МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Кафедра математического обеспечения информационных систем

М.Ю. НЕСТЕРЕНКО

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2007

УДК 519.83:33(075.8)
ББК 22.18+65я73
Н 55

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент С.А.Герасименко

Нестеренко М.Ю.

Статистические игры: методические указания к лабораторной и самостоятельной работе студентов/М.Ю. Нестеренко - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. - 36с.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы по курсу теория игр и могут быть использованы в самостоятельной работе студентов при изучении курсов теория принятия решений и управления риском, теория риска и моделирование рисковых ситуаций, математические методы и модели в экономике.

ББК 22.18+65я73

Содержание

Введение

В теории принятия решений статистические игры являются основным подходом, если решение принимается в условиях частичной неопределенности.

Статистические модели представляют собой игру двух лиц (человека и природы) с использованием человеком (статистиком) дополнительной статистической информации о состояниях природы.

В статистических играх неопределенность вызвана не умным и проницательным противником, а недостаточной информированностью статистика о поведении противника - "природы". Поэтому игры с неполной информацией называются также играми с "природой". "Природа" - это непредсказуемый в своих действиях игрок, поведение которого случайно с известным или неизвестным статистику распределением вероятностей ее состояний (стратегий).

Ставится задача построить модель исследуемой ситуации в виде статистической игры (без эксперимента и с проведением эксперимента), найти решение игры и дать экономическую интерпретацию решения.

Цель настоящей лабораторной работы - практическое ознакомление с методами принятия решений в условиях неопределенности и риска с использованием статистических игр.

1 Описание лабораторной работы «Статистические игры»

Лабораторная работа включает следующие этапы:

- постановку задачи;
- ознакомление с порядком выполнения работы в среде MathCad;
- построение модели в виде статистической игры без эксперимента и проведение расчетов для индивидуальных задач;
- построение модели в виде статистической игры с экспериментом и проведение расчетов для индивидуальных задач;
- подготовку письменного отчета;
- защиту лабораторной работы.

2 Постановка задачи

Для исследуемой ситуации построить модель в виде игры с природой и найти оптимальную стратегию, для этого:

- определить множество стратегий игрока и состояний природы;
- построить матрицу выигрышей игры с природой;
- построить матрицу рисков;
- найти оптимальные стратегии игрока в статистической игре без эксперимента по критериям пессимизма (Вальда), Сэвиджа,

Гурвица, Байеса;

- построить оптимальную функцию решения (чистую или смешанную) игрока в статистической игре с проведением эксперимента по критерию максимума среднего выигрыша;
- дать интерпретацию полученного решения для рассматриваемой задачи.

3 Пример решения задачи с помощью математического пакета MathCad

Для демонстрации решения статистической игры в среде MathCad рассмотрим задачу.

Небольшая частная фирма производит косметическую продукцию. В течение месяца может быть произведено *R1,R2..Rm* упаковок товара в зависимости от спроса, который может составить *D1,D2…Dn* упаковок. От продажи каждой упаковки фирма получает *c1 тыс. руб.* Косметика имеет малый срок годности, поэтому, если упаковка не продана в течение месяца, то она должна быть уничтожена. Поскольку производство одной упаковки обходится в *c2 тыс. руб.*, то потери фирмы составят *c2 тыс. руб.*, если упаковка не продана к концу месяца. За каждую неудовлетворенную единицу спроса (непроданную коробку) фирма теряет по одному клиенту. Потери фирмы от потери клиента составляют *c3 тыс. руб.*

Определить оптимальную стратегию поведения фирмы с проведением и без проведения дополнительных исследований рынка.

Рассмотрим частный случай: *m=3, R={15,16,17}* упаковок; *n=3*, *D={ 15,16,17}* упаковок; *c1=0.5 тыс. рублей, c2=0.3 тыс. рублей, c3=0.2 тыс. рублей.*

Построим для рассмотренной ситуации математическую модель в виде статистической игры.

1) Множество игроков - {I, II},
   где I игрок - фирма,
   II игрок - природа (рынок).

2) Множество чистых решений первого игрока (фирмы) – *{R1,R2, R3}*, где *Ri* -количество упаковок товара, *i=1..3*.
   Множество состояний природы — *{D1, D2, D3}* где *Dj* - потребность упаковок в месяц, *j=1..3*.

3) Статистическая игра может быть представлена матрицей игры с природой, элементы которой определяются функцией выигрыша статистика:

$$M(i,j)=\begin{cases} D_j\cdot(c_1-c_2)-(R_i-D_j)\cdot c_2;\, D_j\le R_i \\ R_i\cdot(c_1-c_2)-(D_j-R_i)\cdot c_3;\, D_j>R_i \end{cases}$$ где $i = 1…m, j=1…n$

Для определения оптимальных стратегии фирмы, в условиях неопределенности по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0,5) и Байеса (вектор вероятностей состояния природы равен (0.2; 0.5; 0.3)) возможно использование математического пакета MathCad.

3.1 Используемые инструменты и функции MathCad

Приступая к решению статистической игры в MathCad, познакомимся с инструментами, которые предоставляет система для этой цели.

Запускаем программу следующей последовательностью команд: Пуск -> Программы -> MathSoft Apps -> MathCad.

В задаче статистической игры возникает необходимость выполнять операции с матрицами и векторами. Для этого используется панель операций с матрицами и векторами Matrix (кнопка в панели математических инструментов).

На рисунке 1 представлен внешний вид панели операций с матрицами и векторами Matrix.

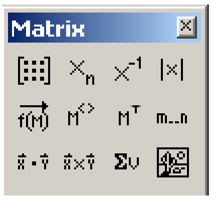


Рисунок 1 – Панель Matrix

Для того чтобы определить матрицу необходимо ввести с клавиатуры имя матрицы и знак присваивания (комбинация клавиш “Shift” + “:”). Затем щелчком на кнопке откройте на панели Matrix окно диалога (см. рисунок 2), определите число строк (Rows) и число столбцов (Columns).

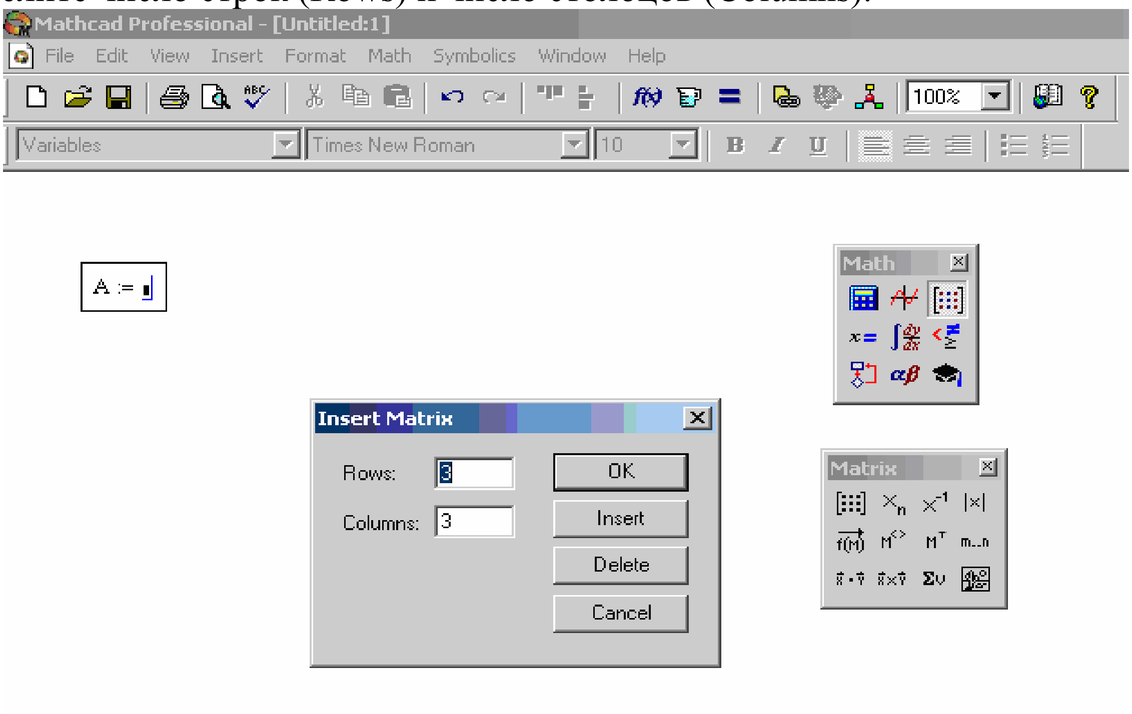


Рисунок 2 – Определение матрицы

В рабочем документе справа от знака присваивания открывается поле ввода матрицы с помеченными позициями для ввода элементов. Фрагмент рабочего документа в момент ввода элементов матрицы экспериментов приведен на рисунке 3.

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3 – Ввод элементов

Перечислим необходимые для решения задачи функции, предоставляемые панелью Matrix (рис. 1):

M^T - транспонирование матрицы;

$M^{\langle\rangle}$ - определение столбца матрицы;

Augment($M^{\langle 1\rangle}$, $M^{\langle 2\rangle}$, $M^{\langle 3\rangle}$)- формирует вектор из 3 элементов;

ORIGIN – переменная, которая хранит номер первой строки (столбца). По умолчанию в MathCad координаты векторов, столбцы и строки матрицы нумеруются, начиная с 0;

Max(A) – вычисление наибольшего значения матрицы или вектор-столбца;

Min(A) – вычисление наименьшего значения матрицы или вектор-столбца.

Поэтому в MathCad для нахождения максимума (минимума) строки необходимо сначала транспонировать исходную матрицу, затем выделить ее столбцы как вектора и, используя функцию max (min) найти максимум (минимум) векторов-столбцов.

А если, например, необходимо найти максимум из максимумов по строкам, необходимо сначала объединить значения в вектор, а затем найти его максимум.

Для решения статистической игры так же необходимо использовать панель Programming. На рисунке 4 показана панель Programming.

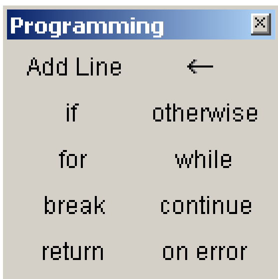


Рисунок 4 – Панель Programming

Набор инструментов панели Programming, необходимый для решения задачи:

1. *Add Line* – создает и при необходимости удлиняет жирную вертикальную линию, справа от которой в местах ввода задается запись программного блока;
2. ← - символ локального присваивания;
3. *if* – условная конструкция;
4. *for* – инструкция задания цикла, действующего до тех пор, пока выполняется некоторое условие;

Инструкция Add Line выполняет функции расширения программного блока. Расширение фиксируется удлинением вертикальной черты программных блоков или их древовидным расширением. Благодаря этому, в принципе, можно создавать сколь угодно большие программы.

```
D(m,n) := |▪
          |▪
```

Оператор ← выполняет функции внутреннего присваивания, например, $x \leftarrow 123$ присваивает переменной *x* значение 123. Локальный характер присваивания означает, что такое значение переменной *x* хранится только в теле программы. За пределами тела программы значение переменной *x* может быть неопределенным либо равным значению, которое задается вне программного блока операторами локального := или глобального ≡ присваивания.

Инструкция *if* позволяет строить условные выражения. Она задается в виде:

<Выражение> if < Условие>

Если условие выполняется, то возвращается значение выражения.

Инструкция *for* служит для организации циклов с заданным числом повторений. Она записывается в виде:

```
for i ∈ 1..n
  ▪
```

Эта запись означает, что выражение, помещенное в расположенное ниже место ввода, будет выполняться для значений переменной *i*, меняющейся от 1 до *n* с шагом +1.

3.2 Порядок выполнения работы в среде MathCad

Вычислим элементы матрицы игры с природой:

```
R := (15  16  17)    –количество произведенных упаковок

D := (15  16  17)    - количетво спроса на товар

c1 := 0.5          c2 := 0.3          c3 := 0.2

Матрица игры  с природой:

A(m,n) := | for i ∈ 0..m
          |   | for j ∈ 0..n
          |   |   | [a_{i,j} ← D_{0,j} · (c1 − c2) − (R_{0,i} − D_{0,i}) · c2]  if (D_{0,j} ≤ R_{0,i})
          |   |   | [a_{i,j} ← R_{0,i} · (c1 − c2) − (D_{0,j} − R_{0,i}) · c3]  if (D_{0,j} > R_{0,i})
          |   | a
          | a
```

$$A(2,2) = \begin{pmatrix} 3 & 2.8 & 2.6 \\ 2.7 & 3.2 & 3 \\ 2.4 & 2.9 & 3.4 \end{pmatrix}$$

Для нахождения оптимальной стратегии в статистической игре без проведения эксперимента воспользуемся основными критериями принятия решения в условиях неопределенности.

Рассмотрим критерий принятия решения **Байеса**. При известном распределении вероятностей состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша.

Пусть на основании исследований о спросе за предыдущие периоды оценены вероятности состояний рынка: $P = \{p_1, p_2, ... p_n\}$, где $\sum_{j=1}^{\grave{o}} p_j = 1$. Пусть данные вероятности составили: $P=\{0,2;0,5;0,3\}$.

Если для некоторой игры с природой, задаваемой платёжной матрицей $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$, стратегиям природы P_j соответствуют вероятности p_j, то лучшей стратегией игрока будет та, которая обеспечивает ему максимальный средний выигрыш, т.е.

$$\max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} .$$

Чтобы найти оптимальную стратегию, во-первых, необходимо задать вектор вероятностей P.

P - вектор вероятностей состояния природы

$$P := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Максимальное математическое ожидание:

$$Mat(m,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } t \in 0..m \\ \quad mat \leftarrow \max\left[\sum_{k=0}^{2} \left(P_{k,0} \cdot A(2,2)_{t,k}\right)\right] \\ mat \end{array} \right.$$

Затем по формуле нужно вычислить максимальное значение для каждой *i-ой* стратегии.

математическое ожидание 1-ой стратегии	математическое ожидание 2-ой стратегии	математическое ожидание 3-й стратегии
$Mat(2,0) = 2.95$	$Mat(1,0) = 3.04$	$Mat(0,0) = 2.78$

Далее следует объединить максимальные значения математических ожиданий каждого столбца в вектор (функция - *augment)* и получить максимальное значение этих ожиданий.

$$\max(augment(Mat(2,0), Mat(1,0), Mat(0,0))) = 3.04$$

В данной задаче получаем решение – 3.04, т.е согласно критерию Байеса лучшей стратегией является – вторая стратегия.

Максиминный критерий Вальда. За оптимальную стратегию принимается та, которая в наихудших условиях даёт максимальный выигрыш, то есть

$$\alpha = \max_i(\min_j a_{ij})$$

Для нахождения оптимального решения сначала выбирается минимальное значение в каждой строке. Для этого следует транспонировать матрицу А и нажать на панели Matrix кнопку $M^{\langle\rangle}$, указывая номер строки. Затем находится максимальное значение из $\min_j(a_{ij})$, которое соответствует оптимальной стратегии.

транспонирование матрицы игры с природой

$$AT := A(2,2)^T$$

$$\max\left(\min\left(AT^{\langle 0\rangle}\right), \min\left(AT^{\langle 1\rangle}\right), \min\left(AT^{\langle 2\rangle}\right)\right) = 2.7$$

В данном случае решением является вторая стратегия.

Критерий Сэвиджа. В качестве оптимальной выбирается та стратегия, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, то есть

$$\gamma = \min(\max_j r_{ij})$$

В данном критерии используется матрица риска $R = \{r_{ij}\}_{m \times n}$. Величина риска – это плата за отсутствие информации о состоянии природы, где r_{ij} - разность между выигрышем, который игрок получил бы, зная, что состояние природы будет *j* и выигрышем, который игрок получил бы, не имея этой информации.

$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где β_j - максимальный выигрыш в столбце матрицы *A*, $j = \overline{1,n}$.

максимум 1-го столбца $\max\left(A(2,2)^{\langle 0\rangle}\right) = 3$

максимум 2-го столбца $\max\left(A(2,2)^{\langle 1\rangle}\right) = 3.2$

максимум 3-го столбца $\max\left(A(2,2)^{\langle 2\rangle}\right) = 3.4$

Матрица риска R

$$R := \mathrm{augment}\left[\max\left(A(2,2)^{\langle 0\rangle}\right) - \left(A(2,2)^{\langle 0\rangle}\right), \max\left(A(2,2)^{\langle 1\rangle}\right) - \left(A(2,2)^{\langle 1\rangle}\right), \max\left(A(2,2)^{\langle 2\rangle}\right) - \left(A(2,2)^{\langle 2\rangle}\right)\right] = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.8 \\ 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.6 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Чтобы найти максимальное значение в каждой строке, матрицу риска следует транспонировать. Из этих значений выбирается минимум.

Транспонирование матрицы

$R1 := R^T$

Макс. элемент в строках матрицы риска

$V := \mathrm{augment}\left(\max\left(R1^{\langle 0\rangle}\right), \max\left(R1^{\langle 1\rangle}\right), \max\left(R1^{\langle 2\rangle}\right)\right) = ((0.8\ \ 0.4\ \ 0.6))$

Минимальное значение

$\min(V) = 0.4$

Соответственно оптимальным решением является решение, значения a_{ir} которое равно 0.4. В данном случае решением является вторая стратегия.

Критерий Гурвица. За оптимальную стратегию принимается та, для которой выполняется соотношение

$$\rho = \max_i(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij})$$

где $0 \le \lambda \le 1$ - коэффициент пессимизма.

Значение λ выбирается на основе экспертных оценок. Чем больше желание подстраховаться в данной ситуации, тем ближе к единице значение λ. В данной задаче $\lambda = 0.5$.

Сначала задаём λ.

$\lambda := 0.5$ –коэффициент пессимизма

Затем выбирается минимальное и максимальное значение в каждой строке и находится суммы $\lambda \min_j(a_{ij})$ и $(1-\lambda)\max_j(a_{ij})$.

Минимум по строкам умноженным на λ

$V := augment\left(\lambda \cdot min\left(AT^{\langle 0\rangle}\right), \lambda \cdot min\left(AT^{\langle 1\rangle}\right), \lambda \cdot min\left(AT^{\langle 2\rangle}\right)\right) = ((1.3\ \ 1.35\ \ 1.2))$

Максимум по строкам умноженным на (1-λ)

$V\_ := augment\left[(1-\lambda) \cdot max\left(A(2,2)^{\langle 0\rangle}\right), (1-\lambda) \cdot max\left(A(2,2)^{\langle 1\rangle}\right), (1-\lambda) \cdot max\left(A(2,2)^{\langle 2\rangle}\right)\right] = ((1.5\ \ 1.6\ \ 1.7))$

Можно найти максимальный элемент вектора $\lambda \min\limits_j(a_{ij}) + (1-\lambda)\max\limits_j(a_{ij})$.

Максимум из поэлементного сложения

$max(V + V\_) = 2.95$

В результате оптимальной стратегией является вторая.

Анализ результатов. Согласно критерию Вальда, Сэвиджа, Гурвица и Байеса лучшей стратегией является стратегия 2.

Таким образом, не проводя эксперимента, можем дать однозначные рекомендации по выбору решения – это вторая стратегия, но возможно информацию нужно уточнить, поэтому следует собрать дополнительную информацию путем проведения эксперимента.

Особенностью статистической игры является возможность углублять и уточнять свои знания относительно состояний природы путём постановки эксперимента.

Введем условные обозначения:

Ω - множество состояний природы;

θ_j - отдельное состояние природы, $\theta_j \in \Omega$

A - множество действий (решений) статистика;

a - отдельное решение статистика, $a \in A$.

L - функция потерь. Множества Ω и A численно определены, поэтому возможно установить распределение вероятностей. Так как принятое статистиком решение $a \in A$ и состояние природы $\theta_j \in \Omega$, то функция потерь запишется $L(\theta, a)$;

R - функция риска;

$W(X,Y)$ - платёж игрока 2 игроку 1, где X – совокупность стратегий игрока 1, Y - совокупность стратегий игрока 2.

D - совокупность всех нерандомизированных (чистых) функций решения;

$d(x)$ -функция решения. Характеристикой функции решения является функция потерь. Статистик перед принятием одного из возможных решений проводит эксперимент, который заключается в наблюдении случайной переменной x. В итоге представляется возможным получить распределение этой случайной переменной в зависимости от состояния природы θ .

По результатам дополнительного исследования спроса можно получить множество $X = \{ x_1, x_2, x_3 \}$, где x_1, x_2, x_3 – спрос составит 15, 16, 17 упаковок и оценки условных вероятностей – матрицу эксперимента.

Пусть по данным дополнительных исследований были оценены элементы матрицы эксперимента - условные вероятности получения отдельных результатов $x_i \in X$ для соответствующих состояний природы $\theta \in \Omega$.

	θ_1	θ_2	θ_3
x_1	0.7	0.3	0.1
x_2	0.2	0.5	0.2
x_3	0.1	0.2	0.4

Функция решения, отображающая множество выборок X_θ в множество решений статистика *A*, называется нерандомизированной (чистой) функцией решения статистика. По результатам эксперимента $\bar{x}$ статистик определяет, какое решение $a \in A$ он должен выбрать. Для выбора из множества *D* наилучшей функции решения он использует функцию риска.

Функция риска зависит от множества состояний природы и от множества функций решения и принимает значение, выраженное действительными числами. Она определяет математическое ожидание функции потерь при некотором состоянии природы θ и известной статистику функции распределения.

Функция риска:

$$R(\theta, d) = ML(\theta, a),$$

где М – знак математического ожидания

$L(\theta, a)$ - функция потерь при состоянии природы θ и $d(x) = a$ и принимает значения $L(\theta, a) = -W(\theta, a)$.

От статистической игры следует перейти к задаче в условиях риска.

Обозначим *D* – множество стратегий статистика, т.е. множество функций *d*, отображающих множество *X* во множество *A*.

Функцией платежей преобразуется в функцию риска $R(\theta, d) = M(L(\theta, a))$.

В среде MathCad матрица эксперимента и матрица потерь записывается следующим образом:

Матрица экспериментов

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

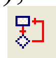
Вектор вероятностей

$$P := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Матрица потерь

$$L := -A(2,2)$$

$$L = \begin{pmatrix} -3 & -2.8 & -2.6 \\ -2.7 & -3.2 & -3 \\ -2.4 & -2.9 & -3.4 \end{pmatrix}$$

Для решения статистической игры следует составить таблицу множества возможных нерандомизированных функций решений d $(d \in D, 3^3 = 27)$ при разных x_i.. Для этого строится функция *D(m,n),* (где *m* – мощность множества *A*, *n* – мощность множества *X*), используя панель *Programming,* которая появится при нажатии на кнопку  .

Функция составления множества решений

```
D(m,n) := | for i ∈ 0..m − 1
          |   (d_{i,0} ← 0)
          | for k ∈ 1..(m^n − 1)
          |   | d^⟨k⟩ ← d^⟨k−1⟩
          |   | i ← (m − 1)
          |   | while [(i ≥ 0) ∧ (d_{i,k} + 1 > m − 1)]
          |   |   | d_{i,k} ← mod(d_{i,k} + 1, m)
          |   |   | i ← (i − 1)
          |   | d_{i,k} ← (d_{i,k} + 1)  if (i ≥ 0)
          | d
```

D(3,3) =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Далее по данной функции рассчитываются значения риска. На основании функции потерь и данными вероятностями состояний природы можно получить математические ожидания потерь, т.е. функции риска.

Для этого нужно составить функцию риска *R(m,n),* где *m* – мощность множества *A*, *n* – количество функций решений *D*.

Функция риска

$$R(m,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..m \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \quad \left(r_{k,i} \leftarrow \sum_{j=0}^{2} L_{D(3,3)_{j,i},k} \cdot \Omega_{j,k} \right) \\ r \end{array} \right. \\ r \end{array} \right.$$

R(2,26) =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	-3	-2.97	-2.94	-2.94	-2.91	-2.88	-2.88	-2.85	-2.82	-2.79	-2.76	-2.73	-2.73	-2.7	-2.67	-2.67	-2.64	-2.61	-2.58	-2.55	-2.
1	-2.8	-2.88	-2.82	-3	-3.08	-3.02	-2.85	-2.93	-2.87	-2.92	-3	-2.94	-3.12	-3.2	-3.14	-2.97	-3.05	-2.99	-2.83	-2.91	-2.
2	-2.6	-2.88	-3.16	-2.68	-2.96	-3.24	-2.76	-3.04	-3.32	-2.64	-2.92	-3.2	-2.72	-3	-3.28	-2.8	-3.08	-3.36	-2.68	-2.96	-3.

Оптимальной стратегией статистика будет байесовская функция решения, которую можно оценить с использованием функции распределения вероятностей P_j .

С учетом априорного распределения можно определить оптимальную байесовскую функцию, минимизируя риски.

Для этого нужно вычислить все 27 значений и выбрать минимальное из них:

Байесовская функция

$$R1(m,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..26 \\ \quad r1_{0,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{2} P_{k,0} \cdot R(2,26)_{k,i} \\ r1 \end{array} \right.$$

R1(0,26) =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-2.78	-2.898	-2.946	-2.892	-3.01	-3.058	-2.829	-2.947	-2.995	-2.81	-2.928	-2.976	-2.922	-3.04	-3.088	-2.859

Минимальное значение функции Байеса

$$\min(R1(0,26)) = -3.088$$

Из полученных данных можно заключить, что

$$\min_{d \in D} r(\xi, d\ ) = r(\xi, d_{14}) = -3.088$$

Итак, байесовской стратегией статистика в статистической игре будет функция решения d_{14} , в которой $d_{14}(x_1) = a_2$, $d_{14}(x_2) = a_2$, $d_{14}(x_3) = a_3$, учитывая, что множества составленных решений нумеруются с 0 (удобное представление матриц в MathCad).

Анализ результатов. Согласно полученным результатам частному предприятию рекомендуется для уточнения информации о спросе провести эксперимент, который состоит в прогнозировании спроса. Если в результате эксперимента прогнозируется спрос в 15, 16 единиц, то предприятию рекомендуется производить 16 единиц. А если - 17 единиц, то предприятию рекомендуется производить 17 единиц продукции.

Для полного исследования ситуации следует попытаться получить минимаксную, более осторожную стратегию.

Минимаксную функцию решения следует искать как смешанную стратегию среди рандомизированных функций решения, потому что матрица значений функций риска $R(\theta,d)$ для нерандомизированных функций решения $d \in D$ не имеет седловой точки.

События, состоящие в том, что игрок применяет какую-либо из своих чистых стратегий, образуют для игрока полную группу событий. Следовательно, сумма координат вектора P равна единице:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

Кроме того, по свойству вероятности, для координат смешанной стратегии выполняется неравенство:

$$0 \le p_j \le 1, j = \overline{1,n}$$

Применяя оптимальную стратегию P^* , статистик получает средние потери (математическое ожидание величины проигрыша). Таким образом, вычисляя средние потери игрока A, строится система неравенств

$$\begin{cases} r_1 = r_{11}p_1 + r_{12}p_2 + ... + r_{1n}p_n \le v \\ r_2 = r_{21}p_1 + r_{22}p_2 + ... + r_{2n}p_n \le v \\ .... \\ r_m = r_{m1}p_1 + r_{m2}p_2 + ... + r_{mn}p_n \le v \end{cases}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

Разделив каждое из неравенств на цену игры v (в предположении, что v>0) и обозначив:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, x_2 = \frac{p_2}{v}, ..., x_n = \frac{p_n}{v}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + ... + r_{1n}x_n \le 1 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + ... + r_{2n}x_n \le 1 \\ .... \\ r_{m1}x_1 + r_{m2}x_2 + ... + r_{mn}x_n \le 1 \end{cases}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

Целевая функция для статистика получается, учитывая, что статистик стремится получить минимальный проигрыш в игре. Разделив равенство $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ на цену игры v, получаем равенство:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{1}{v},$$

которое будет иметь наибольшее значение при достижении статистиком минимального проигрыша. Поэтому в качестве целевой функции можно взять функцию:

$$F(x) = x_1 + x_2 + ... + x_n,$$

Задачу линейного программирования формулируется следующим образом: определить значения переменных $x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$, так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям:

$$\begin{cases} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + ... + r_{1n}x_n \leq 1 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + ... + r_{2n}x_n \leq 1 \\ .... \\ r_{m1}x_1 + r_{m2}x_2 + ... + r_{mn}x_n \leq 1 \end{cases}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

и при этом целевая функция $F(x) = x_1 + x_2 + ... + x_n$ имела максимальное значение.

Решая задачу, получаем оптимальную стратегию задачи линейного программирования $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, для которой значение целевой функции равно:

$$F(X^*) = \max F(X).$$

Цена игры v:

$$v = \frac{1}{F(X^*)}$$

Координаты смешанной оптимальной стратегии P^* статистика:

$$p_j = v \cdot x_j, j = \overline{1,n}$$

В среде MathCad для увеличения скорости вычислений функция значений матрицы риска присваивается переменной *M*. А значение целевой функции *f(x)* и правая часть системы ограничений *v(m)* запишется следующим образом:

$$M := R2(2,26)$$

$$f(x) := x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26}$$

$$v(m) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..m \\ \quad v_i \leftarrow 1 \\ v \end{array} \right.$$

В MathCad существует встроенная функция решения задачи условной максимизации *Maximize(f,x)*, где f - целевая функция. Перед ее использованием необходимо обнулить последнюю переменную вектора X. Она содержится в программном блоке *Given* и выглядит следующим образом:

$$x_{26} := 0$$

Given

$$M \cdot x \leq v(2)$$

$$x \geq 0$$

$$X := \text{Maximize}(f, x)$$

Результатом является оптимальное решение задачи линейного программирования $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ для которого значение целевой функции является максимальным:

$X^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	1.151	0	0	0.42	0.229	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$f(X) = 1.8$

Далее вычисляется цена игры *v* и вычисляем координаты смешанной оптимальной стратегии *P=v*X* статистика:

$V := \frac{1}{f(X)}$ $V = 0.555$

$V \cdot X^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0.639	0	0	0.233	0.127	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Анализ результатов. Минимаксная стратегия, еще более осторожная, чем оптимальная байесовская, заключается в использовании стратегий d_1 (в которой $d_1(x_1) = a_1$, $d_1(x_2) = a_1$, $d_1(x_3) = a_2$), d_4 (в которой $d_4(x_1) = a_1$, $d_4(x_2) = a_2$, $d_4(x_3) = a_2$), d_5 (в которой $d_5(x_1) = a_1$, $d_5(x_2) = a_2$, $d_5(x_3) = a_3$) с вероятностью соответственно 0,64, 0,23 и 0,13.

Можно дать иную интерпретацию полученного решения - пусть за условные единицы приняты тонны. Тогда если спрос составляет 15 тонн, то предприятию рекомендуется производить 15 тонн продукции. Если спрос составил 16 тонн, то рекомендуется производить 15*0,64+16*0,36=15,36 тонн. Если спрос составил 17 тонн, то рекомендуется производить 16*0,87+17*0,13= 16,13 тонн.

4 Содержание письменного отчета

1 Постановка задачи.
2 Краткое изложение теоретического материала по темам "Статистические игры без эксперимента (игры с природой)" и "Статистические игры с проведением эксперимента".
3 Результаты моделирования в виде игры с природой.
4 Решение игры с помощью математического пакета MathCad.
5 Анализ полученных результатов и выводы.

5 Вопросы к защите лабораторной работы

1 В каких случаях применяется моделирование игрой с природой?
2 Что означает стратегия природы?
3 Что такое матрица рисков и как ее можно получить?
4 Дайте определение идеального и неидеального эксперимента.
5 Что такое функция решения статистика?

6 Что является элементами матрицы эксперимента?
7 Что является характеристикой функции решения и как она определяется?
8 В каких случаях целесообразно проводить эксперимент?

Список использованных источников

1 Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе : учеб. пособие для вузов /А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев, Т.П. Барановская; под ред. Б.А. Лагоши.-2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2003 - 224 с.

2 Протасов, И.Д. Теория игр и исследование операций: учеб. пособие / И.Д. Протасов. - М.: Гелиос АРВ, 2003 - 368с.

3 Лабскер, Л.Г. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом: учеб. пособие для вузов / Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко; Акад. нар. хоз-ва при Правительстве РФ. -М.: Дело, 2001. - 464 с.

4 Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. - М.: ВЫСШ.ШКОЛА, 1986. – 320с.

5 Плис, А.И. MathCad. Математический практикум для инженеров и экономистов: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.: ил

6 Дьяконов, В. MathCad 2000: учебный курс / В. Дьяконов – СПб.: Питер, 2001. – 592 с.: ил.

7 Нестеренко, М.Ю. Стратегические игры: методические указания к лабораторной и самостоятельной работе студентов / М.Ю. Нестеренко, О.Н. Яркова – Оренбург: ГОУ ВПО ОГУ, 2004. – 31с.

Приложение А
(обязательное)

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Политик проводит предвыборную компанию. На последний день агитации у него остались неиспользованные денежные ресурсы, которые он желает использовать для прироста голосов избирателей.

Политику доступны три метода агитации: раздача прохладительных напитков, агитация прохожих с использованием профессиональных агитаторов и реклама на ТВ. Эти методы требуют различных денежных затрат и могут дать различный эффект в зависимости от погодных условий.

Затраты на проведение агитационных мероприятий составляют А1, А2, А3 денежных единиц.

Прирост голосов составляет П1, П2, П3 соответственно.

Суммарные затраты на агитацию составляет S.

На основании прогноза погоды оценены вероятности состояния природы и задан вектор вероятности. Точность прогноза определяется оценками условных вероятностей $P(A_i/П_i)$.

Определить оптимальное содержание агитационной компании.

Прирост голосов

	Жарко	Солнечно	Дождливо
Раздача напитков	90	20	0
Агитаторы на улицах	15	75	5
Реклама на ТВ	250	50	350

Затраты

	Затраты
Раздача напитков	5
Агитаторы на улицах	2
Реклама на ТВ	10

План

Прирост голосов	План
Раздача напитков	20
Агитаторы на улицах	50
Реклама на ТВ	10

Априорные вероятности

Жарко	Солнечно	Дождливо
0,3	0,5	0,2

Задача 2

Предприятие может производить 4 вида продукции: рис, пшеница, рожь, ячмень. Урожайность сельскохозяйственных культур зависит от погодных условий в течении сезона. Возможны три состояния природы: жарко, тепло, холодно.

Затраты на производство единицы риса, пшеницы, ржи и ячменя составляют A1, A2, A3 и A4 соответственно.

Прибыль от реализации единицы риса, пшеницы, ржи и ячменя составляют П1, П2, П3 и П4 соответственно.

Суммарные затраты на производство всех видов продукции за сезон составляет S.

На основании прогноза погоды оценены вероятности состояния природы и задан вектор вероятности. Точность прогноза определяется оценками условных вероятностей $P(A_i/П_i)$.

Определить оптимальную стратегию предприятия для получения максимальной прибыли.

Прибыль с единицы продукции

	Жарко	Тепло	Холодно
Рис	80	30	-15
Пшеница	15	60	5
Рожь	-4	19	47
Ячмень	5	35	30

Затраты агронома

	Затраты
Рис	5
Пшеница	3
Рожь	2
Ячмень	3

План

Прирост голосов	План
Рис	200
Пшеница	333
Рожь	500
Ячмень	333

Априорные вероятности

Жарко	Солнечно	Дождливо
0,2	0,7	0,1

Задача 3

В некоторой информационной системе системный администратор продумывает, какие группы пользователей ему следует создать и как наиболее рационально разграничить права доступа. В зависимости от задач, которые должна решать информационная система, системный администратор должен создать группы пользователей, такие как: Администраторы, Пользователи и Гости.

Таким образом получаем множество решений А = {A_1, A_2, A_3}, где

A_1 – создать группу Администраторы;

A_2 – создать группу Пользователи;

A_3 – создать группу Гости.

Информационная система предполагает выполнения в ней группами пользователей следующих операций: Администрирование, Программирование и Чтение документов.

Таким образом получаем множество состояний природы П = {$П_1$, $П_2$, $П_3$}, где

$П_1$ – Администрирование;

$П_2$ – Программирование;

$П_3$ – Чтение документов.

Матрица выигрышей представлена в таблице А.3.1.

Таблица А.3.1 - Матрица выигрышей

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	1	0,4	0,2
A_2	0,3	0,85	0,5
A_3	0,05	0,4	1

Вероятности состояний природы задаются следующим образом: $P(П_1)=0,3$; $P(П_2)=0,5$; $P(П_3)=0,2$.

Условные вероятности получения отдельных результатов X, при соответствующих состояний природы П заданы в таблице А.3.2.

Таблица А.3.2 - Условные вероятности

$P(X_1;П_1)=0,7$	$P(X_1;П_2)=0,25$	$P(X_1;П_3)=0,15$
$P(X_2;П_1)=0,2$	$P(X_2;П_2)=0,7$	$P(X_2;П_3)=0,35$
$P(X_3;П_1)=0,1$	$P(X_3;П_2)=0,05$	$P(X_3;П_3)=0,5$

Определить разграничения прав доступа группам пользователей таким образом, чтобы они оказались наиболее оптимальными.

Задача 4

Нефтедобывающая компания занимается бурением нефтяных скважин. Компания должна решить, сколько нужно бурить скважин в год.

Множество решений A = $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

A_1 – бурить 1 скважину;

A_2 – бурить 2 скважины;

A_3 – бурить 3 скважины;

A_4 – бурить 4 скважины.

Множество состояний природы П = $\{П_1, П_2, П_3, П_4\}$

$П_1$ – залежи на низкой глубине;

$П_2$ – на средней глубине;

$П_3$ – на выше средней;

$П_4$ – на большой глубине.

Задана матрица выигрышей компании:

	П1	П2	П3	П4
A1	300	200	100	-50
A2	500	400	300	-100
A3	450	380	-50	-300
A4	400	100	-100	-500

Заданы вероятности состояний природы: P(П1)=0.3; P(П2)=0.4; P(П3)=0.6; P(П4)=0.7;

В результате проведения дополнительных исследований, были получены условные вероятности получения отдельных результатов x , для соответствующих состояний природы П.

P(x1;П1)=0.5	P(x1;П2)=0.4	P(x1;П3)=0.2	P(x1;П4)=0.05
P(x2;П1)=0.3	P(x2;П2)=0.25	P(x2;П3)=0.27	P(x2;П4)=0.15
P(x3;П1)=0.15	P(x3;П2)=0.2	P(x3;П3)=0.13	P(x3;П4)=0.3
P(x4;П1)=0.05	P(x4;П2)=0.15	P(x4;П3)=0.3	P(x4;П4)=0.5

Задача 5

Некоторой компьютерной фирме необходимо сконфигурировать и построить компьютерную сеть для различных предприятий. В зависимости от класса задач, которые должны быть реализованы на каждом из предприятий, компьютерная фирма должна сконфигурировать следующие конфигурации комплектующих компонентов сети.

Таким образом получаем множество решений А = {$А_1$, $А_2$, $А_3$}, где

$А_1$ – собрать конфигурацию: сетевой кабель, компьютеры средней мощности, сервер, ч/б лазерный принтер;

$А_2$ – собрать конфигурацию: сетевой кабель, компьютеры высокой мощности, сервер, цветной лазерный принтер, ч/б лазерный принтер, плоттер;

$А_3$ – собрать конфигурацию: сетевой кабель, компьютеры высокой мощности, сервер, высокоскоростной доступ в Internet, ч/б лазерный принтер.

Следующие предприятия, для которых предполагается проведение работ: Реелторская контора, Инженерно-конструкторская организация и Банковское учреждение.

Таким образом получаем множество состояний природы П = {$П_1$, $П_2$, $П_3$}, где

$П_1$ – Риелторская контора;

$П_2$ – Инженерно-конструкторская организация;

$П_3$ – Банковское учреждение.

Матрица выигрышей представлена в таблице А.5.1.

Таблица А.5.1 - Матрица выигрышей

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	450	-50	150
$А_2$	150	500	300
$А_3$	250	350	480

Вероятности состояний природы задаются следующим образом: $P(П_1)=0,3$; $P(П_2)=0,5$; $P(П_3)=0,2$.

Условные вероятности получения отдельных результатов X, при соответствующих состояний природы П заданы в таблице А.5.2.

Таблица А.5.2 - Условные вероятности

$P(X_1;П_1)=0,75$	$P(X_1;П_2)=0,01$	$P(X_1;П_3)=0,15$
$P(X_2;П_1)=0,1$	$P(X_2;П_2)=0,9$	$P(X_2;П_3)=0,25$
$P(X_3;П_1)=0,15$	$P(X_3;П_2)=0,09$	$P(X_3;П_3)=0,6$

Сконфигурировать и построить компьютерную сеть таким образом, чтобы конфигурация сети удовлетворяла всем требованиям пользователей; а также сетевое оборудование не должно быть избыточным.

Задача 6

На рынке работает фирма ООО «Скат». Она производит 4 вида продукции: А1 – короткие удочки, А2 – спиннинги, А3 – телескопические удочки, А4 – короткие сети.

Спрос на продукцию фирмы определяется состоянием рынка $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$. Прибыль фирмы в зависимости от спроса представлена в таблице А.6.1.

Найти наилучшие стратегии поведения фирмы без проведения эксперимента (по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0.7), Байеса) и с проведением эксперимента, если заданы вектор априорных вероятностей состояний рынка $P=(P_1, P_2, P_3, P_4)$ (таблица А.6.2) и матрица эксперимента (таблица А.6.3).

Таблица А.6.1 - Прибыль фирмы в зависимости от спроса

		П1	П2	П3	П4
Вариант 1	А1	20	19	17	15
	А2	19	21	18	19
	А3	15	18	22	16
	А4	15	16	19	21
Вариант 2	А1	20	21	15	13
	А2	22	20	14	17
	А3	18	17	20	15
	А4	15	18	21	22
Вариант 3	А1	16	15	18	21
	А2	15	21	15	19
	А3	11	20	22	17
	А4	25	11	15	19
Вариант 4	А1	20	15	25	15
	А2	28	21	18	15
	А3	15	11	22	23
	А4	15	23	11	21
Вариант 5	А1	11	19	17	18
	А2	19	11	18	20
	А3	17	18	11	19
	А4	18	20	19	11
Вариант 6	А1	20	19	17	15
	А2	19	21	18	16
	А3	17	18	22	11
	А4	15	16	11	23
Вариант 7	А1	10	9	7	5
	А2	9	11	8	9
	А3	5	8	12	6
	А4	5	6	9	11

Продолжение таблицы А.6.1 - Прибыль фирмы в зависимости от спроса

		П1	П2	П3	П4
Вариант 8	А1	20	19	17	15
	А2	19	20	17	15
	А3	15	17	20	19
	А4	15	19	17	20
Вариант 9	А1	18	19	17	11
	А2	19	18	18	19
	А3	15	18	19	16
	А4	11	16	19	19
Вариант 10	А1	15	19	17	15
	А2	19	18	18	19
	А3	15	18	22	16
	А4	15	21	19	21
Вариант 11	А1	20	19	22	15
	А2	20	21	18	19
	А3	20	18	22	16
	А4	20	21	19	21
Вариант 12	А1	20	19	17	11
	А2	18	21	20	11
	А3	11	18	22	16
	А4	11	16	19	21
Вариант 13	А1	20	19	17	15
	А2	11	21	18	19
	А3	15	18	22	11
	А4	15	11	19	21
Вариант 14	А1	15	19	15	15
	А2	19	15	18	19
	А3	15	18	15	23
	А4	15	16	19	15

Таблица А.6.2 - Вектор априорных вероятностей состояний рынка

Варианты	P1	P2	P3	P4
1	0,2	0,3	0,3	0,2
2	0,4	0,1	0,3	0,2
3	0,2	0,4	0,1	0,3
4	0,2	0,2	0,4	0,2
5	0,1	0,2	0,2	0,5
6	0,1	0,4	0,4	0,1
7	0,1	0,3	0,4	0,2
8	0,1	0,3	0,5	0,1
9	0,3	0,2	0,2	0,3

Продолжение таблицы А.6.2 - Вектор априорных вероятностей состояний рынка

Варианты	Р1	Р2	Р3	Р4
10	0,25	0,05	0,1	0,6
11	0,1	0,3	0,3	0,3
12	0,25	0,35	0,1	0,3
13	0,1	0,6	0,1	0,2
14	0,15	0,25	0,5	0,1

Таблица А.6.3 – Матрица эксперимента

	$P(x_i\|_{Dj})$	D_1	D_2	D_3	D4
Вариант 1	X1	0.1	0.4	0.2	0.3
	X2	0.2	0.3	0.4	0.1
	X3	0.3	0.2	0.3	0.4
	X4	0.4	0.1	0.1	0.2
Вариант 2	X1	0.3	0.1	0.25	0.1
	X2	0.2	0.4	0.25	0.1
	X3	0.2	0.4	0.25	0.1
	X4	0.3	0.1	0.25	0.7
Вариант 3	X1	0.2	0.1	0.7	0.5
	X2	0.4	0.1	0.1	0.1
	X3	0.2	0.7	0.1	0.3
	X4	0.2	0.1	0.1	0.1
Вариант 4	X1	0.4	0.2	0.3	0.6
	X2	0.4	0.2	0.2	0.3
	X3	0.1	0.2	0.1	0.05
	X4	0.1	0.4	0.4	0.05
Вариант 5	X1	0.5	0.2	0.2	0.3
	X2	0.3	0.2	0.5	0.3
	X3	0.1	0.3	0.1	0.3
	X4	0.1	0.3	0.2	0.1
Вариант 6	X1	0.5	0.4	0.1	0.5
	X2	0.1	0.1	0.2	0.2
	X3	0.2	0.1	0.3	0.2
	X4	0.2	0.4	0.4	0.1
Вариант 7	X1	0.1	0.1	0.1	0.7
	X2	0.1	0.1	0.7	0.1
	X3	0.1	0.7	0.1	0.1
	X4	0.7	0.1	0.1	0.1
Вариант 8	X1	0.2	0.2	0.1	0.4
	X2	0.2	0.4	0.1	0.3
	X3	0.2	0.1	0.4	0.2
	X4	0.4	0.3	0.4	0.1

Продолжение таблицы А.6.3 - Матрица эксперимента

	P(xi|Dj)	D1	D2	D3	D4
Вариант 9	X1	0.1	0.2	0.5	0.3
	X2	0.3	0.2	0.1	0.5
	X3	0.3	0.5	0.1	0.1
	X4	0.3	0.1	0.3	0.1
Вариант 10	X1	0.4	0.3	0.1	0.2
	X2	0.3	0.4	0.2	0.3
	X3	0.1	0.2	0.4	0.1
	X4	0.2	0.1	0.3	0.4
Вариант 11	X1	0.8	0.05	0.05	0.1
	X2	0.1	0.8	0.05	0.05
	X3	0.05	0.1	0.8	0.05
	X4	0.05	0.05	0.1	0.8
Вариант 12	X1	0.25	0.3	0.4	0.1
	X2	0.25	0.2	0.1	0.4
	X3	0.25	0.2	0.4	0.1
	X4	0.25	0.3	0.1	0.4
Вариант 13	X1	0.5	0.35	0.45	0.1
	X2	0.15	0.1	0.1	0.4
	X3	0.15	0.2	0.4	0.15
	X4	0.2	0.35	0.05	0.35
Вариант 14	X1	0.15	0.5	0.4	0.1
	X2	0.15	0.2	0.1	0.4
	X3	0.25	0.2	0.3	0.1
	X4	0.45	0.1	0.2	0.4

Задача 7

Небольшая частная фирма ЧП «Крылов» производит кондитерские изделия. В течение месяца реализуется R1,R2..Rm упаковки тортов. От продажи каждой упаковки фирма получает c1 руб. прибыли. Торты имеют малый срок годности, поэтому, если упаковка не продана в течение месяца, то она должна быть уничтожена. Поскольку производство одной упаковки обходится в c2 руб. потери фирмы составят c2 руб., если упаковка не продана к концу месяца. Фирма может не продать только 2 упаковки тортов без потери клиентов. За каждую лишнюю не проданную упаковку фирма теряет по одному клиенту. Потери фирмы от потери клиента составляют c3 руб.

Найти наилучшие стратегии поведения фирмы без проведения (по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0.6), Байеса) и с проведением эксперимента, если заданы вектор априорных вероятностей состояний рынка P=(P_1, P_2, P_3, P_4) (таблица А.7.2) и матрица эксперимента (таблица А.7.3).

Таблица А.7.1 – Прибыль фирмы в зависимости от спроса

Варианты	М	R	С1	С2	С3
1	М=5	{14,15,16,17,18}	0.3	0.5	0.6
2	М=4	{17,18,19,20}	0.2	0.5	0.7
3	М=5	{15,16,17,18,19}	0.4	0.5	0.7
4	М=4	{14,15,16,17}	0.4	0.6	0.5
5	М=4	{11,12,13,14}	0.3	0.7	0.8
6	М=5	{11,12,13,14,15}	0.6	0.8	0.9
7	М=5	{12,13,14,15,16}	0.3	0.7	1
8	М=4	{12,13,14,15}	0.5	0.6	0.7
9	М=5	{13,14,15,16,17}	0.5	0.8	1
10	М=4	{13,14,15,16}	0.55	0.83	0.91
11	М=5	{16,17,18,19,20}	0.45	0.55	0.70
12	М=4	{15,16,17,18}	0.50	0.63	0.78
13	М=5	{11,12,14,15,16}	0.48	0.62	0.71
14	М=4	{11,13,15,17}	0.33	0.75	0.68
15	М=5	{17,18,19,20,21}	0.56	0.6	0.63

Таблица А.7.2 - Вектор априорных вероятностей состояний рынка

Варианты	Р1	Р2	Р3	Р4	Р5
1	0,2	0,3	0,1	0,2	0.2
2	0,4	0,1	0,3	0,2	
3	0,2	0,25	0,1	0,3	0.15
4	0,2	0,2	0,4	0,2	
5	0,1	0,2	0,2	0,5	
6	0,1	0,3	0,4	0,1	0.1
7	0,1	0,3	0,1	0,2	0.3
8	0,1	0,3	0,5	0,1	
9	0,15	0,2	0,2	0,3	0.15
10	0,25	0,05	0,1	0,6	
11	0,1	0,3	0,3	0,1	0.2
12	0,25	0,35	0,1	0,3	
13	0,1	0,1	0,1	0,2	0.5
14	0,15	0,25	0,5	0,1	
15	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Таблица А.7.3 - Матрица эксперимента

	$P(x_i \mid_{Dj})$	D_1	D_2	D_3	D4	D5
Вариант 1	X1	0.1	0.4	0.2	0.3	0.2
	X2	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2
	X3	0.3	0.2	0.3	0.2	0.2
	X4	0.2	0.05	0.1	0.2	0.3
	X5	0.2	0.05	0.3	0.2	0.1
Вариант 2	X1	0.3	0.1	0.25	0.1	
	X2	0.2	0.4	0.25	0.1	
	X3	0.2	0.4	0.25	0.1	
	X4	0.3	0.1	0.25	0.7	
Вариант 3	X1	0.2	0.1	0.4	0.1	0.2
	X2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.4
	X3	0.2	0.3	0.1	0.3	0.2
	X4	0.2	0.1	0.2	0.4	0.1
	X5	0.2	0.4	0.2	0.1	0.1
Вариант 4	X1	0.4	0.2	0.3	0.6	
	X2	0.4	0.2	0.2	0.3	
	X3	0.1	0.2	0.1	0.05	
	X4	0.1	0.4	0.4	0.05	
Вариант 5	X1	0.5	0.2	0.2	0.3	
	X2	0.3	0.2	0.5	0.3	
	X3	0.1	0.3	0.1	0.3	
	X4	0.1	0.3	0.2	0.1	
Вариант 6	X1	0.4	0.2	0.1	0.1	0.1
	X2	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1
	X3	0.2	0.1	0.3	0.2	0.1
	X4	0.2	0.4	0.1	0.1	0.1
	X5	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6
Вариант 7	X1	0.1	0.1	0.1	0.6	0.2
	X2	0.1	0.1	0.5	0.1	0.2
	X3	0.05	0.3	0.1	0.1	0.3
	X4	0.7	0.1	0.1	0.1	0.2
	X5	0.05	0.4	0.2	0.1	0.1
Вариант 8	X1	0.2	0.2	0.1	0.4	
	X2	0.2	0.4	0.1	0.3	
	X3	0.2	0.1	0.4	0.2	
	X4	0.4	0.3	0.4	0.1	
Вариант 9	X1	0.05	0.2	0.5	0.2	0.2
	X2	0.3	0.2	0.1	0.5	0.2
	X3	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1
	X4	0.3	0.1	0.1	0.1	0.3
	X5	0.05	0.3	0.2	0.1	0.2

Продолжение таблицы А.7.3 - Матрица эксперимента

	$P(x_i\|_{Dj})$	D_1	D_2	D_3	D4	D5
Вариант 10	X1	0.4	0.3	0.1	0.2	
	X2	0.3	0.4	0.2	0.3	
	X3	0.1	0.2	0.4	0.1	
	X4	0.2	0.1	0.3	0.4	
Вариант 11	X1	0.6	0.05	0.05	0.1	0.2
	X2	0.1	0.5	0.05	0.05	0.2
	X3	0.05	0.1	0.6	0.05	0.2
	X4	0.05	0.05	0.1	0.4	0.2
	X5	0.2	0.3	0.2	0.4	0.2
Вариант 12	X1	0.25	0.3	0.4	0.1	
	X2	0.25	0.2	0.1	0.4	
	X3	0.25	0.2	0.4	0.1	
	X4	0.25	0.3	0.1	0.4	
Вариант 13	X1	0.2	0.35	0.25	0.1	0.3
	X2	0.15	0.1	0.1	0.4	0.3
	X3	0.15	0.2	0.4	0.15	0.3
	X4	0.2	0.35	0.05	0.15	0.05
	X5	0.3	0	0.2	0.2	0.05
Вариант 12	X1	0.15	0.5	0.4	0.1	
	X2	0.15	0.2	0.1	0.4	
	X3	0.25	0.2	0.3	0.1	
	X4	0.45	0.1	0.2	0.4	
Вариант 13	X1	0.5	0.25	0.25	0.1	0.3
	X2	0.15	0.1	0.1	0.3	0.1
	X3	0.15	0.2	0.4	0.25	0.3
	X4	0.1	0.15	0.05	0.15	0.05
	X5	0.1	0.3	0.2	0.2	0.25

Задача 8

На рынке существуют 5 крупнейших фирм А1,…,А5, в которые может вложить свои деньги Мистер Х. Мистер Х может получить свои деньги П1 – через месяц, П2 – через 2 месяца, П3 – через 3 месяца, П4 – через 4 месяца.

Прибыль от вклада Мистера Х представлена в таблице А.8.1.

У Мистера Х есть долг в 60 у.е., и в каждый последующий месяц, идущий после П1, на данную сумму начисляются 10% долга. Мистер Х не знает, в какой месяц он сможет получить деньги, но ему нужно помочь выбрать фирму для вложения денег.

Найти наилучшие стратегии Мистера Х без проведения (по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0.7), Байеса) и с проведением эксперимента, если заданы вектор априорных вероятностей состояний рынка P=($П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$) (таблица А.8.2) и матрица эксперимента (таблица А.8.3).

Таблица А.8.1 – Прибыли мистера Х

Природа Предприятия	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
$А_1$	60	70	80	90
$А_2$	70	50	80	80
$А_3$	50	80	60	70
$А_4$	60	60	90	80
$А_5$	60	50	70	100

Таблица А.8.2 - Вектор априорных вероятностей состояний рынка

Варианты	П1	П2	П3	П4
1	0,2	0,3	0,3	0,2
2	0,4	0,1	0,3	0,2
3	0,2	0,4	0,1	0,3
4	0,2	0,2	0,4	0,2
5	0,1	0,2	0,2	0,5
6	0,1	0,4	0,4	0,1
7	0,1	0,3	0,4	0,2
8	0,1	0,3	0,5	0,1
9	0,3	0,2	0,2	0,3
10	0,25	0,05	0,1	0,6
11	0,1	0,3	0,3	0,3
12	0,25	0,35	0,1	0,3
13	0,1	0,6	0,1	0,2
14	0,15	0,25	0,5	0,1
15	0,2	0,25	0,35	0,2

Таблица А.8.3 - Матрица эксперимента

	$P(x_i\|_{Dj})$	D_1	D_2	D_3	D4
Вариант 1	X1	0.1	0.4	0.2	0.3
	X2	0.2	0.2	0.1	0.1
	X3	0.3	0.2	0.3	0.05
	X4	0.2	0.1	0.1	0.2
	X5	0.1	0.1	0.3	0.35
Вариант 2	X1	0.3	0.1	0.25	0.1
	X2	0.2	0.4	0.25	0.1
	X3	0.2	0.1	0.25	0.1
	X4	0.1	0.1	0.05	0.1
	X5	0.2	0.3	0.2	0.6
Вариант 3	X1	0.2	0.1	0.7	0.5
	X2	0.4	0.1	0.1	0.1
	X3	0.2	0.7	0.1	0.3
	X4	0.2	0.1	0.1	0.1
	X5	0.2	0.3	0.2	0.6
Вариант 4	X1	0.4	0.2	0.3	0.6
	X2	0.4	0.2	0.2	0.3
	X3	0.1	0.2	0.1	0.05
	X4	0.1	0.4	0.4	0.05
Вариант 5	X1	0.5	0.2	0.2	0.3
	X2	0.3	0.2	0.5	0.3
	X3	0.1	0.3	0.1	0.3
	X4	0.1	0.3	0.2	0.1
Вариант 6	X1	0.5	0.4	0.1	0.5
	X2	0.1	0.1	0.2	0.2
	X3	0.2	0.1	0.3	0.2
	X4	0.2	0.4	0.4	0.1
Вариант 7	X1	0.1	0.1	0.1	0.7
	X2	0.1	0.1	0.7	0.1
	X3	0.1	0.7	0.1	0.1
	X4	0.7	0.1	0.1	0.1
Вариант 8	X1	0.2	0.2	0.1	0.4
	X2	0.2	0.4	0.1	0.3
	X3	0.2	0.1	0.4	0.2
	X4	0.4	0.3	0.4	0.1
Вариант 9	X1	0.1	0.2	0.5	0.3
	X2	0.3	0.2	0.1	0.5
	X3	0.3	0.5	0.1	0.1
	X4	0.3	0.1	0.3	0.1

Продолжение таблицы А.8.3 - Матрица эксперимента

	P(xi|Dj)	D1	D2	D3	D4
Вариант 10	X1	0.4	0.3	0.1	0.2
	X2	0.3	0.4	0.2	0.3
	X3	0.1	0.2	0.4	0.1
	X4	0.2	0.1	0.3	0.4
Вариант 11	X1	0.8	0.05	0.05	0.1
	X2	0.1	0.8	0.05	0.05
	X3	0.05	0.1	0.8	0.05
	X4	0.05	0.05	0.1	0.8
Вариант 12	X1	0.25	0.3	0.4	0.1
	X2	0.25	0.2	0.1	0.4
	X3	0.25	0.2	0.4	0.1
	X4	0.25	0.3	0.1	0.4
Вариант 13	X1	0.5	0.35	0.45	0.1
	X2	0.15	0.1	0.1	0.4
	X3	0.15	0.2	0.4	0.15
	X4	0.2	0.35	0.05	0.35
Вариант 14	X1	0.15	0.5	0.4	0.1
	X2	0.15	0.2	0.1	0.4
	X3	0.25	0.2	0.3	0.1
	X4	0.45	0.1	0.2	0.4

Задача 9

Фирма «Альфа» выпускает 4 вида товаров. Природа характеризуется 4 состояниями: П1 – жаркое лето, П2 – холодное лето и П3 – дождливое лето. Матрица выигрышей фирмы, предполагаемые от продажи товаров этим летом выглядит так:

$П_j$ A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	100	70	50
A_2	70	90	80
A_3	50	60	100
A_4	80	100	40

Составить матрицу рисков и найти наилучшие стратегии фирмы по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0.8), Байеса.

Задача 10

В некотором царстве жил-был царь. И было у него 3 сына: старший умный был детина; средний был и так, и сяк; младший вовсе был дурак. Чужеземный император захотел выдать дочек замуж за царевичей и дает приданного. А1 – выдаст старшую дочь, А2 – выдаст среднюю дочь, А3 – выдаст младшую дочь.

Матрица выигрышей царя равна:

Π_j A_i	Π_1 (старший сын)	Π_2 (средний сын)	Π_3 (младший сын)
A_1	10	8	5
A_2	7	9	6
A_3	6	7	10

Помогите царю выбрать невесту.

Составить матрицу рисков для царя и найти наилучшие стратегии царя по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0.5), Байеса.

Задача 11

Производится сравнение различных инвестиционных проектов $Пр_1$, $Пр_2$, …, $Пр_m$. Для реализации каждого из проектов необходима определенная величина капитальных вложений К={K_i}, $i = 1,..,m$, величины K_i являются управляемыми (контролируемыми) факторами. Каждому проекту соответствует определенное значение себестоимости продукции, которую предполагается выпускать при реализации проекта. Совокупность значений себестоимости продукции представляется в виде:

$$C = \{C_j\}, j = 1,...,m.$$

Величины C_j на начальных этапах выполнения проекта точно определить невозможно, поэтому они считаются неконтролируемыми факторами. Каждой паре K_i, C_j, соответствует определенное значение приведенных годовых затрат, определяемых по формуле

$$C_{ij} = E_H \cdot K_i + C_j,$$

где E_H – нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений.

Рассмотрим частный случай m=4. K={20,21,22,23}, C={10,11,12,13}, E_H =0,85.

Составить матрицу рисков и найти наилучшие стратегии фирмы по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0.5), Байеса.

Задача 12

Компания производит продукцию определенного ассортимента и осуществляет сбыт по четырем каналам:

- ежемесячный объем продукции с устойчивыми связями по сбыту на ряд лет в среднем составляет 490000 у.е.;
- ежемесячный объем продукции с устойчивым сбытом, но не на длительный срок – 500000 у.е.;
- ежемесячный объем продукции обеспечен только разовыми покупками – 510000 у.е.;
- месячная продукция, покупатель на которую не определен – 480000 у.е.

Компания может осуществлять производство продукции по трем проектам в объемах 980000 у.е., 1500000 у.е. и 1980000 у.е.

Объем производства	Размер прибыли в зависимости от колебания спроса			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
P_1=980000	49300	197200	197200	197200
P_2=1500000	-60	148900	297800	297800
P_3=1980000	-1140	98400	196800	393600

Составить матрицу рисков и найти наилучшие стратегии компании по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0.6), Байеса.