - 2\cdot 0 + 3\cdot 3 = 0, \\ -2 + 2\cdot 7 - 4\cdot 3 = 0, \\ 2\cdot(-2) + 7 + 2\cdot 0 - 3 = 0, \\ -2 - 4\cdot 7 + 0 + 10\cdot 3 = 0, \end{cases} \begin{cases} 0 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}a; \frac{7}{3}a; 0; a\right)$.

Задание 5 Найти общее и частное решение системы линейных неоднородных уравнений: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

Решение: $A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$ **-** расширенная матрица.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ - основная матрица.

Будем решать систему линейных неоднородных уравнений по теореме Кронекера-Капелли. Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \times(-2) \times(-3) \times(-4) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -9 & -5 \end{array}\right) \times(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

$$+\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \end{array} \qquad +\begin{array}{cccc|c} -3 & 6 & 3 & -6 & -6 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 9 & 2 & -9 & -5 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{rrrr|r}
-4 & 8 & 4 & -8 & -8 \\
4 & 1 & -2 & -1 & 3
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{rrrr|r}
0 & 9 & 2 & -9 & -5
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 0
\end{array}\right).
$$

Вычеркнем последнюю нулевую строку и вычислим миноры 3-го порядка (т.к. количество ненулевых строк 3) для расширенной и основной матриц.

$$
M_3(A')=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}=-20\neq 0 \Rightarrow r(A')=3.
$$

$M_3(A)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-8\neq 0 \Rightarrow r(A)=3$, т.к. $r(A)=r(A')$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

$M_3(A)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ - базисный минор. Так как в матрицу вошли первая, третья и четвертая столбцы, то x_1, x_3, x_4 - основные неизвестные. Всего неизвестных 4 $(n-r=p)$ 4 – 3 = 1. Один параметр, x_3 - параметр. Для того, чтобы параметры отличались от неизвестных, обозначим параметр x_2 через α, т.е. $x_2=\alpha$. Теперь от ступенчатой матрицы перейдем к системе линейных уравнений.

$$
\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+2x_4=2, \\ 9x_2+2x_3-5x_4=-5, \\ -4x_4=0, \end{cases}
\begin{cases} x_1-2\alpha-x_3+2x_4=2, \\ 9\alpha+2x_3-5x_4=-5, \\ x_4=0, \end{cases}
\begin{cases} x_1-x_3+2x_4=2+2\alpha, \\ 2x_3-5x_4=-5-9\alpha, \\ x_4=0, \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} x_1-x_3=2+2\alpha, \\ 2x_3=-5-9\alpha, \\ x_4=0, \end{cases}
\begin{cases} x_1-x_3=2+2\alpha, \\ x_3=-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}\alpha, \\ x_4=0, \end{cases}
\begin{cases} x_1-\left(-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}\alpha\right)=2+2\alpha, \\ x_3=-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}\alpha, \\ x_4=0, \end{cases}
$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha, \\ x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\alpha, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Общее решение системы $\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha;\ \alpha;\ -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\alpha;\ 0\right)$. Найдем частное решение системы из общего решения, подставив вместо параметра α любое действительное число, пусть $\alpha = 1$: $\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2};\ 1;\ -\frac{5}{2} - \frac{9}{2};\ 0\right)$, $(-3;\ 1;\ -7;\ 0)$.

Проверка: Подставим частное решение в систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -3 - 2\cdot 1 - 1\cdot(-7) + 2\cdot 0 = 2, \\ 2\cdot(-3) + 5\cdot 1 + 0\cdot(-7) - 1\cdot 0 = -1, \\ 3\cdot(-3) + 3\cdot 1 - 1\cdot(-7) - 3\cdot 0 = -1, \\ 4\cdot(-3) + 1\cdot 1 - 2\cdot(-7) - 1\cdot 0 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} -3 - 2 + 7 + 0 = 2, \\ -6 + 5 + 0 + 0 = -1, \\ -9 + 3 + 7 + 0 = 1, \\ -12 + 1 + 14 - 0 = 3, \end{cases} \begin{cases} 2 = 2, \\ -1 = -1, \\ 1 = 1, \\ 3 = 3. \end{cases} \Rightarrow$$

равенство верное.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2};\ 1;\ -\frac{5}{2} - \frac{9}{2};\ 0\right)$.

Данная система имеет множество решений из-за параметра α. Подставляя вместо параметра α множество действительных чисел мы получим множество решений данной системы, данная система является *неопределенной*.

Задание 6 Найти фундаментальное решение системы неоднородных линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

Решение: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ - основная матрица.

$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$ - расширенная матрица.

Найдем ранги матриц.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-3) \quad \times(-2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \times 1 \times(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \qquad + \begin{array}{ccccc|c} -6 & 3 & -3 & -6 & -9 & -6 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad + \begin{array}{ccccc|c} -6 & 3 & -3 & -6 & -9 & -6 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}.$$

$M_3(A') = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ ранг расширенной матрицы =3, т.е. $r(A') = 3$.

$M_3(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ ранг основной матрицы =3, т.е. $r(A) = 3$.

Так как $r(A') = r(A) = 3$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна, т.е. имеет решение.

$M_3(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ - базисный минор третьего порядка $\Rightarrow$ x_1, x_3, x_4 - основные неизвестные, т.к. 5 – количество неизвестных (переменных), 3 – ранг матрицы, 5 – 3 =2 $\Rightarrow$ имеем 2 параметра – это x_2 и x_5. Обозначим параметры $x_2 = \beta$, $x_5 = \gamma$. Составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ \quad - x_3 - 2x_4 - 4x_5 = -3, \\ \quad - x_4 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 2 + \beta - 3\gamma, \\ - x_3 - 2x_4 = -3 + 4\gamma, \\ x_4 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 - 6 = 2 + \beta - 3\gamma, \\ - x_3 + 6 = -3 + 4\gamma, \\ x_4 = -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 8 + \beta - 3\gamma, \\ -x_3 = -9 + 4\gamma, \\ x_4 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 9 - 4\gamma = 8 + \beta - 3\gamma, \\ x_3 = 9 - 4\gamma, \\ x_4 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 = -1 + \beta + \gamma, \\ x_3 = 9 - 4\gamma, \\ x_4 = -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma, \\ x_3 = 9 - 4\gamma, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

Общее решение системы $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma;\ \beta;\ 9 - 4\gamma;\ -3;\ \gamma\right)$. Найдем фундаментальное решение системы:

1) $\beta = 0, \gamma = 0 \quad X^0 = \left(-\frac{1}{2};\ 0;\ 9;\ -3;\ 0\right)$.

2) $\beta = 1, \gamma = 0 \quad X^1 = \left(\frac{1}{2};\ 1;\ 0;\ 0;\ 0\right)$,

3) $\beta = 0, \gamma = 1 \quad X^2 = \left(\frac{1}{2};\ 0;\ -4;\ 0;\ 1\right)$.

$X = X^0 + c_1 X^1 + c_2 X^2$,

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$, где c_1 и c_2 - действительные числа;

Домашнее задание № 6

Задание 1 Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

Ответ. При $\lambda(\lambda+3) \neq 0$ система имеет единственное решении: $x_1 = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}$; $x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda+3)}$; $x_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda+3)}$.

При $\lambda = 0$ и $\lambda = -3$ система несовместна.

Задание 2 Найти фундаментальное решение неоднородных системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + \ x_4 = \ 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - \ x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = \ 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = \ 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \ x_4 + 2x_5 = \ 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \ x_4 \qquad = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + \ x_3 + 3x_4 + 2x_5 = \ 2. \end{cases}$

Задание 3 Найти общее и частное решение системы линейных уравнений.

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 \qquad + \ x_3 - \ x_4 = 0, \\ -3x_1 + \ x_2 + \ x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1 Решить систему уравнений. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - \ x_3 + x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$$

2 Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + \ x_3 = 17, \\ 2x_1 + \ x_2 - \ x_3 = \ 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = \ 8. \end{cases}$$

3 Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 - \ x_4 - \ x_5 = 0, \\ 2x_1 + \ x_2 - 2x_3 - \ x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - \ x_5 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1 Решить систему уравнений. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + \ x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

2 Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11; \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

3 Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1 Решить систему уравнений. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

2 Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

3 Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

1 Решить систему уравнений. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

2 Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

3 Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Вопросы для самопроверки

1 Какая система линейных уравнений называется совместной?
2 Какие две системы называются равносильными?
3 Какая система линейных уравнений называется определенной?
4 Какая система линейных уравнений называется несовместной?
5 Какая система линейных уравнений называется неопределенной?
6 Что называется решением системы линейных уравнений?
7 Сформулируйте теорема Кронекера-Капелли.
8 Какая система линейных уравнений называется однородной?
9 Какая система линейных уравнений называется неоднородной?
10 Сколько решений имеет неопределенная система линейных уравнений?

Глава 4 Векторная алгебра

§1 N-мерные векторы в линейном пространстве V^n. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Скалярное произведение векторов

Вектором называется упорядоченный набор из n действительных чисел, записываемый в виде $x=(x_1; x_2; ..., x_n)$, где $x_i - i$-й элемент (или i-я координата) вектора x.

Размерность вектора определяется числом его координат и является его отличительной характеристикой. Например, $(2; 5)$ - двумерный вектор, $(2; -3; 0)$ - трехмерный, $(1; 3; -2; -4; 7)$ - пятимерный, $(x_1; x_2; ..., x_n)$ - n-мерный вектор.

Векторы равны только в том случае, если они имеют одну и ту же размерность и равные соответствующие координаты. Отсюда следует, что координаты вектора нельзя менять местами: так, $(0; 5; -3) \neq (-3; 0; 5)$.

Нулевым вектором называется вектор, все координаты которого равны нулю: $0=(0; 0; ..., 0)$.

Произведением вектора $x=(x_1; x_2; ..., x_n)$ на действительное число λ называется вектор

$$\lambda x=(\lambda x_1; \lambda x_2; ..., \lambda x_n),$$

т.е. при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

Зная вектор $x=(x_1; x_2; ..., x_n)$, можно получить ***противоположный вектор*** $-x=-1\cdot x=(-x_1; -x_2; ..., -x_n)$.

Суммой векторов $x=(x_1; x_2; ..., x_n)$ и $y=(y_1; y_2; ..., y_n)$ называется вектор

$$x+y=(x_1+y_1; x_2+y_2; ..., x_n+y_n),$$

т.е. при сложении векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно складываются.

Очевидно, что

$$x+(-x)=(x_1; x_2; ...; x_n)+(-x_1; -x_2; ...; -x_n)=(0; 0; ..., 0)$$

т.е. сумма противоположных векторов дает нулевой вектор.

Используя понятие противоположного вектора, можно определить операцию вычитания векторов:

$$x-y=x+(-y)=(x_1; x_2; ...; x_n)+(-y_1; -y_2; ...; -y_n)=$$
$$=(x_1-y_1; x_2-y_2; ..., x_n-y_n),$$

т.е. при вычитании двух векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно вычитаются.

Нетрудно заметить, что линейные операции над векторами удовлетворяют следующим свойствам:

1^0 $x+y=y+x$.

2^0 $(x+y)+z=x+(y+z)$.

3^0 $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.

4^0 $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

5^0 $\alpha(\beta x)=\alpha\beta x$.

6^0 $x+0=x$.

7^0 $x+(-x)=0$.

8^0 $1\cdot x=x$.

Скалярным произведением двух векторов в V $x=(x_1;x_2;...,x_n)$ и $y=(y_1;y_2;...,y_n)$ называется число, равное сумме произведений соответствующих координат векторов

$$xy=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1^0 $x\cdot x\geq 0$, причем $x\cdot x=0$ лишь при $x=0$.

2^0 $xy=yx$.

3^0 $(x+y)z=xz+yz$.

4^0 $(\lambda x)y=\lambda(xy)$.

Среди скалярных произведений особое место занимает *скалярный квадрат*:

$$x\cdot x=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2.$$

Нормой (***длиной***) вектора в V называется число, равное квадратному корню из скалярного произведения вектора самого на себя

$$|x|=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}, \tag{12}$$

Некоторое множество V образует ***линейное пространство***, если для любых двух его элементов $x\in V$ и $y\in V$ определена операция сложения $x+y\in V$ и для каждого элемента $x\in V$ и любого действительного числа $\lambda\in R$ определено произведение $\lambda x\in V$, причем эти операции удовлетворяют свойствам 1^0-8^0.

Подмножество H линейного пространства V называют ***линейным подпространством***, если выполнены следующие два условия:

1) *сумма* любых двух *векторов* из H принадлежит H: $x,y\in H\Rightarrow$ $\Rightarrow x+y\in H$;

2) *произведение* любого *вектора* из H *на* любое действительное *число* снова принадлежит H: $x\in H,\ \lambda\in R\Rightarrow\lambda x\in H$.

Таким образом, множество n-мерных векторов с действительными координатами образует линейное векторное пространство.

Линейное пространство называется ***евклидовым*** E, если в нем определено скалярное произведение, удовлетворяющее свойствам 1^0 – 4^0. Так как для n-мерных векторов скалярное произведение определено, то все множество n-мерных векторов образует евклидово пространство.

Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}$ из V называется сумма вида

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + ... + \lambda_m \overline{a_m},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ - действительные числа, называемые коэффициентами линейной комбинации.

Линейная комбинация векторов образуется из них с помощью операций умножения на число и сложения; следовательно, она также является вектором.

Система векторов называется ***линейно зависимой***, если их линейная комбинация равна нулевому вектору при хотя бы одном из коэффициентов линейной комбинации отличном от нуля. Т.е. векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}$ - называются линейно зависимыми, если равенство

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + ... + \lambda_m \overline{a_m} = \overline{0}, \text{ при } \lambda_i \neq 0 \quad (i = 1, ..., m),$$

выполняется при хотя бы одном из коэффициентов линейной комбинации, отличном от нуля.

Смысл зависимости между векторами ясен из следующей теоремы.

Теорема 1 *Если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных.*

Теорема 2 (***обратная***) *Если один из векторов данной системы можно представить в виде линейной комбинации остальных, то такая система векторов линейно зависима.*

Система векторов называется ***линейно независимой***, если их линейная комбинация равна нулевому вектору при всех нулевых коэффициентах линейной комбинации. Иными словами, векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}$ называются линейно независимыми, если равенство

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + ... + \lambda_m \overline{a_m} = \overline{0}$$

возможно лишь тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$.

Базисом называется упорядоченная система линейно независимых векторов, через которые выражается любой вектор пространства.

Теорема 3 *Если в векторном пространстве выбран какой-либо базис, то любой вектор этого пространства можно однозначно представить в виде линейной комбинации векторов базиса* (такое представление называется *разложение вектора по данному базису*).

Матрицей перехода от старого базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ к новому $e_1', e_2', ..., e_n'$ называется матрица $T = \left(t_{ij}\right)_1^n$, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе. Таким образом, старый и новый базисы связаны матричным равенством

$$\left(e_1', e_2', ..., e_n'\right) = \left(e_1, e_2, ..., e_n\right) \cdot T.$$

При таких обозначениях координаты $x_1, x_2, ..., x_n$ вектора x в старом базисе связаны с координатами $x_1', x_2', ..., x_n'$ того же вектора в новом базисе равенствами $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j'$, или в матричной записи

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Теорема *Для любых векторов* x, y *евклидова пространства* E *справедливо неравенство Коши-Буняковского*

$$(x, y)^2 \le (x, x)(y, y).$$

Углом φ ***между*** *ненулевыми* ***векторами*** x и y в евклидовом пространстве Е называют значение φ на отрезке от 0 до π, определяемое равенством

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}}.$$

Два вектора в *евклидовом пространстве* называют ***ортогональными***, если их *скалярное произведение* равно нулю.

Теорема (***Теорема Пифагора***) *Если векторы* x *и* y *из евклидова пространства ортогональны, то*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Систему векторов евклидова пространства называют **ортогональной**, если любые два вектора из этой системы ортогональны.

Ортогональный базис называют ***ортонормированным***, если каждый вектор этого базиса имеет *норму* (*длину*), равную единице.

Практическое занятие № 7

Задание 1 Является ли линейно зависимой система векторов:

1) $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; 2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$;

3) $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 3\vec{j}$, $c = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$.

Решение. 1) $\bar{i}(1; 0; 0)$, $\bar{j}(0; 1; 0)$, $\bar{k}(0; 0; 1)$.

Составим линейную комбинацию векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ на числа α, β, γ, т.е. $\alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k} = \bar{0}$.

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = 0, \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Так как все числа α, β, γ равны 0, то система векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ линейно независимая.

2) $\bar{a}(2; 3; 0)$, $\bar{b}(1; 0; 1)$.

Составим линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на числа α, β, т.е. $\overline{a}\alpha + \overline{b}\beta = \overline{0}$.

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2\alpha + \beta = 0,\\ 3\alpha = 0,\\ \beta = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha = 0,\\ \beta = 0.\end{cases}$$

Следовательно, система векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - линейно независимая.

3) $\overline{a}(2;\,4;\,-1),\ \overline{b}(-1;\,-3;\,0),\ \overline{c}(2;\,2;\,2)$.

$$\alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} + \alpha_3\overline{c} = \overline{0} \Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,\\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,\\ -\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0,\end{cases} \begin{cases}-4\alpha_3 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,\\ -8\alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,\\ \alpha_1 = -2\alpha_3,\end{cases} \begin{cases}-\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0,\\ -3\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0,\ /:(3)\\ \alpha_1 = -2\alpha_3,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_2 = -2\alpha_3,\\ \alpha_2 = -2\alpha_3,\\ \alpha_1 = -2\alpha_3,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_1 = -2\alpha_3,\\ \alpha_2 = -2\alpha_3.\end{cases}$$

Пусть $\alpha_3 = p, \quad p \neq 0, \quad p \in R$, тогда $\alpha_1 = -2p,\ \alpha_2 = -2p,\quad \alpha_3 = p$.

Таким образом, мы нашли совокупность чисел, отличных от нуля $(-2p;\,-2p;\,p)$, при которых линейная комбинация будет равна $\overline{0}$ (нулевому вектору), т.е. $\alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} + \alpha_3\overline{c} = \overline{0}$.

$-2p\overline{a} - 2p\overline{b} + p\overline{c} = \overline{0} \ \ /:p$

$-2\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c} = \overline{0}.$

Мы доказали, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ - линейно зависимые.

Так как векторы линейно зависимы, то любой вектор можно выразить через остальные векторы.

Например, $\underline{\overline{c} = 2\overline{a} + 2\overline{b}}$ или $2\overline{a} = \overline{c} - 2\overline{b} \Rightarrow \underline{\overline{a} = \frac{1}{2}\overline{c} - \overline{b}}$ или $2\overline{b} = \overline{c} - 2\overline{a} \Rightarrow$ $\underline{\overline{b} = \frac{1}{2}\overline{c} - \overline{a}}$.

Ответ. 1) нет; 2) нет; 3) да.

Задача 2 Выяснить, образуют ли базис векторы $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$: $\vec{a_1}\,(2;\,1;\,-1)$, $\vec{a_2}\,(-6;\,2;\,0)$, $\vec{a_3}\,(2;\,-4;\,2)$.

Решение. Базисом называется система линейно независимых векторов, через которые можно выразить любой вектор пространства.

Докажем, что вектора $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ линейно независимые.

Составим линейную комбинацию векторов и найдем числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\alpha_3\overline{a_3}=\overline{0}$.

$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}2\alpha_1-6\alpha_2+2\alpha_3=0,\\ \alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3=0,\\ -\alpha_1\qquad+2\alpha_3=0.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-6&2\\1&2&-4\\-1&0&2\end{vmatrix}=8-24+4+12=0.$$

$\Delta_{\alpha_1}=0$, $\Delta_{\alpha_2}=0$, $\Delta_{\alpha_3}=0$.

Таким образом $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - бесчисленное множество решений, а следовательно, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ - линейно зависимы, т.е. векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ не могут образовывать базис.

Ответ. нет.

Задача 3 Образуют ли векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ базис? Если образуют, то найти координаты вектора $\overrightarrow{a_4}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$: $\overrightarrow{a_1}\,(-2; 1; 0)$, $\overrightarrow{a_2}\,(3; -1; 1)$, $\overrightarrow{a_3}\,(2; 0; -1)$, $\overrightarrow{a_4}\,(1; 1; 1)$.

Решение. Докажем, что вектора $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ - образуют базис.

$\beta_1\overline{a_1}+\beta_2\overline{a_2}+\beta_3\overline{a_3}=\overline{0}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{a_4}$ по векторам $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$:

$\overline{a_4}=\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\alpha_3\overline{a_3}$.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}-2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3=1,\\ \alpha_1-\alpha_2\qquad=1,\\ \qquad\alpha_2-\alpha_3=1.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2&3&2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=-2+2+3=3.$$

$$\Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 + 3 = 8.$$

$$\Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 0 + 1 = 5.$$

$$\Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 2 - 3 = 2.$$

$\alpha_1 = \dfrac{8}{3}, \quad \alpha_2 = \dfrac{5}{3}, \quad \alpha_3 = \dfrac{2}{3},.$

Таким образом, $\overline{a_4} = \dfrac{8}{3}\overline{a_1} + \dfrac{5}{3}\overline{a_2} + \dfrac{2}{3}\overline{a_3} = \dfrac{1}{3}\left(8\overline{a_1} + 5\overline{a_2} + 2\overline{a_3}\right).$

Ответ. Да. $\overline{a_4} = \left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{2}{3}\right).$

Задача 4 Задано линейное пространство V^n при $n = 4$. Определить косинус угла между векторами $x = (4; 1; 2; 2)$ и $y = (1; 3; 3; -9)$.

Решение. $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{16 + 1 + 4 + 4} = 5$; $|y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{1 + 9 + 9 + 81} = 10$; $(x, y) = 4 + 3 + 6 - 18 = -5$; $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \dfrac{-5}{5 \cdot 10} = -0{,}1.$

Задача 5 Рассматривается евклидово пространство непрерывных функций $x(t),\ y(t),\ z(t),\ \ldots$ на отрезке $[-1, 1]$. Скалярное произведение определено равенством $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t) y(t) dt$. Найти угол между векторами $x = 3t^2 - 1$, $y = 3t - 5t^3$.

Решение. Имеем $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(3t^2 - 1\right)\left(3t - 5t^3\right) dt$. Нетрудно заметить, что $(x, y) = 0$, так как подынтегральная функция является нечетной. Следовательно, векторы x и y ортогональны.

Задача 6 Задано евклидово пространство при $n = 6$. Проверить справедливость теоремы Пифагора для ортогональных векторов $x = (1; 0; 2; 0; 2; 0)$ и $y = (0; 6; 0; 3; 0; 2)$.

Решение. Имеем

$|x| = \sqrt{1 + 0 + 4 + 0 + 4 + 0} = 3$, $|y| = \sqrt{0 + 36 + 0 + 9 + 0 + 4} = 7$;

$x+y=(1;\,6;\,2;\,3;\,2;\,2)$; $\qquad |x+y|=\sqrt{1+36+4+9+4+4}=\sqrt{58}$.

Итак, $|x|^2+|y|^2=|x+y|^2$.

Задача 7 В евклидовом пространстве непрерывных функций рассматриваются два вектора: $x=t^2+1$, $y=\lambda t^2+1$. Найти значение λ, при котором векторы x и y ортогональны на отрезке [0, 1], и проверить справедливость теоремы Пифагора для этих векторов.

Решение. Составим скалярное произведение

$$(x,\,y)=\int_0^1 (t^2+1)(\lambda t^2+1)dt=\lambda/5+(\lambda+1)/3+1.$$

Из условия $(x,\,y)=0$ определяем λ; имеем $\lambda/5+(\lambda+1)/3+1=0$, откуда $\lambda=-5/2$.

Найдем теперь длины векторов $x=t^2+1$, $y=\lambda t^2+1$ и $x+y=-(3/2)t^2+2$:

$$|x|=\sqrt{\int_0^1 (t^4+2t^2+1)dt}=\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1}=\sqrt{\frac{28}{15}},$$

$$|y|=\sqrt{\int_0^1 \left(\frac{25}{4}t^4-5t^2+1\right)dt}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{5}{8}+1}=\sqrt{\frac{7}{12}},$$

$$|x+y|=\sqrt{\int_0^1 \left(\frac{9}{4}t^4-6t^2+4\right)dt}=\sqrt{\frac{9}{20}-2+4}=\sqrt{\frac{49}{20}}.$$

Таким образом, $|x|^2=28/15$, $|y|^2=7/12$, $|x+y|^2=49/20$, т.е. $|x|^2+|y|^2=|x+y|^2$.

Задача 8 Приведем примеры линейных пространств:

- множество V^3 (V^2) всех свободных векторов в пространстве (на плоскости) с линейными операциями над векторами – линейное пространство, так как верны все аксиомы линейного пространства;

- множество всех геометрических векторов в пространстве с началом в данной точке и параллельных данной плоскости с линейными операциями над векторами является линейным пространством;

- множество $M_{mn}(R)$ матриц типа $m\times n$, элементами которых являются действительные числа, с линейными операциями над матрицами также удовлетворяет всем аксиомам линейного пространства;

- множество матриц-строк (матриц-столбцов) длины n является линейным пространством относительно матричных операций сложения и умножения на число (это частный случай предыдущего примера);

- множество $K_n[x]$ многочленов переменного x степени, не превышающей n, которые как функции можно складывать и умножать на действительные числа;

- множество всех решений данной однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решения можно рассматривать как матрицы-столбцы, складывать и умножать на числа по законам матричных операций. Столбец, получаемый в результате сложения решений или умножения решения на число, снова будет решением системы. Поэтому определены операции, подчиняющиеся аксиомам линейного пространства;

- множество функций, непрерывных на отрезке, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. При сложении непрерывных функций получаем непрерывную функцию, при умножении непрерывной функции на число также получаем непрерывную функцию. Поэтому сложение функций и умножение функций на число, не выводящие за пределы множества непрерывных на отрезке функций, можно рассматривать как операции линейного пространства. Легко убедиться, что для этих операций верны все аксиомы линейного пространства.

Домашнее задание № 7

Задание 1 Будет ли система векторов линейно зависимой.

а) $\overline{a_1}(2;3;5)$, $\overline{a_2}(-4;5;7)$, $\overline{a_3}(10;-7;-9)$;

б) $\overline{a_1}(1;2;3;0)$, $\overline{a_2}(-1;0;3;-2)$, $\overline{a_3}(-1;3;12;-5)$.

Ответ. а) да; б) да.

Задание 2 Выяснить, образуют ли векторы $\overline{a_1}(1;2;3)$, $\overline{a_2}(0;1;-1)$, $\overline{a_3}(2;4;5)$ базис пространства R^3.

Задание 3 Убедиться, что векторы $\overline{a_1}(1;2;3)$, $\overline{a_2}(0;1;-1)$, $\overline{a_3}(2;4;5)$ - базис пространства R^3 и найти координаты вектора $\overline{a_4}(5;13;9)$ относительно нового базиса $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$.

Задание 4 Найдите угол между векторами $\overline{a}(2;-1;3;-2)$ и $\overline{b}(3;1;5;1)$ в евклидовом пространстве V^4.

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

Задание 5 Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

а) все векторы n-мерного векторного пространства, координаты которых – целые числа?

б) все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy?

в) все векторы плоскости, начала и концы которых лежат на данной прямой?

г) все векторы плоскости трехмерного пространства, концы которых не лежат на данной прямой.

Ответ. а) не является; б) не является;

в) является; г) не является.

Задание 6 Является ли линейным пространством множество систем четырех действительных чисел $(x_1; x_2; 0; 0)$, $(y_1; y_2; 0; 0)$, $(z_1; z_2; 0; 0)$, где $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ - всевозможные действительные числа? Сложение элементов и умножение на действительное число определены обычно.

Ответ. Да.

Задача 7 Образует ли линейное пространство множество элементов $(x_1; x_2; 1; 1)$, $(y_1; y_2; 1; 1)$, $(z_1; z_2; 1; 1)$?

Ответ. Нет, т.к. сумма двух элементов множества не является элементом данного множества.

Задача 8 Образует ли линейное пространство множество всевозможных многочленов второй степени $\alpha_0 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2$, $\beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2$, $\gamma_0 t^2 + \gamma_1 t + \gamma_2$, …?

Ответ. Нет, так как сумма двух многочленов второй степени может быть многочленом первой степени или постоянной величиной.

Задача 8 Образует ли линейное пространство множество всех многочленов не выше третьей степени?

Ответ. Да.

§ 2 Векторы. Операции над векторами в V^2 и V^3. Скалярное произведение векторов

Вектором в V^2 и V^3 называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overline{AB}$ (или одной буквой, a, b, …). Длина отрезка AB называется ***длиной***, или ***модулем*** вектора $\overline{AB}$ и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$, $|a|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нулевым вектором*** и обозначается $\overline{0}$ или просто 0.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором*** *и обозначается через* e.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора a, *называется* ***ортом*** *вектора* a *и обозначается* a^0. *Два ненулевых вектора называются* ***противоположными****, если они имеют одинаковую длину и противоположные направления. Вектор, противоположный вектору* a, *обозначается* $-a$; *вектор* $\overline{AB}$ *противоположен вектору* $\overline{BA}$ $(\overline{BA} = -\overline{AB})$.

Векторы a и b называются ***коллинеарными,*** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $a \parallel b$.

Два коллинеарных вектора a и b *называются* ***равными*** *($a = b$), если они сонаправлены и имеют равные длины.*

Совместим параллельным переносом начала неколлинеарных векторов a и b. Начало и концы векторов образуют вершины треугольника. ***Углом*** между векторами a и b называется угол при вершине этого треугольника, соответствующий началу векторов. Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен нулю; если противоположно направлены – угол между ними равен 180°.

Суммой двух векторов a и b называется вектор c, соединяющий начало вектора a с концом вектора b, отложенного от конца вектора a.

Обозначение: $c = a + b$.

Для геометрического представления суммы векторов используют правила «треугольника» и «параллелограмма», проиллюстрированные на рисунках 14 и 15 соответственно.

Под ***разностью*** векторов a и b понимается вектор c такой, что $b + c = a$. Обозначение: $c = a - b$. Справедливо равенство $a - b = a + (-b)$.

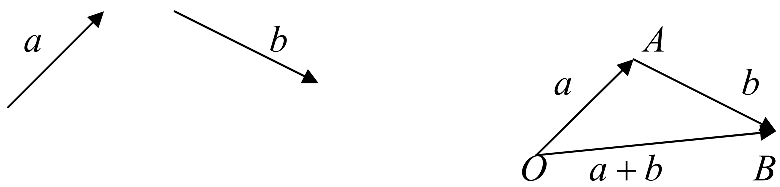


Рисунок 14

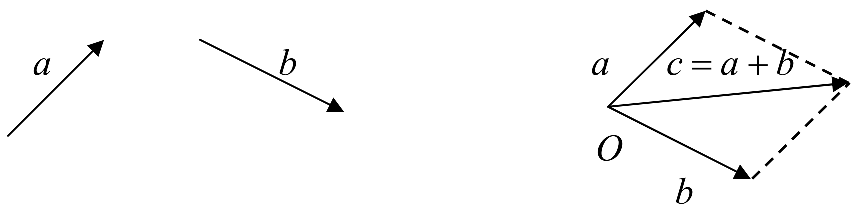


Рисунок 15

Произведением вектора $a \neq 0$ ***на число*** λ называется вектор, который имеет длину $|\lambda| \cdot |a|$, его направление совпадает с вектором a, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\lambda \cdot \bar{a}$.

Отметим, что $a = |a| \cdot a^0$, т.е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Два ненулевых вектора a и b коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них есть произведение другого на некоторое число, т.е. $b = \lambda \cdot a$, λ - число (*признак коллинеарности векторов*).

Три ненулевых вектора a, b, c компланарны тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией других, например, $c = \lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b$ (λ_1, λ_2 - числа не равные нулю одновременно) (*признак компланарности векторов*).

Если i, j, k - орты координатных осей прямоугольной системы координат *Oxyz*, то любой вектор a единственным образом можно представить в виде их суммы (линейной комбинации) с коэффициентами a_x, a_y и a_z: $a = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot k$. Коэффициенты a_x, a_y и a_z линейной комбинации называют ***координатами вектора*** $\overline{a}$ в базисе i, j, k. Координаты a_x, a_y, a_z вектора a - это его проекции на соответствующие координатные оси. Вектор a с координатами a_x, a_y, a_z записывают в виде $a = (a_x; a_y; a_z)$. Длина вектора a определяется по формуле

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

где $a_x = np_{OX}\overline{a}$ (проекция вектора $\overline{a}$ на ось *OX*),

$a_y = np_{OY}\overline{a}$ (проекция вектора $\overline{a}$ на ось *OY*),

$a_z = np_{OZ}\overline{a}$ (проекция вектора $\overline{a}$ на ось *OZ*).

Вектор a образует с координатными осями *Ox, Oy* и *Oz* углы α, β и γ соответственно. Направление вектора a определяется с помощью *направляющих косинусов*: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ для которых справедливы равенства

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}. \tag{13}$$

Направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{14}$$

Пусть даны два вектора $a = (a_x; a_y; a_z)$ *и* $b = (b_x; b_y; b_z)$. *Тогда:*

1) векторы a и b равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т.е.

$$a = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z; \end{cases} \tag{15}$$

2) векторы a и b коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е.

$$a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{16}$$

При сложении векторов их одноименные координаты складывающем, вычитании – вычитаются, при умножении вектора на число – умножаются на это число:

$$a \pm b = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z),$$

$$\lambda \cdot a = (\lambda \cdot a_x; \lambda \cdot a_y; \lambda \cdot a_z)$$

Вектор $\overline{r} = \overline{OM}$, соединяющий начало координат с произвольной точкой $M(x;\, y;\, z)$ пространства называется ***радиус-вектором*** точки *M*. Координаты точки – это координаты ее радиус-вектора $\overline{r} = (x;\, y;\, z)$ или $\overline{r} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$. Если вектор $a = \overline{AB}$ задан точками $A = (x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $B = (x_2;\, y_2;\, z_2)$ то его координаты a_x, a_y, a_z вычисляются по формулам $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$:

$$a = \overline{AB} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1).$$

1 ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов a и b называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (рисунок 16).

Обозначение: $a \cdot b$.

Таким образом,

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi. \tag{17}$$

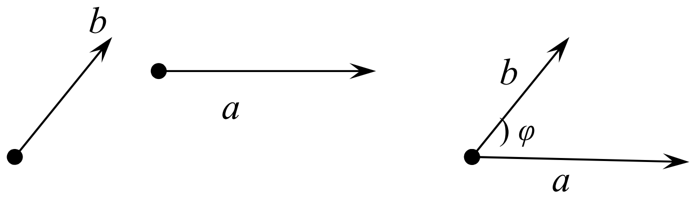


Рисунок 16

Свойства скалярного произведения:

1. $a \cdot b = b \cdot a$.
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
3. $(\lambda a) \cdot b = \lambda (a \cdot b)$.
4. $a^2 = |a|^2$.
5. $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$ (или $a = 0$, или $b = 0$). В частности: $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$.

Векторы a и b заданы своими координатами $a = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ и $b = (b_x;\, b_y;\, b_z)$.

2 ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов a и b называется число, равное сумме произведений их координат

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{18}$$

Практическое занятие № 8

Задача 1 Даны два вектора a и b. Построить векторы: $a+2b$, $\frac{b-a}{2}$; $\frac{3a-2b}{4}$.

Задача 2 Вычислите направляющие косинусы $a(12;\,-15;\,-16)$.

Решение. $\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|}$, $\cos\beta=\frac{a_y}{|a|}$, $\cos\gamma=\frac{a_z}{|a|}$.

$|a|=\sqrt{12^2+(-15)^2+(-16)^2}=25 \Rightarrow$

$\cos\alpha=\frac{12}{25}$, $\cos\beta=-\frac{15}{25}=-\frac{3}{5}$, $\cos\gamma=-\frac{16}{25}$.

Ответ: $\left(\frac{12}{25};-\frac{3}{5};-\frac{16}{25}\right)$.

Задача 3 Может ли a с координатными осями составлять следующие углы:

1) $\alpha=45°;\ \beta=60°;\gamma=120°$; 2) $\alpha=45°;\ \beta=135°;\gamma=60°$;

3) $\alpha=90°;\ \beta=150°;\gamma=60°$.

Решение. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

1) $\cos^2 45°+\cos^2 60°+\cos^2 120°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=$

$=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

Задача 4 Проверить коллинеарность векторов $a\ (2;-1;3)$ и $b\ (-6;3;9)$.

Решение. $a\parallel b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \Rightarrow \frac{2}{-6}=\frac{-1}{3}=\frac{3}{9}$.

$-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\neq\frac{1}{3}$.

Ответ. нет.

Задача 5 При каких значениях α и β $a\parallel b$: $a=-2i+3j+\beta k$ и $b=\alpha i-6j+2k$?

Решение. $a\parallel b \Rightarrow \frac{-2}{\alpha}=\frac{3}{-6}=\frac{\beta}{2} \Rightarrow -\frac{2}{\alpha}=-\frac{1}{2}=\frac{\beta}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{\alpha} = -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\beta}{2} = -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\alpha = 4,\ \beta = -1$.

Задача 6 Известно: $(\hat{a,b}) = \dfrac{2\pi}{3}$, $|a| = 3,\ |b| = 4$. Вычислить:

а) a^2; б) b^2; в) $a \cdot b$;

г) $(a+b)^2$; д) $(3a - 2b)\cdot(a + 2b)$; е) $(3a+2b)^2$.

Решение. а) $a^2 = a \cdot a = |a| \cdot |a| \cos 0° = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$;

б) $b^2 = b \cdot b = |b| \cdot |b| \cos 0° = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$;

в) $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos\dfrac{2\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -6$;

г) $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 9 + 2 \cdot (-6) + 16 = 9 - 12 + 16 = 13$;

д) $(3a - 2b)\cdot(a + 2b) = 3a^2 + 6a \cdot b - 2b \cdot a - 4b^2 = 3a^2 + 4a \cdot b - 4b^2 =$
$= 3 \cdot 9 + 4 \cdot (-6) - 4 \cdot 16 = 27 - 24 - 64 = -61$.

Ответ: а) 9; б) 16; в) – 6; г) 13; д) – 61; е) 73.

Задача 7. Проверить, при каком значении α векторы $a = \alpha i - 3j + 2k$ и $b = i + 3j - \alpha k$ взаимноперпендикулярны.

Решение. $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

$a(\alpha; -3; 2)$, $b(1; 3; -\alpha)$.

$a \cdot b = \alpha - 9 - 2\alpha = -9 - \alpha \ \Rightarrow\ -9 - \alpha = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = -9$.

Ответ: $\alpha = -9$.

Задача 8 Вычислить косинус угла, образованного векторами $a(2; -4; 4)$ и $b(-3; 2; 6)$.

Решение. По формуле (17), выразим косинус угла между двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos\left(\hat{a, b}\right) \Rightarrow \cos\left(\hat{a, b}\right) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = -3 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + 6 \cdot 4 = -6 - 8 + 24 = 10,$$

$$|a| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6,$$

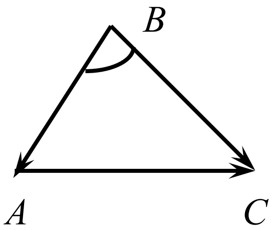
$$|b| = \sqrt{(-3)^2 + 4 + 36} = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7,$$

т.о. $\cos\left(\hat{a, b}\right) = \dfrac{10}{42} = \dfrac{5}{21}$.

Ответ: $\cos\alpha = \frac{5}{21}$.

Задача 9 Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$. Определите внутренний угол при вершине *B*.

Решение. $\overline{BA}(3; 0; 4)$, $\overline{BC}(7; 0; 1)$.



$$\cos\angle B = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \frac{3\cdot 7 + 0\cdot 0 + 4\cdot 1}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}\cdot\sqrt{7^2+0^2+1^2}} =$$

$$= \frac{21+4}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{49+1}} = \frac{25}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{50}} = \frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle B = 45^\circ.$$

Ответ: 45°.

Задача 10 Вектор c, коллинеарный вектору $a(6; -8; -7{,}5)$ образует острый угол с осью *OZ*. Зная, что $|c| = 50$, найти его координаты.

Решение. $c(x; y; z)$, $a(6; -8; -7{,}5)$.

$$c \parallel a \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{-7{,}5} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{-7{,}5} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6t, \\ y = -8t, \\ z = -7{,}5t. \end{cases}$$

$$|c| = 50 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 50,$$

$$\sqrt{(6t)^2 + (-8t)^2 + (-7{,}5t)^2} = 50,$$

$$\sqrt{36t^2 + 64t^2 + \frac{225}{4}t^2} = 50 \Rightarrow \sqrt{\frac{144t^2 + 256t^2 + 225t^2}{4}} = 50,$$

$$\sqrt{\frac{625t^2}{4}} = 50 \Rightarrow \frac{25}{2}|t| = 50 \Rightarrow |t| = 4.$$

$$\left[\begin{aligned} t_1 &= 4, \\ t_2 &= -4, \end{aligned}\right. \Rightarrow c_1(24; -32; -30),\ c_2(-24; 32; 30),$$

$$k(0; 0; 1).$$

$$\cos\left(c_1 \,\widehat{,}\, k\right) = -\frac{30}{50} = -\frac{3}{5} < 0 \Rightarrow \left(c_1 \,\widehat{,}\, k\right) > 90^\circ,$$

$$\cos\left(c_2 \,\widehat{,}\, k\right) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} > 0 \Rightarrow \left(c_2 \,\widehat{,}\, k\right) < 90^\circ \Rightarrow c(-24; 32; 30).$$

Ответ: $c(-24; 32; 30)$.

Задание 11 Найти c, зная, что он перпендикулярен к векторам $a(2;\,3;\,-1)$ и $b(1;\,-2;\,3)$ и удовлетворяет условию $c\cdot\left(2i-j+k\right)=-6$.

Решение. $c(x;\,y;\,z)$, $a(2;\,3;\,-1)$, $b(1;\,-2;\,3)$.

$c\perp a\Rightarrow 2x+3y-z=0$, $c\perp b\ \Rightarrow x-2y+3z=0$, $2x-y+z=-6$.

$$\begin{cases} x-2y+3z=\ 0,\\ 2x+3y-\ z=\ 0,\\ 2x-\ y+\ z=-6.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&3&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=\left(3-6+4\right)-\left(18+1-4\right)=1-15=-14.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}0&-2&3\\0&3&-1\\-6&-1&1\end{vmatrix}=-12+54=42,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&0&3\\2&0&-1\\2&-6&1\end{vmatrix}=-36-6=-42,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&-2&0\\2&3&0\\2&-1&-6\end{vmatrix}=-18-24=-42.$$

$x=-3$, $y=3$, $z=3$.

Ответ: $c\left(-3;\,3;\,3\right)$.

Задание 12 Даны три вектора $a(2;\,-1;\,3)$, $b\,(1;\,-3;\,2)$ и $c(3;\,2;\,-4)$. Найти d, удовлетворяющий условиям $d\cdot a=-5$; $d\cdot b=-11$; $d\cdot c=20$.

Решение. $d(x;\,y;\,z)$.

$$\begin{cases} 2x-\ y+3z=-5,\\ x-3y+2z=-11,\\ 3x+2y-4z=\ 20.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&-3&2\\3&2&-4\end{vmatrix}=\left(24+6-6\right)-\left(-27+8+4\right)=24+15=39.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-5&-1&3\\-11&-3&2\\20&2&-4\end{vmatrix}=-166+244=78,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -11 & 2 \\ 3 & 20 & -4 \end{vmatrix} = 118 - 1 = 117, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & -11 \\ 3 & 2 & 20 \end{vmatrix} = -97 + 19 = -78.$$

$x = 2; \quad y = 3; \quad z = -2$.

Ответ. $(2; 3; -2)$.

Домашнее задание № 8

Задание 1 Найдите орт-вектор для векторов:

1) $a(-2; 1; 2)$; 2) $a(3; 4; -12)$.

Ответ. 1) $a^0\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 2) $a^0\left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right)$.

Задание 2 Вычислите направляющие косинусы $a\left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right)$.

Ответ. $a\left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right)$.

Задание 3 1) Может ли a составлять с двумя координатными осями следующие углы: а) $\alpha = 30°$; $\beta = 45°$; б) $\beta = 60°$; $\gamma = 60°$; в) $\alpha = 150°$; $\gamma = 30°$.

Ответ: а) нет; б) да; в) нет.

2) Вектор составляет с осями *Ox* и *Oy* следующие углы $\alpha = 120°$ и $\gamma = 45°$. Какой угол он составляет с осью *Oy*?

Ответ: либо $60°$, либо $120°$.

Задание 4 1) Даны точки $A(3, -2, 2)$; $B(1, 2, -1)$; $C(-1, 1, -3)$; $D(3, -5, 3)$. Являются ли точки *A*, *B*, *C*, *D* вершинами трапеции?

Ответ: нет.

2) Проверить $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, если $A(-1, 5, 1-10)$; $B(5, -7, 8)$; $C(2, 2, -7)$; $D(5, -4, 2)$.

Задание 5 Известно, что $a \perp b$; $(\widehat{a, c}) = \frac{\pi}{3}$; $(\widehat{b, c}) = \frac{\pi}{3}$; $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|c| = 8$.

Вычислить: а) $(3a - 2b)\cdot(b + 3c)$; б) $(b + 2a)\cdot(a - 3c)$;

в) $(a + b + c)^2$; г) $(a + 2b - 3c)^2$.

Ответ: а) – 62; б) – 114; в) 162; г) 373.

Задание 6 Даны вершины треугольника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Определите внутренние угла треугольника *ABC*.

Ответ. $\angle A = \arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$; $\angle B = \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{29}}\right)$; $\angle C = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{145}}\right)$.

Задание 7 Найти координаты c, если $c \parallel a$, $a(2; 1; -1)$ и c удовлетворяет условию $a \cdot c = 3$.

Ответ: $c\left(1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

Задание 8 Вектор $\vec{c}$, перпендикулярный к векторам $a = 3i + 2j + 2k$ и $b = 18i - 22j - 5k$, и образует с осью OY тупой угол. Найти координаты c, зная, что $|c| = 14$.

Ответ. $c(-4; -6; 12)$.

§ 3 Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл векторного и смешанного произведений

Три некомпланарных вектора a, b и c, взятые в указанном порядке, образуют ***правую (левую) тройку***, если с конца вектора c кратчайший поворот от первого вектора a ко второму вектору b виден совершающимся против часовой стрелки, (соотв. По часовой стрелке) (рисунок 17).

Рисунок 17

Векторным произведением неколлинеарных векторов a и b называют вектор c, определяемый условиями:

1) вектор c перпендикулярен векторам a и b, т.е. $c \perp a$, $c \perp b$;

2) длина вектора c произведению длин векторов a и b на синус угла между ними.

$$|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\varphi, \qquad \varphi = (a \hat{,} b). \tag{19}$$

Векторы a, b и c образуют правую тройку.

Векторное произведение обозначается $a \times b$ или $[a, b]$.

Если векторы a и b коллинеарны (в частности, один из этих векторов нулевой), то по определению $a \times b = \bar{0}$.

Свойства векторного произведения:

1. $a \times b = -(b \times a)$;

2. $\lambda \cdot (a \times b) = \lambda a \times b = a \times \lambda b$;

3. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;

4. $a \times b = 0$, если $a \| b$ (или $a = \bar{0}$, или $b = \bar{0}$). В частности $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$.

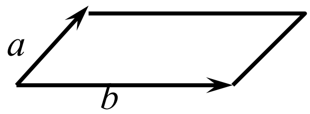
Формула векторного произведения двух векторов a и b.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \text{ или } a \times b = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right). \quad (20)$$

Геометрический смысл векторного произведения двух векторов:

Площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b, как на сторонах, равна длине векторного произведения:

$$S = |a \times b|. \quad (21)$$



Площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}|a \times b|. \quad (22)$$

Смешанным произведением трех векторов a, b и c называется число? равное скалярному произведению вектора $d = a \times b$ на вектор c. (23)

Обозначение: abc.

Таким образом:

$abc = (a \times b) \cdot c$.

Смешанное произведение векторов a, b и c положительно, если данные векторы образуют правую тройку, и отрицательно – если левую.

Свойства смешанного произведения:

1. $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$, т. е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов;

2. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$, т. е. смешанное произведение не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения;

3. $abc = -acb = -bac = -cba$, т.е. смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых векторов-сомножителей;

4. $abc = 0$, если a, b и c компланарны (в частности, если любые два из перемножаемых вектора коллинеарны).

Если векторы a, b и c заданы своими координатами $a = (a_x; a_y; a_z)$, $b = (b_x; b_y; b_z)$, $c = (c_x; c_y; c_z)$, то

$$abc = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (24)$$

- формула смешанного произведениях трех векторов a, b **и** c**.**

Если $abc > 0$, то a, b, c - правая тройка; $abc < 0$ - левая.

Геометрический смысл смешанного произведения трех векторов

Объем параллелепипеда, построенного на векторах a, b и c, как на ребрах, равен модулю смешанного произведения трех векторов a, b и c

$$V = |abc|. \qquad (25)$$

Объем треугольной пирамиды:

$$V = \frac{1}{6}|\overline{abc}|. \qquad (26)$$

Три (и более) вектора называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в ||-ных плоскостях.

Признак компланарности трех векторов

Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, т.е. $(abc) = 0$.

a, b, c - компланарны $\Leftrightarrow (a, b, c) = 0$. (27)

Практическое занятие № 9

Задание 1 Найти 1) $a \times b$, 2) $(2a - 3b)\times(b + 4a)$;

3) $(2a + b)\times b$; 4) $(2a - b)\times(2a + b)$).

если $a = 2i + j + 3k$ и $b = i - 3j + 2k$.

Решение. $a(2; 1; 3)$, $b(1; -3; 2)$.

1) $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2i + 3j - 6k - (k - 9i + 4j) = 11i - j - 7k$.

2) $(2a - 3b)\times(b + 4a) = 2a \times b + 8a \times a - 3b \times b - 12b \times a =$

$= 2a \times b + 12a \times b = 14a \times b = 14(11i - j - 7k) = 154i - 14j - 98k$.

3) и 4) решите самостоятельно.

Ответ. 1) $(11; -1; -7)$; 3) $(22; -2; -14)$;

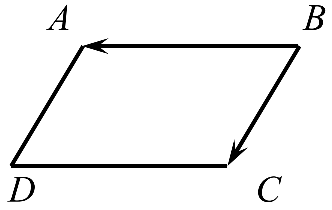
2) $(154; -14; -98)$; 4) $(44; -4; -28)$.

Задание 2 Найти площадь параллелограмма, с вершинами в точках $A\ (4;-2;6)$, $B\ (2;8;4)$, $C\ (6;-2;-2)$, $D(x;\ y;z)$.

Решение. Используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов, найдем площадь параллелограмма

$$S=\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|.$$

$\overline{BA}(2;-10;\ 2)$, $\overline{BC}(4;-10;-6)$.



Сначала вычислим векторное произведение двух векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{BA}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -10 & 2\\ 4 & -10 & -6\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -5 & 1\\ 2 & -5 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=4(15i-5k+2j+10k+5i+3j)=4(20i+5j+5k)=$$

$$=80i+20j+20k\ \Rightarrow\ \overline{BA}\times\overline{BC}(80;\ 20;\ 20).$$

$$S=\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|=\sqrt{80^2+20^2+20^2}=$$

$$=\sqrt{6400+400+400}=\sqrt{7200}=10\sqrt{72}=60\sqrt{2}\ \ ед^2.$$

Ответ. $S_{ABCD}=60\sqrt{2}\ (ед^2)$.

Задание 3 Определить площадь треугольника, построенного на векторах $a=3i+2j+k$ и $b=i-j+2k$.

Решение. Вычислим площадь треугольника, используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов a и b: $a(3;\ 2;\ 1)$, $b(1;-1;\ 2)$.

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|a\times b|.$$

$$a\times b=\left(\begin{vmatrix} 2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right),\ a\times b=(5;-5;-5).$$

$$|a\times b|=\sqrt{5^2+5^2+5^2}=\sqrt{25+25+25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}\ \ ед^2.$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}5\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\ \left(ед^2\right).$$

Ответ. $S_{треуг}=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}(ед^2)$

Задание 4 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b. $a=3p+2q$, $b=2p+q$, $|p|=4$, $|q|=3$, $(\widehat{p,q})=\dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. $S = |a \times b|$.

$a \times b = (3p + 2q) \times (2p + q) = 6p \times p + 3p \times q + 4q \times p + 2q \times q =$

$= 3p \times q + 4q \times p = -3q \times p + 4q \times p = q \times p$.

$[p \times p = 0$ и $q \times q = 0]$

$[p \times q = -q \times p]$.

$$S = |a \times b| = |q \times p| = |q| \cdot |p| \cdot \sin\left(\widehat{p, q}\right) = 4 \cdot 3 \cdot \sin\frac{3\pi}{4} = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\left(ед^2\right).$$

Ответ. $S = 6\sqrt{2}\ (ед^2)$.

Задание 5 Найти (abc), если $a = 3i - j + k$, $b = 5i + 2j - 2k$, $c = i - 3j + k$.

Решение. Используя формулу (24) вычислим смешанное произведение трех векторов $a(3; -1; 1)$, $b(5; 2; -2)$, $c(1; -3; 1)$.

$$(abc) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 15 + 2 - 2 - 18 + 5 = -12 - 10 = -22.$$

Ответ. $(abc) = -22$.

Задание 6 Выяснить, какова ориентация тройки векторов $a\,(3; -1; 1)$, $b\,(5; 2; -2)$, $c\,(1; -3; 1)$.

Ответ. левая.

Задание 7 Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $a(4; -2; 0)$, $b\,(-3; 6; 3)$, $c\,(1; 4; -5)$.

Решение. Используя геометрический смысл смешанного произведения трех векторов $a(4; -2; 0)$, $b(-3; 6; 3)$, $c\,(1; 4; -5)$, вычислим объем:

$V = |abc|$.

Сначала найдем смешанное произведение трех векторов a, b, c:

$$(abc) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 6(-20 - 1 - 8 + 5) = 6(-24) = -144.$$

$V = |abc| = 144\left(ед^3\right)$.

Ответ. $V = 144\ (ед^3)$.

Задание 8 Доказать, что 4 точки $A\,(1; 2; -1)$, $B\,(0; 1; 5)$, $C\,(-1; 2; 1)$, $D\,(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

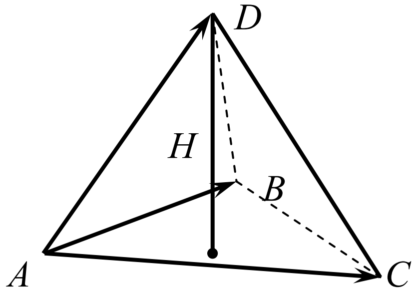
Решение. $\overline{AB}(-1; -1; 6)$, $\overline{AC}(-2; 0; 2)$, $\overline{AD}(1; -1; 4)$.

Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если три вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ - компланарны, а по признаку компланарности трех векторов смешанное произведение трех векторов должно быть равно 0, т.е. $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = 0$.

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 2 - 8 = 12 - 12 = 0.$$

Ответ. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Задание 9 Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A\,(2; -1; 1)$, $B\,(5; 5; 4)$, $C\,(3; 2; -1)$, $D\,(4; 1; 3)$ и высоту, опущенной из вершины D на грань ABC.



Решение. Используя геометрический смысл смешанного произведения трех векторов, вычислим объем тетраэдра:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right|.$$

$\overline{AB}(3; 6; 3)$, $\overline{AC}(1; 3; -2)$, $\overline{AD}(2; 2; 2)$.

Найдем смешанное произведение трех векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\left(3 + 1 - 4 - 3 + 2 - 2\right) = -18.$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|-18\right| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3\ \left(ед^3\right).$$

Из школьного курса известно, что объем тетраэдра равен:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H \ \Rightarrow\ H = \frac{3V}{S}.$$

Найдем площадь основания. В основании лежит ΔABC. Используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов, найдем площадь грани ABC.

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|.$$

Найдем векторное произведение двух векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-12i+9k+3j-6k-9i+6j=-21i+9j+3k.$$

$\overline{AB}\times\overline{AC}(-21;9;3)$.

Найдем длину векторного произведения:

$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-21)^2+9^2+3^2}=\sqrt{531}$, т.к. $S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$, то

$S=\frac{1}{2}\sqrt{531}\left(ед^2\right)$.

$H=\dfrac{3\cdot 3}{\frac{1}{2}\sqrt{531}}=\dfrac{18}{\sqrt{531}}(ед)$.

Ответ. $V=3\ (ед^3)$, $H=\dfrac{18}{\sqrt{531}}(ед)$.

Домашнее задание № 9

Задание 1 Найти $a\times b$ двух векторов, если $a=3i+j-2k$ и $b=-i+2j+4k$.

Ответ. $a\times b=8i-10j+7k$.

Задание 2 1) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b. $a=2p-3q$, $b=5p+q$, $|p|=2$, $|q|=3$, $(\widehat{p,q})=\frac{\pi}{2}$.

Ответ. $S=102\left(ед^2\right)$.

2) Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A\ (1;2;-1)$, $B\ (3;3;2)$, $C\ (2;-1;1)$.

Ответ. $S_{треуг}=\frac{1}{2}\sqrt{171}\ (ед^2)$.

3) Даны вершины тетраэдра $A\ (2;3;1)$, $B\ (4;1;-2)$, $C\ (6;3;7)$, $D\ (-5;-4;8)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D. ($V=\frac{1}{3}\cdot H\cdot S$).

Ответ. $H=11\ (ед)$.

Задание 3 1) Установить компланарны ли вектора $a\ (2;3;-1)$, $b\ (1;-1;3)$, $c\ (1;9;-11)$.

Ответ. да.

Задание 4 Даны вектора $a=2i+3j+k$, $b=5j+3k$, $c=7k$. Найти (abc).

Ответ. 70.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется линейной комбинацией?
2. Какие векторы называются линейно зависимыми?
3. Какие векторы называются линейно независимыми?
4. Что называется скалярным произведением двух векторов? (Дайте определение через угол и через координаты) в V^2 или V^3?
5. Сформулируйте признак перпендикулярности двух векторов.
6. Дайте определение коллинеарности двух векторов.
7. Сформулируйте признак коллинеарности двух векторов.
8. Дайте определение векторного произведения двух векторов.
9. Сформулируйте геометрический смысл векторного произведения двух векторов?
10. Дайте определение смешанного произведения трех векторов.
11. Сформулируйте геометрический смысл смешанного произведения трех векторов
12. Дайте определение компланарности трех векторов.
13. Сформулируйте признак компланарности трех векторов.
14. Точки $A(2, 3, -2)$ и $B(5, 0, -2)$. Найти координаты $\overline{AB}$ и $\left|\overline{AB}\right|$.
15. Даны два вектора $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 3$, и угол между этими векторами равен $60°$. Постройте два вектора $2\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - 3\overline{b}$.
16. Найдите скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a}(2, 3, 0)$ и $\overline{b}(4, -5, 1)$.
17. Найти векторное произведения двух векторов $\overline{a}(2, 3, 0)$ и $\overline{b}(4, -5, 1)$.
18. Проверить коллинеарность векторов $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если $\overline{p}(3, -1, 2)$, $\overline{q}(-6, -2, -4)$.
19. Найти смешанное произведение трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $\overline{a}(2, 3, 0)$, $\overline{b}(4, -5, 1)$ и $\overline{c}(0, 2, -1)$.
20. Сформулируйте определение базиса.
21. Какие вектора называются равными?
22. Что такое ортвектор.
23. Дайте определение евклидова пространства.
24. Сформулируйте определение нормы вектора евклидова пространства.
25. Сформулируйте теорему Пифагора в V^n.
26. Как определяется угол между векторами евклидового пространства?
27. Сформулируйте определение ортонормированного базиса.
28. Сформулируйте определение линейного пространства.
29. Какие векторы называются ортогональными?
30. Сформулируйте теорему Коши-Буняковского.

Список использованных источников

1 **Апатенок, Р.Ф.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. пособие для вузов / Р.Ф. Апатенок [и др.].- 2-е изд., перераб. и доп. - Минск : Вышэйш. шк., 1986. - 272 с.

2 **Беклемишев, Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов / Д.В. Беклемишев.- 9-е изд., испр. - М. : Физматлит, 2001. - 376с.

3 **Беклемишева, Л.А.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб. пособие для вузов / Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров; под ред. Д.В. Беклемишева. - М. : Наука, 1987. - 496 с.

4 **Гусак А.А**. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. – Изд. 3-е, стереотип. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – 288 с.

5 **Гусак А.А.** Высшая математика. В 2-х т. Т. 1.: учебник для студентов вузов. – 4-е изд., стереотип. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – 544 с.

6 **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч.: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов. - М. : Высш. шк., 1967

7 **Ефимов, А.В.** Сборник задач по математике для втузов: учебное пособие для втузов /под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: Наука, 1986.

8 **Ильин, В.А.** Линейная алгебра: учеб. для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.- 5-е изд., стер. - М. : Физматлит, 2002. - 320 с.

9 **Канатников, А.Н.,** Линейная алгебра: учеб. для вузов / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. - М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 336 с.

10 **Клетеник, Д.В.** Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие для вузов / Д.В. Клетеник.- 14-е изд., испр.. - М. : Наука, 1986. - 224 с.

11 **Кострикин, А.И.** Введение в алгебру: учеб. для вузов: В 3-х ч. / А.И. Кострикин.- 2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2001. Ч.1.Основы алгебры. - 2001. - 272 с.; Ч.2: Линейная алгебра. - 2001. - 368 с. Ч.3 Основные структуры алгебры. - 2001. - 272 с.

12 **Крутицкая, Н.Ч.** Линейная алгебра в вопросах и задачах: учеб. пособие для вузов / Н.Ч. Крутицкая , А.А. Шишкин . - М. : Высш. шк., 1985. - 120 с.

13 **Лунгу, К.Н.** Сборник задач по высшей математике / Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.. 1 курс. – М.: Рольф, 2001. – 576

14 **Михалев, А.В.** Начала алгебры: [учеб. пособие] / А.А. Михалев, А.В. Михалев. - М. : Интернет-ун-т информ. техн, 2005.

12 **Проскуряков, И.В.** Сборник задач по линейно алгебре: учеб. пособие для вузов / И.В. Проскуряков.- 8-е изд. - М. : ЛБЗ, 2001. - 384с.

15 **Солодовников, А.С.** Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: учеб. пособие для учащихся сред. спец. учеб. заведений / А.С. Солодовников, Г.А. Торопова. - М.: Высш. шк., 1987. - 255с.

16 **Фадеев, Д.К.** Задачи по высшей алгебре: учебное пособие для вузов / Д.К. Фадеев, И.С. Соминский. – 13-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2001. – 288с.