МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры

Г. А. СИКОРСКАЯ

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
ЧАСТЬ I

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2007

УДК 512.64 (07)

ББК 22.143я7
С 35

Рецензенты
кандидат педагогических наук Липилина В.В.

Сикорская Г.А.
С 35 **Практикум по линейной алгебре: методические указания по линейной алгебре. В III Ч. Ч I / Г.А. Сикорская, Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. - 71 с.**

Настоящие методические указания содержат необходимые теоретические сведения по двум разделам (матрицы и определители; системы линейных уравнений), изучаемым студентами дневной формы обучения транспортного факультета в рамках дисциплины алгебра и геометрия в первом семестре, а также разработки практических занятий.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей транспортного факультета.

ББК 22.143я7

Содержание

Введение

Курс алгебры и геометрии, изучаемый студентами транспортного факультета опирается на базовый курс математики, изучаемый в средней школе.

Математика в высшей школе призвана заложить основы математической подготовки будущих инженеров, дающие возможность успешного освоения других математических дисциплин.

Математическое образование будущего инженера основывается на фундаментальных понятиях математики. Фундаментальность подготовки в области математики включает в себя достаточную общность математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, точность формулировки математических свойств изучаемых объектов, логическую строгость изложения математики, опирающуюся на адекватный современный математический аппарат.

Курс алгебры и геометрии представляет собой математическую теорию, охватывающую первоначальные сведения об основных алгебраических структурах, теорию матриц и определителей, векторную алгебру, теорию линейных и евклидовых пространств, теорию линейных операторов, аналитическую геометрию, дифференциальную геометрию и топологию.

В настоящих методических указаниях предлагаются подробные разработки практических занятий по двум разделам: матрицы и определители и системы линейных уравнений. Все задачи снабжены подробным решением с ссылкой на теорию, краткое содержание которой расположено перед соответствующей серией задач.

В заключении каждой главы автором предлагаются задачи для самостоятельного решения, подобные разработанным, а также расположенные в порядке возрастания их сложности.

Глава 1 Матрицы. Определители

1.1 Матрицы. Действия над матрицами

Матрица – таблица, заполненная некоторыми элементами. Мы рассматриваем только матрицы, элементами которой являются числа. $A, B, X, Y, ...$ - обозначение матриц.

Размерность матрицы – количество ее строк и столбцов. Например, $A_{3\times 2}$ - матрица, состоящая из 3 строк и двух столбцов.

$A_{1\times n}$ - однострочная матрица.

$A_{n\times 1}$ - одностолбцовая матрица.

$A_{n\times n}$ - квадратная матрица.

$A_{n\times m}$, $n \neq m$ - прямоугольная матрица.

a_{ij} - элементы матрицы, индекс i указывает на номер строки, j - номер столбца.

Некоторые виды (типы) матриц

1 Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, ***транспонированной*** относительно данной. Матрицу, транспонированную относительно матрицы A, обозначают через A^T:

если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Если A - матрица размеров $m\times n$, то матрица A^T имеет размеры $n\times m$. Операция нахождения матрицы, транспонированной к данной, называется ***транспонированием*** матрицы.

Матрица-строка – матрица, размером $(1\times n)$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$, при транспонировании преобразуется в ***матрицу-столбец***, $A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, матрицу размером $(n\times 1)$

2 ***Нулевая*** матрица – матрица, все элементы которой нулевые. Для каждого размера $(m\times n)$ нулевая матрица одна. Нулевую матрицу часто обозначают просто O. Нулевая матрица играет роль нуля при сложении матриц.

3 ***Единичная*** матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{и т.д.}$$

Понятие порядка имеет место только для квадратных матриц. Для каждого порядка – одна единичная матрица. Выше указаны единичные матрицы соответственно второго и третьего порядков. Единичная матрица играет роль единицы при умножении соответствующих квадратных матриц.

4 ***Диагональная*** матрица.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},\ \Lambda = diag\{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}\ -$$

диагональная матрица третьего порядка. Диагональная матрица характеризуется тем, что все ее элементы вне главной диагонали – нулевые. E - частный случай диагональной матрицы.

5 ***Треугольные*** матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 ***Симметрические*** матрицы характеризуются тем, что они не меняются при транспонировании, т.е. $A = A^T$. Симметрические матрицы могут быть только квадратными и характеризуются тем, что $a_{ij} = a_{ji}$, т.е. элементы, расположенные «симметрично» относительно главной диагонали совпадают. ***Кососимметрические*** матрицы - $B^T = -B$, $b_{ij} = -b_{ji}$.

Например, A - симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix},\ A^T = A;$$

B - кососимметрическая

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = -B.$$

7 ***Ортогональные*** матрицы характеризуются тем, что сумма квадратов элементов каждого столбца такой матрицы равна единице. Кроме того, сумма произведений соответствующих элементов разных столбцов равна нулю.

Матрицы

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; H_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ -}$$

ортогональные матрицы соответственно второго и третьего порядков.

Линейные операции над матрицами

Складываются (вычитаются) только матрицы одинаковых размеров. Операция производится покомпонентно. При умножении матрицы на число все элементы матрицы умножаются на это число.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1 $A + B = B + A$.

2 $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3 $A + O = A$.

4 .

5 $1 \cdot A = A$.

6 $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

7 $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

8 $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

где A, B, C - матрицы одних и тех же размеров; O - нулевая матрица; $(-A)$ - матрица, противоположная матрице A; α, β - любые действительные числа.

Умножение матрицы на столбец

Матрицу можно умножить на столбец, если число элементов в столбце совпадает с числом элементов в строке матрицы (т.е. соответственно $(m \times n)$, $(n \times 1)$). Рассмотрим примеры:

1 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 & a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 & a_{22} \cdot x_2 \\ a_{31} \cdot x_1 & a_{32} \cdot x_1 \end{pmatrix};$$

2 $$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B \cdot Y = \begin{pmatrix} b_{11} \cdot y_1 + b_{12} \cdot y_2 + b_{13} \cdot y_3 \\ b_{21} \cdot y_1 + b_{22} \cdot y_2 + b_{23} \cdot y_3 \\ b_{31} \cdot y_1 + b_{32} \cdot y_2 + b_{33} \cdot y_3 \end{pmatrix};$$

3 $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_{11} \cdot y_1 + c_{12} \cdot y_2 + c_{13} \cdot y_3$;

4 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) \\ -3 \cdot 7 + 0 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -21 \end{pmatrix}$.

Таким образом, в результате умножения матрицы размером $(m \times n)$ на столбец $(n \times 1)$ получается столбец длины m (т.е. $(m \times 1)$).

Умножение матрицы на матрицу

Не любые две матрицы можно перемножить. Это действие определяется для согласованных матриц. Матрица A называется ***согласованной*** с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B: матрица A_{mn} согласована с матрицей B_{ns} («ширина» матрицы A равна «высоте» матрицы B).

При перемножении согласованных матриц размеров, соответственно $(m \times n)$ и $(n \times s)$ получается матрица размеров $(m \times s)$. Для того, чтобы перемножить согласованные матрицы нужно первую матрицу поочередно умножить на каждый из столбцов второй матрицы.

Например:

1 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 5 + 0 \cdot 7 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Произведение $B \cdot A$ - не определено.

2 $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 - 5 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \end{pmatrix}$.

$Y \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 $C \cdot D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}d_{11} + c_{12}d_{21} & c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22} \\ c_{21}d_{11} + c_{22}d_{21} & c_{21}d_{11} + c_{22}d_{22} \end{pmatrix}$,

$D \cdot C$ - определено, но далеко не всегда $C \cdot D = D \cdot C$.

Умножение матриц в общем случае некоммутативно, т.е $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются ***перестановочными*** или ***коммутирующими***.

Квадратные матрицы одного порядка можно перемножать всегда, при этом получается квадратная матрица того же порядка.

Для квадратных матриц роль единицы играет единичная матрица E того же порядка, т.е. , например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими *свойствами* (если имеют смысл соответствующие действия):

1 $(AB)C = A(BC)$.

2 $\alpha\,(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

3 $(A + B)C = AC + BC$.

4 $C(A + B) = CA + CB$.

5 $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Многочлены от матриц

Целой положительной степенью A^k $(k > 0)$ квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A, т.е. $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\ раз}$. Матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица A. ***Нулевой степенью*** квадратной матрицы A $(A \neq 0)$ называется единичная матрица того же порядка, что и A, т.е. $A^0 = E$. Первой степенью A^1 матрицы A называется сама матрица A, т.е. $A^1 = A$. ***Многочленом*** (или *полиномом*) степени k (k - целое число) от квадратной матрицы A называется выражение вида

$$P(A) = a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 A^0,$$

где a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ - любые числа, причем $a_k \neq 0$.

Из определения следует, что многочлен от матрицы можно получить, если в обычный многочлен

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0,$$

вместо x подставить квадратную матрицу (и учесть, что $a_0 = a_0 x^0$).

Пусть дан многочлен $P(x)$, если $P(A) = O$, то матрица A называется ***корнем многочлена*** $P(x)$, а многочлен $P(x)$ - ***аннулирующим многочленом*** для матрицы A.

Комплексные матрицы

Матрица, элементами которой являются комплексные числа, называется комплексной матрицей. Над комплексными матрицами определяются действия, аналогичные действиям над действительными матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матриц.

Если элементами матрицы Z являются комплексные числа

$$z_{kj} = x_{kj} + iy_{kj},$$

то ее можно представить в виде $Z = X + iY$, где матрицы X и Y составлены из элементов x_{kj}, y_{kj} соответственно; матрица X называется действительной частью, матрица Y - мнимой частью матрицы Z. Две комплексные матрицы $Z_1 = X_1 + iY_1$, $Z_2 = X_2 + iY_2$ считаются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т.е. $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$.

Матрица $\overline{Z}$, составленная из элементов $\overline{z}_{kj} = x_{kj} - iy_{kj}$, называется комплексно-сопряженной матрице Z, элементы которой – комплексные числа $x_{kj} + iy_{kj}$. Отметим, что

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2},\ \overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}.$$

Задача 1 Найти сумму и разность матриц A и B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку матрицы A и B одинаковой размерности, то сложение и вычитание возможно.

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\ A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & -20 \end{pmatrix}.$$

Задача 2 Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ на $\lambda = 2$.

Решение. $\lambda A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 3 Найти произведение AB данных матриц третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Перемножим соответственные элементы первой строки матрицы *A* на элементы первого столбца матрицы *B*, и результаты сложим. Далее первая строчка *A* и второй столбец *B*, далее первая строчка *A* и третий столбец *B*. Получили первую строку *AB*. Затем аналогично поступаем со второй строкой матрицы *A* и поочередно со всеми столбцами матрицы *B* и т. д.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \\ -2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & -2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & -2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 4 Выполнить действия $(AB)C$ и $A(BC)$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad (AB)C = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A(BC) = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix},$$

т.е. $(AB)C = A(BC)$.

Задача 5 Найти значение матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$ при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, если E – единичная матрица третьего порядка.

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, $2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix}$,

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}, 5E = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$2A^2 + 3A + 5E = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

Задача 6 Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ является корнем многочлена $P(x) = x^2 + x - 14$.

Решение. Подставив в данный многочлен вместо x матрицу A, получим

$$P(A) = A^2 + A - 14E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} -$$

$$- 14\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Следовательно, матрица A является корнем данного многочлена.

1.2 Определители

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или ***определителем первого порядка***, называется элемент a_{11}:

$$\det A = |A| = a_{11}.$$

Например, пусть $A = (3)$, тогда $\det A = 3$.

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или ***определителем второго порядка***, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются ***членами определителя*** второго порядка. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

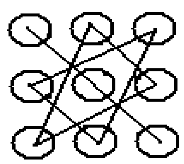
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или, ***определителем третьего порядка***, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Это число представляет собой алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя вход в эту формулу, легко запомнить, пользуясь схемой (рисунок 1), которая называется ***правилом треугольника*** или ***правилом Сарруса***.

$+$



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$-$

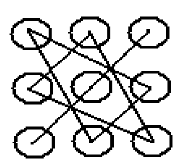


Рисунок 1

Определителем квадратной матрицы n-го порядка, или определителем n-го порядка, называется число, равное алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем знак каждого члена определяется как $(-1)^{r(J)}$, где $r(J)$ - число инверсий в перестановке J из номеров столбцов элементов матрицы, если при этом номера строк записаны в порядке возрастания:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(J)} (-1)^{r(J)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n},$$

где сумма берется по всем перестановкам J.

Пусть дана квадратная матрица A n-го порядка.

Минором M_{ij} ***элемента*** a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется минор элемента a_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$ - нечетное число.

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

Теорема Лапласа *Пусть в определителе* Δ n*-го порядка произвольно выбраны* k *строк (или* k *столбцов),* $1 \le k \le n-1$. *Тогда сумма произведений всех миноров* k*-го порядка, расположенных в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю* Δ.

Следствие из теоремы Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам i-ой строки; $i = 1; 2; ...; n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; $j = 1; 2; ...; n$).

Следствие теоремы Лапласа позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению более простых определителей $(n-1)$-го порядка.

Свойства определителей

1 Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0.

2 Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число λ

3 При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется: $\left|A^T\right| = |A|$.

4 При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5 Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.

6 Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

7 Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т.е.

$\sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{js} = 0$, при $i \neq j$.

8 Определитель равен нулю, если какая-либо его строка (столбец) представляет собой линейную комбинацию каких-либо других его строк (столбцов).

9 Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

10 Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, ..., b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, ..., b_n$.

11 Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B - матрицы n-го порядка.

Вычисление определителей второго и третьего порядков

Задача 7 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 = -2 - 0 = -2$.

Задача 8 Вычислить определитель матрицы $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det B = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1$.

Задача 9 Вычислить определитель матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 5 - 0 \cdot 3 \cdot 2 -$

$- 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4 + 0 + 12 - 40 - 0 - 1 = -25$.

Задача 10 Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot (-1) -$

$- 7 \cdot 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -12 - 7 + 24 + 9 + 56 - 4 = 66$.

Задача 11 Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot (-3) -$

$- 2 \cdot 4 \cdot 1 = -12 + 12 + 1 - 2 + 9 - 8 = 0$.

При вычислении этого определителя можно было инее пользоваться правилом треугольника. Достаточно заметить, что первый столбец есть линейная комбинация второго и третьего, т.е. $S_1 = S_2 + S_3$.

Задача 12 Для заданной матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ найдите

а) M_{12}, A_{12}; б) M_{33}, A_{33}.

Решение. а) $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot 3 = 3 - 1 + 1 + 9 = 12$.

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -12$.

б) $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 0 -$

$- 1 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 0 = 1 - 4 = -3$.

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -3$.

1.3 Вычисления определителей n-го порядка

1 ***Разложение определителя по теореме Лапласа***.

Теорема Лапласа позволяет свести вычисление определителя порядка $n \geq 2$ к вычислению определителей более низких порядков. Этой теоремой удобно пользоваться тогда, когда в определителе имеются равные нулю миноры. В этом случае при вычислении определителя следует выделить в нем те k строк или столбцов, которые содержат наибольшее число миноров k-го порядка, равных нулю.

Методом разложения по теореме Лапласа удобно пользоваться при вычислении определителя ***клеточной*** (***«блочной»***) матрицы.

Задача 13 Вычислить определитель

$$\Delta = \left|\begin{array}{cc:ccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 17 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Решение. Выделив в определителе две первые строки и применив теорему Лапласа, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Задача 14 Вычислить определитель матрицы A, используя теорему Лапласа

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 15 & 13 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 10 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение. Нам необходимо вычислить определитель блочной матрицы, имеем

$$\det A = \left|\begin{array}{cc:ccc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 15 & 13 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 3 & 4 & 10 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 13 & 14 \end{vmatrix}.$$

Второй из определителей этого произведения равен нулю, так как первая и третья строки пропорциональны, следовательно $\det A = 0$.

2 *Разложение определителя по элементам строки или столбца (следствие теоремы Лапласа)*

Задача 15 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ разложением по элементам первой строки.

Решение. Воспользуемся теоремой разложения определителя по элементам строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}.$$

Для определителя третьего порядка формула разложения по элементам первой строки принимает вид

$\Delta_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 187.$$

Задача 16 Вычислить определитель матрицы разложением по элементам второго столбца

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Применяя формулу

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

разложению определителя четвертого порядка по элементам второго столбца, получаем

$$\Delta_4 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42},$$

т.е.

$$\det A = -1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 15 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 15 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-8)\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= (1\cdot5\cdot9 + 3\cdot15\cdot6 + 4\cdot7\cdot2 - 6\cdot5\cdot2 - 4\cdot3\cdot9 - 7\cdot15\cdot1) -$$
$$- 2\cdot(1\cdot5\cdot9 + 2\cdot15\cdot6 + 4\cdot7\cdot2 - 6\cdot5\cdot2 - 7\cdot15\cdot1 - 4\cdot2\cdot9) +$$
$$+ (1\cdot3\cdot9 + 2\cdot2\cdot6 + 1\cdot7\cdot2 - 6\cdot3\cdot2 - 1\cdot2\cdot9 - 7\cdot2\cdot1) -$$
$$- 8(1\cdot3\cdot15 + 2\cdot2\cdot4 + 1\cdot5\cdot2 - 4\cdot3\cdot2 - 1\cdot2\cdot15 - 5\cdot2\cdot1) = -49.$$

Задача 17 Вычислить определитель четвертого порядка разложением по элементам любой строки (столбца)

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Непосредственное разложение по элементам строк (или столбцов) приведет к вычислению четырех определителей третьего порядка, а вот при разложении по 3-й строке или 4-му столбцу нам придется вычислить не четыре, а три определителя третьего порядка. Более того, прежде чем вычислять целесообразнее будет преобразовать определитель так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в 0. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (– 4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Теперь раскладываем этот определитель по элементам третьей строки:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью теоремы Лапласа, однако можно продолжить упрощение определителя. «Обнулим» в этом определителе элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элементы 3-го столбца определителя, предварительно умножив на (– 13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно, получим:

$$\det A = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1)(-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

Предлагаем читателю воспользоваться примером предыдущей задачи и вычислить определитель задачи 16. Мы же для контроля даем вам схематичную запись решения:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 7 \\ 6 & -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 7 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -7 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 49 = -49.$$

Задача 18 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 10 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение. Сначала преобразуем исходный определитель, например, следующим образом:

первую строку, умноженную на минус единицу, прибавим ко второй строке. Затем первую строку, умноженную на минус два, прибавим к третьей строке. И наконец, первую строку, умноженную на минус единицу, прибавим к четвертой строке. Полученный определитель, у которого первый столбец будет иметь лишь один ненулевой элемент, разложим по этому столбцу. В результате придем к следующей цепочке равенств:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 10 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель в этой цепочке можно уже вычислить непосредственно по формуле треугольников для определителей третьего порядка. Однако будет проще, если его сначала преобразовать, вычтя из второй строки первую, а затем разложить по второй строке. Тогда получим следующее продолжение цепочки равенств:

$$2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (14 - 15) = -4.$$

Таким образом, заданный определитель равен – 4.

Задача 19 Вычислить определитель

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на a; из 3-й строки 2-ю, умноженную на a; из 4-й строки 3-ю, умноженную на a:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на b; из 3-й строки 2-ю, умноженную на b:

$$V = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-bc & d^2-db \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемый определитель равен нулю тогда и только тогда, когда среди чисел a, b, c, d имеются равные.

3 Приведение определителя к треугольному виду

Задача 20 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Прибавив ко 2-й и 3-й строкам матрицы первую строку, умноженную соответственно на – 2 и – 3, а затем в полученной матрице к 3-й строке вторую, умноженную на – 1, получим матрицу, эквивалентную исходной

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица треугольного вида.

Т.к. определитель матрицы треугольного вида равен произведению диагональных элементов, то

$\det A = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$.

Задача 21 Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\2&6&4&3\\4&9&13&7\\6&3&7&2\end{vmatrix}$ посредством преобразования его к треугольному виду.

Решение. Получаем следующую цепочку равенств:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\2&6&4&3\\4&9&13&7\\6&3&7&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\0&3&0&-2\\0&3&5&-3\\0&-6&-5&-13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\0&3&0&-2\\0&0&5&-1\\0&0&-5&-17\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\0&3&0&-2\\0&0&5&-1\\0&0&0&-18\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 5\cdot(-18)=-540.$$

Задача 22 Вычислить определитель n-го порядка

$$D_n=\begin{vmatrix}5&5&5&...&5\\5&0&5&...&5\\5&5&0&...&5\\...&...&...&...&...\\5&5&5&...&0\end{vmatrix}.$$

Решение. Вычитая 1-ю строку из всех остальных, получим

$$D_n=\begin{vmatrix}5&5&5&...&5\\0&-5&0&...&0\\0&0&-5&...&0\\...&...&...&...&...\\0&0&0&...&-5\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}5^n.$$

Таким образом, исходный определитель равен $(-1)^{n-1}\cdot 5^n$.

4 Метод опорного элемента

Задача 23 Методом опорного элемента вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.38) (см. лекции), при $n=3$. В качестве опорного элемента возьмем, например, элемент a_{11}:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

Тогда в нашем случае имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Задача 24 Методом опорного элемента вычислить определитель матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Опорным элементом удобнее всего брать левый верхний (хотя можно было бы взять любой). Применяя метод опорного элемента дважды, имеем

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 7 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{-1} = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -49.$$

Итак, $\det B = -49$.

1.4 Обратная матрица и методы ее нахождения

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \cdot$

Если определитель матрицы отличен от нуля $(\det A \neq 0)$, то такая квадратная матрица называется ***невырожденной***, или ***неособенной***; в противном случае (при $\det A = 0$) – ***вырожденной***, или ***неособенной***.

Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства:

1 $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$; 3 $\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$; 5 $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

2 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; 4 $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$;

Теорема (***необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы***). *Обратная матрица* A^{-1} *существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.*

Нахождение обратной матрицы через алгебраические дополнения

Алгоритм:

1 Находим определитель исходной матрицы.

Если $\det A = 0$, то матрица – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует.

Если $\det A \neq 0$, то матрица A - невырожденная и обратная матрица существует.

2 Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A_{11}, A_{12}, …, A_{nn}.

3 Вычисляем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4 Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$ (п.4 не обязателен)

Задача 25 Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для начала вычислим определитель заданной матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = 5 \neq 0,$$

таким образом матрица A - невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

Теперь находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3.$$

Воспользуемся формулой

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5 & 3/5 & -2/5\\ -3/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/5 & -2/5 & 3/5\end{pmatrix}.$$

Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$ (рекомендуем в этом убедиться читателю самостоятельно).

Задача 26 Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 7 & 3\end{pmatrix}$. Выяснить, существует ли обратная ей матрица A^{-1}, и если существует, то найти ее.

Решение. Определитель матрицы A

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 7 & 3\end{vmatrix}=10\neq 0.$$

Следовательно, данная матрица невырожденная, и A^{-1} существует.

Согласно формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} элементов данной матрицы. Получим:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 7 & -3\end{vmatrix}=-5; \quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & -3\end{vmatrix}=15; \quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 6 & 7\end{vmatrix}=25;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{31} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 1{,}5 & 0{,}3 & -0{,}8 \\ 2{,}5 & 0{,}9 & -1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Задача 27 Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Решение. Вычисляем определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$\Big\|; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Задача 28 С помощью элементарных преобразований найти матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем матрицы A и E рядом и отделим их друг от друга вертикальной чертой. Далее будем преобразовывать обе матрицы (и левую и правую) одновременно, таким образом, чтобы левая матрица приобрела вид единичной. Тогда та матрица, которая получится справа и будет обратной к заданной.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_1/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[S_2+S_1]{S_2+(-1)S_1}$$

$$\xrightarrow[S_2+S_1]{S_2+(-1)S_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)S_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_3+(-2)S_2}$$

$$\xrightarrow{S_3+(-2)S_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-S_2/3}$$

$$\xrightarrow{-S_2/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[S_2+(-1)S_3]{S_1+(-2)S_3}$$

$$\xrightarrow[S_2+(-1)S_3]{S_1+(-2)S_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 4/3 & 2/3 \\ -1/6 & 5/3 & 4/3 \\ 1/6 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Задача 29 Используя метод элементарных преобразований найти матрицу, обратную матрице A, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-S_1+S_3]{-S_1+S_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)S_2+S_3}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)S_3+S_1]{(-2)S_3+S_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{(-1)S_2+S_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Отсюда:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 30 При каком значении λ матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не имеет обратной.

Решение. Матрица не имеет обратной, если $\det A = 0$. Таким образом получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель и решаем уравнение

$4 - 2\lambda + 1 = 0$,

$-2\lambda = -3$,

$\lambda = \dfrac{3}{2}$.

Следовательно, при $\lambda = \dfrac{3}{2}$ исходная матрица не имеет обратной.

1.5 Решение матричных уравнений

Напомним читателю, что уравнение, все компоненты которого – матрицы, называется ***матричным уравнением***. Решить матричное уравнение означает найти матрицу уравнения, элементы которой неизвестны, при подстановке которой в матричное уравнение получится верное равенство.

Задача 31 Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Введем обозначения $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда данное уравнение можно записать в виде

$AX = B$.

Так как $\det A = 1$, то матрица A имеет обратную. Умножим обе части уравнения на матрицу A^{-1} слева:

$A^{-1}AX = A^{-1}B$.

Так как $A^{-1}A = E$ (единичная матрица) и $EX = X$, то $X = A^{-1}B$.

Итак, для нахождения матрицы X нужно найти матрицу A^{-1} и умножить ее справа на матрицу B.

Имеем $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Задача 32 Решить матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру, умножая обе части исходного уравнения на A^{-1} справа, имеем:

$AX = B$,

$A^{-1}AX = A^{-1}B$,

$X = A^{-1}B$.

Теперь, если A^{-1} - существует, заданное уравнение имеет решение, если не существует, то, соответственно, решений не будет.

Предлагаем читателю убедиться самостоятельно, что обратная матрица для A существует и имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -6 & 16 & -9 \\ -5 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Далее находим решение матричного уравнения

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -6 & 16 & -9 \\ -5 & 11 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 1/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}.$$

Задача 33 Решить матричное уравнение $AXB + 3D = C$. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Решить матричное уравнение означает найти неизвестную матрицу X. Для начала решим уравнение в «буквах», т.е. в общем виде, имеем

$AXB + 3D = C$,

$AXB = C - 3D$,

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}(C-3D)B^{-1},$$

$$X = A^{-1}(C-3D)B^{-1}.$$

Теперь выполняем задание по действиям:

1) A^{-1} - ?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $C - 3D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

3) B^{-1} - ?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) $A^{-1} \cdot (C - 3D) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

5) $A^{-1}(C - 3D)B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$

Следовательно, искомая матрица $X = \begin{pmatrix} -19/2 & 1/2 \\ 7/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$

1.6 Ранг матрицы. Базисный минор матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

В матрице A размера $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k \le \min(m;n)$. Определители таких подматриц называются ***минорами*** k***-го порядка матрицы*** A.

Например, из матрицы $A_{3\times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы A обозначается $rangA$, или $r(A)$.

Из определения следует: а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A) \le \min(m;n)$;

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A = 0$;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A - невырожденная.

Теорема. *Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы*.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

1) Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2) Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
3) Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
4) Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5) Транспонирование матрицы.

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

1) $r(A+B) \le r(A)+r(B)$, 2) $r(A+B) \ge |r(A)-r(B)|$,

3) $r(AB) \le \min\{r(A); r(B)\}$, 4) $r(A^T A) = r(A)$,

5) $r(AB) = r(A)$, если B - квадратная матрица и $|B| \ne 0$.

Теорема о ранге матрицы. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы)*.

Строки $s_1, s_2, ..., s_m$ A называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке, т.е.

$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + ... + \lambda_m s_m = 0$,

где $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$.

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Например, строки матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, т.к. или, что все равно,

Если линейная комбинация строк равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$, то строки $s_1, s_2, ..., s_m$ называются линейно-независимыми.

Всякий ненулевой минор k-го порядка называется ***базисным минором***. Строки базисного минора называются ***базисными*** строками.

Строками (столбцами), проходящими через минор M ***матрицы*** A, будем называть строки (столбцы) матрицы, на пересечении которых стоят элементы минора M.

Минором, окаймляющим минор M ***порядка*** k ***матрицы*** A, называется минор $k+1$ этой матрицы, содержащий минор M.

Базисным минором матрицы назовем отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Для ненулевой матрицы существует базисный минор (вообще говоря, не единственный).

Пусть для данной матрицы выбран базисный минор. Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются *базисными*.

Теорема (*о базисном миноре*) 1. *Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).* 2. *Базисные строки (столбцы) матрицы линейно-независимы*.

Задача 34 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычеркнув из этой матрицы 2-ю строку, а затем 2, 3 и 4-й столбцы, получаем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, эквивалентную заданной. Так как $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то ранг данной матрицы равен 2.

Задача 35 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Решение. Все миноры второго и третьего порядков данной матрицы равны нулю, так как элементы строк этих миноров пропорциональны. Миноры же первого порядка (сами элементы матрицы) отличны от нуля. Следовательно, ранг матрицы равен 1.

Задача 36 Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Сложим соответственно элементы 1-й и 3-й строк, а затем разделим на 4 элементы 1-й строки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Из элементов 1-й строки вычтем соответствующие элементы 2-й строки, после чего вычеркнем 1-ю строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2, так как, например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Следовательно, и ранг исходной матрицы равен 2.

Задача 37 Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем матрицу A к ее эквивалентной, используя элементарные преобразования.

I шаг. а) Переставив 1-й и 2-й столбцы, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

б) Вынесем множитель 2 из 1-й строки. Тогда

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

в) Вычитая из 3-го столбца 1-й столбец, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

II шаг. Вычитая из 3-го столбца 2-й столбец, умноженный на 2, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак один столбец обнулился, и поэтому (т.к. осталось всего два столбца) $rangA \leq 2$ и т.к., например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, заключаем $rang\, A = 2$.

Мы определили ранги предложенных матриц, преобразуя их в эквивалентные, используя элементарные преобразования матрицы, не меняющие ее ранга. Получив в результате матрицу с меньшим количеством строк (столбцов). Очевидно, ранг преобразованных матриц легко определяется

Однако так действовать удобно, если заданная матрица небольшого порядка. Для матриц же любых порядков существует определенный алгоритм для нахождения ранга матрицы. Изучим три из них: метод нулей и единиц, метод, основанный на приведении матрицы к эквивалентной ей матрице треугольного (трапециевидного) типа, и метод окаймляющих миноров.

1. Метод единиц и нулей

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждая строка будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определит ранг исходной матрицы, так как полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Задача 38 Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим третий столбец матрицы А на 1/2. Далее, полученную первую строку умножим на 2 и вычтем ее из четвертой строки. Теперь третий столбец содержит три нуля и единицу (в первой строке). Легко делаем нули в первой строке на первой, второй, четвертой и пятой позициях. Имеем

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь четвертую строку последней матрицы складываем со второй и третьей, получая при этом еще два нуля во втором столбце, после чего делаем нули в четвертой строке всюду, кроме единицы на пересечении четвертой строки и второго столбца. В результате этих элементарных преобразований имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили три единицы. Следовательно, $rang\, A = 3$.

За базисный минор можно взять, например, определитель третьего порядка, который находится на пересечении первой, третьей, четвертой строк и второго, третьего и четвертого столбцов (на пересечении этих строк и столбцов в последней матрице стоят единицы). Так как перестановка рядов матрицы не производилась, то один из базисных миноров матрицы А следующий:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Метод приведения определителя к треугольному виду

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ***ступенчатому*** виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} & ... & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2r} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{rr} & ... & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, ..., r$; $r \leq k$.

Тогда ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеет минор r-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ 0 & a_{12} & ... & a_{1r} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{1r} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Задача 39 Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Если $a_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваемся того, что $a_{11} \neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы, тогда матрица A будет выглядит следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Если $a_{11} \neq 0$, то умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $a_{21}/a_{11} = 0$, $-a_{31}/a_{11} = 2$, $-a_{41}/a_{11} = 1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ (у нас $a_{22} = -1 \neq 0$), то умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно, на $-a_{32}/a_{22} = -3$, $-a_{42}/a_{22} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен 2.

Коротко запишем решения еще двух задач.

Задача 40 Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. $A \xrightarrow[S_3+(-5)S_1]{S_2+(-3)S_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+(-1)S_2]{}$

$$\xrightarrow[S_3+(-1)S_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили трапециевидную матрицу, ранг которой равен двум. Следовательно, ранг матрицы A также равен двум.

Задача 41 Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $A=\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&2&0\\0&2&1&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&2\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Так как $\begin{vmatrix}4&3&2\\0&2&1\\0&0&3\end{vmatrix}=24\neq 0$, то ранг матрицы равен 3.

3. Метод окаймляющих миноров.

Минор M_{k+1} порядка $k+1$, содержащий в себе минор M_k, порядка k, называется окаймляющим минор M_k. Если у матрицы A существует минор $M_k\neq 0$, а все окаймляющие его миноры $M_{k+1}=0$, то $rang\,A=k$.

Задача 42 Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1&-3&5&4\\2&-6&4&3\\3&-9&3&2\end{pmatrix}$.

Решение. Имеем $M_2=\begin{vmatrix}-3&5\\-6&4\end{vmatrix}\neq 0$. Для M_2 окаймляющими будут только два минора:

$$M_3=\begin{vmatrix}1&-3&5\\2&-6&4\\3&-9&3\end{vmatrix},\qquad M_3=\begin{vmatrix}-3&5&4\\-6&4&3\\-9&3&2\end{vmatrix},$$

каждый из которых равен нулю. Поэтому $rang\,A=2$, а указанный минор M_2 может быть принят за базисный.

Линейная независимость строк (столбцов), базисный минор матрицы

Задача 43 Даны два столбца

$$e_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\text{ и }e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Доказать, что они линейно независимы и подобрать столбцы e_3 и e_4 такие, что столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 также линейно независимы.

Решение. Составим матрицу из столбцов e_1 и e_2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ее ранг равен 2, так как выделенный минор второго порядка отличен от нуля (он равен – 1). По теореме о базисном миноре базисные столбцы e_1 и e_2 линейно независимы.

Выберем столбцы e_3 и e_4 так, чтобы матрица из столбцов e_1, e_2, e_3, e_4 имела определитель, отличный от нуля. Тогда ранг матрицы будет равен 4, и по теореме о базисном миноре столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 будут линейно независимы. Возьмем, например, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, и, следовательно, столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 линейно независимы.

Задача 44 Определить ранг матрицы и найти все ее базисные миноры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. В начале находим ранг матрицы. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ r(A) = 2.$$

Базисными минорами являются все миноры второго порядка этой матрицы, отличные от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача 45 Найти базисный минор матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $rang\, A = 2$ (предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно), то базисный минор матрицы есть минор второго порядка матрицы A. Для нахождения базисного минора имеется два способа.

I способ. Возьмем наудачу какой-либо минор второго порядка матрицы A и вычислим его. Если он отличен от нуля, то получаем искомый базисный минор.

В данном примере естественно воспользоваться указанным способом. Однако в случае матрицы больших размеров и большого ранга этот способ случайного выбора минора матрицы может оказаться малопродуктивным. Тогда лучше воспользоваться другим способом.

II способ. Решение примера 37 позволяет безошибочно указать базисный минор. Воспроизведем еще раз это решение:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим базисные столбцы и строки в последней матрице (О - 1-я строка и 1-й столбец, Δ - 2-я строка и 2-й столбец). Следим за отмеченными местами, проходя в обратном порядке все преобразования по вычислению ранга матрицы. Затем вычеркиваем в исходной матрице отмеченные строки и столбцы. На пересечении вычеркнутых столбцов и строк стоят элементы, образующие квадратную матрицу, определитель которой и есть искомый базисный минор исходной матрицы, т.е.

$$M_б=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Задача 46 Найти ранг и базисный минор матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & -10 & 5 \\ -2 & 8 & -10 \\ 4 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A имеет минор 2-го порядка, отличный от нуля, например, $M=\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}=-20\neq 0$, а $\det A=0$. (Проверьте самостоятельно). Следовательно $rang\,A=2$, минор M является базисными.

Отметим, что в качестве базисного можно взять любой минор второго порядка матрицы, так как все они отличны от нуля.

Задача 47 Найти ранг и базисный минор матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & -9 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. I способ. У матрицы A имеется минор второго порядка, не равный нулю, например $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Поэтому $r \geq 2$, а из размеров матрицы A следует, что $r \leq 3$. Обозначим строки матрицы через A_1, A_2, A_3 и предположим, что $rang\ A = 2$. Тогда строки A_1, A_2, A_3 линейно зависимы, и поэтому $A_3 = a \cdot A_1 + b \cdot A_2$, где a и b - некоторые числа. Это матричное равенство эквивалентно четырем числовым равенствам. Напишем их для элементов первого и второго столбцов

$-2 = a - b$, $-9 = 0 \cdot a - 3 \cdot b$.

Отсюда $a = 1$, $b = 3$.

Нетрудно проверить теперь, что действительно имеет место равенство $A_3 = A_1 + 3A_2$. Итак, строки A_1, A_2, A_3 матрицы A линейно зависимы, поэтому $rang\ A = 2$. Базисным минором является, например, указанный минор M.

II способ. Вычислим ранг матрицы A.

Умножим первый столбец матрицы на (– 4), а в другой раз на 5 и прибавим соответственно к третьему и четвертому столбцу. Получим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & -4 \\ -2 & -9 & 12 & -12 \end{pmatrix}.$$

Умножим теперь второй столбец матрицы C на $4/3$, а в другой раз на $-4/3$ и прибавим соответственно к третьему и четвертому столбцу. Это дает матрицу

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивая нулевые столбцы матрицы D, получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ -2 & -9 \end{pmatrix},$$

Ранг которой равен 2. Следовательно, и $rang\ A = 2$.

Базисным минором, понятно может служить любой минор матрицы B, например $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$.

1.7 Задачи для самостоятельного решения

1 Вычислить произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2 Найти значения выражений:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^3$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & \ldots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, где n - порядок данной матрицы.

3 Найти значение многочлена от матрицы:

а) $f(A) = 3A^2 - 2A + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $f(A) = A^3 - 7A^2 + 13A - 5$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ. а) $f(A)=\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Найти обратные матрицы для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

д) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5 Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $X\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

6 Вычислить определитель

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

Ответ. а) 1; б) -2; в) 0;
г) 1; д) $-2b^3$; е) 1;
ж) 20; з) -3; и) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$;
к) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

7 При каком условии справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & cos\alpha & cos\beta \\ cos\alpha & 1 & cos\gamma \\ cos\beta & cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & cos\alpha & cos\beta \\ cos\alpha & 0 & cos\gamma \\ cos\beta & cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

8 Разлагая по 3-й строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $8a + 15b + 12c - 19d$.

9 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

Ответ. $abcd$.

10 Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ. а) 90; б) 8.

11 Вычислить ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. а) 2;   б) 3.

12 Найти значения λ , при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг.

Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ ?

Ответ. При $\lambda = 0$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 0$ он равен 3.

13 Чему равен ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

при различных значениях λ .

Ответ. При $\lambda = 3$ ранг равен 2, при $\lambda \neq 3$ ранг равен 3.

Глава 2 Системы линейных уравнений

Дана система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Решением этой системы называется совокупность n чисел $\left(\overline{x_1}; \overline{x_2}; \ldots; \overline{x_n}\right)$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества. Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение $\left(\overline{x_1}; \overline{x_2}; \ldots; \overline{x_n}\right)$. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется ***несовместной***.

Совместная система называется ***определенной***, если она имеет только одно решение, и ***неопределенной***, если она имеет больше одного решения.

Матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

называются соответственно ***матрицей*** и ***расширенной матрицей системы*** (2.1).

2.1 Методы решения систем линейных уравнений

1 Метод Гаусса

Метод Гаусса является самым распространенным и простым методом для решения систем линейных уравнений.

Для того чтобы решить систему линейных уравнений методом Гаусса, необходимо:

1) составить $\widetilde{A}$ - расширенную матрицу системы;
2) посредством элементарных преобразований над строками матрицы привести матрицу $\widetilde{A}$ к треугольному (или трапециевидному) виду;
3) Восстановить по полученной треугольной (трапециевидной) матрице систему линейных уравнений и найти ее решение, начиная с последнего из уравнений.

Задача 48 Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение. Составим расширенную матрицу системы и посредством элементарных преобразований преобразуем ее к виду треугольной матрицы, главная диагональ которой занята единицами, т.е. к виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \vee & \vee & \vee & \vee \\ 0 & 1 & \vee & \vee & \vee \\ 0 & 0 & 1 & \vee & \vee \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vee \end{array}\right)$$

($\vee$ - элементы матрицы, полученные при преобразовании).

Процесс преобразования заключается в нашем стремлении элементарными преобразованиями над <u>*строками*</u> матрицы «делать» нужные нам *столбцы*, сначала первый $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, потом второй $\begin{pmatrix}\vee\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ и так далее.

Первый пример распишем подробно. Итак, мысленно первую строку умножаем на (– 2) и складываем со второй строкой. Таким образом, получим эквивалентную матрицу с измененной *второй* строкой.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \times (-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь наша задача обнулить первый элемент третьей строки. Для этого мы мысленно умножаем первую строку на (– 1) и складываем ее с третьей. Получим матрицу с «новой» третьей строкой

$$A \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \times (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Итак, мы добились необходимого – привели первый столбец к виду $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теперь первую строку оставляем в покое, а вторую последовательно (мысленно) умножаем на необходимое число и складываем сначала с третьей строкой, потом с четвертой, для того, чтобы привести второй столбец к виду $\begin{pmatrix} \vee \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$A \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times 2 \\ + \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times (-2) \\ + \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Второй столбец готов, теперь третий приводим к виду $\begin{pmatrix} \vee \\ \vee \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$A\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-1&-1&-2\\0&0&-1&1&1\\0&0&1&3&7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \times(-1)\\ +\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-1&-1&-2\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&4&6\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ \times\frac{1}{4}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-1&-1&-2\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&2\end{array}\right).$$

Итак, мы получили треугольную матрицу, главная диагональ которой занята единицами.

Дальше по этой матрице восстанавливаем уравнения системы, начиная с последней строки четвертая строка $\left(0\quad 0\quad 0\quad 1 \mid 2\right)$ соответствует уравнению

$x_4 = 2$.

Третья строка $\left(0\quad 0\quad 1\quad -1 \mid -1\right)$ - уравнению

$x_3 - x_4 = -1$,

откуда $x_3 = -1 + x_4$, подставляем $x_4 = 2$, получим

$x_3 = -1 + 2$,

$x_3 = 1$.

Вторая строка $\left(0\quad 1\quad -1\quad -1 \mid -2\right)$ дает уравнение

$x_2 - x_3 - x_4 = -2$,

$x_2 = -2 + x_3 + x_4$,

$x_2 = -2 + 1 + 2$,

$x_2 = 1$.

Первая строка $\left(1\quad 1\quad 1\quad 1 \mid 5\right)$ обращается уравнением

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$,

$x_1 = 5 - x_2 - x_3 - x_4$,

$x_1 = 5 - 1 - 1 - 2$,

$x_1 = 1$.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение $\left(1, 1, 1, 2\right)$, то есть система совместна и определена.

Описание решения следующих примеров договоримся проводить короче. Для этого каждую из строк матрицы обозначим s_i (i - номер строки) и все проводимые операции будем фиксировать схематично, например запись $s_1 \leftrightarrow s_2$ означает «строку первую и вторую поменяем местами», а $2s_1 + s_3$ - «первую строку умножим на число 2 и сложим с третьей строкой». При этом полученную строку записываем на место второго слагаемого.

Задача 49 Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2S_1+S_3]{-3S_1+S_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{S_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{2S_2+S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Восстанавливая уравнения системы, начиная с последней строчки, имеем $x_3 = \frac{1}{2}$, вторая строчка дает уравнение

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2};$$

$$x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_3;$$

$$x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{11}{4}.$$

Далее, используем первую строчку

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2;$$

$$x_1 = 2 - x_2 + x_3;$$

$$x_1 = 2 - \frac{11}{4} + \frac{1}{2};$$

$$x_1 = -\frac{1}{4}.$$

Итак, система совместна и определена и имеет решение $\left\{\left(-\frac{1}{4};\frac{11}{4};\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Задача 50 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение.

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{array}\right] \sim -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$x_4 = -1$.

$x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1$.

$x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0$.

$x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2$.

Вывод: система совместна и определена.

Ответ. $\{(-2; 0; 1; -1)\}$.

Если в результате преобразований количество строк уменьшится т.е. получится, что число условий меньше числа переменных, то система совместна и неопределенна, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Задача 51 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases}$$

Решение.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{(-2)s_1+s_2 \\ (-1)s_1+s_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{2s_2+s_3 \\ -2s_2+s_4}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-1&-1&-2\\0&0&1&1&1\\0&0&-1&1&1\end{array}\right)\overset{(-1)s_3+s_4}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-1&-1&-2\\0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\overset{-(1)s_3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-1&-1&-2\\0&0&1&-1&-1\end{array}\right).$$

$x_3 - x_4 = -1$.

Пусть $x_4 = c$, $c - const$, тогда

$x_3 = -1 + x_4 = -1 + c$.

$x_2 - x_3 - x_4 = -2$,

$x_2 = x_3 + x_4 - 2 = -1 + c + c - 2 = -3 + 2c$,

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$,

$x_1 = 5 - x_2 - x_3 - x_4$,

$x_1 = 5 + 3 - 2c + 1 - c - c$,

$x_1 = 9 - 5c$.

Система совместна и неопределенна. Общее решение системы

$\{(-5c + 9; 2c - 3; c - 1; c) \; c - const\}$.

Укажем одно из частных решений, т.е. решение при конкретном c.

Например, при $c = 0$, имеем $(9; -3; -1; 0)$ - частное решение системы.

Рассмотрим случай несовместной системы.

Задача 52 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -2, \\ -2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-1&-1&-2\\0&-2&1&3&5\\0&2&-1&-3&3\end{array}\right)\overset{\substack{2s_2+s_3\\(-2)s_2+s_4}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-1&-1&-2\\0&0&-1&1&1\\0&0&1&-1&7\end{array}\right)\overset{\substack{s_3+s_4,\\(-1)\cdot S_3}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-1&-1&-2\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&8\end{array}\right).$$

Последняя строка матрицы соответствует уравнению $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 8$, которое, очевидно, решения не имеет. Следовательно, и исходная система решений не имеет, т.е. система не совместна.

Ответ. $\varnothing$.

2 Решение СЛУ по формулам Крамера

Если A - матрица системы линейных уравнений квадратная и невырожденная, т.е. $\Delta = \det A \neq 0$, то такую систему линейных уравнений можно решить при помощи ***формул Крамера***

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ \left(i = \overline{1, n}\right),$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i - определители, которые получаются из Δ путем замены в нем i-го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Задача 53 Решить систему уравнений с помощью формул Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ \quad 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы заданной системы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 + 21 = 79.$$

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237.$$

Таким образом по формулам Крамера, имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{395}{79} = 5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{158}{79} = -2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{237}{79} = 3.$$

Ответ. Система имеет единственное решение $(5; -2; 3)$.

Задача 54 Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение, и найти это решение.

Решение. Данная система уравнений является квадратной $(n = m = 3)$. Вычислим определитель Δ основной матрицы заданной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение.

Найдем его по формулам Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

По формулам Крамера получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Итак, данная система имеет единственное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Задача 55 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2, \\ 4x - y + 5z = 15, \\ 6x - 8y + 7z = 9. \end{cases}$$

Решение. Неизвестные здесь обозначаются буквами x, y, z, причем x является первой неизвестной, y - второй, z - третьей.

Составим определитель системы Δ и определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 15 & -1 & 5 \\ 9 & -8 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 15 & 5 \\ 6 & 9 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 15 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $\quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $\quad z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$ - формулы Крамера.

Таким образом: $x = \dfrac{-147}{-49} = 3$, $y = \dfrac{-98}{-49} = 2$, $z = \dfrac{-49}{-49} = 1$.

Ответ. Система совместна и определена, ее решение $(3;\ 2;\ 1)$.

Задача 56 Найти y из системы уравнений, используя формулы Крамера

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ y + 2z + 3t = 20, \\ z + 2t + 3x = 14, \\ t + 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 0 \cdot t = 14, \\ 0 \cdot x + y + 2z + 3t = 20, \\ 3x + 0 \cdot y + z + 2t = 14, \\ 2x + 3y + z + t = 12. \end{cases}$$

Составляем матрицу системы и находим Δ, Δ_y, имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 96.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 14 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -14 & -8 & 2 \\ -8 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 192.$$

Таким образом, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{192}{96} = 2$.

Ответ. $y = 2$.

3 Матричный метод решения систем линейных уравнений

Для того, чтобы решить систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

матричным методом необходимо записать ее в виде матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача решения системы сводится к задаче решения матричного уравнения $AX = B$. Напомним, что для того, чтобы решить это уравнение необходимо умножить обе части уравнения слева на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \cdot$$

и так как $A^{-1}A = E$, получаем что решение матричного уравнения и соответственно исходной системы имеет вид

$$X = A^{-1}B \cdot$$

Таким образом, вначале необходимо удостовериться, что матрица A невырожденная, т.е. что $\det A \neq 0$, и если это условие выполнено далее находим A^{-1} и выполняем произведение $A^{-1}B$.

Задача 57 Решить систему линейных уравнений матричным способом

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9; \\ x + 2y - 3z = 14; \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Тогда исходная система запишется следующим матричным уравнением *AX=B,* решение которого вид $X = A^{-1}B$.

Найдем A^{-1}. Имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}126+70-208\\ -90-56+128\\ -18+14+16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\ -18\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, система имеет решение $\{(2,3,-2)\}$.

Задача 58 Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases}2x-4y+z=3,\\ x-5y+3z=-1,\\ x-y+z=1.\end{cases}$$

Решение. Имеем

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\ \det A=-8.$$

Обратная матрица

$$A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}.$$

$$X=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2\cdot 3+3(-1)-7\cdot 1\\ 2\cdot 3+1(-1)-5\cdot 1\\ 4\cdot 3-2(-1)-6\cdot 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-16\\ 0\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix},$$

т.е. $x=2$, $y=0$, $z=-1$ - решение данной системы.

Ответ. $\{(2;0;-1)\}$.

Задача 59 Решить систему линейных уравнений средствами матричного исчисления.

$$\begin{cases}5x_1-x_2+2x_3=8,\\ \quad x_2-5x_3=-6,\\ 2x_1+x_2-x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ -6\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow AX=b.$$

Решение. $\Delta=\det A=26\neq 0\Rightarrow$ исходная система имеет единственное решение. Находим A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2/13 & 1/26 & 3/26\\ -5/13 & -9/26 & 25/26\\ -1/13 & -7/26 & 5/26\end{pmatrix},$$

Таким образом, $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2/13 & 1/26 & 3/26 \\ -5/13 & -9/26 & 25/26 \\ -1/13 & -7/26 & 5/26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\{(1; -1; 1)\}$

2.2 Исследование систем линейных уравнений

Метод Гаусса применим к решению любой системы линейных уравнений. Этот метод позволяет выяснить, совместна ли данная система; с его помощью находятся все решения совместной линейной системы.

Исследование систем линейных уравнений можно осуществлять с помощью других методов, основанных на следующих теоремах.

Пусть дана система m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ...+ a_{3n}x_n = b_3, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Рассмотрим основную матрицу A этой системы и ее расширенную матрицу $\widetilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \; \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Теорема 2.1 (*Кронекера-Капелли*) *Для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был равен рангу расширенной матрицы.*

Теорема 2.2 *Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.*

Теорема 2.3 *Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество ее решений является бесконечным.*

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу этой матрицы. ***Базисными неизвестными*** совместной системы, ранг матрицы которой равен r, называются r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестны называются ***свободными***.

Из теорем следует, что решение системы линейных уравнений можно проводить следующим образом:

1 находят ранг r матрицы A системы и ранг $\widetilde{r}$ расширенной матрицы $\widetilde{A}$. Если $r \neq \widetilde{r}$, то система несовместна.

2 если $r = \widetilde{r}$, то выделяют базисный минор и базисные неизвестные. Исходную систему уравнений заменяют эквивалентной ей системой, состоящей из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора;

3 в случае, когда число базисных миноров неизвестных равно числу неизвестных системы, система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера. Если число базисных неизвестных меньше числа всех неизвестных, то из соответствующей системы находят выражения базисных неизвестных через свободные, используя, например, формулы Крамера. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получают бесконечное множество решений исходной системы.

Задача 60 Методом Гаусса показать, что данная система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров, и найти эти решения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ \quad\; x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу системы $\widetilde{A}$ и находим $rangA$ и $rang\,\widetilde{A}$ с помощью элементарных преобразований строк:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно, $rang\,A = rang\,\widetilde{A} = 2 < n = 4$. Поэтому система совместна и имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух $(n - r = 4 - 2 = 2)$ параметров.

Последней матрице, эквивалентной данной матрице $\widetilde{A}$, соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ \quad\; x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

Понятно, что эта система эквивалентна исходной. Теперь выбираем любой минор второго порядка, не равный нулю и считаем его базисным, например, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Переменные, коэффициенты при которых составляют базисный минор – базисные неизвестные, остальные неизвестные – свободные. Поэтому в данном случае в качестве базисных неизвестных берем x_1 и x_2, а x_3 и x_4, принимаем за свободные неизвестные (параметры). Тогда из второго уравнения последней системы имеем $x_2 = 3 - x_3 - x_4$. Подставив выражение для x_2 в первое уравнение, находим

$$x_1 = 5 - 2(3 - x_3 - x_4) - x_3 - x_4 = -1 + 2x_3 + 2x_4.$$

Пусть $x_3 = a$, $x_4 = b$, таким образом, решение системы

$$\{(-1 + 2a + 2b; 3 - a - b; a; b), a, b - const\}$$

За базисные неизвестные можно было бы принять также x_1, x_3, или x_1, x_4, или x_2, x_3, или x_2, x_4, но не x_3, x_4, так как определитель, составленный из коэффициентов при x_3 и x_4 равен нулю и следовательно базисным минором служить не может.

Задача 61 Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение. Определим ранг матрицы и ранг расширенной матрицы системы, имеем

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim .$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Очевидно $r(A) = 2$, $r(\widetilde{A}) = 3$, т.е. $r(A) \neq r(\widetilde{A})$, следовательно, система несовместна.

Задача 62 Исследовать систему уравнений и в случае ее совместности найти решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\3&2&1&10\\1&1&1&6\\2&3&-1&5\\1&1&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\3&2&1&10\\1&1&1&6\\1&1&0&3\\1&1&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\3&2&1&10\\1&1&0&3\end{array}\right).$$

$$A\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Найдем определитель последней матрицы:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\3&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Следовательно, $r(A)=3$. Ранг расширенной матрицы также равен 3, так как найденный определитель является минором матрицы $\widetilde{A}$.

Итак, система совместна. Для ее решения возьмем, например, первое, третье и пятое уравнения:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14,\\x_1+x_2+x_3=6,\\x_1+x_2=3.\end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\1&1&1&6\\1&1&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\0&-1&-2&-8\\0&-1&-3&-11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\0&1&2&8\\0&0&-1&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\0&1&2&8\\0&0&1&3\end{array}\right).$$

$x_3=3$,

$x_2+2x_3=8$,

$x_2=8-2x_3=8-2\cdot 3=8-6=2$,

$x_1+2x_2+3x_3=14$,

$x_1=14-2x_2-3x_3=14-2\cdot 2-3\cdot 3=14-13=1$.

Ответ. Система имеет единственное решение $(1;2;3)$.

Задача 63 Решить систему линейных уравнений, выяснив предварительно вопрос о совместности

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$$

то ранг матрицы равен трем. Следовательно, исходная система имеет и ненулевые решения.

Заданная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

ибо отличен от нуля минор (=21).

Так как определитель, состоящий из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3, отличен от нуля, то считаем эти неизвестные базисными, а x_4 - свободным.

Перенеся свободный неизвестный в правую часть решаем систему трех уравнений с тремя неизвестными, используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -x_4; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2_4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3x_4. \end{cases}$$

Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & -x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-31x_4}{21}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{43x_4}{21}; \; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-28x_4}{21} = \frac{-4x_4}{3}.$$

Пусть $x_4 = c$, тогда общее решение системы будет иметь вид $\left\{\left(-\frac{31}{21}c; \frac{43}{21}c; -\frac{4}{3}c\right), c - const\right\}$. Запишем одно из решений системы. Например, при c=1, имеем $\left(-\frac{31}{21}; \frac{43}{21}; -\frac{4}{3}\right)$ - частное решение системы. Проверкой можно убедиться в верности найденного решения.

Задача 64 Является ли совместной система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1? \end{cases}$$

Решение.

$$rang = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно $rang\, A = 2$.

Составим теперь расширенную матрицу $\widetilde{A}$, (добавив к матрице A столбец свободных членов данной системы, и снова вычеркнем третий и четвертый столбцы, что не изменяет ранга матрицы).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Определитель этой матрицы отличен от нуля (он равен 8), поэтому ранг этой матрицы равен 3 и, следовательно, $rang\, \widetilde{A} = 3$.

Таким образом, $rang\, A = 2 \neq 3 = rang\, \widetilde{A}$, т.е. ранги основной и расширенной матриц не равны. Поэтому данная система уравнений несовместна.

Задача 65 При каких значениях c система уравнений совместна?

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = c? \end{cases}$$

Решение. Основная матрицы A данной системы такая же, как в задаче 17. Как было установлено, $rang\,A = 2$. Составив расширенную матрицу и вычеркнув в ней третий и четвертый столбцы (как в задаче 17, это не изменяет ранга матрицы), получим матрицу

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & c \end{array} \right),$$

определитель которой равен $3c + 6$. Если $c \neq -2$, то этот определитель отличен от нуля, поэтому $rang\,\widetilde{A} = 3 \neq rang\,A$, и, следовательно, данная система уравнений несовместна. Если же $c = -2$, то $\det \widetilde{A} = 0$, а так как у матрицы $\widetilde{A}$ есть миноры второго порядка, отличные от нуля, то $rang\,\widetilde{A} = 2$. Итак, при $c = -2$ $rang\,A = rang\,\widetilde{A}$ и, следовательно, данная система совместна.

2.3 Система однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений

Система линейных уравнений называется ***однородной***, если свободный член в каждом уравнении равен нулю. Однородная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Система однородных линейных уравнений всегда совместна, так как

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \qquad (2.3)$$

является ее решением системы (2.3).

Решение (2.3) называется ***нулевым*** или ***тривиальным решением*** системы (2.2). Кроме тривиального система однородных линейных уравнений, может иметь и другие решения (***нетривиальные***).

Из критерия совместности следует, что однородная система имеет лишь тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r = n$). В частности, если число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), то необходимым и достаточным условием существования <u>только тривиального решения</u> является отличие определителя системы от нуля.

Если ранг матрицы системы однородных линейных уравнений меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно.

Если $C_1, C_2, \ldots, C_k$ - вектор-решения системы линейных однородных уравнений, то любая линейная их комбинация является также вектор-решением этой системы.

Совокупность максимального числа линейно независимых вектор-решений системы однородных линейных уравнений называется ***фундаментальной системой решений*** этой системы.

Фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений содержит $n-r$ решений, где n - число неизвестных, r - ранг матрицы системы.

Задача 66 Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение этой системы.

Решение. Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

и определим ее ранг (самостоятельно), $rangA = 2$, поэтому $n - r = 5 - 2 = 3$. Значит, ФСР состоит из трех решений: $(X_p)_3$. Примем за базисный минор выделенный рамкой минор второго порядка. Последнее уравнение отбрасываем, а неизвестные x_1, x_4, x_5 считаем «свободными» и переносим их в правую часть уравнений, т.е. приходим к системе

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4x_1 - x_4 - 7x_5. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Ищем первое базисное решение X_1. Для этого положим $x_1 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Определителем матрицы этой системы является базисный минор. Значит, он отличен от нуля. Следовательно, последняя система имеет единственное решение, которое можно найти, например, с помощью формул Крамера: $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. Таким образом,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ - первое базисное решение..

Далее, полагая в системе (2.4) $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, находим $x_2 = 13$, $x_3 = 5$, т.е. вторым базисным решением является столбец

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, полагая $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, находим $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Следовательно, третье базисное решение есть

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, ФСР получена. Заметим, что построенная таким образом ФСР называется ***нормальной***.

Еще раз подчеркнем, что столбцы X_1, X_2, X_3, образующие ФСР, линейно независимы, поскольку «свободные» неизвестные x_1, x_4, x_5 были выбраны так, что выделенный рамками минор третьего порядка в матрице из этих столбцов отличен от нуля:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{0} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}\right).$$

Теперь выпишем общее решение исходной системы линейных уравнений:

$$X = c_p X_p = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,\ p = 1, 2, 3,$$

или в координатах:

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3, \\ x_3 = 5c_2 - c_3, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$$

Задача 67 Известно, что совокупность столбцов

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

является ФСР некоторой однородной системы линейных уравнений.

а) Из скольких уравнений может состоять эта система?

б) Привести пример такой системы, состоящей из трех уравнений.

Решение. а) Пусть n - число неизвестных системы, r - ранг ее матрицы. Так как столбцы X_1 и X_2 имеют четыре строки, то $n = 4$. Число решений ФСР равно 2; значит, $n - r = 2$, т.е. $r = 2$. Следовательно, однородная система линейных уравнений должна содержать не менее двух уравнений и ранг ее матрицы равен 2.

б) Будем искать два линейных однородных уравнения, удовлетворяющие условию задачи. Третье уравнение системы можно составить как линейную комбинацию первых двух уравнений. Коэффициенты обоих искомых уравнений, обозначенные через y_1, y_2, y_3, y_4, должны удовлетворять одной и той же однородной системе уравнений

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 0, \\ 0 \cdot y_1 - y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 0. \end{cases}$$

Кроме того, искомая пара решений этой системы, т.е. оба набора коэффициентов, должна быть линейно независимой, поскольку ранг матрицы искомой системы равен 2. Найдем нормальную ФСР выписанной системы, считая свободными неизвестными y_3 и y_4. Полагая $y_3 = 1$, $y_4 = 0$, имеем $y_1 = y_2 = 0$; полагая $y_3 = 0$, $y_4 = 1$, находим $y_1 = y_2 = 0$. Таким образом, получим ФСР:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому однородная система двух линейных уравнений, для которой столбцы X_1, X_2 являются ФСР, имеет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве третьего уравнения такой системы можно взять, например, сумму первых двух уравнений.

Итак, одним из возможных ответов является следующая система:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Задача 68 Найти ФСР и общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Решение. Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 & 4 \\ 1 & 7 \end{matrix} \\ 2 & \begin{matrix} -1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 8 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

была рассмотрена в задаче 19, ее ранг равен 2. Поэтому размерность пространства решений данной системы равна $n - r = 5 - 2 = 3$ и ее ФСР состоит из трех решений. В матрице A возьмем в качестве базисного минора выделенный рамкой минор второго порядка. Третья строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк, поэтому последнее уравнение системы является следствием первых двух уравнений и его можно отбросить. В первых двух уравнениях члены, соответствующие базисному минору, оставляем в левой части, а неизвестные x_1, x_4, x_5 считаем «свободными» и переносим члены с этими неизвестными в правые части уравнений. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4x_1 - x_4 - 7x_5, \end{cases} \tag{2.6}$$

равносильной исходной системе, т.е. множество решений системы (2.6) совпадает с множеством решений исходной системы уравнений.

Найдем первое базисное решение X_1. Для этого положим $x_1 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$. Система (2.6) примет вид

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Определителем матрицы полученной системы является базисный минор, отличный от нуля. Следовательно, эта система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера: $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. Таким образом, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Полагая в системе (2.6) $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, аналогично находим $x_2 = 13$, $x_3 = 5$, т.е. вторым базисным решением является столбец

$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Наконец, полагая $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, находим $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Следовательно, третье базисное решение есть $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Итак, ФСР, состоящая из решений X_1, X_2, X_3, построена. Отметим, что построенная таким образом ФСР называется ***нормальной*** ФСР. Подчеркнем, что столбцы X_1, X_2, X_3, образующие нормальную ФСР, линейно-независимы, поскольку «свободные» неизвестные x_1, x_4, x_5 были выбраны так, что выделенный рамками минор третьего порядка в матрице из этих столбцов

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отличен от нуля, и поэтому ранг этой матрицы равен 3, т.е. равен числу столбцов матрицы.

Напишем теперь общее решение исходной системы уравнений:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3,$$

или, в координатах,

$$x_1 = c_1,\ x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3,\ x_3 = 5c_2 - c_3,\ x_4 = c_2,\ x_5 = c_3$$

где c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные.

2.4 Задачи для самостоятельного решения

1 Методом Гаусса решить системы линейных уравнений

а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y = z = -4, \\ 4x - 7y = z = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$

Ответ. а) Система решений не имеет;

б) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$;

в) $x = 2$, $y = -3$, $z = -\dfrac{3}{2}$, $t = \dfrac{1}{2}$.

2 Решить следующие системы линейных уравнений используя правило Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases}$

Ответ. а) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$;

б) $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$;

в) $x = -3$, $y = 0$, $z = -\dfrac{1}{2}$, $t = \dfrac{2}{3}$.

3 Решить следующие системы линейных уравнений, применив в каждом случае наиболее подходящий прием:

а) $\begin{cases} -x + y + z + t = a, \\ x - y + z + t = b, \\ x + y - z + t = c, \\ x + y + z - t = d. \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + by + cz + dt = p, \\ -bx + ay + dz - ct = q, \\ -cx - dy + az + bt = r, \\ -dx + cy - bz + at = s. \end{cases}$

Ответ. а) $x = \dfrac{1}{4}(-a + b + c + d)$, $y = \dfrac{1}{4}(a - b + c + d)$;

$z = \dfrac{1}{4}(a + b - c + d)$; $t = \dfrac{1}{4}(a + b + c - d)$.

б) $x = \dfrac{1}{A}(ap - bq - cr - ds)$, $y = \dfrac{1}{A}(bp + aq - dr + cs)$;

$z = \dfrac{1}{A}(cp + dq + ar - bs)$; $t = \dfrac{1}{A}(dp - cq + br + as)$, где $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

4 Исследовать систему линейных уравнений на совместность, найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

Ответ. а) Например, общее решение $x_1 = \dfrac{x_3 - 9x_4 - 2}{11}$, $x_2 = \dfrac{-5x_3 + x_4 + 10}{11}$; частное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$;

б) например, общее решение: $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$; частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$.

в) например, общее решение: $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$, $x_4 = 1$; частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

5 Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

Ответ. а) Например, общее решение: $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$. Фундаментальная система решение:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	-6	1	0
-7	5	0	1

б) общее решение: $x_3 = -\dfrac{5}{2}x_1 + 5x_2$, $x_4 = \dfrac{7}{2}x_1 - 7x_2$.

Фундаментальная система решение:

x_1	x_2	x_3	x_4

1	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
0	1	5	7

в) система имеет только нулевое решение. Фундаментальной системы не существует.

Рекомендуемая литература

1 **Беклемишев, Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. /Д. В.Беклемишев - М.: Наука, 1971. - 320 с.

2 **Беклемишев, Д.В.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб. пособие / Д.В. Беклемишев., А. Ю. Петрович, И.А. Чубаров; под ред. Д.В. Беклемишева - М.: Наука, 1987. - 496 с.

3 **Бугров, Я.С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - М.: Наука, 1984. - 256 с.

4 **Виноградова, И. М.** Элементы высшей математики.(Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел): учеб. для вузов/ И. М. Виноградова. - М.: Высш. шк.,1999. - 511с

5 **Гусак, А. А.** Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач/ А. А. Гусак. - М.: Наука, 2000. - 288 с.

6 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах.Ч. 1 /П. Е. Данко, А. Г. Попов ,Г. Я. Кожевникова. – Харьков:[б. и.], 1973.

7 **Канатников, А. Н.** Линейная алгебра**:** учеб. для вузов. 3-е изд. / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. - 336 с.

8 **Ким, Г. Д.** Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи **/** Г. Д. Ким, А. В. Крицков. - М.: Зерцало-М, 2003.-358 с.

9 **Кострикин, А. И.** Введение в алгебру. Ч. II. Основы алгебры: учеб. для вузов/ А. И. Кострикин. – 2-е изд., исправл. - М.: Физико-математическая литература, 2001. -368 с.

10 **Письменный, Д.** Конспект лекций по высшей математике. Ч.1./ Д. Письменный. - 2-е изд., испр. - М.: Айрис-пресс, 2003. - 288 с.

11 **Шевцов, Г.С.** Линейная алгебра: учеб. пособие / Г. С. Шевцов. - 2-е изд., исп. и доп. - М.: Гардарики, 1999. - 269 с.

12 **Шипачев, В.С.** Высшая математика: учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 5-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2002. - 479 с.

13 **Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии**: учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов / Р.Ф. Апатенок, А. М. Маркина,Н. В. Попова, В. Б. Хейнман; под ред. В. Т. Воднева. - 2-е изд., перераб. и доп. - Минск: Высшая школа, 1986. - 272 с.