МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

О.Л. ТКАЧЕВА

РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА. РЯДЫ ФУРЬЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОМУ ПРАКТИКУМУ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2007

УДК 517.518.45(076.5)
ББК 22.161.5 я 7
Т 48

Рецензент
кандидат технических наук И.В. Крючкова

Ткачева О.Л.
Т48 Ряды Тейлора и Маклорена. Ряды Фурье [Текст]: методические указания к лабораторному практикуму/О.Л. Ткачева. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. – 26с.

Лабораторный практикум по математическому анализу состоит из теоретического материала, заданий к лабораторным работам с применением программы Mathcad, контрольных вопросов для самоподготовки.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ по темам, связанным с разложением функций в ряды Тейлора и Фурье для студентов всех форм обучения специальности 230104.65 и других технических специальностей.

ББК 22.161.5 я 7

Содержание

.... 3
Введение.......... 4
1 Функциональные ряды.......... 5
1.1 Основные понятия.......... 5
1.2 Равномерная сходимость функциональных рядов.......... 5
2 Степные ряды.......... 6
2.1 Основные понятия 6
2.2 Свойства степенного ряда.......... 7
3 Ряд Тейлора.......... 8
4 Разложение функции по формуле Тейлора в программе Mathcad 9
5 Ряды Фурье.......... 10
5.1 Основные понятия 10
5.2 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.......... 11
5.2.1 Разложение в ряд Фурье четных функций.......... 11
5.2.2 Разложение в ряд Фурье нечетных функций.......... 11
5.3 Разложение в ряд Фурье функции с произвольным периодом.......... 11
5.4 Разложение функции в ряд Фурье в программе Mathcad 12
Список использованных источников.......... 15
Приложение А.......... 16
Приложение Б.......... 21

Введение

Данная работа дает общий теоретический материал по темам: степенные ряды, ряды Тейлора и Маклорена, ряды Фурье. В работе рассматриваются практические примеры разложения функции в ряды Тейлора и Фурье с применение программ Mathcad. Применение программ Mathcad с большой степенью точности аппроксимировать функцию частичными суммами рядов Тейлора и Фурье, что позволяет быстро и с достаточной точностью решить многие практические вопросы.

1 Функциональные ряды

1.1 Основные понятия

Ряд, членами которого $U_n(x)$ являются функции от *x,* определенные на множестве *D,* называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

Придавая x определенное значение $x_0 \in D$, мы получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) = U_1(x_0) + U_2(x_0) + \ldots + U_n(x_0) + \ldots$$

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется точкой сходимости ряда (1).

Множество $D_0 \subset D$, состоящее из всех точек сходимости ряда (1), называется областью сходимости ряда (1).

Если существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in D_0$$

где $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x)$ - частичная сумма ряда, то говорят, что ряд (1) сходится на множестве D_0 к $S(x)$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(x,\varepsilon) : (n > N) \Rightarrow \left(|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in D_0 \right)$$

1.2 Равномерная сходимость функциональных рядов

Сходящийся в некотором промежутке X функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ называется равномерно сходящимся в этом промежутке к $S(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : (n > N) \Rightarrow \left(|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in X \right)$$

Признак Вейерштрасса. Если существует такой знакоположительный сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что $(\forall x \in X)$: $|U_n(x)| \le a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ (1) сходится равномерно в промежутке *X.*

В этом случае числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется мажорирующим рядом или мажорантой, а ряд (1) – мажорируемым сходящимся рядом.

Терема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится равномерно в промежутке X и все его члены $U_n(x)$ являются непрерывными на X функциями, то сумма *S(x)* данного функционального ряда также непрерывна на *X.*

2 Степные ряды

2.1 Основные понятия

Действительными степными рядами называются функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad (2)$$

где $x \in$ R - действительная переменная, коэффициенты ряда a_n - действительные числа, x_0 - постоянное действительное число, $u_n = a_n (x - x_0)^n$ - общий член ряда.

При $x_0 = 0$ получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (3)$$

Теорема Абеля. Если степенной ряд (3) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$

Радиусом сходимости степенного ряда (3) называется такое число *r,* что для всех x, для которых $|x| < r$, степной ряд сходится, а для всех x, для которых $|x| > r$, ряд расходится. Интервал $(r, -r)$ называется интервалом сходимости.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (3) составим ряд состоящий из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера и при этом допустим, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0 \quad \text{при } x \neq 0$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если

$$|x| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Тогда радиус сходимости ряда (3) определяется по формуле:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

На концах интервала сходимости (т.е. при $x = r$ и при $x = -r$) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Если же, найденный предел будет равен бесконечности, то это значит, что радиус сходимости $r = \infty$ и что при любом $x \in$ R ряд (3) сходится, т.е. сходится на всей числовой прямой. Если же $r = 0$,то ряд (3) будет сходиться только при $x = 0$.

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что радиус сходи ряда (3) определяется по формуле:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\right|$$

Если степенной ряд содержит не все степени x, т.е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости находится без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяя признак Даламбера (или радикальный признак Коши) для ряда, составленного из модулей данного ряда.

Для степенных рядов (2) все выше сказанное остается в силе, только что центр интервала сходимости будет лежать не в точке $x = 0$, а в точке $x = x_0$. Следовательно, интервалом сходимости будет интервал $(x_0 - r, x_0 + r)$.

2.2 Свойства степенного ряда

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (3), имеющий радиус сходимости r.

Сумма этого ряда $S(x)$ - есть функция, определенная внутри интервала сходимости, а также в том из концов интервала, где ряд сходится.

Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда.

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \quad x \in (-r, r) \tag{4}$$

Степенной ряд сходится равномерно и абсолютно на любом отрезке, целиком лежащим в интервале сходимости: $[a,b] \subset (-r,r)$

Степной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости

$$\int_0^x S(x) = \int_0^x a_0dx + \int_0^x a_1xdx + \int_0^x a_2x^2dx + \ldots + \int_0^x a_nx^ndx + \ldots =$$

$$= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^n + \ldots, \quad x \in (-r, r) \tag{5}$$

Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

$$s''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \ldots + (n-1)na_nx^{n-2} + \ldots$$

$$s'''(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4x + \ldots + (n-2)(n-1)na_nx^{n-3}\ldots, \quad x \in (-r, r) \tag{6}$$

Степенной ряд в интервале его сходимости можно дифференцировать бесконечное число раз.

3 Ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные любого порядка. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (7)$$

где $x \in$ R, x_0 - постоянное действительное число,

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Если, $S(x)$ - сумма ряда, $S_n(x)$- частичная сумма ряда и $R_n(x)$- остаточный член ряда, где

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad (8)$$

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x), \qquad (9)$$

тогда сходимость ряд Тейлора к функции $f(x)$ в интервале $(x_0 - r, x_0 + r)$ означает, что

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) \text{ и} \qquad (10)$$

$$\lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n(x)) = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (11).$$

Заметим, остаточный член ряда можно представить в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (12)$$

$$\xi = x_0 + \theta \cdot (x - x_0), \; 0 < \theta < 1$$

Теорема. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $(x_0 - r, x_0 + r)$ и ее производные в этом интервале ограниченны в совокупности, т.е.

$$| f^{(n)}(x) | \le M \;\; x \in (x_0 - r, x_0 + r) \;\;, \;\; n = 0,1,2,... \qquad (13)$$

Тогда в интервале $(x_0 - r, x_0 + r)$ функцию $f(x)$ можно представить своим рядом Тейлора в точке x_0, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \;\; x \in (x_0 - r, x_0 + r). \qquad (14)$$

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называется рядом Маклорена, т.е. ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \;\; x \in (-r, r) \qquad (15)$$

4 Разложение функции по формуле Тейлора в программе Mathcad

В **Mathcad** можно разложить функцию по формуле Тейлора в окрестности любой точки из области определения функции несколькими способами.

Рассмотрим *первый* из них. На панели (символьных операций) **Symbolic** щелкните по ключевому слову **series**, введите в помеченных позициях имя функции с аргументом в круглых скобках, точку, в окрестности которой производится разложение (для того чтобы ввести точку, введите имя аргумента, знак равенства <Ctrl>+<=>, действительное число $(x = x_0)$), порядок остаточного члена ряда (по умолчанию устанавливается порядок n=6) , лишнее уберите, а затем щелкните по свободному месту в рабочем документе.

Примеры

1. Разложить функцию cos(x) в окрестности точки x=0 в ряд Тейлора (Маклорена) с порядком остаточного члена n=10

$$\cos(x)\ \text{series}, x = 0, 10\ \rightarrow 1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6 + \frac{1}{40320}\cdot x^8$$

2. Разложить функцию cos(x) в окрестности точки $x = \frac{\pi}{2}$ в ряд Тейлора (Маклорена) с порядком остаточного члена ряда n=6

$$\cos(x)\ \text{series}, x = \frac{\pi}{2}\ \rightarrow -1\cdot\left(x - \frac{1}{2}\cdot\pi\right) + \frac{1}{6}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\cdot\pi\right)^3 - \frac{1}{120}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\cdot\pi\right)^5$$

Второй способ. Введите имя функции с выделенным аргументом**.** Установите в меню **Symbolics** по горизонтали команду (**Variable-Expand to Series** (переменная – разложить в ряд)), на панели (**Expand to Series)** установить порядок приближения (**Order of Approximation)**, а затем щелкните по свободному месту в рабочем документе.

Пример. Разложить функцию cos(x) в окрестности точки x=0 в ряд Тейлора (Маклорена) с порядком остаточного члена ряда n=6

$$1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 + O\left(x^6\right)$$

5 Ряды Фурье

5.1 Основные понятия

Тригонометрический ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad k\in \mathrm{n} \tag{16}$$

с коэффициентами Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\quad a_k=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\frac{1}{\pi}\right)f(x)\cos kx\right]dx\quad b_k=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\frac{1}{\pi}\right)f(x)\sin kx\right]dx \tag{17}$$

для некоторой функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$, называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Сумма ряда Фурье функции $f(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π. Поэтому, если ряд сходится на отрезке $[-\pi,\pi]$, то он сходится и при всех остальных значениях x и сумма его периодически повторяет те значения, которые она принимала в основном отрезке $[-\pi,\pi]$. Таким образом, сумма ряда Фурье будет представлять функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$ и периодически продолженную на всю числовую ось.

На вопрос о сходимости ряда Фурье и о том, что сумма ряда (если он сходится) равна функции $f(x)$, отвечает следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-гладкая на отрезке $[-\pi,\pi]$, то ее ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ во всех точках, в которых она непрерывна. В точках разрыва функции $f(x)$ ряд сходится к среднему арифметическому ее предельных значений слева и справа, т.е. к значению

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, \tag{18}$$

где x_0 точка разрыва первого рода. В обеих граничных точках отрезка сумма ряда равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \tag{19}$$

Заметим, в формулах (17), определяющих коэффициенты Фурье, интегралы могут быть взяты по любому промежутку длины 2π.

5.2 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

5.2.1 Разложение в ряд Фурье четных функций

Если функция $f(x)$ - четная, то коэффициенты ряда Фурье равны:

$$a_0 = \int_0^{\pi}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)f(x)\right]dx\,,\ a_k = \int_0^{\pi}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)f(x)\cos kx\right]dx\,,\ b_k = 0 \text{ при } k \in \mathrm{n} \quad (20)$$

Следовательно, четная функция имеет ряд Фурье, составленный из одних косинусов:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \qquad (21)$$

5.2.2 Разложение в ряд Фурье нечетных функций

Если функция $f(x)$ - нечетная, то коэффициенты ряда Фурье равны:

$$a_0 = 0\,, a_k = 0\,,\ b_k = \int_0^{\pi}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)f(x)\sin kx\right]dx \text{ при } k \in \mathrm{n} \qquad (22)$$

Следовательно, нечетная функция имеет ряд Фурье, составленный из одних синусов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \qquad (23)$$

5.3 Разложение в ряд Фурье функции с произвольным периодом

Для кусочно-гладкой функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-l, l]$ произвольной длины $2l$ с периодом $T = 2l$, ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) \qquad (24)$$

$$a_k = \int_{-l}^{l}\left[\left(\frac{1}{l}\right)f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\right]dx \quad k = 0,1,2,... \qquad (25)$$

$$b_k = \int_{-l}^{l}\left[\left(\frac{1}{l}\right) f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\right]dx \quad k = 1,2,3,... \qquad (26)$$

5.4 Разложение функции в ряд Фурье в програме Mathcad

Программа Mathcad, имеющая огромный спектр вычислительных возможностей и аналитических преобразований, позволяет для кусочно-гладкой функции *f(x)* на отрезке $[-\pi,\pi]$ найти и вычислить коэффициенты ряда Фурье, частичную сумму S(x,n), простроить графики функции *f(x)* и частичных сумм S(x,n) для $x \in [-\pi,\pi]$, $n \in$ n

Для этого водится имя функции *f(x)*, знак присваивания $(:=)$, щелкните в панели **Programming** по кнопке **Add Line** (Добавить линию) (в случае, если на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеется больше двух отрезков, на которых функция задана разными аналитическими выражениями, данную операцию необходимо повторить), введите выражение для вычисления функции на первом промежутке, щелкните в той же панели по кнопке **if** (если), введите в помеченной позиции неравенства, описывающие первый интервал, затем перейдите в помеченную позицию второй строки и действуйте аналогично.

Задание функции $f(x) = \begin{cases} x^2, -\pi \le x \le -1 \\ 2, -1 < x \le 1 \\ -x^2, 1 < x \le \pi \end{cases}$

в программе Mathcad. будет выглядеть:

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} \left(x^2 - 5\right) \ \text{if} \ -\pi \le x \le - \\ 2 \ \text{if} \ -1 < x \le 1 \\ -x^2 \ \text{if} \ 1 < x < \pi \end{array} \right.$$

После этого следует задать наибольшие значение n, коэффициенты ряда Фурье a_k, b_k и частичную сумму S(x,n)

$$a_k := \int_{-\pi} \left[\left(\frac{1}{\pi}\right)\cdot f(x)\cdot \cos(k\cdot x)\right] dx \qquad b_k := \int_{-\pi} \left[\left(\frac{1}{\pi}\right)\cdot f(x)\cdot \sin(k\cdot x)\right] dx$$

$$S(x,n) := \left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x)\right.$$

На рисунках 1, 2, 3, 4 изображены графики функции *f(x)* и графики частичных сумм ряда Фурье для данной функции: S(x,1), S(x,2), S(x,3), S(x,50). Из этих графиков видно, что чем выше порядок n, тем лучше приближение частичной суммы ряда к её функции.

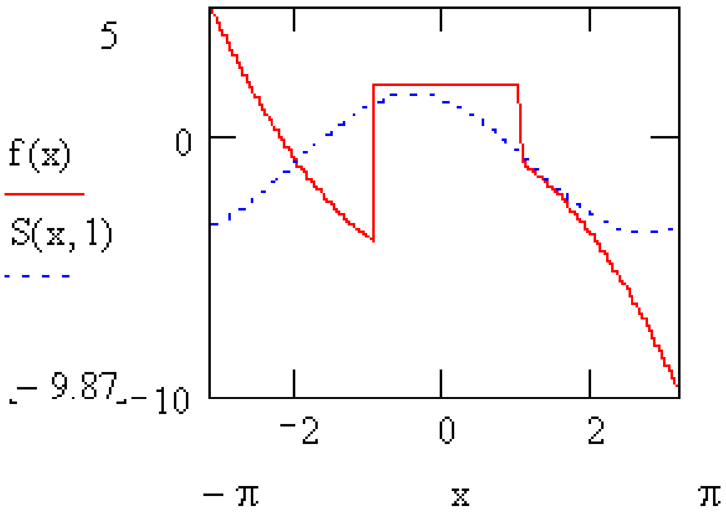

Рисунок 1

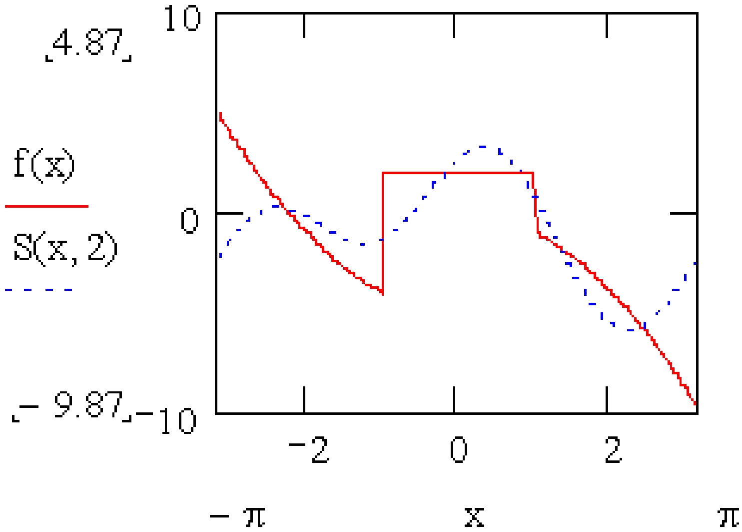

Рисунок 2

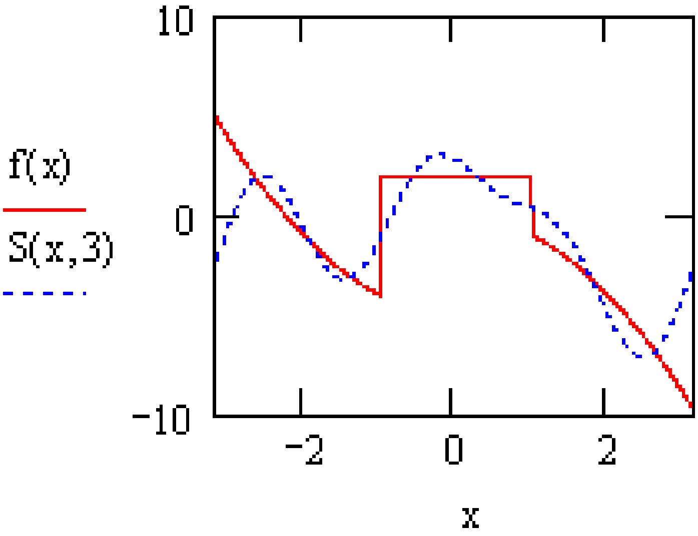

Рисунок 3

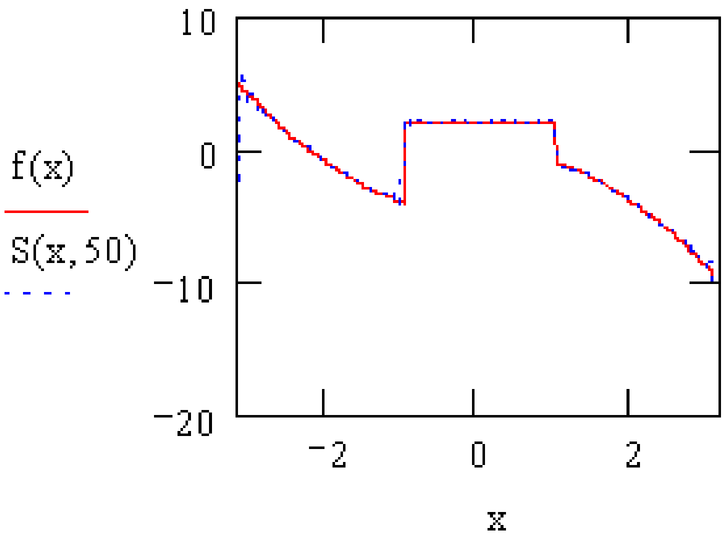

Рисунок 4

Значение суммы ряда в точке разрыва x = -1

$$\frac{\left[\lim_{x\to -1^-}\left(x^2-5\right)\right]+\left(\lim_{x\to -1^+} 2\right)}{2} \to -1$$

Значение суммы ряда в точке разрыва x = 1

$$\frac{\left(\lim_{x \to 1^-} 2\right) + \left[\lim_{x \to 1^+} \left(-x^2\right)\right]}{2} \to \frac{1}{2}$$

Значение суммы ряда в граничных точках отрезка $[-\pi, \pi]$

$$\frac{\left[\lim_{x \to \pi^-} \left(-x^2\right)\right] + \left[\lim_{x \to -\pi^+} \left(x^2 - 5\right)\right]}{2} \to \frac{-5}{2}$$

Список использованных источников

1 **Власова, Е.А.** Ряды: учеб. для вузов / Е.Г. Власова. – М.: МГТУ ИМ. Баумана Н.Э., 2000. – 612 с. – ISBN 5-7038-1392-1.

2 **Долгих, В.Я.** Математический анализ в примерах и задачах. В 3-х ч. Ч.2.: учеб. пособие / В.Я. Долгих, Г.Б. Корабельникова, Э.Б. Шварц. – Новосибирск: НГТУ, 2002. – 199 с. – ISBN 5-7782-0390-Х.

3 **Дьяков, В.** - Mathcad 2000: учебный курс/ В. Дьяков. – Санкт- Петербург: Питер, 2001. – 586 с. – ISBN 5-272-00196-6.

4 **Киреев, В.И.** Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие / В.И.Киреев, А.В. Пантелеев – М.: ВШ, 2000. – 480 с. – ISBN 5-06-004763-6.

5 **Никольский, С.М.** Математический анализ. Т.2./ С.М. Никольский – М.: Наука, 1983. - 448с.

6 **Плис, А.И.** Mathcad. Математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. - 2-изд. – М.: Финансы и статистика, 2003. - 655 с. – ISBN 5-279-02550-Х.

7 **Писемский, Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. Ч.2: учеб. пособие / Д.Т. Писемский. - 4-е изд.– М.: Айрис-пресс, 2006.-256 с. – ISBN 5-8112-1689-0.

8 **Фихтенгольц, Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Т.2.: учебник / Г.М. Фихтенгольц– М.: Наука, 1970. – 800с.

9 **Шипачев, В.С.** Высшая математика: учеб. для вузов. / В.С. Шипачев. – 5-е изд. – М.: В.Ш., 2001. – 479 с. – ISBN 5-06-003959-5

Приложение А
(обязательное)

Лабораторная работа по теме: «Ряды Тейлора»

Цель работы: Разложение функции в ряд Тейлора с применением программ Mathcad

Задания

1 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестностях точек $x_0 = x_1$ и $x_0 = x_2$ в программе Mathcad.

2 Построить графики функции и частичных сумм ее рядов Тейлора.

Пример 1

Выполнить задания 1, 2 для функции $f(x) = (x-3)\sin x$ при $x_1 = 0$.

Примечание. На панели (символьных операций) **Symbolic** щелкните по ключевому слову **series**, введите в помеченных позициях имя функции с аргументом в круглых скобках, точку, в окрестности которой производится разложение (для того чтобы ввести точку, введите имя аргумента, знак равенства <Ctrl>+<=>, действительное число $(x = x_0)$), порядок остаточного члена ряда, лишнее уберите, а затем щелкните по свободному месту в рабочем документе.

Далее запишите частичные суммы, полученного ряда, и построить графики этих сумм и функции в окрестности x_1.

Пояснительных текстов в программе Mathcad не набирать.

$f(x) := (x-3)\cdot\sin(x$

$(x-3)\cdot\sin(x)\ \text{series}, x = 0, 5 \ \rightarrow\ -3\cdot x + 1\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{1}{6}\cdot x$

$S1(x) := -3\cdot x \quad S2(x) := -3\cdot x + 1\cdot x^{-} \quad S3(x) := -3\cdot x + 1\cdot x^{-} + \frac{}{2}\cdot x^{\sim}$

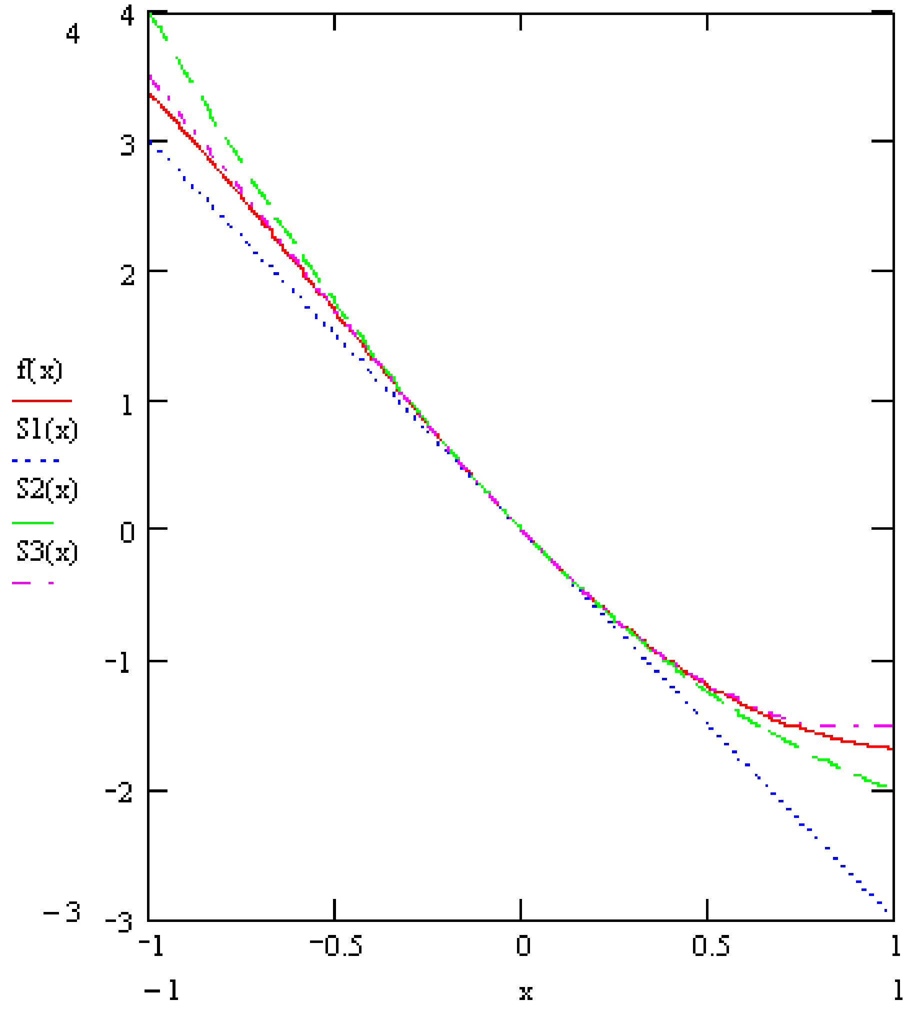

Рисунок А.1

Пример 2

Выполнить задания 1, 2 для функции $f(x) = (x - 3)\sin x$ при $x_2 = 1$.

$(x - 3)\cdot\sin(x)$ series, $x = 1, 3 \rightarrow -2\cdot\sin(1) + (-2\cdot\cos(1) + \sin(1))\cdot(x - 1) + (\cos(1) + \sin(1))\cdot(x - 1)$

$S1(x) := -2\cdot\sin(1$

$S2(x) := -2\cdot\sin(1) + (-2\cdot\cos(1) + \sin(1))\cdot(x - 1$

$S3(x) := -2\cdot\sin(1) + (-2\cdot\cos(1) + \sin(1))\cdot(x - 1) + (\cos(1) + \sin(1))\cdot(x - 1)$

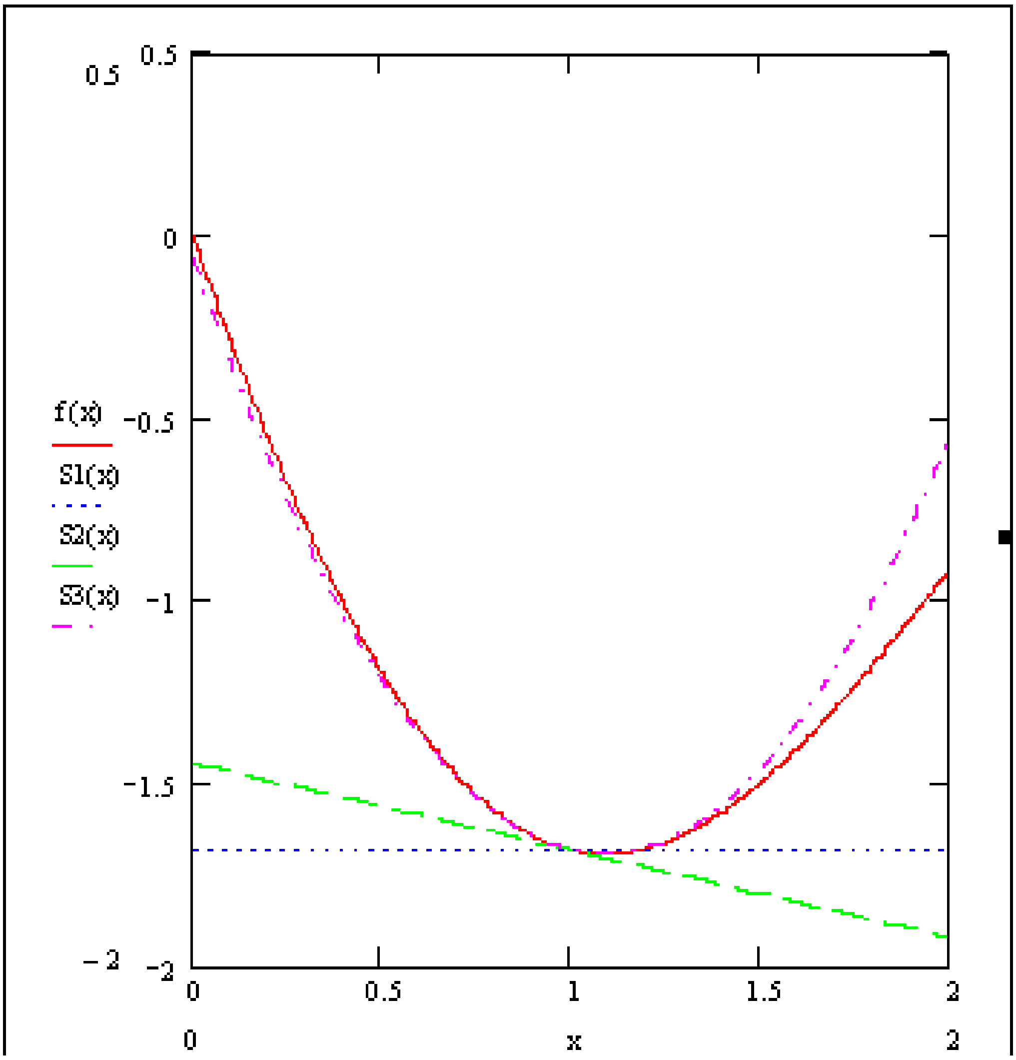

Рисунок А.2

Список контрольных вопросов

1 Дать понятие числового ряда.

2 Какой ряд называется функциональным рядом?

3 Что понимают под частичной суммой ряда, суммой ряда, остатком ряда?

4 Что означает «функциональный ряд сходится в точке x_0?

5 Какие ряды называются степенными?

6 Какой функциональный ряд называется равномерно сходящимся?

7 Какова формулировка признака Вейерштрасса о равномерной сходимости функциональных рядов?

8 Что называется интервалом сходимости и что называется радиусом сходимости степенного ряда?

9 Как найти радиус сходимости степенного ряда?

10 Какие существуют свойства степенного ряда?

Индивидуальные задания к лабораторной работе по теме: «Ряды Тейлора»

(обязательное)

Таблица А.1

Вариант	Исходные данные	Вариант	Исходные данные
1	$\frac{2}{x^2-5\cdot x+(}$, $x_1 :=$, $x_2 :=$	12	$(x-3)\cdot\sqrt[3]{8+x}$ $x_1 := 1$ $x_2 := 2$
2	$\frac{x^3}{\sqrt{6-3\cdot}}$, $x_1 :=$, $x_2 :=$	13	$\frac{}{x^2+3\cdot x+2}$ $x_1 := 0$ $x_2 := 1$
3	$3\cdot\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - x$, $x_1 :=$, $x_2 :=$	14	$\frac{(\ln(9-x))}{x}$ $x_1 := -1$ $x_2 := 1$
4	$\ln(20-x-x)$ $x_1 := 0$ $x_2 := 3$	15	$\frac{}{x} - \cos(2\cdot x)$ $x_1 := 1$ $x_2 := 2$
5	[illegible]	16	$(3+e^{x})$ $x_1 := -1$ $x_2 := 2$
6	$\frac{}{x^2+7\cdot x+6}$ $x_1 := 0$ $x_2 := 2$	17	$x\cdot\sqrt[3]{x^2+9}$ $x_1 := 0$ $x_2 := 2$
7	$\frac{x}{\sqrt[3]{27-x}}$ $x_1 := 0$ $x_2 := 3$	18	$\frac{(\ln(7+x))}{x}$ series, x = 1, 4 $\rightarrow$ ln(
8	$\frac{}{x}$ $x_1 := 1$ $x_2 := 2$	19	$\frac{}{(x^2+3\cdot x+2)^2}$ $x_1 := 2$ $x_2 := 4$
9	$\ln(x+8\cdot x+12)$ $x_1 := 2$ $x_2 := 3$	20	$\left(3+e^{-x^2}\right)^2$ $x_1 := 0$ $x_2 := 1$
10	$(2+e^{-x})$ $x_1 := 0$ $x_2 := 1$	21	$x\cdot\left(\sqrt{x^2+3}\right)$ $x_1 := 1$ $x_2 := 2$
11	$\sqrt[4]{x^2+16}$ $x_1 := 0$ $x_2 := 2$	22	$x\left(\sin\left(\frac{}{3}\right)-1\right)$ $x_1 := \frac{}{2}$ $x_2 := \pi$

Продолжение таблицы А.1

1	2	3	4
23	$\frac{4}{6-5\cdot x-x^2}$ series, $x=3,4 \rightarrow \frac{2}{9}$	25	$x\cdot\ln(x - 8\cdot x+12)$ $x_1:=-5$ $x_2:=7$
24	$(x-1)\cdot\ln(16-x)$ $x_1:=0$ $x_2:=2$	26	$\frac{}{x^2+8\cdot x+12}$ $x_1:=-3$ $x_2:=0$

Приложение Б
(обязательное)

Лабораторная работа по теме: «Разложение функции в ряд Фурье».

Цель работы: Разложение функции в ряд Фурье в программе Mathcad.

Задания

1. Найти значения коэффициентов ряда Фурье для различных $\boldsymbol{n}$.

2. Выразить заданную функцию через частичные суммы ряда Фурье при $\boldsymbol{n=50}$ и построить их графики при $\boldsymbol{n=1,2,3,50}$.

3. Найти значения частичных сумм при $x = x_0$ и различных $\boldsymbol{n}$ и построить график частичной суммы $S(x_0, n)$ как функции переменной $\boldsymbol{n}$.

4. Найти значение суммы ряда в точках разрыва и в граничных точках отрезка $[-\pi, \pi]$.

Пример.

Выполнить задания 1, 2, 3, 4 для функции $f(x) = \begin{cases} x - 3, -\pi \le x \le 0 \\ 2, 0 < x \le \pi \end{cases}$

$x_0 = \pi / 2$

Для этого водится имя функции *f(x)*, знак присваивания $(:=)$, щелкните в панели **Programming** по кнопке **Add Line** (Добавить линию) (в случае, если на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеется больше двух гладких отрезков данную операцию необходимо повторить), введите выражение для вычисления функции на первом промежутке, щелкните в той же панели по кнопке **if** (если), введите в помеченной позиции неравенства, описывающие первый интервал, затем перейдите в помеченную позицию второй строки и действуйте аналогично.

Примечания. Порядок и расположение выражений, функций и операций производить в той последовательности, как это сделано в примере.

Пояснительных текстов в программе Mathcad не набирать.

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} 3 \ \text{ if } -\pi \le x \le -1 \\ e^{-x} \ \text{ if } -1 < x \le \pi \end{array} \right.$$

$$a_k := \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\right] dx \qquad b_k := \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\right] dx$$

$a_1 = -0.199$ $\quad a_2 = -0.194$ $\quad b_2 = 0.369$ $\quad b_3 = -0.268$

$$S(x, n) := \left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x)\right)$$

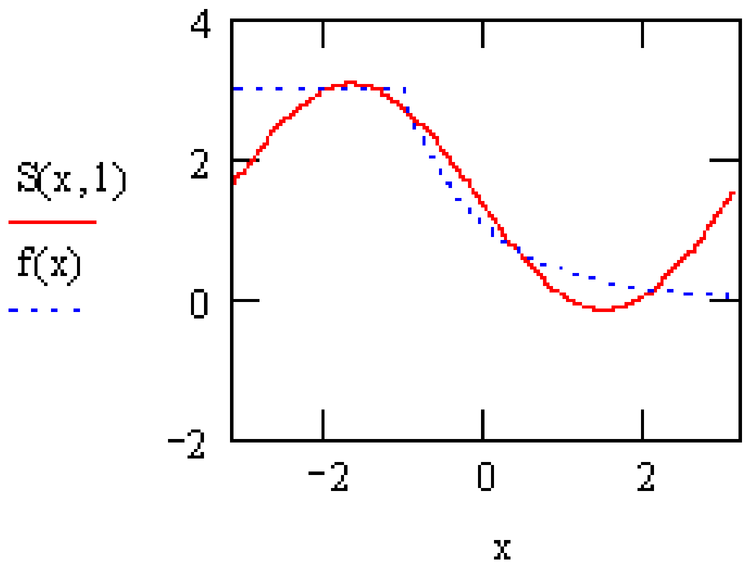

Рисунок Б.1

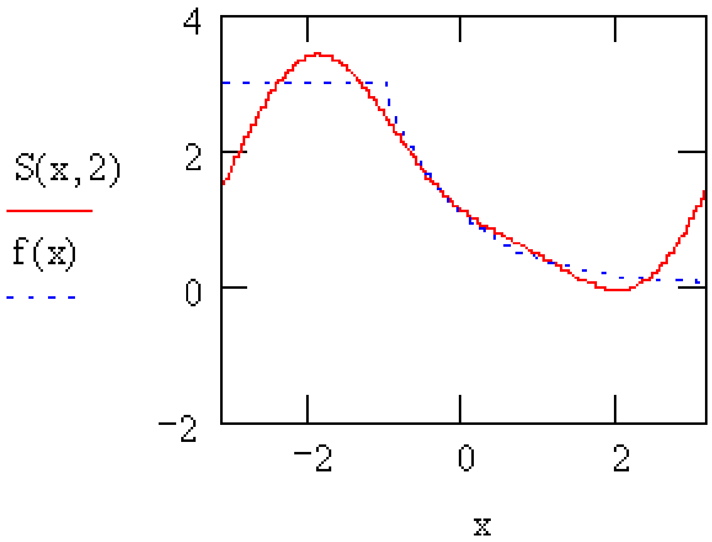

Рисунок Б.2

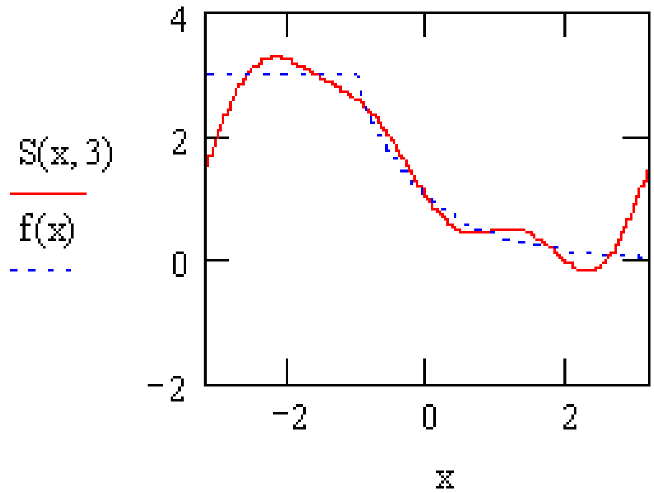

Рисунок Б.3

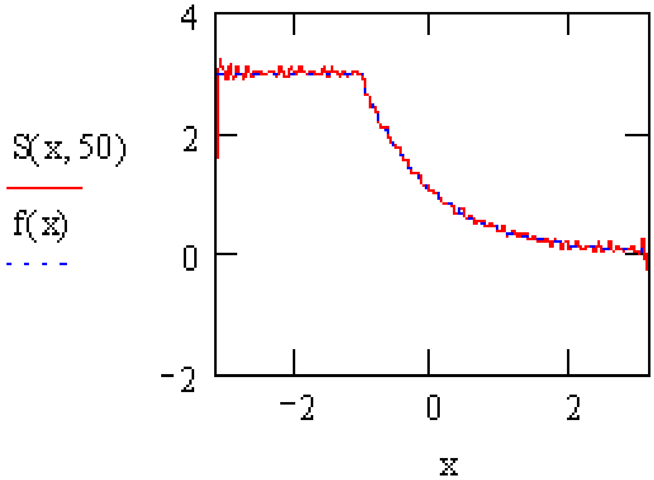

Рисунок Б.4

$n := 0..50$

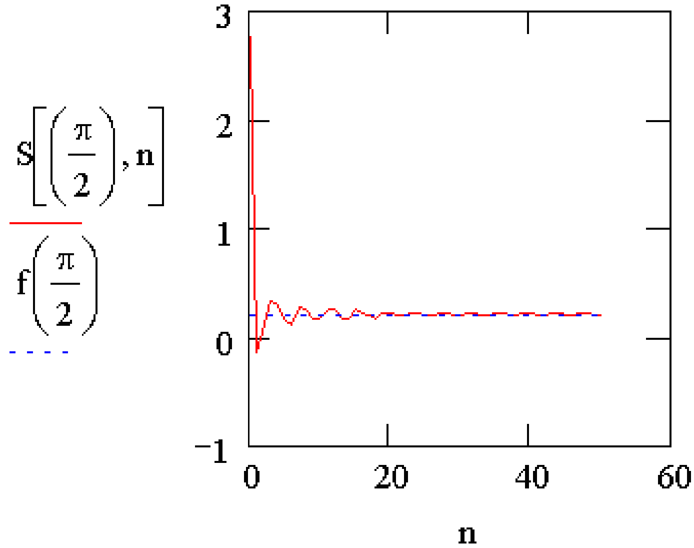

Рисунок Б.5

$S\left[\left(\frac{\pi}{2}\right),1\right] = -0.146$ $\qquad$ $S\left[\left(\frac{\pi}{2}\right),4\right] = 0.309$

$S\left[\left(\frac{\pi}{2}\right),50\right] = 0.197$ $\qquad$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.208$

Значение суммы ряда в точке разрыва $x = -1$

$$\frac{\left[\left(\lim_{x \to -1^-} 3\right) + \left(\lim_{x \to -1^+} e^{-x}\right)\right]}{2} \to \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \exp(1)$$

Значение суммы ряда в граничных точках отрезка $[-\pi, \pi]$

$$\frac{\left[\left(\lim_{x \to -\pi^+} 3\right) + \left(\lim_{x \to \pi^-} e^{-x}\right)\right]}{2} \to \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \exp(-\pi)$$

Список контрольных вопросов

1. Какой ряд называется рядом Фурье?
2. Какие функции можно разложить функции в ряд Фурье?
3. Каковы формулы коэффициентов, частичной суммы ряда Фурье для функции с периодом 2π ?
4. Каковы формулы коэффициентов ряда Фурье для четной и нечетной функций?
5. Каковы формулы для коэффициентов ряда Фурье функции с произвольным периодом?
6. Какие функции можно разложить в ряды Фурье по синусам, а какие по косинусам?
7. Как разложить в ряд Фурье функцию, заданную на половине периода?

Индивидуальные задания к лабораторной работе по теме: «Разложение функции в ряд Фурье»

(обязательное)

Таблица Б.1

Вариант	Исходные данные	Вариант	Исходные данные
1	$f(x) := \begin{cases} 10 & \text{if } -\pi \le x \le -1 \\ e^x & \text{if } -1 < x < \pi \end{cases}$	6	$f(x) := \begin{cases} -0.5 & \text{if } -\pi \le x \le -1 \\ \cos(3\cdot x - 1) & \text{if } -1 < x < \pi \end{cases}$
2	$f(x) := \begin{cases} 3 & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ \sqrt{x} & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$	7	$f(x) := \begin{cases} 3 + x & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ 3 - x^2 & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$
3	$f(x) := \begin{cases} -0.5 & \text{if } -\pi \le x \le -1 \\ \left(2 - x^2\right) & \text{if } -1 < x < \pi \end{cases}$	8	$f(x) := \begin{cases} -3 & \text{if } -\pi \le x \le -2 \\ \tan\left(\frac{x}{3}\right) & \text{if } -2 < x \le \pi \end{cases}$
4	$f(x) := \begin{cases} -2 & \text{if } -\pi \le x \le 1 \\ x^3 & \text{if } 1 < x < \pi \end{cases}$	9	$f(x) := \begin{cases} x & \text{if } -\pi \le x \le -1 \\ \left(-x^2 + 3\right) & \text{if } -1 < x < \pi \end{cases}$
5	$f(x) := \begin{cases} 4 & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ \left(x^2 - 3\right) & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$	10	$f(x) := \begin{cases} -3 & \text{if } -\pi \le x \le -2 \\ 2\cdot\sin(3x) & \text{if } -2 < x < \pi \end{cases}$

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4
11	$f(x) := \begin{cases} -4 & \text{if } -\pi \le x \le -2 \\ \left(-x^2+3\right) & \text{if } -2 < x < \pi \end{cases}$	19	$f(x) := \begin{cases} 5 & \text{if } -\pi \le x \le -1 \\ x^2 & \text{if } -1 < x < \pi \end{cases}$
12	$f(x) := \begin{cases} 5 & \text{if } -\pi \le x \le -1 \\ x & \text{if } -1 < x < \pi \end{cases}$	20	$f(x) := \begin{cases} \tan\left(\frac{x}{3}\right) & \text{if } -\pi \le x \le 1 \\ 2-x & \text{if } 1 < x < \pi \end{cases}$
13	$f(x) := \begin{cases} -5 & \text{if } -\pi \le x \le 1.5 \\ 3-x^3 & \text{if } 1.5 < x < \pi \end{cases}$	21	$f(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{if } -\pi \le x \le -2 \\ x^2 & \text{if } -2 < x < \pi \end{cases}$
14	$f(x) := \begin{cases} \left(-x^2+1\right) & \text{if } -\pi \le x \le -1 \\ (-3) & \text{if } -1 < x < \pi \end{cases}$	22	$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{if } -\pi \le x \le 0.5 \\ \ln(x+1) & \text{if } 0.5 < x < \pi \end{cases}$
15	$f(x) := \begin{cases} 2+\frac{x}{2} & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ 2-x^2 & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$	23	$f(x) := \begin{cases} x & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ \left(-x^2+3\right) & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$
16	$f(x) := \begin{cases} \left(x^2+1\right) & \text{if } -\pi \le x \le 0.5 \\ \ln(x) & \text{if } 0.5 < x < \pi \end{cases}$	24	$f(x) := \begin{cases} \left(-x^2+1\right) & \text{if } -\pi \le x \le -1 \\ (-3) & \text{if } -1 < x < \pi \end{cases}$
17	$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{if } -\pi \le x \le -2 \\ \left(x^3+1\right) & \text{if } -2 < x \le \\ -3 & \text{if } 1 < x < \pi \end{cases}$	25	$f(x) := \begin{cases} \ln(\lvert x\rvert) & \text{if } -\pi \le x \le -2 \\ x^2 & \text{if } -2 < x \le \pi \end{cases}$
18	$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } -\pi \le x \le -1 \\ \sin(x-1) & \text{if } -1 < x < \pi \end{cases}$	26	$f(x) := \begin{cases} 1+x & \text{if } -\pi \le x \le -0.5 \\ \cos(2\cdot x) & \text{if } -0.5 < x < \pi \end{cases}$