риМИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры

Г. А. СИКОРСКАЯ

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
ЧАСТЬ III

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2007

УДК 512.64 (076.5)

ББК 22.143я73
С 35

Рецензенты
кандидат педагогических наук Липилина В.В.

Сикорская Г.А.
С 35 **Практикум по линейной алгебре: методические указания по линейной алгебре. В III Ч. Ч III / Г.А. Сикорская, Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. - 53 с.**

Настоящие методические указания содержат необходимые теоретические сведения по двум разделам (линейные операторы, квадратичные формы), изучаемым студентами дневной формы обучения транспортного факультета в рамках дисциплины алгебра и геометрия в первом семестре, а также разработки практических занятий по этим разделам.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей транспортного факультета.

ББК 22.143я73

Содержание

Введение

Курс алгебры и геометрии, изучаемый студентами транспортного факультета опирается на базовый курс математики, изучаемый в средней школе.

Математика в высшей школе призвана заложить основы математической подготовки будущих инженеров, дающие возможность успешного освоения других математических дисциплин.

Математическое образование будущего инженера основывается на фундаментальных понятиях математики. Фундаментальность подготовки в области математики включает в себя достаточную общность математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, точность формулировки математических свойств изучаемых объектов, логическую строгость изложения математики, опирающуюся на адекватный современный математический аппарат.

Курс алгебры и геометрии представляет собой математическую теорию, охватывающую первоначальные сведения об основных алгебраических структурах, теорию матриц и определителей, векторную алгебру, теорию линейных и евклидовых пространств, теорию линейных операторов, аналитическую геометрию, дифференциальную геометрию и топологию.

В настоящих методических указаниях предлагаются подробные разработки практических занятий по двум разделам: линейные операторы, квадратичные формы. Все задачи снабжены подробным решением с ссылкой на теорию, краткое содержание которой расположено перед соответствующей серией задач.

В заключении каждой главы автором предлагаются задачи для самостоятельного решения, подобные разработанным, а также расположенные в порядке возрастания их сложности.

Глава 1 Линейные операторы

Линейным оператором f, действующим в линейном пространстве R_n над числовым полем K (или линейным преобразованием линейного пространства R_n над числовым полем K), называется правило, по которому каждому элементу $\boldsymbol{x}$ из R_n ставится в соответствие определенный элемент y из R_n:

$$\boldsymbol{y} = f(x) \tag{1.1}$$

причем для любых элементов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ из R_n и любого числа $\boldsymbol{c}$ из поля K выполняются равенства:

1^0 $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2)$;

2^0 $f(cx_1) = cf(x_1)$.

Линейный оператор называется ***тождественным***, если он преобразует любой вектор x в самого себя, т.е. если $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

На практике приходится решать задачи, связанные с преобразованием пространства. Рассмотрим прежде всего следующие:

1) установить, является ли данное преобразование линейным оператором;
2) найти матрицу линейного оператора в заданном базисе.

Задача 1 Показать, что преобразование $f(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$, где α - действительное число, является линейным оператором.

Решение. Имеем $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, $f(\lambda\boldsymbol{x}) = \alpha(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$. Итак, оба условия, определяющие линейный оператор, выполнены. Рассмотренный линейный оператор f называется ***преобразованием подобия***.

Задача 2 Оператор f в линейном пространстве R определен равенством $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$, где $\boldsymbol{x}_0 \in R$ - фиксированный ненулевой вектор. Является ли оператор f линейным?

Решение. Из равенств $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$, $f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_0$, $f(x + y) = x + y + x_0$, $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ заключаем, что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_0)$. Отсюда следует, что $x_0 = \boldsymbol{0}$, но это противоречит условию. Следовательно, оператор f не является линейным.

Задача 3 Доказать, что оператор f поворота на угол φ, действующий в пространстве V_2 векторов на плоскости, является линейным. Найти матрицу этого оператора в произвольном ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

Решение. Докажем вначале, что f - линейный оператор.

Пусть $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ и векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны (рисунок 1).

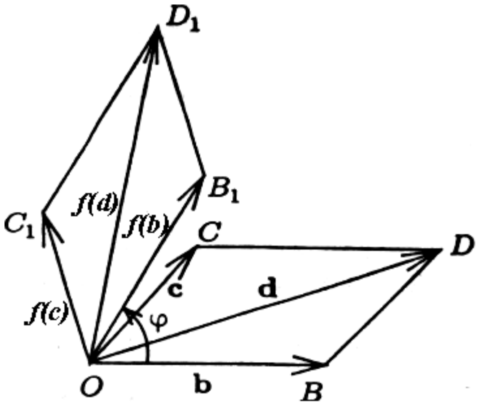

Рисунок 1

При повороте на угол φ векторы $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$ переходят соответственно в векторы $f(\boldsymbol{b}) = \overrightarrow{OB_1}$, $f(\boldsymbol{c}) = \overrightarrow{OC_1}$ и $f(\mathbf{d}) = \overrightarrow{OD_1}$. При этом параллелограмм $OBDC$ переходит в параллелограмм $OB_1D_1C_1$. Поэтому $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$, т.е. $f(\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{b}) + f(\boldsymbol{c})$ или $f(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = f(\boldsymbol{b}) + f(\boldsymbol{c})$. Если векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, то это равенство также выполнено. Таким образом, первое условие линейности оператора имеет место.

Проверим выполнение второго условия. Для любого числа α векторы $\boldsymbol{b}$ и $\alpha\boldsymbol{b}$, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой. При повороте на угол φ они переходят в векторы $f(\boldsymbol{b})$ и $f(\alpha\boldsymbol{b})$, также лежащие на одной прямой, и при этом $f(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{a}(f(\boldsymbol{b}))$. Итак, оператор f поворота на угол φ - линейный оператор.

Чтобы найти матрицу этого оператора в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, нужно найти координаты образов $f\,e_1, f\,e_2$ в этом базисе. Как следует из рисунка 2

$$f(\boldsymbol{e}_1) = cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_1 + sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_2,$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cdot \boldsymbol{e}_1 + sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cdot \boldsymbol{e}_2 = -sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_1 + cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

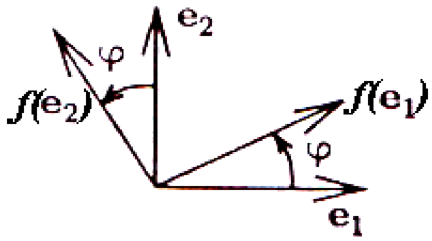

Рисунок 2

Таким образом,

$$A_e = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

- матрица оператора поворота на угол φ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. Заметим, что в любом ортонормированном базисе матрица данного оператора имеет один и тот же вид.

Задача 4 Найти матрицу оператора дифференцирования (оператора $\boldsymbol{d}$) в пространстве P_2 многочленов степени, не превосходящей 2, в базисе:

а) $1, x, x^2$; б) $1, 1+x, 1+x+x^2$.

Решение. а) Чтобы составить матрицу D_e оператора $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_2 = x$, $\boldsymbol{e}_3 = x^2$, найдем образы элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$d(\boldsymbol{e}_1) = (1)' = 0$,

$d(\boldsymbol{e}_2) = (x)' = 1 = \boldsymbol{e}_1$,

$d(\boldsymbol{e}_3) = (x^2)' = 2x = 2\boldsymbol{e}_2$.

Отсюда следует, что

$$D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Аналогично, для базиса $y_1 = 1$, $y_2 = 1+x$, $y_3 = 1+x+x^2$ имеем равенства

$d(\boldsymbol{y}_1) = 0$,

$d(\boldsymbol{y}_2) = 1 = y_1$,

$d(\boldsymbol{y}_3) = 1+2x = -1+2(1+x) = -y_1 + 2y_2$.

Отсюда следует, что

$$D_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5 Элементы x_1 и x_2 линейного пространства R_2 имеют в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ координаты $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Найти матрицы оператора f в базисах $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, если элементы $f(\boldsymbol{x}_1)$ и $f(\boldsymbol{x}_2)$ имеют в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ координаты $(2,3)$ и $(4, 5)$.

Решение. Так как в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ координаты элемента $\boldsymbol{x}_1$ равны $(0, 1)$, а координаты элемента x_2 равны $(1, 0)$, то $x_1 = \boldsymbol{e}_2$, $x_2 = \boldsymbol{e}_1$. Используя эти равенства, а также данные координаты элементов $f(\boldsymbol{x}_1)$ и $f(\boldsymbol{x}_2)$, приходим к равенствам

$f(x_1) = f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 = 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2$,

$f(x_2) = f(\boldsymbol{e}_1) = 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 = 5\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2$.

Отсюда по определению матрицы оператора получаем

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_x = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Если линейный оператор $y = f(x)$ n-мерного линейного пространства в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}$ задан матрицей A, тогда зависимость между координатами вектора x и его образа $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ выражается формулой $Y = AX$, где X и Y - матрицы-столбцы соответственно векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Задача 6 Пусть линейный оператор f двумерного пространства в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти $f(\boldsymbol{x})$, если $x = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$.

Решение. Составляем матрицу-столбец из координат вектора x в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$:

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

тогда так как $Y = AX$, имеем

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Итак, $f(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{e}_1 - 7\boldsymbol{e}_2$.

1.1 Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Если

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}$; (1.2)

$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{n}}$ (1.3)

- базисы некоторого линейного пространства и A - матрица линейного оператора f в базисе (1.2), то матрица B этого оператора в базисе (1.3) имеет вид:

$$B = T^{-1}AT,$$

где T - матрица перехода от базиса (1.2) к базису (1.3).

Задача 7 В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ оператор f имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора f в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$.

Решение. Матрица перехода

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица

$$B = T^{-1}AT = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Задача 8 Пусть даны два базиса $\boldsymbol{e_1, e_2, e_3}$ и $\boldsymbol{e'_1, e'_2, e'_3}$ линейного пространства и матрица A линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e_1, e_2, e_3}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\boldsymbol{e'_1, e'_2, e'_3}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e'_1} = 3\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_3},\ \boldsymbol{e'_2} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_3},\ \boldsymbol{e'_3} = -\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} + 5\boldsymbol{e_3}.$$

Решение. Составляем матрицу перехода от старого базиса $\boldsymbol{e_1, e_2, e_3}$ к новому базису $\boldsymbol{e'_1, e'_2, e'_3}$, имеем

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Находим T^{-1}. Напомним формулу

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{21} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix},$$

где $T_{11}, ..., T_{33}$ - соответствующие алгебраические дополнения.

$$\det T = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 - 2 - (-2 + 10 + 12) = 21 - 20 = 1.$$

$$T_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad T_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad T_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$T_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -12, \quad T_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17, \quad T_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$T_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad T_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad T_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -26 & -19 & 6 \\ 37 & 26 & -8 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2 Ядро и область значений линейного оператора

Ядром оператора $f: V \to W$ называется множество тех векторов пространства V, каждый из которых данный оператор переводит в нулевой вектор. Обозначение $ker\, f$.

Областью значений или ***образом оператора*** $f: V \to W$ называется множество векторов пространства W, каждый из которых является образом хотя бы одного вектора из V. Обозначение $Im\, f$.

Рангом оператора f называется $\dim \operatorname{Im} f$, т.е. размерность образа оператора.

Дефектом оператора f называется $\dim \ker f$, т.е. размерность ядра оператора.

Если $f: V \to V$ - линейный оператор, то:

$\dim \operatorname{Im} f = r_A$;

$\dim \ker f = n - r_A$,

где r_A - ранг матрицы A оператора f, n - размерность пространства V.

Задача 9 Найти ранг оператора f пространства V_3, если известна матрица оператора

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим r_A. Так как

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 6 - (2 - 6 + 0) = -6 + 4 = -2 \neq 0,$$

то $r_A = 3$.

Таким образом находим ранг и дефект оператора

$\dim \operatorname{Im} f = r_A = 3$;

$\dim \ker f = n - r_A = 3 - 3 = 0$.

Таким образом ранг оператора равен трем, а его дефект равен нулю.

1.3 Характеристическое уравнение линейного оператора

Пусть A - матрица линейного оператора f, тогда $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ - ***характеристический многочлен матрицы*** A, $\det(A - \lambda E) = 0$ - ***характеристическое уравнение оператора*** f, а корни характеристического уравнения – ***характеристические числа линейного оператора*** или ***характеристические числа матрицы*** A.

Задача 10 Найти характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением характеристического многочлена получаем:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

- характеристический многочлен матрицы A.

Задача 11 Найти характеристический многочлен и характеристические числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с определение характеристического многочлена получаем

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

$$P_n(\lambda) = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 4 + 2 + 2(1-\lambda) + 2(1-\lambda) - 2(4-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Приравнивая этот многочлен нулю, находим характеристическое уравнение

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$, или $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.

Разлагая левую часть этого уравнения на множители

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda - 6 =$

$$= \lambda^2(\lambda - 1) - 5\lambda(\lambda - 1) + 6(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6),$$

приводим данное уравнение к виду

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Эти корни – характеристические числа заданной матрицы.

1.4 Минимальный многочлен матрицы

Многочлен $\varphi(\lambda)$ минимальной степени, имеющий старший коэффициент, равный единице, и аннулируемый матрицей A, называют ***минимальным многочленом*** этой матрицы.

Теорема ***Любой многочлен, аннулируемый матрицей A, нацело делится на минимальный многочлен этой матрицы. В частности, характеристический многочлен матрицы делится на ее минимальный многочлен***.

Любой корень минимального многочлена матрицы является корнем ее характеристического многочлена.

Характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ матрицы A и ее минимальный многочлен $\varphi(\lambda)$ связаны соотношением

$$\varphi(\lambda) = \frac{(-1)^n|A - \lambda E|}{D_{n-1}}, \tag{1.4}$$

где D_{n-1} - наибольший общий делитель всех миноров матрицы $A - \lambda E$, имеющих $(n-1)$-й порядок.

Корнями минимального многочлена $\varphi(\lambda)$ являются все различные корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$,

Разные матрицы могут иметь одинаковые характеристические, но разные минимальные многочлены.

Задача 12 Найти характеристические и минимальные многочлены матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матрицы A_1 непосредственным вычислением определителя находим характеристический многочлен

$$\det(A_1 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2(2 - \lambda).$$

Выпишем все миноры второго порядка матрицы $A_1 - \lambda E$:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2, \qquad \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda-4),$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2(4-\lambda), \qquad \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-\lambda),$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2(4-\lambda),$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda-4), \qquad \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2(\lambda-4),$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4).$$

Общий наибольший делитель D_2 всех этих миноров есть $\lambda-4$. Поэтому минимальный многочлен матрицы A_1 имеет вид:

$$\varphi(\lambda) = \frac{(-1)^3|A_1-E|}{D_2} = \frac{(-1)^3(\lambda-4)^2(2-\lambda)}{\lambda-4} = (\lambda-4)(\lambda-2).$$

Заметим, что D_2 можно найти иначе. Действительно, если в матрицу $A_1-\lambda E$ подставить $\lambda=4$, то получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ранга $r=1$. Следовательно, все миноры второго порядка этой матрицы равны нулю. Это означает, что все миноры второго порядка матрицы $A_1-\lambda E$ делятся на $\lambda-4$, причем эти миноры не могут делиться на большую степень двучлена $\lambda-4$, так как, например, минор $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2(4-\lambda)$ делится лишь на первую степень двучлена. Следовательно, он входит в множитель $\lambda-4$ в первой степени. Другие множители из $|A_1-\lambda E|$ в D_2 не входят, так как на них не делится, например, выписанный только что минор второго порядка. Поэтому $D_2=\lambda-4$.

Для матрицы A_2 также непосредственным вычислением определителя находим характеристический многочлен

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2(2-\lambda).$$

Далее замечаем, что в матрице

$$A_2 - \lambda E = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

миноры второго порядка

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

взаимно простые. Поэтому $D_2 = 1$ и

$$\varphi_2(\lambda) = (-1)^3 |A_2 - \lambda E| = (\lambda - 4)^2(\lambda - 2).$$

1.5 Собственные векторы линейного пространства

Вектор $\boldsymbol{x}$ линейного пространства называется ***собственным вектором линейного оператора*** f этого пространства, если этот вектор ненулевой и существует число k, такое, что

$$f(x) = kx. \tag{1.5}$$

Число k называется ***собственным значением вектора относительно оператора*** f, а также ***собственным значением оператора*** f.

Равенство (1.5) можно записать в матричном виде:

$$AX = kX, \tag{1.6}$$

где A - матрица оператора f в некотором базисе; X - матрица-столбец из координат вектора $\boldsymbol{x}$ в том же базисе.

Ненулевую матрицу-столбец X, удовлетворяющую условию (1.6), назовем ***собственным вектор-столбцом матрицы*** A ***с собственным значением*** k.

Задача 13 Пусть линейный оператор f линейного двумерного пространства в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$ является собственным вектором этого оператора с собственным значением $k = -1$.

Решение. Вектор $\boldsymbol{x}$ ненулевой и

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -X,$$

т.е. $f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$. Таким образом, вектор $x(1, -3)$ - собственный вектор заданного оператора с собственным значением $k = -1$.

Алгоритм нахождения собственных векторов линейного оператора f***, имеющего в некотором базисе матрицу*** A заключается в следующем:

1. Составляют характеристическое уравнение данного оператора и находят его корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, т.е. характеристические числа.

2 Если V - линейное вещественное пространство, то только вещественные корни являются собственными значениями данного оператора.

3 В системе

$$\begin{cases} (a_{11} - k)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{11}x_1 + (a_{22} - k)x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - k)x_n = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

полагают k равным одному из собственных значений данного линейного оператора, например $k = \lambda_i$, и находят ненулевое решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ этой системы;

4 Записывают вектор $\boldsymbol{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, который является собственным вектором данного оператора с собственным значением λ_i.

5 Аналогично поступают с другими собственными значениями данного оператора.

Задача 14 Дана матрица $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти ее характеристические числа и собственные векторы.

Решение.

Составляем характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или $(5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$, т.е. $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$;

характеристические числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$. Собственный вектор, соответствующий первому характеристическому числу, находим из системы уравнений (1.7):

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + (3-\lambda_1)x_2 = 0; \end{cases}$$

так как $\lambda_1 = 1$, то x_1 и x_2 связаны зависимостью $2x_1 + x_2 = 0$.

Полагая $x_1 = \alpha$ ($\alpha \neq 0$ - произвольное число), получаем $x_2 = -2\alpha$ и собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1 = 1$, есть $\boldsymbol{x}(\alpha, -2\alpha)$.

Найдем второй собственный вектор. Имеем

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + (3-\lambda_2)x_2 = 0. \end{cases}$$

Подставив значение $\lambda_2 = 7$, приходим к соотношению $x_1 - x_2 = 0$, т.е. $x_1 = x_2 = \beta \neq 0$. Таким образом, собственным вектором, соответствующим второму характеристическому числу, служит $\boldsymbol{y}(\beta, \beta)$.

Задача 15 Найти собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1 Характеристическое уравнение данного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения следующие: $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

2 Все корни являются собственными значениями.

3 Чтобы найти собственный вектор с собственным значением $k_1 = 9$, полагаем в системе (1.7) $k = 9$. Получаем:

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_2 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы $x_1 = s_1$, $x_2 = -2s_1 - 2s_2$, $x_3 = s_2$.

4 Вектор $\boldsymbol{x}(2s_1, -2s_1 - 2s_2, s_2)$, где s_1, s_2 - любые числа, удовлетворяющие условию $s_1^2 + s_2^2 \neq 0$, является собственным вектором данного оператора с собственным значением $k_1 = 9$.

Аналогично находим, что вектор $\boldsymbol{y}(2t, t, 2t)$, где t - любое отличное от нуля число, является собственным вектором данного оператора с собственным значением $k_3 = -9$.

Задача 16 Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(3-\lambda)[(5-\lambda)(3-\lambda) - 1] + (-3 + \lambda + 1) + (1 - 5 + \lambda) = 0.$$

После элементарных преобразований уравнение приводится к виду

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

1) Находим собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1 = 2$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(одно из уравнений этой системы есть следствие двух других и может быть отброшено), получим $x_2 = 0$, $x_3 = -x_1$. Полагаем $x_1 = \alpha$, тогда $x_2 = 0$, $x_3 = -\alpha$, т.е. $\boldsymbol{x}(\alpha; 0; -\alpha)$ - собственный вектор при $\lambda_1 = 2$.

2) Находим собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_2 = 3$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

(одно из этих уравнений – следствие двух других). Отсюда $x_1 = x_2 = x_3 = \beta$ и $\boldsymbol{y}(\beta; \beta; \beta)$ соответствующий собственный вектор.

3) Находим собственный вектор при $\lambda_3 = 6$. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

(одно из уравнений – следствие двух других). Решая эту систему, находим $x_1 = \gamma$, $x_2 = -2\gamma$, $x_3 = \gamma$ и, следовательно, $\boldsymbol{z}(\gamma; -2\gamma; \gamma)$.

Итак, собственные векторы заданной матрицы имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \alpha(\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}), \quad \boldsymbol{y} = \beta(\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}), \quad \boldsymbol{z} = \gamma(\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{2e_2} + \boldsymbol{e_3}),$$

где α, β, γ - произвольные, отличные от нуля числа.

Задача 17 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^3.$$

Его трехкратный корень $\lambda = 6$ является собственным значение матрицы A. Чтобы найти собственные векторы, нужно решить систему уравнений $(A - 6E)X = \Theta$, т.е.

$$\begin{cases} -3x^2 = 0, \\ -3x^2 - 3x^3 = 0, \\ 63x^2 + 3x^3 = 0. \end{cases}$$

В этой системе число неизвестных равно 3, а ранг матрицы системы равен 2. Поэтому размерность пространства решений равна 1. Решая систему, находим $\boldsymbol{x}\,(1;\,0;\,0)$. Таким образом, множество всех собственных векторов матрицы A есть множество векторов $c\boldsymbol{x}$, где c - произвольное число, не равное нулю.

Задача 18 В некотором базисе B оператор A задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти собственный базис B' оператора A, матрицу перехода C от B к B' и указать A' - матрицу оператора в базисе B'.

Решение. Ищем собственные числа и собственные векторы матрицы A:

1 Характеристическое уравнение

$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$

- собственные числа;

2 Найдем соответствующие собственные векторы из соотношения

$$(A - \lambda E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 + (-1-\lambda)x_2 = 0; \end{cases}$$

$\lambda_1 = -2$; $\overline{a_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$; $\overline{a_2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Напомним, что собственный вектор определяется с точностью до (ненулевого) множителя.

Ответ. Собственный базис оператора B': $\overline{a_1'} = (1;-3)^T$; $\overline{a_2'} = (1;1)^T$; матрица перехода от B к B' есть $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, матрица оператора в базисе B' есть $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.6 Диагонализируемость линейного оператора

При изучении заданного линейного оператора появляется мысль выбрать такой базис, в котором его матрица выглядит наиболее просто. В определенных ситуациях линейный оператор в некотором базисе имеет диагональную матрицу. Чтобы это было так, оператор должен иметь базис из собственных векторов. Изменение базиса вызывает замену матрицы оператора подобной ей. Замену матрицы A диагональной матрицей A', подобной A, называют ***приведением матрицы A к диагональному виду***.

Задача приведения матрицы к диагональному виду может рассматриваться самостоятельно, вне зависимости от изучения конкретного линейного оператора. Она состоит в подборе для данной матрицы A такой невырожденной матрицы T, что матрица $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ является диагональной.

Для ответа на вопрос диагонализируемости заданной матрицы пользуются следующей теоремой:

Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ *матрицы* A *порядка* n, *кратности которых равны соответственно* $m_1, m_2, ..., m_s$ $(m_1 + m_2 + ... + m_s = n)$, *попарно различны. Если*

$$m_1 = n - r_1,\ m_2 = n - r_2,\ ...,\ m_s = n - r_s,$$

где $r_1, r_2, ..., r_s$ *- ранги матриц* $A - \lambda_1 E$, $A - \lambda_2 E$, ..., $A - \lambda_s E$ *соответственно, то матрица* A *диагонализируема*.

Задача 19 Выяснить, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

И если это возможно, найти соответствующую диагональную матрицу T, диагонализирующую матрицу A.

Решение. Найдем собственные значения данной матрицы. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и решая характеристическое уравнение, находим его корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Таким образом, имеем два собственных значения, причем одно из них кратности 2.

Матрицу можно привести к диагональному виду, если сумма размерностей всех собственных подпространств равна размерности линейного пространства, в нашем случае – трем. Отметим, что размерность собственного подпространства линейного оператора (матрицы) не превышает кратности соответствующего собственного значения. Проверим это на собственном подпространстве, отвечающем собственному значению λ_1, для чего вычислим ранг матрицы $A - \lambda_1 E$:

$$rang(A - \lambda_1 E) = rang\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} = 2.$$

Значит, размерность первого собственного подпространства равна $3 - 2 = 1$.

Аналогично находим размерность второго собственного подпространства. Вычисляем ранг соответствующей матрицы $A-\lambda_2 E$:

$$rang(A-\lambda_2 E)=rang\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}=1.$$

Размерность второго собственного подпространства равна 3-1=2.

Сумма размерности обоих подпространств равна трем. Следовательно, базис из собственных векторов существует. Он собирается из базисов собственных подпространств. Чтобы его построить, нужно для каждого собственного значения λ найти фундаментальную систему решений СЛАУ $(A-\lambda E)X=0$. Фундаментальная система решений представляет собой базис линейного пространства решений однородной СЛАУ, в нашем случае собственного подпространства матрицы.

Для собственного значения $\lambda_1=-1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен двум, поэтому фундаментальная система состоит из одного столбца. Например, можно взять столбец $(3 \quad 5 \quad 6)^T$.

Для собственного значения $\lambda_2=1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен единице, поэтому фундаментальная система состоит из двух столбцов. Например, фундаментальную систему решений составляют столбцы $(2 \quad 1 \quad 0)^T$ и $(0 \quad 1 \quad 2)^T$.

Таким образом, базисом из собственных векторов матрицы A является система

$$\boldsymbol{e_1}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e_2}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e_3}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а сама матрица A подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица T преобразования подобия представляет собой матрицу перехода из одного базиса в другой, т.е. эти столбцы представляют собой столбцы координат векторов нового базиса, записанные в старом. В нашем случае столбцы матрицы T определяются векторами «нового» базиса $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 20 Линейный оператор, действующий в трехмерном пространстве, в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно ли, изменив базис, привести матрицу этого оператора к диагональному виду?

Решение. Составляем характеристическое уравнение линейного оператора:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \cdot$$

Корнями характеристического уравнения являются числа $\lambda_1 = 1$ кратности 2 и $\lambda_2 = 2$. Для определения размерностей собственных подпространств линейного оператора, отвечающих этим двум значениям, вычислим ранги соответствующих матриц:

$$rang(A - \lambda_1 E) = rang\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$rang(A - \lambda_2 E) = rang\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

Оба собственных подпространства линейного оператора, отвечающие двум собственным значениям, имеют размерность $3-2=1$. Поэтому линейно независимая система из собственных векторов данного оператора может содержать максимум два вектора и по соображениям размерности не может быть базисом.

1.7 Действия над линейными операторами

Суммой операторов f и g некоторого пространства называется оператор h такой, что для любого вектора $\boldsymbol{x}$ этого пространства выполняется

$$h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}).$$

Если линейные операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы A и B, то оператор $f+g$ в том же базисе имеет матрицу $A+B$.

Произведение αf ***линейного оператора*** f некоторого пространства на число α называется оператор g, такой, что для любого $\boldsymbol{x}$ из этого пространства

$$g(\boldsymbol{x}) = \alpha\left(f(\boldsymbol{x})\right).$$

Произведение линейного оператора f на число α является линейным оператором, а матрица этого оператора (в любом базисе) равна произведению матрицы оператора f на число α.

Оператор, заключающийся в последовательном применении операторов f и g, называется ***произведением*** оператора f на оператор g, или ***композицией*** этих операторов, и обозначается $g \circ f$ (или просто $g \cdot f$); отметим, что справа записывается первый оператор. Таким образом,

$$g \circ f(\boldsymbol{x}) = g\left(f(\boldsymbol{x})\right).$$

Если в некотором базисе линейные операторы f и g имеют соответственно матрицы A и B, то оператор произведения $g \circ f$ в том же базисе имеет матрицу BA.

Два линейных оператора f и φ называются ***взаимно обратными***, если для любого $\boldsymbol{x}$ имеют место равенства

$$f \circ \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi \circ f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \qquad (1.8)$$

т.е. $f \circ \varphi$ и $\varphi \circ f$ - тождественные операторы.

Если операторы f и φ имеют в некотором базисе матрицы соответственно A и B, то из равенств (1.8) следует, что $AB = BA = E$, т.е. A и B - взаимно обратные матрицы.

Для того чтобы линейный оператор имел обратный оператор, необходимо и достаточно, чтобы он был невырожденным.

Для данного линейного невырожденного оператора с матрицей A в некотором базисе существует единственный обратный оператор, причем матрица обратного оператора равна матрице A^{-1} в том же базисе.

Задача 21 Линейные операторы f и g в некотором базисе заданы соответственно матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу линейного оператора

а) $f+g$; б) $2f$; в) $f \cdot g$.

Решение.

а) Пусть линейный оператор $f+g$ имеет матрицу C_1, тогда

$$C_1 = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Пусть линейный оператор $2f$ имеет матрицу C_2, тогда

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

в) C_3 - матрица линейного оператора $f \cdot g$:

$$C_3 = A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 22 Линейный оператор f заключается в повороте каждого вектора плоскости xOy на угол $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Найти в координатной форме оператор $f + e$ (e - линейный оператор, матрица которого единичная).

Решение. Имеем

$f(i) = i\,cos(\pi/4) + j\,sin(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right) i + \left(\sqrt{2}/2\right) j$;

$f(j) = i\,cos(3\pi/4) + j\,sin(3\pi/4) = -\left(\sqrt{2}/2\right) i + \left(\sqrt{2}/2\right) j$.

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

- матрица оператора f.

Так как $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица оператора e, то

$$A + E = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 + 1 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейный оператор $f + e$ можно записать с помощью равенств $x' = \left(\sqrt{2}/2 + 1\right)x - \left(\sqrt{2}/2\right)y$, $y' = \left(\sqrt{2}/2\right)x + \left(\sqrt{2}/2 + 1\right)y$.

Задача 23 Даны линейные операторы

$$f: \begin{aligned} x' &= x + y, \\ y' &= y + z, \\ z' &= z + x \end{aligned} \quad \text{и} \quad g: \begin{aligned} x' &= y + z, \\ y' &= x + z, \\ z' &= z + y. \end{aligned}$$

Найти координатную форму операторов fg и gf.

Решение. Матрицы данных преобразований имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведения этих матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $AB = BA$, поэтому линейные операторы fg и gf совпадают. Координатная форма преобразования fg записывается следующим образом:

$$x' = x + y + 2z, \; y' = 2x + y + z, \; z' = x + 2y + z.$$

Задача 24 Преобразование f заключается в повороте каждого вектора плоскости xOy на угол α . Найти матрицу оператора f^2 (т.е. $f \cdot f$).

Решение. Так как $f(i) = i cos\alpha + j sin\alpha$, $f(j) = -i sin\alpha + j cos\alpha$, то

$$A = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^2 = \begin{pmatrix} cos^2\alpha - sin^2\alpha & -sin\alpha cos\alpha \\ 2 sin\alpha cos\alpha & cos^2\alpha - sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos 2\alpha & -sin 2\alpha \\ sin 2\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразование f^2 в координатной форме определяется равенствами

$$x' = x cos 2\alpha - y sin 2\alpha, \qquad y' = x sin 2\alpha + y cos 2\alpha.$$

Эти результаты могут быть получены и из чисто геометрических соображений.

Задача 25 Линейный оператор f заключается в повороте на угол $\pi/4$ каждого вектора плоскости xOy. Найти матрицу линейного оператора $g = f^2 + \sqrt{2}f + e$.

Решение. Используя найденную в задаче 22 матрицу заданного линейного оператора имеем

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, находим матрицу B линейного оператора g :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 26 Дано пространство геометрических векторов. Пусть линейный оператор f - поворот пространства вокруг оси Oz на угол $\pi/4$, а линейный оператор g - поворот пространства вокруг оси Ox на тот же угол. Найти матрицу линейного оператора fg.

Решение. Имеем

$f(i) = i\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)i + \left(\sqrt{2}/2\right)j$,

$f(j) = -i\sin(\pi/4) + j\cos(\pi/4) = -\left(\sqrt{2}/2\right)i + \left(\sqrt{2}/2\right)j$,

$f(k) = k$,

$g(i) = i$,

$g(j) = \sqrt{2}/2\, j + \sqrt{2}/2\, k$,

$g(k) = -\sqrt{2}/2\, j + \sqrt{2}/2\, k$.

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Задача 27 В линейном пространстве X задан базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Линейный оператор φ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (2, -1)$ и $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 1)$ соответственно в векторы $\boldsymbol{b_1} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b_2} = (3, 3)$. Найти матрицу оператора φ в базисе $\boldsymbol{e}$.

Решение. Через ψ обозначим оператор, переводящий векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ в векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Его матрицей в базисе $\boldsymbol{e}$ будет

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор φ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ в векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$. Значит, произведение $\varphi\psi$ операторов ψ и φ переводит векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ в векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$. Поэтому в базисе $\boldsymbol{e}$ оператор $\varphi\psi$ имеет матрицу

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица T_2 оператора $\varphi\psi$ равна произведению матриц операторов φ и ψ, т.е. если A_e - матрица оператора φ в базисе $\boldsymbol{e}$, то $T_2 = A_e T_1$. Отсюда получаем:

$$A_e = T_2 T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 28 Пусть f_k - оператор поворота на угол φ_k в пространстве V_2 векторов на плоскости. Найти матрицу (в произвольном ортонормированном базисе) оператора: а) $f_1 \cdot f_2$; б) f_1^{-1}.

Решение. Матрица оператора f_k в любом ортонормированном базисе имеет вид

$$A_k = \begin{pmatrix} cos\varphi_k & -sin\varphi_k \\ sin\varphi_k & cos\varphi_k \end{pmatrix}.$$

а) По определению произведения операторов действие оператора $f_1 \cdot f_2$ на произвольный вектор a состоит в том, что сначала вектор a поворачивается на угол φ_2, а затем вектор $f_2(a)$ поворачивается на угол φ_1. В результате поворота вектора a на угол $\varphi_2 + \varphi_1$, т.е. произведения $f_1 \cdot f_2$ есть оператор поворота на угол $\varphi_2 + \varphi_1$. Поэтому матрица оператора $f_1 \cdot f_2$ в любом ортонормированном базисе равна

$$\begin{pmatrix} cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ sin(\varphi_1 + \varphi_2) & cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Тот же результат можно получить иначе, если воспользоваться тем, что матрица произведения операторов равна произведению матриц операторов-сомножителей:

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} cos\varphi_1 & -sin\varphi_1 \\ sin\varphi_1 & cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\varphi_2 & -sin\varphi_2 \\ sin\varphi_2 & cos\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ sin(\varphi_1 + \varphi_2) & cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}.$$

б) Оператор f_1 поворачивает каждый вектор на угол φ_1. Ясно, что обратный оператор поворачивает каждый вектор на тот же угол φ_1, но в противоположную сторону, т.е. f_1^{-1} - оператор поворота на угол $-\varphi_1$. Поэтому матрица оператора f_1^{-1} является матрицей оператора поворота на угол $-\varphi_1$ и, следовательно, в произвольном ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} cos(-\varphi_1) & -sin(-\varphi_1) \\ sin(-\varphi_1) & cos(-\varphi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi_1 & sin\varphi_1 \\ -sin\varphi_1 & cos\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Тот же результат можно получить иначе, если воспользоваться тем, что матрица обратного оператора f_1^{-1} есть матрица, обратная к матрице оператора f_1:

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} cos\varphi_1 & -sin\varphi_1 \\ sin\varphi_1 & cos\varphi_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} cos\varphi_1 & sin\varphi_1 \\ -sin\varphi_1 & cos\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

1.8 Ортогональные операторы

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***ортогональной***, если соответствующая ей система векторов

$\boldsymbol{a}_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$, $\boldsymbol{a}_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$, …, $\boldsymbol{a}_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$

является ортонормированной.

Линейный оператор f евклидова пространства E называется ***ортогональным***, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ выполняется условие

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$.

Для того чтобы оператор $f: E \to E$ был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была ортогональна.

Для ортогонального оператора справедливы следующие утверждения.

1 *Ортогональный оператор – невырожденный.*

2 *Для ортогонального оператора существует обратный оператор, который также является ортогональным.*

3 *Если A - матрица ортогонального оператора, то A^T - матрица оператора, обратного данному.*

4 *Произведение ортогональных операторов также является ортогональным оператором.*

1.9 Задачи для самостоятельного решения

1 Выяснить какие из следующих преобразований φ, заданных путем задания координат вектора $\varphi\boldsymbol{x}$ как функций координат вектора $\boldsymbol{x}$, являются линейными операторами.

а) $\varphi\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$;

б) $\varphi\ x = (2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3 + 1, \boldsymbol{x}_3^2)$.

Ответ. а) φ не является линейным; б) φ не является линейным.

2 Доказать, что существует единственный линейный оператор трехмерного пространства, переводящее векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ соответственно в $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1)$,

$\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 1, -1)$,

$\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2, 1, 2)$.

б) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\quad \boldsymbol{b}_1 = (1, 2, -1)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\quad \boldsymbol{b}_2 = (4, 5, -2)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (3, 1, 2)$, $\quad \boldsymbol{b}_3 = (1, -1, 1)$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

3 Линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{e_1, e_2, e_3, e_4}$ имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Найти матрицу этого же оператора в базисе:
а) $\boldsymbol{e_1, e_3, e_2, e_4}$;
б) $\boldsymbol{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4}$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

4 Линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{e_1, e_2, e_3}$ имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$
Найти его матрицу в базисе $\boldsymbol{f}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5 Линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-16, 7, -13)$, $\boldsymbol{a}_3 = (9, -3, 7)$ имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$
Найти его матрицу в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2, 1, 2)$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

6 Пусть оператор φ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Оператор ψ в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (3, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4, 2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора $\varphi + \psi$ в базисе $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29\frac{1}{2} & -25 \end{pmatrix}$.

7 Линейный оператор φ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (2, 7)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а оператор ψ в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (6, 7)$, $\boldsymbol{b}_2 = (5, 6)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора $\varphi\psi$ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Ответ. $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

8 Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & - & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1, 1, -1)$, где $c_1 \neq 0$;

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1, 2, -1) + c_2(0, 0, 1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно;

3) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Собственные векторы для значений 1 имеют вид $c(1, 1, 1)$, а для $\lambda = 0$ - вид $c(1, 2, 3)$, где $c \neq 0$;

4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(3, 1, 1)$, где $c \neq 0$;

5) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значений $\lambda = 3$ имеют вид $c(1, 2, 2)$, а для $\lambda = 1$ вид $c(1, 2, 1)$, где $c \neq 0$;

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значений $\lambda = 1$ имеют вид $c_1(2, 1, 0) + c_2(1, 0, -1)$, а для $\lambda = -1$ вид $c(3, 5, 6)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно и $c \neq 0$;

7) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$. Собственные векторы для значений $\lambda = 1$ имеют вид $c(1, 2, 1)$, для $\lambda = 2 + 3i$ - вид $c(3 - 3i, 5 - 3i, 4)$, для $\lambda = 2 - 3i$ - вид $c(3 + 3i, 5 + 3i, 4)$, $c \neq 0$;

8) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Собственные векторы для $\lambda = 1$ имеют вид $c(0, 0, 0, 1)$, а для $\lambda = 0$ вид $c_1(0, 1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0, 0)$, где $c \neq 0$ и c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

9 Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -5 & -5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. 1) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2(1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, -3)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

2) Матрица к диагональному виду не приводится.

3) $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 0, 1)$, $a_4 = (1, -1, -1, -1)$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

4) Матрица к диагональному виду не приводится.

5) $a_1 = (1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0)$, $a_3 = (0, -1, 1, 0)$, $a_4 = (-1, 0, 0, 1)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Глава 2 Квадратичные формы

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Если $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - квадратичная форма переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, а λ - какое-нибудь действительное число, то

$$f(\lambda\, x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^n f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Если $n = 2$, то

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}^{2}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Если $n = 3$, то

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

В дальнейшем все необходимые формулировки и определения приведем для квадратичной формы трех переменных.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

у которой $a_{ik} = a_{ki}$, называется ***матрицей квадратичной формы*** $f(x_1, x_2, x_3)$, а соответствующий определитель – ***определителем этой квадратичной формы***.

Так как A - симметрическая матрица, то корни λ_1, λ_2 и λ_3 характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

являются действительными числами.

Задача 1 Записать матрицу квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 7x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2$$

и найти ее ранг.

Решение. В данном случае $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = -3$, $a_{13} = a_{31} = -4$, $a_{22} = 7$, $a_{23} = a_{32} = 2$, $a_{33} = -5$, поэтому

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы:

$$det\,A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -35 + 24 + 24 - 112 + 45 - 4 = -58.$$

Так как $det\,A \neq 0$, то ранг матрицы равен трем, т.е. $r = 3$.

Задача 2 Запишите квадратичную форму $x_1^2 + 4x_1x_3$ матричной записью.

Решение. Квадратичная форма от трех переменных $x_1^2 + 4x_1x_3$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $rangA = 2 < 3$, то эта квадратичная форма является вырожденной. В матричной записи квадратичная форма имеет вид

$$x_1^2 + 4x_1x_3 = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3 Квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

преобразуем к новым переменным y_1, y_2, y_3, где

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение. Эта замена переменных в матричной записи имеет вид $X = UY$, где

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$A' = U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и квадратичная форма принимает вид

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2,$$

т.е. все коэффициенты при попарных произведениях переменных обнуляются и остаются слагаемые с квадратами переменных.

2.1 Метод Лагранжа

Один из методов преобразования (или, как говорят, приведения) квадратичной формы к каноническому виду путем замены переменных состоит в последовательном выделении полных квадратов. Такой метод называют ***методом Лагранжа***. Проиллюстрируем этот метод на простом примере.

Задача 4 Привести квадратичную форму $x_1^2 - 4x_1x_2$ к каноническому виду методом Лагранжа.

Решение. Для приведения квадратичной формы $x_1^2 - 4x_1x_2$ от двух переменных к каноническому виду выделим полный квадрат по x_1. Для этого соберем все слагаемые, содержащие x_1, и дополним до полного квадрата:

$$x_1^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2.$$

Введя новые переменные $z_1 = x_1 - 2x_2$, $z_2 = 2x_2$ (т.е. определив линейный оператор), получим квадратичную форму канонического вида: $z_1^2 - z_2^2$.

Задача 5 Методом Лагранжа привести квадратичную форму

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$$

к канонической форме и построить невырожденное преобразование координат, осуществляющее такое приведение.

Решение. Опишем два способа, позволяющие привести квадратичную форму к каноническому виду.

Итак, метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов) состоит в последовательном выделении полных квадратов сначала в группе слагаемых содержащих x_1, затем содержащих x_2 и т.д. Имеем

$$f = \left(2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3\right) + 9x_2^2 + 19x_3^2 = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 8x_2^2 - 2x_3^2 -$$
$$- 8x_2x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2 = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + \left(x_2^2 - 8x_2x_3\right) + 17x_3^2 =$$
$$= 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 4x_3)^2 - 16x_3^2 + 17x_3^2 = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 +$$
$$+ (x_2 - 4x_3)^2 + x_3^2 = 2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

где $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 - 4x_3$, $y_3 = x_3$.

Если Q - матрица перехода к новому базису, то $X_e = QY_e$. Поэтому

и $$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - y_3, \\ x_1 = y_2 + 4y_3, \\ x_1 = y_3. \end{cases}$$

Заметим, что стандартный метод Лагранжа соответствует треугольному преобразованию координат.

Задача 6 Привести квадратичную форму

$f = 4x_1^2 - 12ix_1x_2 - 10x_2^2$

к каноническому виду и найти приводящее к нему преобразование координат.

Решение. Применим метод Лагранжа:

$$f = (2x_1 - 3ix_2)^2 + 9x_2^2 - 10x_2^2 = (2x_1 - 3ix_2)^2 - x_2^2 = y_1^2 - y_2^2,$$

где $y_1 = 2x_1 - 3ix_2$, $y_2 = x_2$. Таким образом, каноническим видом будет форма $y_1^2 - y_2^2$, а формулы преобразования координат имеют вид

$$x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{3i}{2}y_2, \qquad x_2 = y_2.$$

2.2 Ортогональные преобразования квадратичных форм

Алгоритм построения ортогонального преобразования:

1) записать матрицу квадратичной формы;
2) применить к этой матрице процедуру приведения к диагональному виду.

Проиллюстрируем на примере процедуру практического вычисления ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Задача 7 Привести $f(x, y) = x_1^2 - 4x_1x_2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Решение. Матрица нашей квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем *характеристическое уравнение* этой *матрицы*:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 4 = 0.$$

Вычисляем корни характеристического уравнения, они же собственные значения матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Теперь можем записать канонический вид нашей квадратичной формы:

$$\frac{1+\sqrt{17}}{2}y_1^2 + \frac{1-\sqrt{17}}{2}y_2^2.$$

Задача 8 Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2,$$

ортогональным преобразованием, и указать одно из таких ортогональных преобразований (операторов).

Решение. Исходная квадратичная форма имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 0.$$

Собственными значениями матрицы квадратичной формы являются $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$, т.е. квадратичная форма приводится ортогональным преобразованием к каноническому виду

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + 9y_2^2.$$

Для построения ортогонального преобразования найдем собственные векторы матрицы рассматриваемой квадратичной формы. Из однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda = 1$ находим собственный вектор $e_1 = (1 \; -1)^T$. Тогда вектор $e_2 = (1 \quad 1)^T$, ортогональный вектору e_1, будет собственным вектором с соответствующим собственным значением $\lambda_2 = 9$. Пронормировав эти векторы, составляем из столбцов их координат *матрицу ортогонального преобразования*

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

которой соответствует *линейная замена переменных* $X = PY$.

Задача 9 Привести квадратичную форму

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

к каноническому виду:

а) методом Лагранжа;

б) ортогональным преобразованием.

Решение. а) Коэффициент при x_2^2 отличен от нуля (равен 3). Соберем в одну группу все члены квадратичной формы, содержащие x_2:

$$3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Дополним это выражение до полного квадрата членами, не содержащими x_2, и, чтобы квадратичная форма $Q(x_1, x_2, x_3)$ не изменилась, вычтем добавленные члены. Получим

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3^2 - \frac{4}{3}x_1 \right)^2 - \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_3 + 3x_3^2 + 4x_1x_3.$$

Положим

$$y_2 = \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 .$$

Тогда в выражении квадратичной формы появляется переменная y_2 и исчезает переменная x_2. Приведя подобные члены, перепишем квадратичную форму в виду

$$3y_2^2 + \frac{8}{3}x_3^2 - \frac{4}{3}x_1^2 + \frac{16}{3}x_1x_3 = 3y_2^2 + W(x_1, x_3) .$$

К квадратичной форме $W(x_1, x_3)$ снова применим метод выделения полного квадрата. С этой целью соберем в одну группу все члены, содержащие x_1 :

$$-\frac{4}{3}x_1^2 + \frac{16}{3}x_1x_3 .$$

Дополним это выражение до полного квадрата слагаемым, не содержащим x_1, и, чтобы квадратичная форма $W(x_1, x_3)$ не изменилась, вычтем добавленное слагаемое. Получим

$$W(x_1, x_3) = -\frac{4}{3}(x_1 - 2x_3)^2 + \frac{16}{3}x_3^2 + \frac{8}{3}x_3^2 .$$

Положим $y_1 = x_1 - 2x_3$. Приведя подобные члены, перепишем исходную квадратичную форму в виде

$$3y_2^2 - \frac{4}{3}y_1^2 + 8x_3^2 .$$

Вводя обозначение $x_3 = y_3$, получаем следующий канонический вид исходной квадратичной формы:

$$\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = -\frac{4}{3}y_1^2 + 3y_2^2 + 8y_3^2, \qquad (2.1)$$

где

$$y_1 = x_1 - 2x_3, \qquad y_2 = \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3, \qquad y_3 = x_3 .$$

Преобразование переменных, приводящее исходную квадратичную форму к каноническому виду, можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

В результате применения метода Лагранжа всегда получается невырожденное линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

б) Составим матрицу данной квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения. Характеристическое уравнение имеет вид

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 4$. Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 \cdot$$

Построим теперь матрицу ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к этому каноническому виду. С этой целью найдем собственные векторы матрицы A. Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора X, соответствующего собственному значению $\lambda = -2$, являются решением системы уравнений $(A + 2E)X = \Theta$, т.е. системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

у которой ранг r матрицы равен 2, а $n - r = 1$. Следовательно, фундаментальная совокупность решений системы состоит из одного вектора.

Матрица искомого ортогонального преобразования состоит из столбцов F_1, F_2, F_3, т.е. искомое преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & \sqrt{2/5} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & \sqrt{5/6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Оно приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду

$$\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 \cdot \qquad (2.2)$$

Замечание Отметим, что как канонический вид (2.1) квадратичной формы, полученный методом Лагранжа, так и канонически вид (2.2), полученный ортогональным преобразованием, содержит два положительных канонических коэффициента и один отрицательный канонический коэффициент, что соответствует закону инерции квадратичных форм.

2.3 Метод Якоби

Угловым (*главным*) ***минором матрицы*** $A(n\times n)$ порядка k назовем минор, расположенный на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы. Угловой минор максимального, n-го порядка представляет собой определитель матрицы (обозначение Δ_n).

Метод Якоби основан на следующей **теореме**:

Если $\Delta_k \neq 0$ $(k=\overline{1,n-1})$, то существует единственный невырожденный линейный оператор с треугольной матрицей, приводящий квадратичную форму к каноническому виду с каноническими коэффициентами $b_{11}=\Delta_1$, $b_{kk}=\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, $k=\overline{2,n}$.

Задача 10 Используя метод Якоби, найти канонический вид квадратичной формы

$$f = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение. Матрица квадратичной формы равна

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

ее угловые миноры равны соответственно:

$$\Delta_1 = 1, \qquad \Delta_2 = -3, \qquad \Delta_3 = 8.$$

Согласно формулам Якоби каноническими коэффициентами квадратичной формы являются числа

$$\lambda_1=\frac{\Delta_1}{1}=1, \qquad \lambda_2=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=-3, \qquad \lambda_3=\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=-\frac{8}{3},$$

так что каноническим видом квадратичной формы будет форма

$$f = y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{8}{3}y_3^2.$$

Задача 11 Найти нормальный вид квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение. Матрица квадратичной формы f имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

ее угловые миноры равны

$$\Delta_1 = 1, \qquad \Delta_2 = -3, \qquad \Delta_3 = -7.$$

Согласно формулам Якоби за канонический вид формы f можно взять форму

$$y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2$$

с каноническими коэффициентами

$$\frac{\Delta_1}{1} = 1, \qquad \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -3, \qquad \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{7}{3}.$$

Напомним, что канонический вид квадратичной формы, в котором все ненулевые канонические коэффициенты равны 1 или -1, называется ***нормальным видом***, таким образом последняя форма после преобразования координат

$$z_1 = y_1, \qquad z_2 = \sqrt{3}y_2, \qquad z_3 = \sqrt{7/3}y_3$$

примет нормальный вид

$$z_1^2 - z_2^2 + z_3^2.$$

2.4 Метод элементарных преобразований

Заметим, что если Q - матрица элементарных преобразований, то преобразование $A_f = Q^T A_e Q$ матрицы A квадратичной формы равносильно двум преобразованиям – элементарному преобразованию столбцов матрицы A, определенному матрицей Q, и такому же преобразованию строк матрицы A. Матрицы элементарных преобразований невырождены. Следовательно, их произведение – тоже невырожденная матрица. Поэтому матрица, получающаяся в результате умножения матриц элементарных преобразований, проводимых над столбцами и строками матрицы A квадратичной формы, является матрицей перехода к новому базису. Соответственно, квадратичная форма в результате этих преобразований может быть приведена к каноническому виду.

Отметим также, что матрицы элементарных преобразований столбцов второго типа являются диагональными матрицами, а если элементарное преобразование заключается в прибавлении к столбцу другого столбца с меньшим номером, то соответствующая матрица является верхней треугольной. Если можно обойтись только такими элементарными преобразованиями, то матрица Q перехода к новому базису, будучи произведением верхних треугольных матриц, так же получится верхней треугольной.

Задача 12 Методом элементарных преобразований привести квадратичную форму $f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$ к каноническому виду и построить невырожденное преобразование координат (оператор), осуществляющее такое приведение.

Решение. Построим последовательность элементарных преобразований столбцов и таких же преобразований строк, которые приводят матрицу A заданной квадратичной формы к диагональному виду. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 19 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры матрицы A равны соответственно:

$$\Delta_1 = 2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_3 = |A| = 2.$$

1) Вычитая из 2-го столбца удвоенный 1-й столбец, а затем вычитая из 2-й строки удвоенную 1-ю строку, получим

$$A_1 = L_1^T A L_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 17 \end{pmatrix},$$

где $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что в результате такого преобразования главные миноры матрицы A_1 остались теми же:

$$\Delta_1 = 2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_3 = |A_1| = 2.$$

2) Вычитая из 3-го столбца 1-й столбец, а затем вычитая из 3-й строки 1-ю строку, получим

$$A_2 = L_2^T A_1 L_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 17 \end{pmatrix},$$

где $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Главные миноры опять остаются без изменения:

$$\Delta_1 = 2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_3 = |A_2| = 2.$$

3) Наконец, прибавив к 3-му столбцу 2- й столбец, умноженный на 4, а затем прибавив к 3-й строке 2-ю строку, умноженную на 4, получим

$$A_3 = L_3^T A_2 L_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица A_3 - диагональная, т.е. квадратичная форма f приведена к каноническому виду

$$f = 2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

В результате последнего преобразования главные миноры опять не изменились, и теперь в матрице A_3:

$$\Delta_1 = 2, \qquad \Delta_2 = 2\cdot 1, \qquad \Delta_3 = 2\cdot 1\cdot 1.$$

Иными словами, канонические коэффициенты могут быть вычислены по формулам:

$$2 = \Delta_1, \qquad 1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \qquad 1 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2},$$

т.е. по формулам Якоби.

Чтобы найти преобразование координат, отметим, что

$$A = L_3^{\perp} L_2^{\perp} L_1^{\perp} A L_1 L_2 L_3 = \left(L_1 L_2 L_3\right)^T A\left(L_1 L_2 L_3\right),$$

так что матрица Q перехода к новому базису имеет вид

$$Q = L_1 L_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а старые координаты связаны с новыми, соответственно, по формулам

$$x_1 = z_1 - 2z_2 - 9z_3, \qquad x_2 = z_2 + 4z_3, \qquad x_3 = z_3.$$

Задача 13 Привести квадратичную форму

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

к каноническому виду и найти приводящее к нему преобразование координат.

Решение. Матрица квадратичной формы f имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее угловой минор $\Delta_1 = 0$, поэтому здесь не применимы ни стандартный метод Лагранжа, ни метод элементарных преобразований в том виде, в котором он был использован в предыдущей задаче.

Модифицируем сначала *метод Лагранжа*.

Перейдем к новым координатам

$$x_1 = y_1 + y_2, \qquad x_2 = y_1 - y_2, \qquad x_3 = y_3,$$

тогда квадратичная форма f перейдет в квадратичную форму

$$g = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = \{\text{выделим полный квадрат}\} = \left(y_1 + y_3\right)^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

В координатах

$$z_1 = y_1 + y_3, \qquad z_2 = y_2, \qquad z_3 = y_3$$

квадратичная форма f будет иметь канонический вид

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Он соответствует преобразованию координат

$$x_1 = z_1 - z_2 - z_3, \qquad x_2 = z_1 + z_2 - z_3, \qquad x_3 = z_3,$$

которое уже не будет треугольным.

Покажем теперь, какие изменения нужно внести в *метод элементарных преобразований*.

Отметим, что аннулировать все внедиагональные элементы матрицы A квадратичной формы элементарными преобразованиями столбцов и такими же преобразованиями строк не удастся, так как главная диагональ матрицы A нулевая. Поэтому сначала выполним предварительное преобразование.

Прибавим к 1-му столбцу 2-1 столбец, а затем прибавим к 1-й строке 2-ю строку. Имеем:

$$A_1 = L_1^T A L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теперь уже $\Delta_1 = 1 \neq 0$ и можно преобразованиями, аналогичными проведенным в предыдущей задаче, обнулить внедиагональные элементы 1-го столбца и 1-й строки матрицы A.

Вычитая из 2-го столбца 1-й столбец, умноженный на $1/2$, а затем вычитая из 2-й строки 1-ю строку, умноженную на $1/2$, получим

$$A_2 = L_2^T A_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычитая из 3-го столбца 1-й столбец, а затем вычитая из 3-й строки 1-ю строку, получим

$$A_3 = L_3^T A_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица A_3 - диагональная, следовательно, квадратичная форма f приведена к каноническому виду

$$z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 - z_3^2.$$

Матрица перехода Q является произведением матриц используемых элементарных преобразований:

$$Q = L_1L_2L_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее преобразование координат осуществляется по формулам

$$x_1 = z_1 - \frac{1}{2}z_2 - z_3, \qquad x_2 = z_1 + \frac{1}{2}z_2 - z_3, \qquad x_3 = z_3.$$

Отметим также, что это преобразование, как и в модифицированном методе Лагранжа, не будет треугольным.

2.5 Критерий Сильвестра

Квадратичные формы подразделяют на различные типы в зависимости от множества их значений.

Квадратичную форму $f(x) = x^T Ax$, $x = (x_1 \ldots x_n)^T$, будем называть:

- ***положительно*** (***отрицательно***) определенной, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$);

- ***неотрицательно*** (***неположительно***) определенной, если $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) для любого столбца x, для которого $f(x) = 0$;

- ***знакопеременной*** (***неопределенной***), если существуют такие столбцы x и y, что $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$.

Задача 14 Рассмотрим четыре квадратичные формы от трех переменных:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2,$$
$$f_4(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2.$$

Решение. Квадратичная форма f_1 положительно определена, так как представляет собой сумму трех квадратов и потому принимает только положительные значения, если переменные одновременно не обращаются в нуль. Квадратичная форма f_2 неотрицательно определена: будучи суммой двух квадратов она не принимает отрицательных значений, но при $x_1 = x_2 = 0$ и $x_3 \neq 0$ она принимает нулевые значения. Квадратичные формы f_3 и f_4 знакопеременны. Первая из них положительна при $x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ и отрицательна при $x = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$. Вторая положительна при $x = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$ и отрицательна при $x = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T$.

Квадратичные формы f_2 и f_4 являются вырожденными, так как ранг каждой из них равен 2.

Задача 15 Определить, является ли квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$

знакоопределенной.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим ее угловые миноры $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -4$, $\Delta_3 = 0$. В силу критерия Сильвестра данная квадратичная форма не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, т.е. не является знакоопределенной.

Задача 16 Найти все значения параметра a, при которых квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + ax_3^2$$

является положительно определенной.

Решение. Найдем угловые миноры матрицы квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Имеем $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, $\Delta_3 = \det A = 3 \cdot (a - 1)$.

Пользуясь критерием Сильвестра, находим, что в данная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\Delta_3 > 0$, т.е. при $a > 1$.

2.6 Приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду

Задача 17 Приведем к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

$$14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2 - 4x_1 + 18x_2 - 139 = 0, \qquad (2.2)$$

Выпишем все использованные преобразования и построим эту кривую в исходной системе координат.

Квадратичная форма кривой имеет вид $14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2$, а матрицей этой квадратичной формы является

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму кривой к каноническому виду, выпишем характеристическое уравнение матрицы A

$$\lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0$$

и найдем его корни: $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 5$.

Ранг матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ при $\lambda = \lambda_{1,2}$ равен единице, и мы можем в системе оставить только одно уравнение – первое: $(14 - \lambda)x_1 + 12x_2 = 0$. Собственному значению $\lambda_1 = 30$ соответствует единичный собственный вектор

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

а $\lambda_2 = 5$ - единичный собственный вектор

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

который в двумерном случае проще найти из условия ортогональности вектору $\boldsymbol{e}_1$, т.е. путем перестановки координат вектора $\boldsymbol{e}_1$ и изменения знака у одной из координат.

Из найденных координат собственных векторов составляем матрицу ортогонального преобразования

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

которое является поворотом, так как $\det U = 1$. Этому ортогональному преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2, \\ x_2 = \frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2. \end{cases} \tag{2.3}$$

Чтобы получить уравнение кривой квадратичной формы канонического вида, нужно подставить выражения (2.3) для переменных x_1 и x_2 в (2.2):

$$14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2 - 4x_1 + 18x_2 - 139 =$$

$$= 14\left(\frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2\right)^2 + 24\left(\frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2\right)\left(\frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2\right) +$$

$$+ 21\left(\frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2\right)^2 - 4\left(\frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2\right) + 18\left(\frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2\right)^2 - 139 =$$

$$= \left(14 \cdot \frac{9}{25} + 24 \cdot \frac{12}{25} + 21 \cdot \frac{16}{25}\right)y_1^2 +$$

$$+\left(14\cdot\frac{24}{25}-24\cdot\frac{7}{25}+21\cdot\frac{24}{25}\right)y_1y_2+$$
$$+\left(14\cdot\frac{16}{25}-24\cdot\frac{12}{25}+21\cdot\frac{9}{25}\right)y_2^2+$$
$$+\left(-4\cdot\frac{3}{5}+14\cdot\frac{4}{5}\right)y_1+\left(4\cdot\frac{4}{5}+18\cdot\frac{3}{5}\right)y_2-139=$$
$$=30y_1^2+5y_2^2+12y_1+14y_2-139. \qquad (2.4)$$

Следует отметить, что мы сразу можем записать канонический вид квадратичной формы кривой по известным собственным числа: $30y_1^2+5y_2^2$. Линейные слагаемые $-4x_1+18x_2=2b^Tx$, представляющие собой удвоенное скалярное произведение вектора с координатами b на вектор с координатами x, в новых переменных будет иметь вид $2(Ub)^Ty=2b^TUy$, или

$$2b^TUy=(-4\ \ 18)U\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}(-4\ \ 18)\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=12y_1+14y_2.$$

Свободный член в процессе преобразования поворота не изменится. Таким образом, приходим к тому же уравнению (2.4).

По каждому из переменных выделяем полный квадрат:

$$30\left(y_1+\frac{1}{5}\right)^2+5\left(y_2+\frac{7}{5}\right)^2=150.$$

Теперь параллельный перенос системы координат, определяемый соотношениями

$$\begin{cases} z_1=y_1+\dfrac{1}{5}, \\ z_2=y_2+\dfrac{7}{5}, \end{cases} \qquad (2.5)$$

приводит к уравнению

$$30z_1^2+5z_2^2=150,$$

которое легко преобразуется к каноническому уравнению эллипса делением на 150:

$$\frac{z_1^2}{5}+\frac{z_2^2}{30}=1.$$

Чтобы построить эллипс, заданный в исходной системе координат уравнением (2.2), можно поступить следующим образом. Изобразим исходную систему координат Ox_1x_2, а в ней векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, которые являются собственными для матрицы квадратичной формы поверхности. Эти векторы откладываем от начала O системы координат, они задают координатные оси новой системы координат Oy_1y_2. В этой системе координат строим точку

$O_1(-1/5; -7/5)$, которая должна быть началом следующей канонической системы координат $O_1z_1z_2$. Оси этой системы координат параллельны осям Oy_1 и Oy_2.

Определив положение канонической системы координат $O_1z_1z_2$ относительно исходной Ox_1x_2, строим в ней эллипс, руководствуясь величинами его большой и малой полуосей. В результате получаем расположение эллипса относительно исходной системы координат. Расположение осей трех систем координат и эллипса в данной задаче показано на рисунке 3.

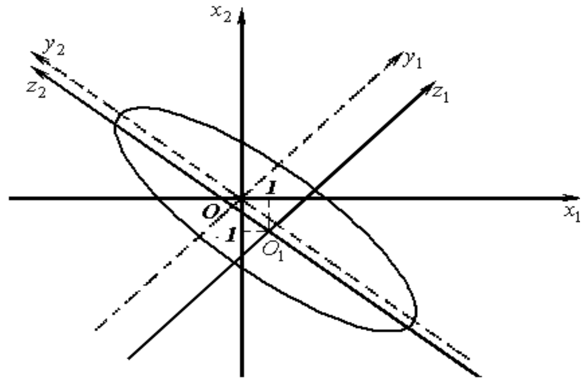

Рисунок 3

Задача 18 Определим, какая кривая задается уравнением

$$32x_1^2 + 52x_1x_2 - 7x_2^2 + 180 = 0,$$

и изобразим ее в канонической системе координат.

Для решения поставленной задачи приведем к каноническому виду квадратичную форму

$F = 32x_1^2 + 52x_1x_2 - 7x_2^2$ этой кривой. Матрица A квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $det(A - \lambda E) = 0$, или

$$\begin{vmatrix} 32-\lambda & 26 \\ 26 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda - 900 = 0,$$

откуда находим собственные значения $\lambda_1 = 45$, $\lambda_2 = -20$. Теперь мы можем записать канонический вид квадратичной формы кривой:

$$F = 45y_1^2 - 20y_2^2.$$

Так как линейные слагаемые в исходном уравнении отсутствуют, то и после поворота, приводящего квадратичную форму кривой к каноническому виду, линейные слагаемые будут отсутствовать. Свободный член при поворотах также не изменяется. Поэтому в новой системе координат кривая будет описываться уравнением

$$45y_1^2 - 20y_2^2 + 180 = 0,$$

или

$$\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{9} = -1.$$

Мы получили уравнение гиперболы, ее положение в канонической системе координат изображено на рисунке 4.

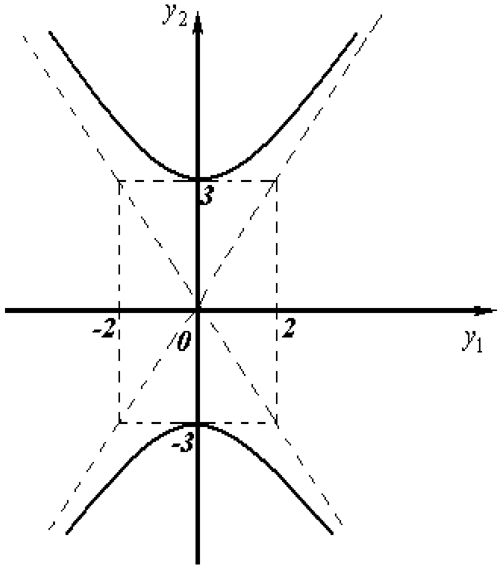

Рисунок 4

Задача 19 Приведем к каноническому виду уравнение поверхности

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 - 20 = 0,$$

определим ее тип и изобразим в канонической системе координат.

Как и в предыдущем примере, уравнение поверхности не содержит линейных слагаемых. Следовательно, чтобы привести уравнение к каноническому виду, достаточно привести к каноническому виду квадратичную форму поверхности. Само преобразование поворота по условию примера находить не требуется.

Квадратичная форма данной поверхности имеет вид

$$F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2.$$

Запишем ее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и составим характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((4-\lambda)^2 - 36\right) = 0.$$

Решая уравнение, находим его кони $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = -2$. Зная их, записываем канонический вид квадратичной формы поверхности, а вместе с ним и каноническое уравнение самой поверхности:

$$y_1^2 + 10y_2^2 - 2y_3^2 - 20 = 0,$$

или

$$\frac{y_1^2}{20} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{10} = 1.$$

Полученное уравнение описывает однополостный гиперболоид (рисунок 5).

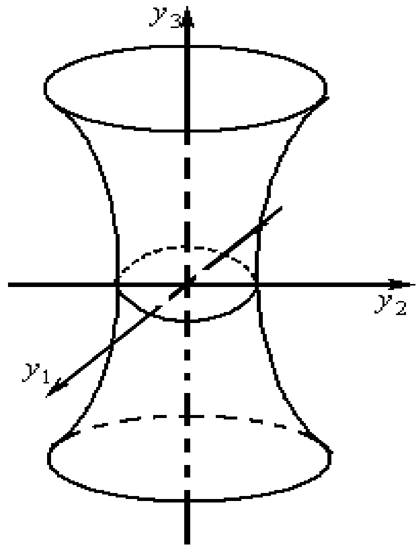

Рисунок 5

2.7 Задачи для самостоятельного решения

1 Выписать общий вид квадратичной формы, имеющей в некотором базисе матрицу

1) $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ. 1) $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 10x_1x_2$; 2) $4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$;

3) $8x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

4) $2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3\right)$.

2 Методом Лагранжа найти канонический вид для следующих квадратичных форм:

1) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$; 2) $x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$;

3) $25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2$; 4) $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$;

5) $-16x_1^2+24x_1x_2-9x_2^2$.

Ответ. 1) $4y_1^2+4y_2^2$; 2) $y_1^2-\frac{5}{4}y_2^2$; 3) $25y_1^2$;

4) $-y_1^2-y_2^2$; 5) $-16y_1^2$.

3 Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму к каноническому виду:

1) $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

2) $x_1^2-3x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

3) $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

4) $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-3x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$;

5) $-12x_1^2-3x_2^2-12x_3^2+8x_1x_2-24x_1x_3+12x_2x_3$.

Ответ. 1) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; 2) $y_1^2-4y_2^2-y_3^2$; 3) $y_1^2+4y_2^2-y_3^2$;

4) $4y_1^2+\frac{7}{16}y_2^2-\frac{25}{7}y_3^2$; 5) $-12y_1^2-\frac{5}{3}y_2^2+\frac{12}{5}y_3^2$.

4 Используя правило Якоби найти канонический вид и преобразование координат, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

1) $2x_1^2+18x_2^2+8x_3^2-12x_1x_2+8x_1x_3-27x_2x_3$;

2) $2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$;

3) $9x_1^2+4x_2^2+x_3^2-12x_1x_2-6x_1x_3+4_2x_3$;

4) $8x_1^2+8x_2^2+x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

5) $3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.

Ответ. 1) $2y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$, $x_1=y_1-5y_2+y_3$, $x_2=-y_2+y_3$, $x_3=y_2+y_3$;

2) $2y_1^2+10y_2^2+190y_3^2$, $x_1=y_1+y_2-9y_3$, $x_2=2y_2+2y_3$, $x_3=10y_3$;

3) y_1^2, $y_1=3x_1-2x_2-x_3$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$;

4) $8y_1^2+\frac{1}{2}y_3^2$, $y_1=x_1+x_2+\frac{1}{4}x_3$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$;

5) $3y_1^2-30y_2^2+530y_3^2$, $y_1=x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{2}x_3$, $y_2=\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{20}x_3$, $y_3=\frac{1}{20}x_3$.

5 Найти нормальный вид, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру следующих квадратичных форм:

1) $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

2) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

3) $2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$;

4) $-3x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+10x_2x_3$;

5) $x_1^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3$.

Ответ. 1) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $2, 1, 1$; 2) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$, $1, 3, -2$;

3) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $3, 0, 3$; 4) $-y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $1, 2, -1$;

5) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, $2, 1, 1$.

6 Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

1) $\lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$;

2) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

3) $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

4) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

5) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Ответ. 1) $\lambda > 1$; 2) $\lambda > 2$; 3) $\lambda > 8$;

4) $|\lambda| < \sqrt{5/3}$; 5) $-4/5 < \lambda < 0$.

Рекомендуемая литература

1 **Беклемишев, Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. /Д. В.Беклемишев - М.: Наука, 1971. - 320 с.

2 **Беклемишев, Д.В.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб. пособие / Д.В. Беклемишев., А. Ю. Петрович, И.А. Чубаров; под ред. Д.В. Беклемишева - М.: Наука, 1987. - 496 с.

3 **Бугров, Я.С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - М.: Наука, 1984. - 256 с.

4 **Виноградова, И. М.** Элементы высшей математики.(Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел): учеб. для вузов/ И. М. Виноградова. - М.: Высш. шк.,1999. - 511с

5 **Гусак, А. А.** Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач/ А. А. Гусак. - М.: Наука, 2000. - 288 с.

6 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах.Ч. 1 /П. Е. Данко, А. Г. Попов ,Г. Я. Кожевникова. – Харьков:[б. и.], 1973.

7 **Канатников, А. Н.** Линейная алгебра**:** учеб. для вузов. 3-е изд. / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. - 336 с.

8 **Ким, Г. Д.** Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи **/** Г. Д. Ким, А. В. Крицков. - М.: Зерцало-М, 2003.-358 с.

9 **Кострикин, А. И.** Введение в алгебру. Ч. II. Основы алгебры: учеб. для вузов/ А. И. Кострикин. – 2-е изд., исправл. - М.: Физико-математическая литература, 2001. -368 с.

10 **Письменный, Д.** Конспект лекций по высшей математике. Ч.1./ Д. Письменный. - 2-е изд., испр. - М.: Айрис-пресс, 2003. - 288 с.

11 **Шевцов, Г.С.** Линейная алгебра: учеб. пособие / Г. С. Шевцов. - 2-е изд., исп. и доп. - М.: Гардарики, 1999. - 269 с.

12 **Шипачев, В.С.** Высшая математика: учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 5-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2002. - 479 с.

13 **Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии**: учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов / Р.Ф. Апатенок, А. М. Маркина,Н. В. Попова, В. Б. Хейнман; под ред. В. Т. Воднева. - 2-е изд., перераб. и доп. - Минск: Высшая школа, 1986. - 272 с.