МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры

Г. А. СИКОРСКАЯ

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
ЧАСТЬ II

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2007

УДК 512.64 (076.5)

ББК 22.143я73
С 35

Рецензенты
кандидат педагогических наук Липилина В.В.

Сикорская Г.А.
С 35 **Практикум по линейной алгебре: методические указания по линейной алгебре. В III Ч. Ч II / Г.А. Сикорская, Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. - 47 с.**

Настоящие методические указания содержат необходимые теоретические сведения по двум разделам (линейное пространство, линейное подпространство; евклидово и унитарное пространство), изучаемым студентами дневной формы обучения транспортного факультета в рамках дисциплины алгебра и геометрия в первом семестре, а также разработки практических занятий по этим разделам.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей транспортного факультета.

ББК 22.143я73

Содержание

Введение

Курс алгебры и геометрии, изучаемый студентами транспортного факультета опирается на базовый курс математики, изучаемый в средней школе.

Математика в высшей школе призвана заложить основы математической подготовки будущих инженеров, дающие возможность успешного освоения других математических дисциплин.

Математическое образование будущего инженера основывается на фундаментальных понятиях математики. Фундаментальность подготовки в области математики включает в себя достаточную общность математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, точность формулировки математических свойств изучаемых объектов, логическую строгость изложения математики, опирающуюся на адекватный современный математический аппарат.

Курс алгебры и геометрии представляет собой математическую теорию, охватывающую первоначальные сведения об основных алгебраических структурах, теорию матриц и определителей, векторную алгебру, теорию линейных и евклидовых пространств, теорию линейных операторов, аналитическую геометрию, дифференциальную геометрию и топологию.

В настоящих методических указаниях предлагаются подробные разработки практических занятий по двум разделам: линейное пространство, линейное подпространство; евклидово и унитарное пространство. Все задачи снабжены подробным решением с ссылкой на теорию, краткое содержание которой расположено перед соответствующей серией задач.

В заключении каждой главы автором предлагаются задачи для самостоятельного решения, подобные разработанным, а также расположенные в порядке возрастания их сложности.

Глава 1 Линейное пространство. Линейное подпространство

1.1 Линейное пространство

Множество V элементов любой природы называется ***линейным пространством***, если выполнены следующие три условия:

1) на множестве V определена операция *условного сложения элементов*, т.е. каждой паре элементов x и y из V поставлен в соответствие определенный элемент z из V. Элемент z называется ***суммой элементов*** x, y *и обозначается* $x+y$: $z=x+y$;
2) для элементов множества V определена операция *условного произведения на действительное число*, т.е. каждому элементу x из V и каждому действительному числу α поставлен в соответствие определенный элемент y из V. Элемент y называется ***произведением элемента*** x ***на число*** α и обозначается αx: $y=\alpha x$;
3) указанные операции удовлетворяют следующим ***аксиомам линейного пространства***.

I. $\forall\, x$ и y из V: $x+y=y+x$ (переместительное свойство).

II. $\forall\, x, y, z$ из V: $(x+y)+z=x+(y+z)$ (сочетательное свойство).

III. Существует элемент $\theta\in V$ такой, что $\forall\, x\in V$: $x+\theta=x$ (θ - нулевой элемент).

IV. $\forall\, x\in V$ существует элемент $x'\in V$ такой, что $x+x'=\theta$ (элемент x' - противоположный элементу x).

V. $\forall\, x\in V$: $1\cdot x=x$ (существование единичного элемента).

VI. $\forall\, x\in V$ и $\forall\, \alpha, \beta\in R$: $\alpha(\beta x)=(\alpha\cdot\beta)x$ (сочетательное свойство относительно числовых сомножителей).

VII. $\forall\, x\in V$ и $\forall\, \alpha, \beta\in R$: $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (распределительное свойство относительно суммы чисел).

VIII. $\forall\, x$ и y из V и $\forall\, \alpha\in R$: $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (распределительное свойство относительно суммы элементов).

Свойства линейных пространств

1^0 В линейном пространстве V существует единственный нулевой элемент.

2^0 $\forall\, x\in V$ существует единственный противоположный элемент x'.

3^0 $\forall\, x\in V$: $0\cdot x=\theta$ (θ - нулевой элемент).

4^0 Противоположный элемент x' для элемента x выражается формулой $x'=(-1)\cdot x$.

Обозначение: $x'=-x$.

5^0 Для любого числа α : $\alpha\cdot\theta=\theta$.

Разностью элементов x и y называется элемент z такой, что $y+z=x$.

Обозначение: $z = x - y$.

6^0 $\forall\, x$ и y из R: $x - y = x + (-y)$, где $(-y)$ - элемент, противоположный элементу y.

Задача 1 Доказать, что множество всех функций, непрерывных на сегменте $[a,b]$ (обозначим его $C[a,b]$), с обычными операциями сложения функций и умножения функций на действительные числа является вещественным линейным пространством.

Решение. Прежде всего отметим, что если $f(x)$ и $g(x)$ взяты из $C[a,b]$, а α - действительное число, то $\big(f(x)+g(x)\big)\in C[a,b]$ и $\big(\alpha\cdot f(x)\big)\in C[a,b]$, т.е. операции сложения функций и умножения функции на действительное число не выводят из множества $C[a,b]$.

Проверим выполнение восьми аксиом линейного пространства. Очевидно, что для любых функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ из $C[a,b]$ имеют место равенства

$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$, $\big(f(x)+g(x)\big)+h(x)=f(x)+\big(g(x)+h(x)\big)$,

т.е. выполнены аксиомы I и II.

Очевидно, нулевым элементом является функция $\theta(x)=0$. Действительно, эта функция удовлетворяет аксиоме III:

$f(x)+\theta(x)=f(x)$.

Противоположным элементом для любой функции $f(x)\in C[a,b]$ может вполне служить функция $[-f(x)]$, т.к. $[-f(x)]\in C[a,b]$ и

$f(x)+(-f(x))=\theta(x)$.

Таким образом, аксиома IV также выполнена.

Проверим выполнимость остальных аксиом. (Слова «для любого (ой)» заменим символом $\forall$):

V. $\forall f(x)\in C[a,b]$: $1\cdot f(x)=f(x)$.

VI. $\forall f(x)\in C[a,b]$ и $\forall\,\alpha,\beta\in R$: $\alpha\big(\beta f(x)\big)=(\alpha\beta)f(x)$.

VII. $\forall f(x)\in C[a,b]$ и $\forall\,\alpha,\beta\in R$: $(\alpha+\beta)f(x)=\alpha f(x)+\beta f(x)$.

VIII. $\forall$ $f(x)$ и $g(x)$ из $C[a,b]$ и $\forall\,\alpha\in R$:

$\alpha\big(f(x)+g(x)\big)=\alpha f(x)+\alpha g(x)$.

Итак, мы доказали, что $C[a,b]$ - вещественное линейное пространство.

Задача 2 Пусть R^* - множество всех положительных чисел. Сумма элементов x и y этого множества определена как их произведение, т.е. $x\cdot y$, а произведением элемента x на действительное число α - как степень x^α. Доказать, что множество R^* является линейным пространством.

Решение. Для того, чтобы доказать, что множество R^* с введенными операциями сложения и умножения является линейным пространством так же как и в предыдущем примере докажем справедливость восьми аксиом.

Поскольку операция «сложение» есть на самом деле умножение, а «умножение» заменено степенью, чтобы не путаться занесем все аксиомы в таблицу:

№	аксиома	справедливость аксиомы в данном примере (множество R^*)
I	$\forall\, x$ и y из V: $x+y=y+x$.	$x\cdot y=y\cdot x$.
II	$\forall\, x,y,z\in V$: $(x+y)+z=x+(y+z)$.	$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$.
III	Существование нулевого элемента $\theta\in V$: $x+\theta=x$.	Нулевой элемент $\theta=1$, тогда $x\cdot 1=x$.
IV	Существование противоположного элемента x': $x+x'=\theta$.	Противоположный элемент $\frac{1}{x}$, действительно $x\cdot\frac{1}{x}=1=\theta$.
V	$\forall\, x\in V$: $1\cdot x=x$.	Т.к. «умножение» - возведение в степень, то $x^1=x$.
VI	$\alpha(\beta x)=(\alpha\cdot\beta)x$.	$\left(x^{\alpha}\right)^{\beta}=x^{\alpha\beta}$.
VII	$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.	$x^{\alpha+\beta}=x^{\alpha}\cdot x^{\beta}$.
VIII	$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.	$(xy)^{\alpha}=x^{\alpha}\cdot y^{\alpha}$.

Таким образом, множество R^* с введенными операциями сложения и умножения на действительное число является линейным пространством, причем нулевой элемент равен 1.

Задача 3 Показать, что множество векторов на координатной плоскости, отложенных от начала координат и расположенных в первой четверти с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число, линейным пространством не является.

Решение. Для того, чтобы доказать, что какое-либо множество не является линейным пространством достаточно указать на ***невыполнимость*** хотя бы одной из аксиом линейного пространства.

В нашем случае отметим, что при умножении вектора, отложенного от начала координат и расположенного в первой четверти, на отрицательное число получается вектор, расположенный в третьей четверти и, следовательно, не принадлежащий данному множеству векторов. Поэтому данное множество линейным пространством не является.

Задача 4 Доказать, что множество многочленов степени n $(n>0)$ с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число, не является линейным пространством.

Решение. Данное множество не является линейным пространством, так как сумма многочленов степени n может <u>не быть</u> многочленом той же степени, например, при $n\geq 2$: $\left(x^n+x-1\right)+\left(-x^n+2x\right)=3x-1$.

Таким образом, операция сложения может дать многочлен, не принадлежащий данному множеству.

1.2 Линейно независимые векторы

Пусть $x, y, z, ..., u$ - какие-нибудь векторы линейного пространства V. И пусть

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + ... + \lambda u = 0. \qquad (1.1)$$

Векторы $x, y, z, ..., u$ называются ***линейно независимыми***, если равенство (1.1) выполняется лишь при $\alpha = \beta = \gamma = ... = \lambda = 0$. Если же равенство (1.1) может выполняться и в том случае, когда не все числа $\alpha, \beta, \gamma, ..., \lambda$ равны нулю, то говорят, что векторы $x, y, z, ..., u$ - ***линейно зависимы***.

Задача 5 Показать, что если среди векторов $x, y, z, ..., u$ имеется нуль-вектор, то рассматриваемые векторы линейно зависимы.

Решение. Пусть $x = 0$. Так как равенство $\alpha x + \beta y + \gamma z + ... + \lambda u = 0$ может выполняться при $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = ... = \lambda = 0$, то векторы линейно зависимы.

Задача 6 Элементами линейного пространства являются системы упорядоченных действительных чисел $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni})$ $(i = 1, 2, 3, ...)$. Какому условию должны удовлетворять числа x_{ik} ($i = 1, 2, ..., n$; $k = 1, 2, ..., n$) для того, чтобы векторы $x_1, x_2, ..., x_n$ были линейно независимы, при этом сумма векторов и произведение вектора на число определяются равенствами $x_i + x_k = (x_{1i} + x_{1k}; x_{2i} + x_{2k}; ..., x_{ni} + x_{nk})$, $\lambda x_i = (\lambda x_{1i}, \lambda x_{2i}, ..., \lambda x_{ni})$?

Решение. Рассмотрим равенство $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$. Оно равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + ... + \alpha_n x_{1n} = 0, \\ \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + ... + \alpha_n x_{2n} = 0, \\ .... \\ \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + ... + \alpha_n x_{nn} = 0. \end{cases}$$

В случае линейной зависимости векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ эта система должна иметь единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В частности, векторы $(x_{11}; x_{21})$ и $(x_{12}; x_{22})$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $x_{11}x_{21} - x_{12}x_{22} \neq 0$.

Задача 7 Доказать, что однородная система линейных уравнений $AX = \Theta$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы A линейно зависимы.

Решение. Обозначим элементы столбца X (неизвестные) через $x_1, x_2, ..., x_n$, а столбцы матрицы A - через $A_1, ..., A_n$. Тогда систему уравнений $AX = \Theta$ можно записать в виде

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_n A_b = \Theta \ . \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что если система (1.2) имеет ненулевое решение $x_1, x_2, ..., x_n$ (хотя бы одно x_k не равно нулю), то это означает, что линейная комбинация столбцов $A_1, ..., A_n$ с коэффициентами $x_1, x_2, ..., x_n$ является нулевым столбцом, т.е. столбцы $A_1, ..., A_n$ линейно зависимы. И обратно: если столбцы $A_1, ..., A_n$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $x_1, x_2, ..., x_n$, не все равные нулю и такие, что выполняется равенство (1.2), то $x_1, x_2, ..., x_n$ - ненулевое решение системы.

Задача 8 Доказать, что три компланарных вектора a, b и c линейно зависимы.

Решение. Для доказательства этого утверждения достаточно привести векторы к общему началу и разложить один из векторов на составляющие, соответственно коллинеарные двум другим.

Задача 9 Доказать, что любые четыре вектора a, b, c и d линейно зависимы.

Решение. Если три из четырех векторов компланарны, то задача решается просто. Предположим, что эти векторы некомпланарны. Приведем все четыре вектора к общему началу O. Построим параллелепипед, диагональю которого является вектор d с ребрами на прямых, содержащих a, b и c. Очевидно $d = \alpha\ a + \beta\ b + \gamma\ c$, что доказывает линейную зависимость векторов a, b, c и d.

Задача 10 Доказать, что три матрицы $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы и любой элемент линейного пространства симметричных 2×2-матриц есть их линейная комбинация.

Решение. Составим линейную комбинацию данных матриц:

$$\sum_{p=1}^{3} c_p e_p = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Она равна нулевой матрице $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ только в том случае, когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, а это и означает, что матрицы e_1, e_2, e_3 линейно независимы. Любая симметричная матрица $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ является, очевидно, линейной комбинацией матриц e_1, e_2, e_3 с коэффициентами c_1, c_2, c_3.

Задача 11 Доказать, что матрицы (элементы пространства H_3^2)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

являются линейно независимыми, а любой элемент пространства H_3^2 есть линейная комбинация этих шести элементов.

Решение. Составим линейную комбинацию данных элементов:

$$\sum_{p=1}^{6} c_p e_p = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Она равна нулевому элементу $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ только в том случае, когда все $c_p = 0$, а это означает, что элементы $e_1, ..., e_6$ линейно независимы.

Очевидно, любую матрицу $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$ (произвольный элемент пространства H_3^2) можно представить как $\sum_{p=1}^{6} c_p e_p$, т.е. любая матрица C является линейной комбинацией матриц $e_1, ..., e_6$.

Задача 12 Доказать, что в пространстве P_2 - многочленов степени не выше второй, три многочлена $1, x, x^2$ - линейно независимы и любой элемент пространства P_2 есть линейная комбинация этих элементов.

Решение. Нулевым элементом в пространстве P_2 является многочлен, тождественно равный нулю. Составим линейную комбинацию трех данных многочленов и приравняем ее нулевому элементу:

$$a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0 \cdot$$

Это равенство справедливо для всех x только в том случае, когда $a = b = c = 0$. В самом деле, если хотя бы один из коэффициентов a, b и c не равен нулю, то в левой части равенства стоит многочлен степени не выше второй, а он имеет не более двух корней, и потому не равен нулю для всех x. Следовательно, многочлены $1, x, x^2$ линейно независимы. Очевидно, любой многочлен $a1 + bx + cx^2$ из P_2 есть линейная комбинация многочленов $1, x$ и x^2 с коэффициентами a, b и c.

Задача 13 Доказать, что функции $\cos x, \cos 2x, \cos 3x$ $(-\infty < x < +\infty)$ линейно независимы.

Решение. Допустим, что данные функции линейно зависимы. Тогда существует их линейная комбинация, равная нулевому элементу, т.е. тождественно равная нулю:

$$a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x = 0,$$

причем хотя бы один из коэффициентов a, b и c не равен нулю. Продифференцировав это тождество два раза, а затем четыре раза, приходим к тождествам

$$acosx + 4bcos2x + 9xcos3x = 0, \qquad acosx + 16bcos2x + 81ccos3x = 0.$$

Положив во всех трех тождествах $x = 0$, получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов a, b и c

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ a + 4b + 9c = 0, \\ a + 16b + 81c = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение $a = b = c = 0$, т.к. определитель ее матрицы не равен нулю. Получили противоречие с тем, что хотя бы один из коэффициентов a, b и c отличен от нуля. Следовательно, данные функции линейно независимы.

1.3 Размерность и базис линейного пространства

Если в линейном пространстве V имеется n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ векторов этого пространства линейно зависимы, то пространство V называют n-мерным. Принято также говорить, что размерность пространства V равна n, и писать $d(V) = n$. Пространство, в котором можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, называется ***бесконечномерным***. Если V - бесконечномерное пространство, то $d(V) = \infty$.

Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного линейного пространства называется ***базисом***. Справедливая следующая **теорема**:

Каждый вектор линейного n-мерного пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Так, если $e_1, e_2, ..., e_n$ - базис n-мерного линейного пространства V, то любой вектор $x \in V$ может быть единственным образом представлен в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

Таким образом, вектор x в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ определяется единственным образом с помощью чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Эти числа называют ***координатами*** вектора в данном базисе.

Итак, совокупность элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ называется базисом линейного пространства V, если:

1) элементы $e_1, e_2, ..., e_n$ линейно независимы;

2) каждый элемент пространства V можно представить в виде линейной комбинации элементов $e_1, e_2, ..., e_n$, т.е $\forall x \in V$ существуют числа $x_1, ..., x_n$ такие, что справедливо равенство

$$x = \sum_{p=1}^{n} x_p e_p \,. \qquad (1.3)$$

Если введен базис, то действия над элементами линейного пространства (сложение элементов и умножение элементов на числа) сводятся к таким же действиям над числами – координатами элементов.

Задача 14 В некотором базисе даны векторы $x(1,-2,3,-1,0)$, $y(2,1,-3,-1,4)$. Найти координаты вектора $4x-3y$.

Решение. Поскольку $4x=(4,-8,12,-4,0)$ и $-3y(-6,-3,9,3,-12)$, то вектор $4x-3y=4x+(-3y)$ имеет координаты $\left(-2,-11,21,-1,-12\right)$.

Задача 15 Пусть A_4 - четырехмерное линейное пространство с базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Найти координаты векторов e_3 и $x=2e_1+4e_3-5e_4$ в этом базисе.

Решение. Представим каждый из векторов e_3 и x в виде линейной комбинации базисных векторов, имеем

$$e_3 = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3 + 0\cdot e_4,$$

таким образом, вектор e_3 имеет координаты $(0,0,1,0)$.

Так как

$$x = 2e_1 + 0\cdot e_2 + 4e_3 - 5e_4$$

то вектор x имеет координаты $\left(2,0,4,-5\right)$.

Задача 16 Дано линейное пространство всевозможных пар упорядоченных действительных чисел

$$x_1=\left(x_{11};x_{21}\right) \text{ и } x_2=\left(x_{12};x_{22}\right),\ x_3=\left(x_{13};x_{23}\right),\ \ldots,$$

причем сложение векторов и умножение вектора на действительное число определены равенствами

$$x_i + x_k = \left(x_{1i}+x_{1k};\, x_{2i}+x_{2k}\right); \qquad \lambda x_i = \left(\lambda x_{1i};\, \lambda x_{2i}\right).$$

Доказать, что векторы $e_1=(1,2)$ и $e_2=(3,4)$ образуют базис данного линейного пространства. Найти координаты вектора $x=(7,10)$ в этом базисе.

Решение. Векторы $e_1=(1,2)$ и $e_2=(3,4)$ линейно независимы, т.к.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим какой-нибудь вектор $y=\left(y_1;y_2\right)$. Покажем, что для любых y_1 и y_2 можно определить числа λ и μ так, чтобы выполнялось равенство , или $\left(y_1;y_2\right)=\left(\lambda+3\mu\,;\,2\lambda+4\mu\right)$.

Нетрудно видеть, что существует единственная пара значений $\left(\lambda\,;\mu\right)$, для которой выполняется это равенство. Это следует из того, что система уравнений

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = y_1, \\ 2\lambda + 4\mu = y_2 \end{cases}$$

является определенной.

Итак, векторы e_1 и e_2 образуют базис. Определим координаты вектора $x = (7, 10)$ в этом базисе. Задача сводится к определению λ и μ из системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 7, \\ 2\lambda + 4\mu = 10. \end{cases}$$

Отсюда находим $\lambda = 1$, $\mu = 2$, т.е. $x = e_1 + 2e_2$.

Задача 17 Доказать, что все координаты нулевого элемента в любом базисе равны нулю, и обратно, если все координаты элемента в каком-то базисе равны нулю, то этот элемент нулевой.

Решение. Пусть в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ разложение нулевого элемента θ имеет вид

$$\theta = \sum_{p=1}^{n} c_p e_p .$$

Тогда все $c_p = 0$, так как элементы базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ линейно независимы, и поэтому их линейная комбинация равна нулевому элементу только тогда, когда все коэффициенты c_p равны нулю. Обратно: если все координаты элемента x равны нулю: $x = 0 \cdot e_1 + ... + 0 \cdot e_n$, то x является нулевым элементом, так как согласно свойству 3^0 линейных пространств имеем $o \cdot e_p = \theta$, и поэтому $x = \theta$.

Задача 18 а) Какова размерность линейного пространства R^* (пространство R^* определено в задаче 2).

б) Определить базис пространства R^*.

Решение. а) Возьмем какое-либо число из R^*, отличное от нулевого элемента (от единицы), например число 2. Покажем, что любое число x из R^* может быть выражено в виде линейной комбинации элемента 2, т.е. существует такое число a из R, что $x = "a \cdot 2" = 2^a$. Действительно, такое число существует, именно $a = \log_2 x$, т.к $2^{\log_2 x} = x$. Таким образом, любые два элемента линейного пространства R^* линейно зависимы. Следовательно, по определению, размерность линейного пространства R^* равна 1.

б) Что является базисом в этом линейном пространстве R^*?

Как и в любом другом линейном пространстве, базисов в линейном пространстве R^* имеется бесконечно много. В качестве базиса можно взять любое число из R^*, не равное 1 (так как 1 – нулевой элемент).

Задача 19 Найти базис и размерность линейного пространства P_2 многочленов $p(x)$, степень которых не выше двух и которые удовлетворяют условию $p(1) = 0$.

Решение. Любой многочлен

$$p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

из P_2 удовлетворяет условию

$$p(1) = c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Отсюда $c_3 = -c_1 - c_2$, и поэтому

$$p(x) = c_1 + c_2x + \left(-c_1 - c_2\right)x^2 = c_1(1 - x^2) + c_2(x - x^2),$$

т.е. любой многочлен из P_2 представим в виде линейной комбинации многочленов $p_1(x) = 1 - x^2$ и $p_2(x) = x - x^2$.

Покажем, что многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ линейно независимы. Составим столбцы их координат в базисе 1, x, x^2 пространства P_2:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Эти столбцы линейно независимы, так как их элементы не пропорциональны, и, следовательно, многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ линейно независимы. Итак, многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ образуют базис в пространстве P_2, и, следовательно, $\dim P_2 = 2$.

1.4 Преобразование координат вектора при переходе от базиса к базису

Пусть в линейном пространстве X_n заданы базисы

$$[e] = \left(e_1, e_2, ..., e_n\right) \text{ и } [e'] = \left(e'_1, e'_2, ..., e'_n\right). \qquad (1.4)$$

Разложим векторы базиса e' по базису e:

$$\begin{cases} e'_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_{21} + ... + t_{n1}e_{1n}, \\ e'_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_{21} + ... + t_{n2}e_{1n}, \\ .... \\ e'_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_{21} + ... + t_{nn}e_{1n}. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

называют ***матрицей перехода*** от базиса $[\boldsymbol{e}]$ к базису $[\boldsymbol{e}']$.

Соотношения (1.5) коротко записываются так:

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{eT}. \qquad (1.6)$$

(1.6) – формула перехода от базиса $[\boldsymbol{e}]$ к базису $[\boldsymbol{e}']$.

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \qquad (1.7)$$

- формула перехода от базиса $[\boldsymbol{e}']$ к базису $[\boldsymbol{e}]$.

Задача 20 Пусть i, j - координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Найти разложение вектора $x = i + j$ по базису e_1, e_2, если $e_1 = 7i + 4j$, $e_2 = 5i + 3j$.

Решение. По определению матрица перехода от базиса i, j к базису e_1, e_2 есть матрица

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Столбец X координат вектора x в базисе i, j имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (7) находим столбец X_e координат вектора x в базисе e_1, e_2:

$$X_e = T^{-1}X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 21 В линейном пространстве T_3 даны два базиса e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2, f_3:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

и

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) матрицу T перехода от базиса e к базису f;

б) матрицу T^{-1} обратного перехода;

в) координаты элемента e_1 в обоих базисах;

г) координаты элемента x в базисе $\boldsymbol{e}$, имеющего во втором базисе координаты $X_f = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Формулу (6) можно записать равенством:

$(f_1 f_2 f_3) = (e_1 e_2 e_3)T$, которое в свою очередь представим матричным уравнением в виде $F = ET$, где

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

T - матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису f. решая составленное матричное уравнение, находим T:

а) $T = E^{-1}F = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, матрица перехода от $\boldsymbol{e}$ к f найдена.

б) $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица обратного перехода;

в) Найдем координаты элемента e_1 в обоих базисах. В первом базисе элемент e_1 имеет разложение $e_1 = e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$, т.е.

$(e_1)_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тогда по формуле (1.7) находим

$$(e_1)_{\boldsymbol{f}} = T^{-1}(e_1)_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

г) Используя формулу (6), получаем

$$(X)_{\boldsymbol{e}} = T(X)_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Задача 22 В пространстве R_2 даны три базиса: e_1, e_2; f_1, f_2; g_1, g_2, причем

$f_1 = e_1 - e_2$, $\quad f_2 = e_1 + e_2$, $\quad g_1 = 3e_1 + e_2$, $\quad g_2 = 5e_1 + 2e_2$.

Найти матрицу перехода от базиса f_1, f_2 к базису g_1, g_2.

Решение. По определению матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису f_1, f_2 есть матрица

$$T_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису g_1, g_2 есть матрица

$$T_{e \to g} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, связь векторов базисов f, e и g можно оформить системой:

$$\begin{cases} f = eT_{e\to f}, \\ g = eT_{e\to g}. \end{cases}$$

Из первого равенства находим $e = f \cdot T^{-1}_{e\to f}$. Подставляя во второе равенство, получаем $g = f \cdot T^{-1}_{e\to f} \cdot T_{e\to g}$.

Таким образом, матрицей перехода от базиса f_1, f_2 к базису g_1, g_2 является матрица $T^{-1}_{e\to f} \cdot T_{e\to g}$. Вычисляем матрицу $T^{-1}_{e\to f}$:

$$T^{-1}_{e\to f} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а затем находим произведение $T^{-1}_{e\to f} \cdot T_{e\to g}$:

$$T^{-1}_{e\to f} \cdot T_{e\to g} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица перехода от базиса f к базису g имеет вид

$$T^{-1}_{e\to f} \cdot T_{e\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Задача 23 В линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов не выше третьей степени с действительными коэффициентами даны два базиса:

$$e = (e_1, e_2, e_3),$$

где $e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2$, и

$$e' = (e'_1, e'_2, e'_3),$$

где $e'_1 = 1, \quad e'_2 = x - 1, \quad e'_3 = (x-1)^2$.

Найти матрицу перехода T от базиса e к базису e'.

Решение. Так как

$$\begin{cases} e'_1 = 1 = e_1, \\ e'_2 = x - 1 = -1 + x = -e_1 + e_2, \\ e'_3 = (x-1)^2 = 1 - 2x + x^2 = e_1 - 2e_2 + e_3, \end{cases}$$

то

$$(e'_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (e'_2)_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (e'_3)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 24 Найти разложение элемента

$$p(x) = x^3 + x + 1$$

пространства P_3 по базису

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x + a, \quad p_2 = (x + a)^2, \quad p_3 = (x + a)^3.$$

Решение. Выразим координаты второго базиса (обозначим его (2)) через координаты первого базиса (1). Поскольку

$$(x + a)^2 = a^2 + 2ax + x^2, \qquad (x + a)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

то

$$\begin{cases} p_0 = 1, \\ p_1 = a \cdot 1 + 1 \cdot x, \\ p_2 = a^2 \cdot 1 + 2a \cdot x + 1 \cdot x^2, \\ p_2 = a^3 \cdot 1 + 3a^2 \cdot x + 3a \cdot x^2 + x^3. \end{cases}$$

Таким образом, матрица T перехода от базиса $1, x, x^2, x^3$ к базису p_0, p_1, p_2, p_3 имеет вид

$$T_{(1)\to(2)} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$T_{(2)\to(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее составляем столбец $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ из координат элемента $p(x) = x^3 + x + 1$ в базисе (1): $1, x, x^2, x^3$. По формуле (6) находим столбец X_2 координат элемента $p(x)$ в базисе (2): p_0, p_1, p_2, p_3:

$$X_2 = T_{(2)\to(1)} X_1 = \begin{pmatrix} 1 - a - a^3 \\ 1 + 3a^2 \\ -3a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$p(x) = (1 - a - a^3) p_0(x) + \left(a + 3a^2\right) p_1(x) - 3a p_2(x) + 1 \cdot p_3(x),$$

или

$$x^3 + x + 1 = \left(1 - a - a^3\right) + (1 + 3a^2)(x + a) - 3a(x + a)^2 + (x + a)^3.$$

Задача 25 В пространстве X_3 заданы вектор x и векторы e'_1, e'_2, e'_3 базиса e' координатами в базисе e:

$$[x]_e = (1, 4, -1)^T,\ [e'_1]_e = (5, -1, 2)^T,\ [e'_2]_e = (2, 3, 0)^T,\ [e'_3]_e = (-2, 1, 1)^T.$$

Задан также вектор y своими координатами в базисе e': $[y]_{e'} = (1, 2, 3)^T$. Найти координаты вектора x в базисе e' и координаты вектора y в базисе e.

Решение. Ввиду того, что векторы базиса e' заданы столбцами координат в базисе e, можно составить матрицу перехода T от базиса e к базису e', сгруппировав координатные столбцы вектора базиса e':

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле $[y]_e = T[y]_{e'}$ получаем:

$$[y]_e = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем обратную матрицу перехода

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix}$$

и находим:

$$[x]_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

Формулой $[x]_{e'} = T[x]_e$ удобно пользоваться при отыскании матрицы перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$, когда векторы этих базисов заданы своими координатами в некотором третьем базисе $\boldsymbol{e}^{\circ}$.

Задача 26 Найти матрицу перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ к базису $e' = (e_1', e_2', e_3')$, если известны координаты векторов $e_1, e_2, e_3, e_1', e_2', e_3'$ в некотором базисе e_0:

$$[e_1]_{e_0} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}},\ [e_2]_{e_0} = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}} \text{ и } [e_3]_{e_0} = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

и

$$[e_1']_{e_0} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}},\ [e_2']_{e_0} = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}} \text{ и } [e_3']_{e_0} = (1, 1, 3)^{T}.$$

Решение. Прейдем от базиса e_0 к базису e и найдем координаты векторов базиса e' в базисе e. Матрицей перехода от базиса e_0 к базису e является матрица

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

а обратной к ней – матрица

$$T_1^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для векторов e_1', e_2', e_3' получаем:

$$[e_1']_e = T_1^{-1}[e_1']_{e_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$[e_2']_e = T_1^{-1}[e_2']_{e_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$[e_3']_e = T_1^{-1}[e_3']_{e_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из полученных координатных столбцов составляем матрицу перехода от базиса e к базису e':

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 27 Найти матрицу перехода от базиса $e = (e_1, e_2)$ к базису $e' = (e_1', e_2')$, где $[e_1']_e = (2, 1)^T$, $[e_2']_e = (3, 2)^T$.

Решение. Здесь векторы нового базиса заданы координатами в старом базисе. Поэтому сразу можно составить искомую матрицу T из координатных столбцов векторов e_1' и e_2':

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.5 Изоморфизм линейных пространств

Рассмотрим два линейных пространства V и V'. Элементы пространства V будем обозначать через $x, y, z, \ldots$, а элементы пространства V' - через $x', y', z', \ldots$.

Пространства V и V' называют ***изоморфными***, если между их элементами x, y, x', y' можно установить такое взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow x'$; $y \leftrightarrow y'$, при котором $x + y \leftrightarrow x' + y'$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ (λ - любое действительное число). Следует отметить важную **теорему**, с помощью которой легко устанавливается изоморфизм конечномерных линейных пространств:

Для того, чтобы два конечномерных пространства V и V' были изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы их размерности были одинаковыми.

Задача 28 Какие пространства H_n^m матриц с размерами $m \times n$ изоморфны пространству T_6 столбцов с шестью элементами?

Решение. Размерности пространств H_n^m и T_6 равны соответственно $m \times n$ и 6. Из теоремы следует, что пространства H_n^m и T_6 изоморфны тогда и только тогда, когда $m \cdot n = 6$. Следовательно, пространства H_6^1, H_1^6, H_3^2, H_2^3 изоморфны пространству T_6.

Отметим, что пространство H_1^6 - это пространство матриц с размерами 6×1, т.е. это само пространство T_6. Разумеется, любое линейное пространство изоморфно самому себе.

1.6 Линейное подпространство, его размерность

Множество $W \subset V$ называется ***подпространством*** линейного пространства V, если выполняются следующие условия:

1) в множестве W определены те же операции, что и в множестве V;
2) если $x, y \in W$, то $x + y \in W$;
3) если $x \in W$, то $\alpha x \in W$.

Очевидно, всякое подпространство W линейного пространства V является линейным пространством, т.е. в W выполняются аксиомы I – VIII.

Теорема *Размерность любого подпространства не превосходит размерности всего пространства. Базис подпространства линейного пространства* R_n *можно дополнить элементами из* R_n *до базиса всего пространства*.

Задача 29 Образует ли множество N всех натуральных чисел подпространство линейного пространства $R*$ (смотри задачу 2).

Решение. Так как дано непустое множество N из $R*$, то остается проверить корректность линейных операций на N, введенных в $R*$.

1^0 Операция сложения – для любых x, y из N «$x+y$»$\in N$. Так как $"x+y"=xy\in N$, то эта операция корректна на множестве N.

2^0 Операция умножения на действительное число – для любых x из N и a из R $"ax"\in N$. Но $"ax"=x^a$, что, вообще говоря, не принадлежит множеству N. Например, если $x=2$, $a=-1$, то $"ax"=1/2$, т.е. не является натуральным числом; $1/2\notin N$. Поэтому множество N не является подпространством линейного пространства $R*$.

1.7 Подпространства, образованные решениями однородной линейной системы уравнений

Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Пусть $x_1=\lambda_1$, $x_2=\lambda_2$, …, $x_n=\lambda_n$ - какое-нибудь решение системы. Запишем это решение в виде вектора $f=(\lambda_1;\lambda_2;...;\lambda_n)$. Совокупность линейно независимых решений $f_1, f_2, ..., f_n$ системы уравнений (1.8) называется ***фундаментальной системой решений***, если любое решение системы уравнений (1.8) может быть представлено в виде линейной комбинации векторов $f_1, f_2, ..., f_n$.

Теорема ***о существовании фундаментальной системы решений***. *Если ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

меньше n, *то система* (1.8) *имеет ненулевые решения. Число векторов, определяющих фундаментальную систему решений, находится по формуле*

$$k=n-r,$$

где r *- ранг матрицы*.

Таким образом, если рассматривается линейное пространство V, векторами которого являются всевозможные системы n действительных чисел, то совокупность всех решений системы (1.8) является подпространство пространства V. Размерность этого пространства равна k.

Задача 30 Найти базис и размерность подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

равен 2, так как определитель третьего порядка, образованный элементами матрицы, равен нулю, а среди миноров второго порядка имеются отличные от нуля. Размерность пространства решений

$k = n - r = 3 - 2 = 1$.

Так как $r = 2$, то достаточно взять два уравнения из заданных трех. Отбросим третье уравнение, поскольку его коэффициенты пропорциональны соответствующим коэффициентам первого уравнения.

В системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3, \\ 2x_1 - x_2 = x_3 \end{cases}$$

полагаем, например, $x_3 = 1$, тогда решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

есть $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Итак, подпространство решений определяется одним базисным вектором $f = (1, 1, 1)$. Понятно, если бы мы взяли x_3 равным другому числу, то и получили бы соответственно другой базисный вектор.

Задача 31 Найти размерность и базис подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определяем ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Вычтем из 3-й строки 2-ю, а из 4-й строки 1-ю:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Так как элементы 3-й строки пропорциональны соответствующим элементам 1-й строки, а элементы 4-й строки пропорциональны элементам 2-й строки, то 3-ю и 4-ю строки можно вычеркнуть:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 2 и $k=n-r=4-2=2$.

Итак, размерность подпространства решений равна 2. Так как $r=2$, то из четырех уравнений возьмем два:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2+x_3-x_4=0,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x_1+x_2=\ \ x_3-x_4,\\ x_1-x_2=-x_3+x_4.\end{cases}$$

Полагая, например, $x_3=1$, $x_4=0$, получим систему

$$\begin{cases}x_1+x_2=\ \ 1,\\ x_1-x_2=-1.\end{cases}$$

Следовательно, $x_1=0$, $x_2=1$ и $f_1=(0;1;1;0)$.

Полагая теперь $x_3=0$, $x_4=1$, имеем

$$\begin{cases}x_1+x_2=-1,\\ x_1-x_2=\ \ 1.\end{cases}$$

Таким образом, $x_1=0$, $x_2=-1$ и $f_2=(0;-1;0;1)$. За базисные векторы подпространства могут быть приняты векторы $f_1=(0;1;1;0)$, $f_2=(0;-1;0;1)$. Общее решение системы уравнений определяется вектором

$$f=c_1f_1+c_2f_2,$$

т.е. $f=(0;c_1-c_2;c_1;c_2)$.

Задача 32 Доказать, что множество M всех функций $f(x)$ удовлетворяющих условию $f(-2)=0$, является подпространством линейного пространства функций, определенных на числовой прямой.

Решение. Проверим выполнение двух условий, определяющих подпространство. Если $f(x)$ и $g(x)\in M$, то $f(-2)=0$, $g(-2)=0$, и поэтому,

$$f(-2)+g(-2)=0 \qquad \text{и} \qquad \alpha\cdot f(-2)=0$$

(α - любое число). Следовательно,

$$f(x)+g(x) \quad \text{и} \quad \alpha \cdot f(x)$$

принадлежит множеству M, и поэтому M - подпространство линейного пространства функций.

Задача 33 Доказать, что все векторы, параллельные данной прямой, образуют подпространство линейного пространства V_3.

Решение. Если векторы x и y параллельны данной прямой, то их сумма $x+y$ и вектор αx (α - любое число) также параллельны этой прямой. Таким образом, для данного множества векторов выполнены оба условия, входящие в определение подпространства, и поэтому векторы, параллельные данной прямой, образуют подпространство линейного пространства V_3.

Задача 34 Дана однородная система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Доказать, что множество всех решений данной системы является подпространством пространства T_n.

Решение. Запишем данную систему в матричном виде:

$$AX = \Theta,$$

где $A = (a_{ij}) - m \times n$ матрица коэффициентов системы, X - столбец, состоящий из решений системы, Θ - нулевой столбец. Если X_1 и X_2 - решения системы, т.е. $AX_i = \Theta$, $i = 1, 2$, то

$$X_1 + X_2 \quad \text{и} \quad \alpha X_1$$

(α - число) – также ее решения, поскольку

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \Theta + \Theta = \Theta \text{ и } A(\alpha X_1) = \alpha AX_1 = \alpha\Theta = \Theta.$$

Следовательно, для множества решений данной системы выполнены оба условия, фигурирующих в определении подпространства, и поэтому это множество решений является подпространством линейного пространства T_n.

Пусть M - подпространство линейного пространства V и элемент x_0 из V не принадлежит M. Рассмотрим множество Γ всех элементов $y \in V$, представимых в виде $y = x_0 + x$, где $x \in M$. Множество Γ называется ***гиперплоскостью***, полученной в результате сдвига подпространства M вдоль элемента x_0.

Задача 35 Доказать, что гиперплоскость не является подпространством.

Решение. Пусть гиперплоскость Γ получена в результате сдвига подпространства M вдоль элемента x_0. Согласно определению гиперплоскости $x_0 \notin M$. Предположим, что Γ - подпространство. Тогда $\theta \in \Gamma$, а значит, θ можно представить в виде

$$\theta = x_0 + x,$$

где $x \in M$. Отсюда следует, что $x_0 = -x$, и поэтому $x_0 \in M$. Таким образом, получили противоречие с условием $x_0 \notin M$. Следовательно, $\theta \notin \Gamma$, и потому Γ не является подпространством.

Задача 36 Доказать, что $L(x_1, x_2, ..., x_m) = L(x_1 + x_2, x_2, ..., x_m)$, т.е. прибавление к элементу порождающей системы другого ее элемента не изменяет линейной оболочки.

Решение. Чтобы доказать, что два множества совпадают, нужно показать, что каждый элемент первого множества является элементом второго и, обратно, каждый элемент второго множества является элементом первого множества. Пусть

$x \in L(x_1, x_2, ..., x_m)$, т.е. $x = \sum\limits_{p=1}^{m} c_p x_p$.

Элемент x можно представить в виде линейной комбинации элементов порождающее системы второй оболочки:

$$x = c_1(x_1 + x_2) + (c_2 - c_1)x_2 + \sum_{p=3}^{m} c_p x_p.$$

Итак, $x \in L(x_1 + x_2, x_2, ..., x_m)$.

Обратно: каждый элемент второй оболочки есть линейная комбинация элементов $x_1, x_2, ..., x_m$, т.е. принадлежит первой оболочке. Таким образом, $L(x_1, x_2, ..., x_m) = L(x_1 + x_2, x_2, ..., x_m)$.

Задача 37 Найти какой-либо базис подпространства L, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выбрав в качестве главных неизвестных x_1, x_2, а свободных - x_3, x_4, решим систему. В результате получим:

$$x = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему решений рассматриваемой однородной системы линейных уравнений составляют столбцы $(-1, 0, 1, 0)^T$, $(0, -1, 0, 1)^T$ а базис линейного пространства – векторы, которые в заданном базисе имеют указанные столбцы координат.

Задача 38 Найти базис пересечения подпространств

$L_1 = (a_1, a - 2, a_3)$ и $L = \left(b_1, b_2, b_3\right)$,

где

$a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $a_2 = \left(1, 1, -1, -1\right)^T$, $a_3 = (1, -1, 1, -1)^T$ и

$b_1 = (1, -1, -1, 1)^T$, $b_2 = (2, -2, 0, 0)^T$, $b_3 = (3, -1, 1, 1)^T$.

Решение. I *способ*. Подпространство L_1 описывает параметрическим уравнением

$$x = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3,$$

которое в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 + t_3, \\ x_2 = t_1 + t_2 - t_3, \\ x_3 = t_1 - t_2 + t_3, \\ x_4 = t_1 - t_2 - t_3. \end{cases}$$

Исключив параметры t_1, t_2, t_3 придем к общему уравнению

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

подпространства L_1. Аналогично получаем общее уравнение

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

подпространства L_2. Общие уравнения подпространств $L_1 \cap L_2$ имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальную систему решений этой системы составляют, например, векторы

$$x_1 = (1, 0, 1, 0)^T, \qquad x_2 = (0,1, 0, 1)^T.$$

Эти векторы образуют базис подпространства $L_1 \cap L_2$.

II *способ*. Составим векторное уравнение

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3,$$

в подробной записи имеющее вид:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Переходя к покоординатным уравнениям, получим однородную систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -\beta_1 + \beta_3, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \beta_1 + \beta_3 \end{cases}$$

с шестью неизвестными. Ее общее решение таково:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = \beta_2 + \beta_3, \\ \beta_1 = -\beta_2 - \beta_3. \end{cases}$$

Свободных неизвестных два, и фундаментальная система решений состоит из двух столбцов

$$(0, 0, 1, -1, 1, 0)^T \text{ и } (1, 0, 1, -1, 0, 1)^T.$$

В этих двух столбцах выбираем первые три компоненты и принимаем в качестве значений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в выражении

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3.$$

Получаем два вектора

$$x_1 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 = a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = a_1 + a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

составляющих базис подпространства $L_1 \cap L_2$.

Пусть в линейном пространстве X над полем Р дана система векторов $a_1, a_2, ..., a_k$. Множество всевозможных линейных комбинаций

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k$$

этой системы называют ***линейной оболочкой*** системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$.

Линейная оболочка L системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$ является подпространством в X.

Теорема *Пусть X – конечномерное линейное пространство и в нем задан базис. Тогда для любого линейного подпространства L в X можно указать такую однородную систему линейных уравнений Ax = 0, что множество координатных столбцов всех векторов L будет совпадать с множеством решений системы Ax = 0.*

Так как линейное подпространство L в базисе $a_1, a_2, ..., a_n$ описывается однородной системой линейных уравнений, то это подпространство в соответствии с только что доказанным и в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ описывается системой линейных уравнений.

Однородную систему линейных уравнений, описывающую данное линейное подпространство L, называют ***общими уравнениями*** *этого подпространства*.

Общие уравнения линейного подпространства определяются неоднозначно: достаточно систему линейных уравнений заменить любой эквивалентной системой, чтобы получить другие общие уравнения того же линейного подпространства.

Если подпространство задано общими уравнениями, то для построения базиса этого подпространства следует построить фундаментальную систему решений для общих уравнений подпространства.

Если $a_1, a_2, ..., a_k$ – базис линейного подпространства L в линейном пространстве X, то L можно задать уравнением

$$x = t_1 a_1 + t_2 a_2 + ... + t_n a_n, \tag{1.9}$$

которое называют ***параметрическим уравнением подпространства L в векторной форме***.

Систему

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + ... + a_{1k}t_k, \\ x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{2k}t_k, \\ .... \\ x_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + ... + a_{nk}t_k. \end{cases}$$

называют ***параметрическими уравнениями подпространства L в координатной форме***.

Например, найдем базис и размерность подпространства линейной однородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ (1/2)x_1 + x_2 + (3/2)x_3 + 2x_4 = 0, \\ (1/3)x_1 + (2/3)x_2 + x_3 + (4/3)x_4 = 0, \\ (1/4)x_1 + (1/2)x_2 + (3/4)x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 1 поскольку все миноры матрицы, кроме миноров первого порядка, равны нулю. Число неизвестных равно 4; поэтому размерность подпространства решений $k = n - r = 4 - 1 = 3$, т. е. это подпространство является трехмерным. Так как $r = 1$, то из этой системы достаточно взять какое-нибудь одно уравнение.

Возьмем первое уравнение системы и запишем его в виде

$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4$.

Если $x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$, то $x_1 = -2$; если $x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$, $x_1 = -3$; если $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$, то $x_1 = -4$. Итак, мы получили линейно независимые векторы $f_1 = (-2; 1; 0; 0)$, $f_2 = (-3; 0; 1; 0)$, $f_3 = (-4; 0; 0; 1)$, которые образуют базис трехмерного подпространства решений данной системы.

Например, найдем базис суммы $L_1 + L_2$ подпространств $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ и $L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, если

$a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\quad a_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\quad a_3 = (1, -1, 1, -1)^T$,

$b_1 = (1, -1, -1, 1)^T$, $\quad b_2 = (2, -2, 0, 0)^T$, $\quad b_3 = (3, -1, 1, 1)^T$.

Решение. Составим матрицу

$$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проводя элементарные преобразования строк матрицы, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Видим, что ранг матрицы равен четырем, а один из ее базисных миноров располагается на векторах a_1, a_2, a_3, b_1. Следовательно, эти векторы составляют базис суммы $L_1 + L_2$.

1.8 Задачи для самостоятельного решения

1 Заданы координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в некотором базисе. Найти координаты вектора $\boldsymbol{c}$ в этом же базисе.

а) $\boldsymbol{a}(2;3;-1)$, $\boldsymbol{b}(0;1;2)$, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$;

б) $\boldsymbol{a}(0;-5;1;4)$, $\boldsymbol{b}(7;2;0;-1)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

Ответ. а) $\boldsymbol{c}(4,9,4)$; б) $\boldsymbol{c}(-7,-7,1,5)$.

2 Даны векторы $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$, где $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ - базис. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ образуют базис. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ в базисе $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Ответ. $\boldsymbol{c}(11/7;-1/7)$.

3 Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы, заданные координатами в некотором базисе:

а) $\boldsymbol{a}_1(2,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2(-6,2,0)$, $\boldsymbol{a}_3(2,-4,2)$;

б) $\boldsymbol{a}_1(1,-1,0,1)$, $\boldsymbol{a}_2(2,3,-1,0)$, $\boldsymbol{a}_3(4,0,0,-1)$.

Ответ. а) нет; б) да.

4 Выяснить, является ли вектор $\boldsymbol{a}_4$ линейной комбинацией остальных векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1(-2,1,0)$, $\boldsymbol{a}_2(3,-1,1)$, $\boldsymbol{a}_3(2,0,-2)$, $\boldsymbol{a}_4(1,1,1)$;

б) $\boldsymbol{a}_1(1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2(2,2,2)$, $\boldsymbol{a}_3(0,-1,1)$, $\boldsymbol{a}_4(2,-1,3)$.

Ответ. а) да; б) да.

5 Даны векторы $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}$ в некотором базисе. Найти все значения λ, при которых вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$:

а) $\boldsymbol{a}_1(2,3,0)$, $\boldsymbol{a}_2(1,36,0)$, $\boldsymbol{a}_3(-1,2,0)$, $\boldsymbol{b}(0,\lambda,5)$;

б) $\boldsymbol{a}_1(1,2,4)$, $\boldsymbol{a}_2(2,1,5)$, $\boldsymbol{a}_3(3,-1,5)$, $\boldsymbol{b}(1,\lambda,\lambda)$.

Ответ. а) при любом λ; б) ни при каком λ.

6 Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ к базису $\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7 Является ли данная матрица матрицей перехода от одного базиса к другому:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ. а) нет; б) да.

8 Дана матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$. Найти координаты $\boldsymbol{e}'_2$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и координаты $\boldsymbol{e}'_1$ в базисе $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$.

Ответ. $\boldsymbol{e}'_2(0, -1, 4)$, $\boldsymbol{e}'_1(-1, -2, 13/6)$.

9 Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$, если $\boldsymbol{e}'_1 = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

10 По координатам вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ найти его координаты в базисе $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$:

а) $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_1 = 5\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$;

б) $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_1 = 3\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.

Ответ. а) $\boldsymbol{x}(5/2; -19/2)$; б) $\boldsymbol{x}(-3, 7)$.

11 Показать, что данная система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ , \boldsymbol{a}_n$ образует базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d}$ в этом базисе:

а) $\boldsymbol{a}_1(1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1, 4)$, $\boldsymbol{d}(3, -7)$;

б) $\boldsymbol{a}_1(1, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_2(-1, 4, 0)$, $\boldsymbol{a}_3(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{d}(5, 2, -6)$.

Ответ. а) $\boldsymbol{d}(5/6; -13/6)$; б) $\boldsymbol{d}(-2, 3/2; 17/2)$.

Глава 2 Евклидово и унитарное пространство

Линейное пространство R называется ***евклидовым***, если имеется правило, которое позволяет для каждых двух векторов x и y из R построить действительное число, называемое ***скалярным произведением*** векторов x и y и обозначаемое (x, y), причем это правило удовлетворяет следующим условиям:

1⁰ $(x, y) = (y, x)$;

2⁰ $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

3⁰ $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ для любого действительного числа λ ;

4⁰ $(x, x) > 0$ для всех $x \neq 0$.

Из условий $1^0 - 4^0$ следует, что:

а) $(y + z, x) = (y, x) + (z, x)$;

б) $(x, \lambda y) = \lambda (x, y)$;

в) $(0, x) = 0$ для любого вектора x.

Скалярное произведение любого вектора $x \in R$ на себя называется ***скалярным квадратом*** вектора x.

Длиной вектора x в евклидовом пространстве называется квадратный корень из скалярного квадрата этого вектора, т.е.

$$|x| = \sqrt{(x, x)} .$$

Если λ - любое действительное число, а x - любой вектор евклидова пространства, то $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

Вектор, длина которого равна единице, называется ***нормированным***. Если $x \in R$ - нулевой вектор, то нетрудно видеть, что $\frac{\boldsymbol{x}}{|x|}$ является нормированным вектором.

Для любых двух векторов x и y в евклидовом пространстве выполняется неравенство

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y),$$

называемое ***неравенством Коши-Буняковского***.

Равенство $(x, y)^2 = (x, x)(y, y)$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1 .$$

Угол φ , определяемый равенством

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

и принадлежащий отрезку $[0, \pi]$, называется ***углом между векторами*** x и y. Если x и y - ненулевые векторы, а $\varphi = \pi / 2$, то $(x, y) = 0$. В этом случае говорят, что векторы x и y ***ортогональны***, и пишут $x \perp y$.

Для произвольных векторов x и y евклидова пространства имеют место следующие важные соотношения:

1 $|x+y| \le |x| + |y|$ (неравенство треугольника).

2 Пусть φ - угол между векторами x и y, тогда

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos\varphi$$

(теорема косинусов). Если $x \perp y$, то получается равенство

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Заменяя в последнем равенстве y на $-y$, получаем

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

(теорема Пифагора).

Задача 1 Доказать, что для любого элемента x евклидова пространства справедливо равенство $(\theta, x) = 0$.

Решение. Для любого элемента x имеем

$$0 \cdot x = \theta .$$

Используя это равенство и аксиому 3^0 скалярного произведения, получаем

$$(\theta, x) = (0 \cdot x, x) = 0 \cdot (x, x) = 0.$$

Задача 2 Доказать, что в евклидовом пространстве P_2 многочленов с действительными коэффициентами степени, не превосходящей 2, скалярное произведение можно ввести по формуле

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

Решение. Для доказательства утверждения нужно проверить выполнимость четырех аксиом скалярного произведения.

1⁰ $(f, g) = (g, f)$ в силу коммутативности умножения чисел.

2⁰ Проверим, что $(f+\varphi, g) = (f, g) + (\varphi, g)$. Имеем

$$(f+\varphi, g) = [f(-1)+\varphi(-1)]g(-1) + [f(0)+\varphi(0)]g(0) +$$
$$+ [f(1)+\varphi(1)]g(1) = [f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)] +$$
$$+ [\varphi(-1)g(-1) + \varphi(0)g(0) + \varphi(1)g(1)] = (f, g) + (\varphi, g).$$

3⁰ Проверим, что $(\alpha f, g) = \alpha (f, g)$, где α - число. Находим

$$(\alpha f, g) = \alpha f(-1)g(-1) + \alpha f(0)g(0) + \alpha f(1)g(1) =$$
$$= \alpha [f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)] = \alpha (f, g).$$

4⁰ Для любого многочлена $f(x)$ справедливо неравенство

$$(f, f) = f^2(-1) + f^2(0) + f^2(1) \ge 0.$$

Покажем, что если $(f, f) = 0$, то $f = \theta$. Пусть $(f, f) = 0$, т.е.

$$f^2(-1) + f^2(0) + f^2(1) = 0.$$

Отсюда получаем

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0.$$

Так как степень многочлена $f(x)$ не превосходит 2, то число корней этого многочлена не может быть более чем 2. Следовательно, $f(0) \equiv 0$, т.е. $f(x)$ - нулевой элемент пространства P_2.

Таким образом, по указанной формуле можно ввести скалярное произведение в пространстве P_2.

Задача 3 Задано линейное пространство, n-мерных векторов при $n = 4$. Определить угол между векторами $x = (4; 1; 2; 2)$ и $y = (1; 3; 3; -9)$.

Решение. $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{16 + 1 + 4 + 4} = 5$;

$|y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{1 + 9 + 8 + 81} = 10$;

$(x, y) = 4 + 3 + 6 - 18 = -5$;

$\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \dfrac{-5}{5 \cdot 10} = -0{,}1$;

$\varphi = \arccos(-0{,}1) = 174^\circ 15'$.

Задача 4 Пусть P_2 - евклидово пространство, рассмотренное в задаче 2.

а) Вычислить нормы многочленов $f(x) = 1 - x + x^2$ и $g(x) = 1 + x$ и угол между ними.

б) Написать выражение скалярного произведения двух произвольных элементов пространства P_2 через их координаты в базисе $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$.

Решение. а) Вычислим значения $f(x)$ и $g(x)$ в точках $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$:

$f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $g(-1) = 0$, $g(0) = 1$, $g(1) = 2$.

По формуле скалярного произведения

$(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1)$ находим

$(f, g) = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$, $\qquad (f, f) = 3^2 + 1^2 + 1^1 = 11$,

$(g, g) = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$.

Вычислим теперь нормы элементов f и g и угол между ними:

$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{11}$, $\quad \|g\| = \sqrt{5}$, $\quad \cos\varphi = \dfrac{(f, g)}{\|f\| \cdot \|g\|} = \dfrac{3}{\sqrt{55}}$,

откуда $\varphi = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{55}}$.

б) Найдем выражение скалярного произведения произвольных элементов $f(x)$ и $g(x)$ через их координаты в базисе: $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$.

Пусть

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, $\qquad g(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2$;

тогда

$$f = \sum_{i=1}^{2} c_i p_i, \qquad g = \sum_{j=1}^{2} d_j p_j$$

и скалярное произведение элементов f и g можно записать в виде

$$(f, g) = \sum_{i,\,j=0}^{2} a_{ij} c_i d_j ,$$

где $a_{ij} = (p_i, p_j)$. Находим коэффициенты a_{ij}:

$$a_{00} = (p_0, p_0) = 3, \qquad a_{11} = (p_1, p_1) = 2, \qquad a_{22} = (p_2, p_2) = 2,$$

$$a_{01} = a_{10} = (p_0, p_1) = 0, \qquad a_{02} = a_{20} = (p_0, p_2) = 2,$$

$$a_{12} = a_{21} = (p_1, p_2) = 0.$$

Таким образом, скалярное произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ через координаты этих элементов в базисе $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$ выражается так:

$$(f, g) = 3c_0d_0 + 2c_1d_1 + 2c_2d_2 + 2c_0d_2 + 2c_2d_0 .$$

Задача 5 Дано линейное пространство, векторами которого являются всевозможные системы, состоящие из n положительных чисел:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \qquad y = (y_1, y_2, ..., y_n), \qquad z = (z_1, z_2, ..., z_n), \; \ldots .$$

Сложение векторов и умножение вектора на число определены равенствами

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n), \qquad \lambda x = (x_1^{\lambda}; x_2^{\lambda}, ..., x_n^{\lambda}).$$

Будет ли это пространство евклидовым, если определить скалярное произведение равенством

$$(x, y) = \ln x_1 \ln y_1 + \ln x_2 \ln y_2 + ... + \ln x_n \ln y_n ?$$

Решение. Проверим выполнение условий **1⁰ – 4⁰**.

1⁰ $(x, y) = \ln x_1 \ln y_1 + \ln x_2 \ln y_2 + ... + \ln x_n \ln y_n$,

$(y, x) = \ln y_1 \ln x_1 + \ln y_2 \ln x_2 + ... + \ln y_n \ln x_n$,

т.е. $(x, y) = (y, x)$.

2⁰ Так как $y + z = (y_1z_1, y_2z_2, ..., y_nz_n)$, то

$(x, y + z) = \ln x_1 \ln(y_1z_1) + \ln x_2 \ln(y_2z_2) + ... + \ln x_n \ln(y_nz_n) =$

$= \ln x_1 \ln y_1 + \ln x_2 \ln y_2 + ... + \ln x_n \ln y_n + \ln x_1 \ln z_1 +$

$+ \ln x_2 \ln z_2 + ... + \ln x_n \ln z_n = (x, y) + (x, z)$.

3⁰ Так как $\lambda x = (x_1^{\lambda}; x_2^{\lambda}, ..., x_n^{\lambda})$, то

$\lambda x = \ln x_1^{\lambda} \ln y_1 + \ln x_2^{\lambda} \ln y_2 + ... + \ln x_n^{\lambda} \ln y_n =$

$= \lambda(\ln x_1 \ln y_1 + \ln x_2 \ln y_2 + ... + \ln x_n \ln y_n) = \lambda(x, y)$.

4⁰ $(x, x) = \ln^2 x_1 + \ln^2 x_2 + ... + \ln^2 x_n \geq 0$.

Следовательно, рассматриваемое пространство является евклидовым.

Задача 6 Дано линейное пространство – множество всевозможных систем действительных чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, …. Сумма двух любых элементов которого определяется равенством

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

а произведение любого элемента на число

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$

Можно ли скалярное произведение двух произвольных векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ определить равенством

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

(для того чтобы это пространство стало евклидовым)?

Решение. Проверим выполнение условий $\mathbf{1^0} - \mathbf{4^0}$.

$\mathbf{1^0}$ Так как $(y, x) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + ... + y_n x_n$, то $(x, y) = (y, x)$.

$\mathbf{2^0}$ Пусть $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$. Тогда

$$y + z = (y_1 + z_1; y_2 + z_2; ..., y_n + z_n)$$

и

$$(x, y + z) = x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2 ... + x_n y_n + x_n z_n =$$
$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n) + (x_1 z_1 + x_2 z_2 + ... + x_n z_n) = (x, y) + (x, z).$$

$\mathbf{3^0}$ $(\lambda x, y) = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 + ... + \lambda x_n y_n = \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n) = \lambda (x, y)$.

$\mathbf{4^0}$ $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \neq 0$, если хотя бы одно из чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ отлично от нуля.

Значит, в заданном пространстве с помощью указанного равенства можно определить скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

и тогда пространство будет евклидовым.

Задача 7 а) Доказать теорему Пифагора в евклидовом пространстве: если $(x, y) = 0$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

б) Доказать обратную теорему: если $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, то $(x, y) = 0$.

Решение. Вычислим квадрат нормы элемента $x + y$:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) =$$
$$= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2.$$

Отсюда следует:

а) если $(x, y) = 0$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;

б) обратно, если $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, то $(x, y) = 0$.

2.1 Ортогональность элементов. Ортонормированный базис. Ортогонализация базисных элементов

Элементы в евклидовом пространстве называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю.

Система элементов $(x_p)_k$ называется ***ортогональной***, если

$$\left(x_p, x_m\right) = 0, \qquad p \neq m, \qquad p, m = \overline{1, k}. \qquad (2.1)$$

Система элементов $\left(x_p\right)_k$ называется ***ортонормированной***, если выполняется

$$\left(x_p, x_m\right) = 0, \qquad p = m, \qquad \left|x_p\right| = 1 \qquad (2.2)$$

для любых $p, m = \overline{1, k}$.

Теорема 1 *Любая ортогональная система ненулевых элементов евклидова пространства является линейно зависимой.*

Теорема 2 *В евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Если $\left(\boldsymbol{e}_k\right)_n$ - ортонормированный базис, то, как следует из формул (2.1) и (2.2), для любых элементов x, y, имеющих в этом базисе координаты

$$X_e = \left\|x^k\right\|^n, \qquad Y_e = \left\|y^k\right\|^n,$$

скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(x, y) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \ldots + x^n y^n = X_e^T Y_e. \qquad (2.3)$$

Из соотношений (2.2) и (2.3) следует справедливость обратной **теоремы**: *если в евклидовом пространстве для любых элементов x, y с координатами $\left\|x^k\right\|^n$, $\left\|y^k\right\|^n$ в базисе $\left(e_k\right)_n$ скалярное произведение вычисляется по формуле (2.3), то $\left(e_k\right)_n$ - ортонормированный базис.*

Пусть $\left(x_p\right)_k$ - система линейно независимых элементов в евклидовом пространстве ε_m. Рассмотрим подпространство $L\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$, в котором система $\left(x_p\right)_k$ является базисом. Процесс ортогонализации системы элементов $\left(x_p\right)_k$, позволяющий построить в $L\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ ортогональный базис $\left(e_p\right)_k$, описывается формулами

$$e_1 = x_1, \qquad e_p = x_p - a_p^m e_m, \qquad m = \overline{1, p-1}, \qquad p = \overline{2, k}, \qquad (2.4)$$

где

$$a_p^m = \left(x_p, e_m\right) : \left(e_m, e_m\right). \qquad (2.5)$$

Отметим, что получающиеся при этом элементы $\boldsymbol{e_1, e_2, \ldots, e_n}$ - ненулевые.

Задача 8 Задано евклидово пространство, рассмотренное в задаче 6, при $n = 6$. Проверить справедливость теоремы Пифагора для ортогональных векторов

$x = (1; 0; 2; 0; 2; 0)$ и $y = (0; 6; 0; 3; 0; 2)$.

Решение. Имеем

$$|x| = \sqrt{1 + 0 + 4 + 0 + 4 + 0} = 3, |y| = \sqrt{0 + 36 + 0 + 9 + 0 + 4} = 7.$$

Следовательно, $|x|^2 + |y|^2 = 9 + 49 = 58$.

Далее,

$$x + y = (1; 6; 2; 3; 2; 2); \qquad |x + y| = \sqrt{1 + 36 + 4 + 9 + 4 + 4} = \sqrt{58};$$

$|x+y|^2 = 58$..

Итак, $|x|^2 + |y|^2 = |x+y|^2$.

Задача 9 При каких значениях α и β базис, образованный векторами

$$e_1' = \frac{\alpha}{3}e_1 + \frac{1-\alpha}{3}e_2 + \beta e_3,\ e_2' = \frac{1-\alpha}{3}e_1 + \beta e_2 + \frac{\alpha}{3}e_3,\ e_2' = \beta e_1 + \frac{\alpha}{3}e_2 + \frac{1-\alpha}{3}e_3,$$

является ортонормированным?

Решение. Из условий $|e_i'| = 1$, $(e_i', e_k') = 0$ (при $i \neq k$) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 9\beta^2 = 9, \\ \alpha(1-\alpha) + 3(1-\alpha)\beta + 3\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим

$$\beta = -\frac{\alpha(\alpha-1)}{3}.$$

Подставив это значение β в первое уравнение, имеем

$$\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + \alpha^2(1-\alpha)^2 = 9;$$

$$1 - 2(1-\alpha)\alpha + \alpha^2(1-\alpha)^2 = 9;$$

$$\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^2 = 9\cdot$$

Так как $1-\alpha+\alpha^2 > 0$ при действительных значениях α, то $1-\alpha+\alpha^2 = 3$, т.е. $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$. Следовательно,

$$\alpha_1 = -1,\quad \alpha_2 = 2,\quad \beta_1 = -2/3,\quad \beta_2 = 2/3.$$

Итак, получаем два ортонормированных базиса:

$$e_1^{(1)} = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_3,\qquad e_2^{(1)} = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3,$$

$$e_3^{(1)} = -\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3.$$

$$e_1^{(2)} = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3,\ e_2^{(2)} = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3,\ e_3^{(2)} = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3.$$

Задача 10 При каком значении λ базис, образованный векторами

$$g_1 = \lambda e_1 + e_2 + e_3 + e_4,\qquad g_2 = e_1 + \lambda e_2 + e_3 + e_4,$$

$$g_3 = e_1 + e_2 + \lambda e_3 + e_4,\qquad g_4 = e_1 + e_2 + e_3 + \lambda e_4,$$

является ортогональным? Нормировать этот базис.

Решение. Из условия $(e_i, e_k) = 0$ (при $i \neq k$) получаем уравнение

$$\lambda + \lambda + 1 + 1 = 0.$$

Следовательно, $\lambda = -1$ и

$$g_1 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4,\qquad g_2 = e_1 - e_2 + e_3 + e_4,$$

$$g_3 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4,\qquad g_4 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4,$$

$|g_i| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$.

Таким образом, векторы

$e_1' = 0{,}5(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, $\quad e_2' = 0{,}5(+e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$,

$e_3' = 0{,}5(e_1 + e_2 - e_3 + e_4)$, $\quad e_4' = 0{,}5(e_1 + e_2 + e_3 - e_4)$

образуют ортонормированный базис.

Задача 11 В пространстве P_2 многочленов степени, не превосходящей 2, введено скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

Построить ортонормированный базис в этом евклидовом пространстве.

Решение. Выберем в P_2 произвольный базис, например $y_k = x^{k-1}$ ($k-1$ - показатель степени), $k = 1, 2, 3$. Пользуясь формулами (4) и (5), построим ортогональный базис $(g_k)_3$. Положим

$$g_1 = y_1,$$

$$g_2 = y_2 - a_2^1 g_1,$$

$$g_3 = y_3 - a_3^1 g_1 - a_3^2 g_2.$$

По формулам (2.5) находим

$$a_2^1 = (y_2, g_1) : (g_1, g_1),$$

$$a_3^1 = (y_3, g_1) : (g_1, g_1),$$

$$a_3^2 = (y_3, g_2) : (g_2, g_2).$$

Вычислим коэффициенты a_m^1 ($m = 2, 3$) с помощью заданной в условии формулы:

$$(y_2, g_1) = (y_2, y_1) = (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 0,$$

$$(y_3, g_1) = (-1)^2 \cdot 1 + 0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 2,$$

$$(g_1, g_1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3.$$

Значит, $a_2^1 = 0$ и поэтому $g_2 = y_2 = x$. Кроме того, $a_3^1 = 2/3$. Далее, имеем

$$(y_3, g_2) = (-1)^2 \cdot (-1) + 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 1 = 0.$$

Следовательно, $a_3^3 = 0$ и

$$g_3 = y_3 - \frac{2}{3} y_1 = x^2 - \frac{2}{3}.$$

Таким образом, построен ортогональный базис:

$$g_1 = 1, \qquad g_2 = x, \qquad g_3 = x^2 - \frac{2}{3}.$$

Нормируя элементы $(g_k)_3$, получим ортонормированный базис $(e_k)_3$. Так как

$$(g_1, g_1) = 3, \qquad (g_2, g_2) = 2, \qquad (g_3, g_3) = 2/3,$$

то

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \qquad e_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Задача 12 Элементы x_1, x_2, x_3, x_4 евклидова пространства ε_5 имеют следующие разложения по ортонормированному базису e_1, e_2, e_3, e_4, e_5:

$x_1 = e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5, \qquad x_2 = e_1 + e_3 - e_4 - 2e_5,$

$x_3 = e_1 + 3e_3, \qquad x_4 = 2e_3 + e_4 + 6e_5;$

$L = L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ - линейная оболочка данных элементов.

Требуется:

а) построить ортонормированный базис линейной оболочки L;

б) дополнить этот базис до ортонормированного базиса пространства ε_5.

Решение.

а) Из координат элементов x_1, x_2, x_3, x_4 в данном базисе составим столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим матрицу A из этих столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{1} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} & 2 \\ \multicolumn{1}{|c}{-1} & -1 & \multicolumn{1}{c|}{0} & 1 \\ \multicolumn{1}{|c}{2} & -2 & \multicolumn{1}{c|}{0} & 6 \\ \hline \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее ранг. Нетрудно проверить, что $X_4 = X_1 - 2X_2 + X_3$. Поэтому последний столбец можно удалить из матрицы A, не изменив при этом ее ранга. Выделенный рамкой минор третьего порядка отличен от нуля, т. е. является базисным минором матрицы. Отсюда следует, что столбцы X_1, X_2, X_3 линейно независимы и, значит, элементы x_1, x_2, x_3 образуют базис линейной оболочки L.

К этому базису применим процедуру ортогонализации. Используя формулу (1), получаем (новые базисные элементы обозначим y_1, y_2, y_3)

$y_1 = x_1 \qquad y_2 = x_2 - a_{12}y_1, \quad y_3 = x_3 - a_{13}y_1 - a_{23}y_2.$

Коэффициенты a_{ij} определяем последовательно.

$$a_{12} = (x_2, y_1)\cdot(y_1, y_1)^{-1} = -\frac{1}{7}.$$

Итак,

$$y_1 = x_1 = e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{7}y_1 = \frac{4}{7}(2e_1 + 2e_3 - 2e_4 - 3e_5).$$

Далее имеем

$$a_{13} = (x_3, y_1)\cdot(y_1, y_1)^{-1} = -\frac{4}{7}, \qquad a_{23} = (x_3, y_2)\cdot(y_2, y_2)^{-1} = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$y_3 = x_3 - \frac{4}{7}y_1 - \frac{2}{3}y_2 = \frac{1}{3}(-e_1 + 5e_3 + 4e_4).$$

Построенные элементы y_1, y_2, y_3 образуют ортогональный базис в L. Разделив каждый элемент на его норму, получим ортонормированный базис в L:

$$g_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5),$$

$$g_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2e_1 + 2e_3 - 2e_4 - 3e_5),$$

$$g_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(-e_1 + 5e_3 + 4e_4).$$

б) Займемся теперь дополнением базиса g_1, g_2, g_3 до ортонормированного базиса пространства ε_5. С этой целью найдем такие элементы

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

пространства ε_5, которые ортогональны элементам g_1, g_2, g_3, т.е. удовлетворяют условиям

$$(x, g_i) = 0, i = 1, 2, 3.$$

Эти условия дают однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных координат $x_1, ..., x_5$ элемента x

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ -x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг матрицы системы равен 3, то размерность пространства решений $5 - 3 = 2$, т.е. фундаментальная совокупность решений состоит из двух решений. Для нахождения фундаментальной совокупности решений перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_3 - x_4 + 2x_5 = -x_1, \\ 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -2x_1, \\ 5x_3 + 4x_4 = x_1. \end{cases}$$

Полагая сначала $x_1 = 3, x_2 = 0$, получаем $x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 0$; полагая затем $x_1 = 0, x_2 = 1$, находим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Таким образом, фундаментальная совокупность решений состоит из двух линейно независимых решений

$$X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которым соответствуют линейно независимые элементы

$$x_4 = 3e_1 - e_3 + 2e_4 \quad \text{и} \quad x_5 = e_2,$$

ортогональные к элементам g_1, g_2, g_3. Более того, элементы x_4 и x_5 ортогональны, так как $(x_4, x_5) = 0$.

Разделим x_4 на его норму:

$$g_4 = \frac{x_4}{\|x_4\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3e_1 - e_3 + 2e_4),$$

и положим $g_5 = x_5 = e_2$. Элементы $g_1, ..., g_5$ образуют искомый ортонормированный базис в пространстве ε_5.

2.2 Ортогональные и унитарные матрицы

Ортогональные матрицы

Пусть $e_1, ..., e_n$ и $f_1, ..., f_n$ - два ортонормированных базиса в евклидовом пространстве ε_n, и пусть $Q = (q_{ij})$ - матрица перехода от первого базиса ко второму, т.е. имеет место равенство

$$f = eQ, \tag{2.6}$$

где $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ и $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ - строки, составленные из базисных элементов.

Матрица Q, т.е. матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому, называется ***ортогональной*** матрицей. Если взять произвольный ортонормированный базис и с помощью ортогональной матрицы перейти по формуле (2.6) к новому базису, то новый базис будет также ортогональным, т.е. *ортогональная матрица переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис*.

Свойства ортогональных матриц

1⁰ $\sum_{k=1}^{n} q_{ki}q_{kj} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера.

Это свойство означает, что любые два столбца Q_i и Q_j ортогональной матрицы, рассматриваемые как элементы евклидова пространства T_n, ортогональны:

$(Q_i, Q_j) = 0$ при $i \neq j$,

а скалярный квадрат любого столбца ортогональной матрицы равен 1:

$(Q_i, Q_i) = 1$.

Таким же свойством обладают строки ортогональной матрицы:

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ki} q_{kj} = \delta_{ij}.$$

2⁰ $Q^{-1} = Q^T$ ($QQ^T = I$, $Q^T Q = I$, где I - единичная матрица).

3⁰ $|\det Q| = 1$.

4⁰ Элемент q_{ij} ортогональной матрицы равен косинусу угла между базисными элементами e_i и f_j.

Свойства 1⁰ и 2⁰ являются ***характеристическими*** свойствами ортогональных матриц.

Унитарные матрицы

При рассмотрении комплексных евклидовых (т.е. унитарных) пространств аналогом ортогональных матриц выступают унитарные матрицы. ***Унитарная*** матрица $U = (u_{ij})$ - это матрица перехода от одного ортонормированного базиса, скажем $e_1, ..., e_n$ к другому ортонормированному базису $f_1, ..., f_n$ в унитарном пространстве E_n, т.е.

$f = eU$.

где f и e - строки, составленные из базисных элементов.

Свойства унитарных матриц.

1⁰ $\sum_{k=1}^{n} u_{ki} \overline{u_{kj}} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера), т.е. скалярное произведение любых двух столбцов U_i и U_j унитарной матрицы, рассматриваемых как элементы пространства T_n^*, равно нулю при $i \neq j$ и равно 1 при $i = j$. Таким же свойством обладают строки унитарной матрицы.

2⁰ $U^{-1} = \overline{U^T}$, где $\overline{U^T}$ - матрица, которая получается из матрицы U путем транспонирования и замены всех элементов на комплексно сопряженные (индекс T означает транспонирование, а черта – комплексное сопряжение). Матрица $\overline{U^T}$ называется ***эрмитово сопряженной*** по отношению к матрице U и обозначается U^*. Таким образом, свойство 2) можно записать так:

$U^{-1} = U^*$,

или, в эквивалентных формах:

$UU^* = I$ или $U^*U = I$,

где I - единичная матрица. Матрица U^{-1}, т.е. матрица U^*, также является унитарной.

3⁰ $|\det U| = 1$.

Аналогично ортогональным матрицам свойства 1) и 2) являются характеристическими свойствами унитарных матриц.

Задача 13 Доказать, что если Q - ортогональная 2×2-матрица, то она представима либо в виде

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

либо в виде

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Дать геометрическую интерпретацию матрицы Q в каждом случае.

Решение. Запишем матрицу Q в виде

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно свойству 1^0 сумма квадратов элементов каждого столбца равна 1, а сумма произведений соответствующих элементов первого и второго столбцов равна нулю. Это дает три равенства:

$$q_{11}^2 + q_{21}^2 = 1, \qquad q_{12}^2 + q_{22}^2 = 1, \qquad q_{11}\cdot q_{12} + q_{21}\cdot q_{22} = 0. \tag{2.9}$$

Учитывая первые два равенства, положим

$$q_{11} = \cos\varphi, \qquad q_{21} = \sin\varphi, \qquad q_{12} = \cos\psi, \qquad q_{22} = \sin\psi,$$

где φ и ψ - пока произвольные числа. Тогда первое и второе равенства (2.9) выполняются, а третье равенство можно записать в виде

$$\cos(\psi - \varphi) = 0.$$

Это равенство позволяет установить связь между φ и ψ. Без ограничения общности можно считать, что φ и ψ принадлежат промежутку $[0, 2\pi]$. Поэтому из равенства $\cos(\psi - \varphi) = 0$ следует, что

$$\psi - \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \text{или} \qquad \psi - \varphi = \pm\frac{3\pi}{2}.$$

Если

$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{или} \qquad \psi - \varphi = -\frac{3\pi}{2},$$

то

$$\cos\psi = -\sin\varphi, \qquad \sin\psi = \cos\varphi,$$

и мы получаем представление матрицы Q в виде (2.7). Если же

$$\psi - \varphi = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{или} \qquad \psi - \varphi = \frac{3\pi}{2},$$

то

$$\cos\psi = \sin\varphi, \qquad \sin\psi = -\cos\varphi,$$

и матрица Q имеет вид (2.8).

Итак, любая ортогональная 2×2-матрица представима либо в виде (7) (в этом случае $\det Q = 1$), либо в виде (2.8) (в этом случае $\det Q = -1$).

Задача 14 Дана матрица

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot e^{i\varphi_1} & \sin\varphi \cdot e^{i\varphi_2} \\ \sin\varphi \cdot e^{i\varphi_3} & -\cos\varphi \cdot e^{i(\varphi_2+\varphi_3-\varphi_1)} \end{pmatrix},$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - произвольные вещественные числа и $\varphi \in [0, \pi/2]$..

Доказать, что U - унитарная матрица и вычислить обратную к ней матрицу U^{-1}.

Решение. Матрица U является унитарной, если она обладает характеристическим свойством 1), т.е.

$$\sum_{k=1}^{2} u_{ki}\overline{u_{kj}} = \delta_{ij}. \tag{2.10}$$

Проверим выполнение равенства (2.10). При $i = j = 1$ получаем

$$\sum_{k=1}^{2} u_{k1}\overline{u_{k1}} = \cos\varphi \cdot e^{i\varphi_1} \cdot \cos\varphi \cdot e^{-i\varphi_1} + \sin\varphi \cdot e^{i\varphi_3} \cdot \sin\varphi \cdot e^{-i\varphi_3} =$$

$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Аналогично, при $i = j = 2$ имеем

$$\sum_{k=1}^{2} u_{k2}\overline{u_{k2}} = 1.$$

Наконец, при $i = 1,\ j = 2$ находим

$$\sum_{k=1}^{2} u_{k1}\overline{u_{k2}} = \cos\varphi \cdot e^{i\varphi_1} \cdot \sin\varphi \cdot e^{-i\varphi_2} + \sin\varphi \cdot e^{i\varphi_3} \cdot \left(-\cos\varphi \cdot e^{-i(\varphi_2+\varphi_3-\varphi_1)}\right) =$$

$$= \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} - \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)} = 0.$$

Итак, матрица U обладает свойством 1) и, следовательно, U - унитарная матрица. Для вычисления обратной матрицы воспользуемся формулой $U^{-1} = \overline{U^T}$:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot e^{-i\varphi_1} & \sin\varphi \cdot e^{-i\varphi_3} \\ \sin\varphi \cdot e^{-i\varphi_2} & -\cos\varphi \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)} \end{pmatrix}.$$

2.3 Задачи для самостоятельного решения

1 Даны векторы евклидова пространства E^n. Найти длины векторов, скалярное произведение векторов и угол φ между ними:

а) $\boldsymbol{a}(1, -2, 3)$, $\boldsymbol{b}(3, 0, -4)$;

б) $\boldsymbol{a}(1, -3, 0, 2)$, $\boldsymbol{b}(0, 5, -12, 0)$.

Ответ. а) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{14}$, $|\boldsymbol{b}| = 5$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -9$, $\varphi = arccos(-9/5\sqrt{14})$;

б) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{14}$, $|\boldsymbol{b}| = 13$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -15$, $\varphi = arccos(-15/13\sqrt{14})$.

2 Являются ли ортогональными в евклидовом пространстве E^3 следующие системы векторов:

а) $(0; 1; 1)$, $(0; -1; 3)$; б) $(1; 0; 0)$, $(0; 2; 0)$, $(0; 0; 3)$?

Ответ. а) нет; б) да.

3 В евклидовом пространстве E^3 по данному базису построить ортонормированный базис:

а) $g_1 = (1, 2, 3)$, $g_2 = (0, 2, 0)$, $g_3 = (0, 0, 3)$;

б) $g_1 = (1, 0, 0)$, $g_2 = (0, 1, -1)$, $g_3 = (1, 1, 1)$.

Ответ. а) $\left(1/\sqrt{14}; 2/\sqrt{14}; 3/\sqrt{14}\right)$, $\left(-1/\sqrt{35}; 5/\sqrt{35}; -3/\sqrt{35}\right)$, $\left(-3/\sqrt{10}; 0; 1/\sqrt{10}\right)$;

б) $(1; 0; 0)$, $\left(0; 1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}\right)$, $\left(0; 1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right)$.

4 Даны векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, и $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$, если:

а) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_5$, $\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4 + 2\boldsymbol{e}_5$;

б) $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_5 - 2\boldsymbol{e}_3$;

в) $\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 4\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$.

Ответ. а) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -4$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{6}$, $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{15}$;

б) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 6$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{22}$, $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{5}$;

в) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -3$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{51}$, $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{6}$.

5 Даны векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$, образующие ортогональный базис. Найти угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, если:

а) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$, $|\boldsymbol{e}_3| = 1$, $|\boldsymbol{e}_4| = 2$;

б) $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4$, $|\boldsymbol{e}_1| = 2$, $|\boldsymbol{e}_3| = 3$, $|\boldsymbol{e}_3| = 2$, $|\boldsymbol{e}_4| = \sqrt{2}$.

Ответ. а) $arccos\left(-\sqrt{10}/6\right)$; б) $\dfrac{\pi}{2}$.

Рекомендуемая литература

1 **Беклемишев, Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. /Д. В.Беклемишев - М.: Наука, 1971. - 320 с.

2 **Беклемишев, Д.В.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб. пособие / Д.В. Беклемишев., А. Ю. Петрович, И.А. Чубаров; под ред. Д.В. Беклемишева - М.: Наука, 1987. - 496 с.

3 **Бугров, Я.С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - М.: Наука, 1984. - 256 с.

4 **Виноградова, И. М.** Элементы высшей математики.(Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел): учеб. для вузов/ И. М. Виноградова. - М.: Высш. шк.,1999. - 511с

5 **Гусак, А. А.** Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач/ А. А. Гусак. - М.: Наука, 2000. - 288 с.

6 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах.Ч. 1 /П. Е. Данко, А. Г. Попов ,Г. Я. Кожевникова. – Харьков:[б. и.], 1973.

7 **Канатников, А. Н.** Линейная алгебра**:** учеб. для вузов. 3-е изд. / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. - 336 с.

8 **Ким, Г. Д.** Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи **/** Г. Д. Ким, А. В. Крицков. - М.: Зерцало-М, 2003.-358 с.

9 **Кострикин, А. И.** Введение в алгебру. Ч. II. Основы алгебры: учеб. для вузов/ А. И. Кострикин. – 2-е изд., исправл. - М.: Физико-математическая литература, 2001. -368 с.

10 **Письменный, Д.** Конспект лекций по высшей математике. Ч.1./ Д. Письменный. - 2-е изд., испр. - М.: Айрис-пресс, 2003. - 288 с.

11 **Шевцов, Г.С.** Линейная алгебра: учеб. пособие / Г. С. Шевцов. - 2-е изд., исп. и доп. - М.: Гардарики, 1999. - 269 с.

12 **Шипачев, В.С.** Высшая математика: учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 5-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2002. - 479 с.

13 **Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии**: учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов / Р.Ф. Апатенок, А. М. Маркина,Н. В. Попова, В. Б. Хейнман; под ред. В. Т. Воднева. - 2-е изд., перераб. и доп. - Минск: Высшая школа, 1986. - 272 с.