

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин

Г.В. КУЧА
И.И. МОСАЛЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к курсовой работе
по дисциплине «Теоретическая механика»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2007

УДК 531.2 (07)

ББК 22.27

К 95

Рецензент

кандидат технических наук, профессор Р.В. Ромашов

К95 Куча Г.В.
Исследование равновесия и движения механической системы:
методические указания к курсовой работе по дисциплине
«Теоретическая механика» / Г.В. Куча, И.И. Мосалева – Оренбург:
ГОУ ОГУ, 2007 - 34с.

Методические указания включают варианты контрольного задания, пример выполнения задания и вопросы для самопроверки.

Методические указания предназначены для выполнения расчетно – графической работе по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов специальностей 190601.65 (ААХ), 190601.65 (ААХу), 190603.65 (СТТМ), 151001.65 (ТМ), 150002.65 (МСК), 150205.65 (ТПИ), 220301.65 (АТП)

ББК 22.27

© Куча Г.В., 2007

Мосалева И.И.

© ГОУ ОГУ, 2007

Содержание

Введение	4
1 Вопросы для самоконтроля	5
2. Контрольное задание Д20	6
2.1 Содержание задания	6
2.2 Пример выполнения задания	15
Список использованных источников	39

Введение

В методических указаниях исследуются различные состояния механической системы (ее равновесие и движение) при помощи принципов аналитической механики и общих теорем динамики системы.

1 Вопросы для самоконтроля

1. Какая классификация сил, действующих на систему, применяется в динамике системы?
2. Что называется осевым моментом инерции точки и системы?
3. Что называется радиусом инерции тела относительно оси?
4. В чем состоит теорема о зависимости между моментами инерции тела относительно двух параллельных осей?
5. Что называется количеством движения материальной точки и системы?
6. Чему равно количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс?
7. В чем состоит теорема об изменении количества движения системы?
8. Какое перемещение материальной точки называется действительным, возможным?
9. При каких связях действительное перемещение принадлежит к числу возможных?
10. Зависят ли возможные перемещения от действующих на механическую систему сил?
11. Что называется возможной работой?
12. Какие связи называются идеальными? Приведите примеры.
13. Условие какого состояния системы определяет принцип возможных перемещений?
14. Сформируйте принцип возможных перемещений.
15. Что называется: обобщенной координатой, обобщенной скоростью, обобщенной силой?
16. Чему равно число степеней свободы механической системы?
17. Как определяется обобщенная сила? Какова ее размерность?
18. Как записываются дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа II рода)? Чему равно число этих уравнений для данной механической системы?
19. Запишите аналитические условия равновесия произвольной системы сил, действующих на твердое тело в обобщенных координатах.
20. Чему равен момент равнодействующей системы сил, приложенных к твердому телу, относительно точки и оси?
21. Сколько существует форм условий равновесия плоской системы сил? Сформулируйте каждое из них.
22. Сколько независимых уравнений можно составить для плоской системы сочлененных тел?
23. В чем заключается метод расчленения?

2. Контрольное задание Д20

2.1 Содержание задания

Для изображенной на рисунках 1 – 4 в вертикальной плоскости механической системы найти модуль алгебраического момента M пары сил (или силы P) при равновесии системы, реакции в точках A и B , а также натяжения нитей, как при равновесии, так и при движении, которое необходимо исследовать, увеличив вдвое модуль найденного при равновесии момента M (или силы P).

Содержание исследования:

- а) определить закон движения системы;*
- б) найти зависимость скорости точки C от пройденного ею пути;*
- в) вычислить количество движения системы в произвольный момент времени;*
- г) найти скорость и ускорение точки L в момент времени $t_1=1\text{с}$, если точка в этот момент занимает указанное на рисунке положение;*
- д) вычислить динамические добавки* компонентов реакции заделки A .*

Данные для исследования берутся из таблицы и рисунков, причем номер рисунка равен номеру Вашей фамилии в групповом журнале, а строка из таблицы выбирается по начальной букве Вашего имени.

Весом балки AB и тела 4, если оно имеется, пренебречь, все тела считать однородными. Для ступенчатого тела 2 задается радиус инерции ρ относительно горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через его центр масс. Номер индекса какой – либо величины соответствует номеру тела на рисунке.

Коэффициент трения скольжения f задается для груза, а коэффициент трения качения δ - для катка.

Нити идеальные и движутся без проскальзывания так же, как и каток. Прочерк у какой-либо величины в таблице означает отсутствие этой величины в Вашем варианте, знак (+) у M (или силы P) означает, что эта величина подлежит определению при равновесии.

Если какая-либо величина указана на рисунке и в таблице, то принимать нужно то значение, которое указано на рисунке.

* Примечание: под динамической добавкой какого-либо компонента реакции понимается разница между его значениями при движении и равновесии.

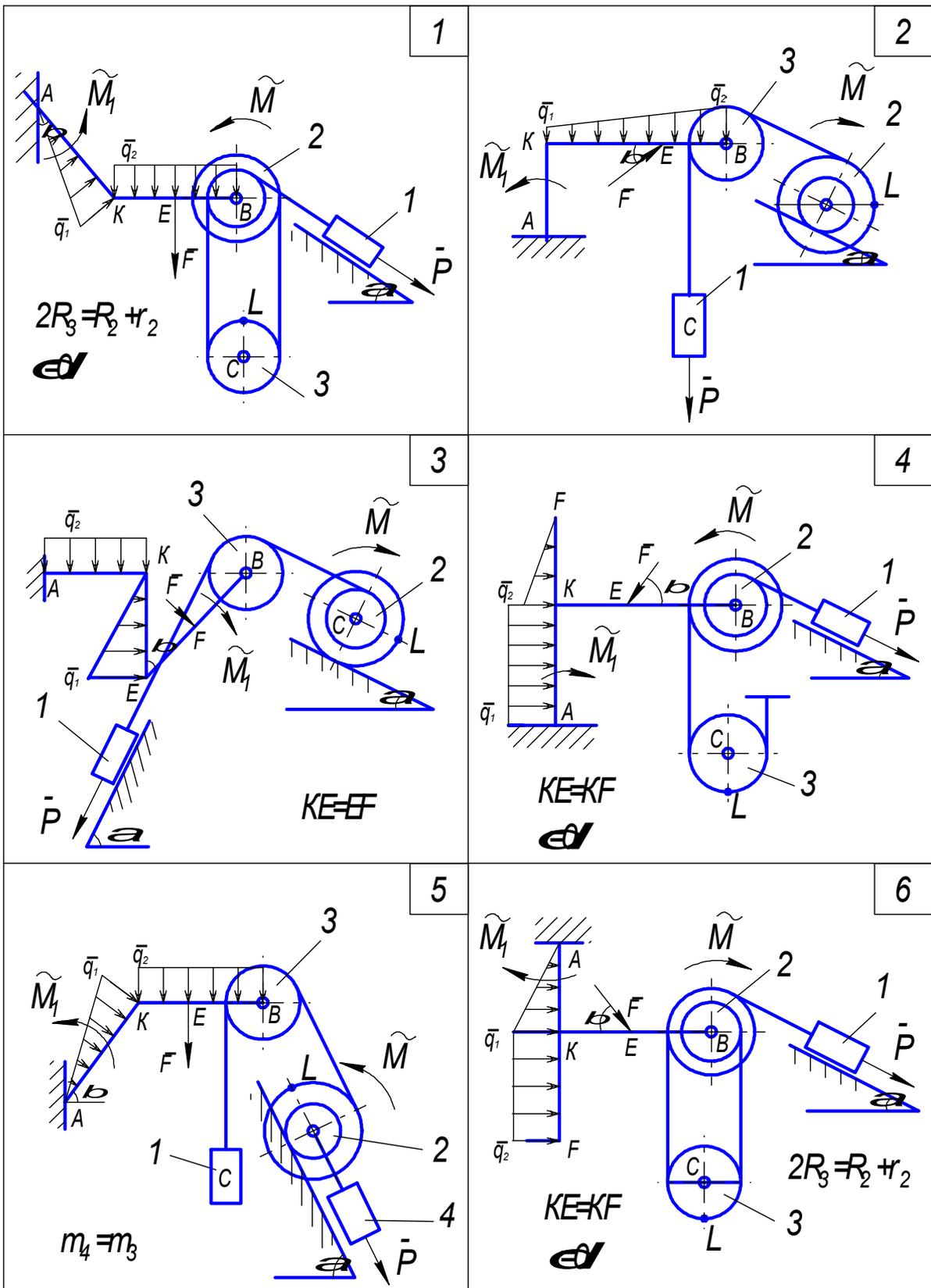


Рисунок 1 – Схемы механизмов

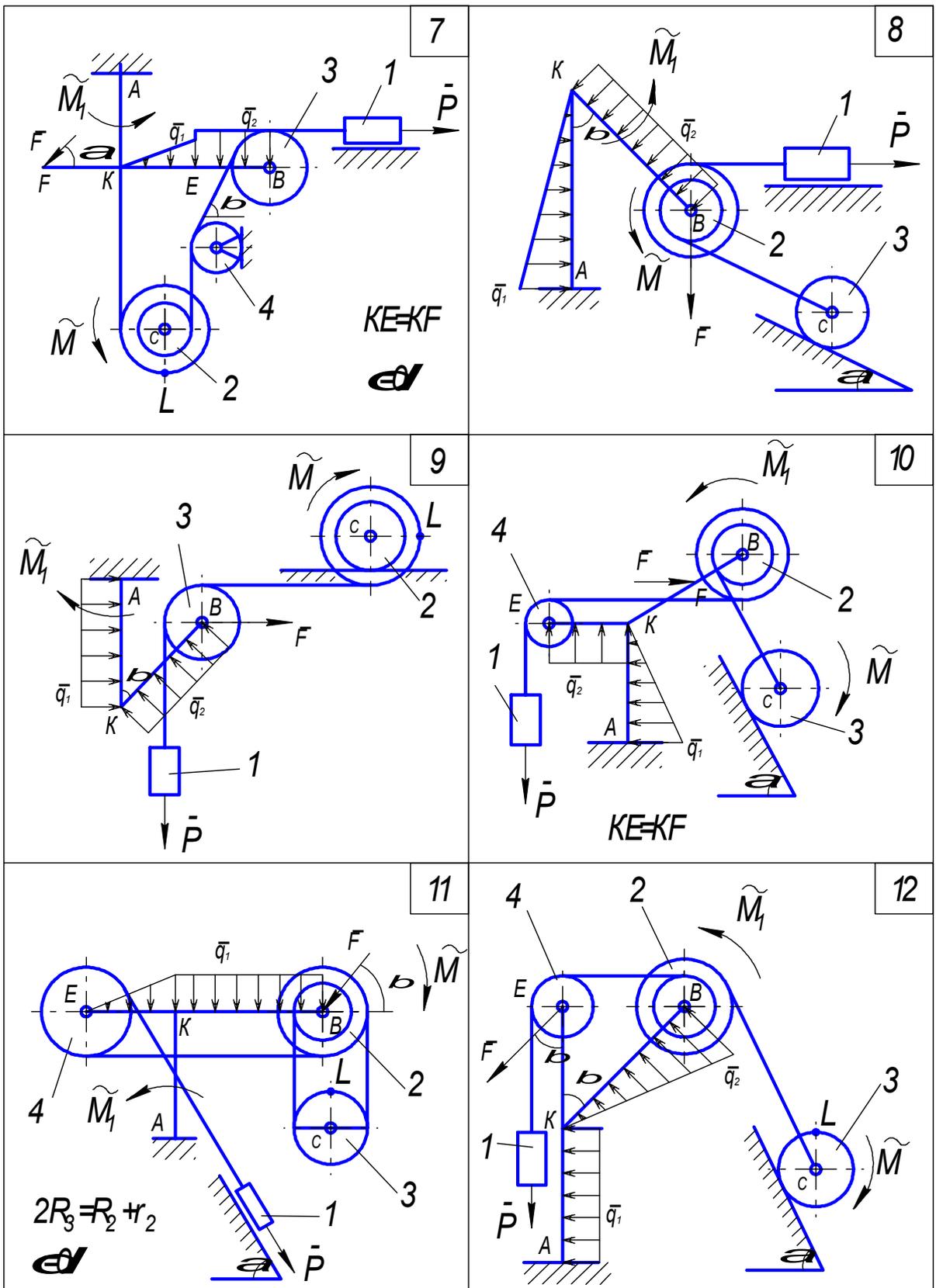


Рисунок 2 – Схемы механизмов

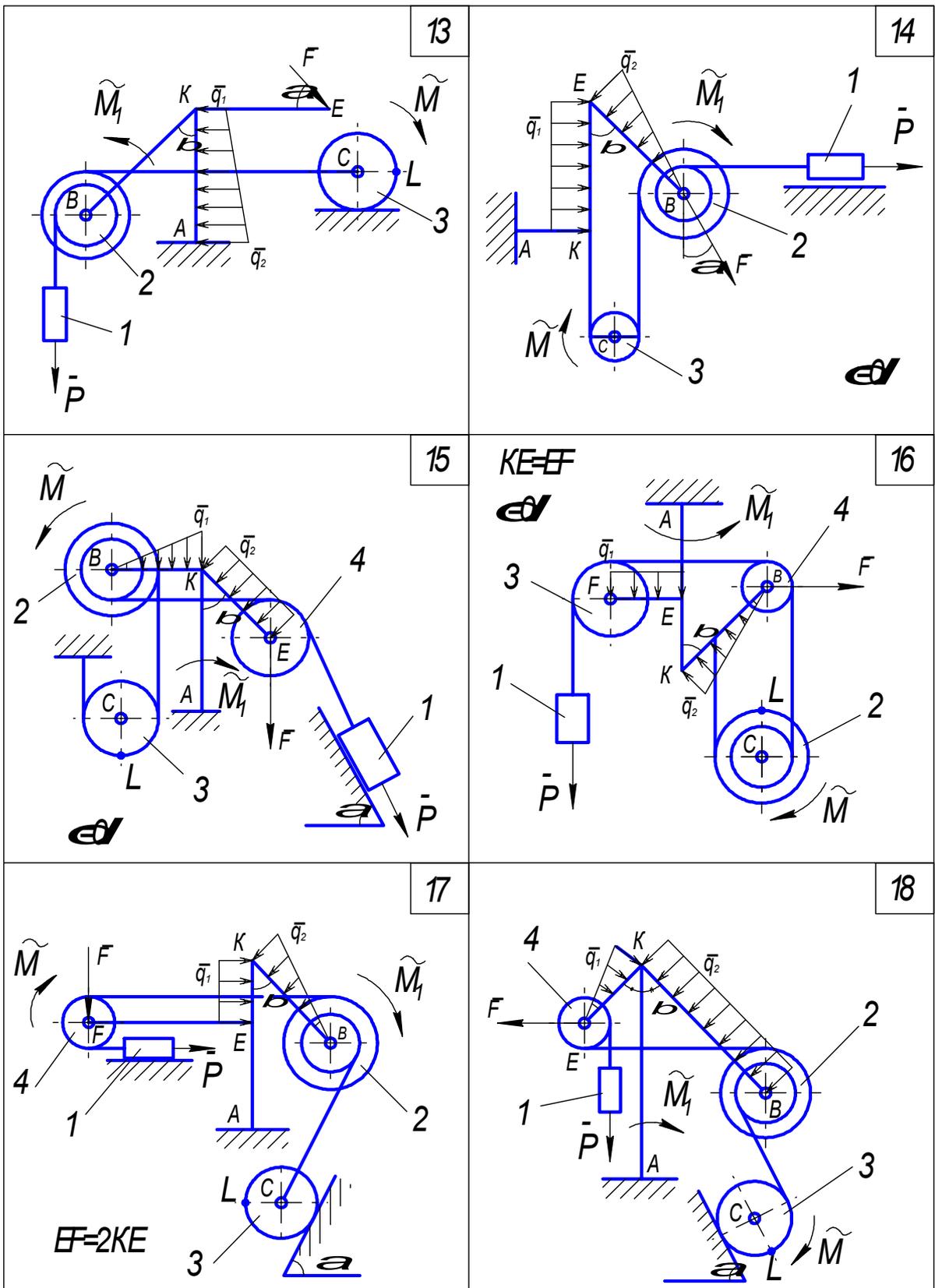


Рисунок 3 – Схемы механизмов

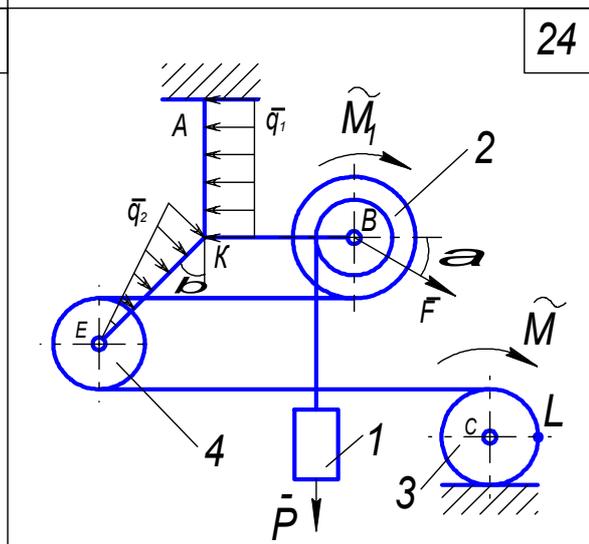
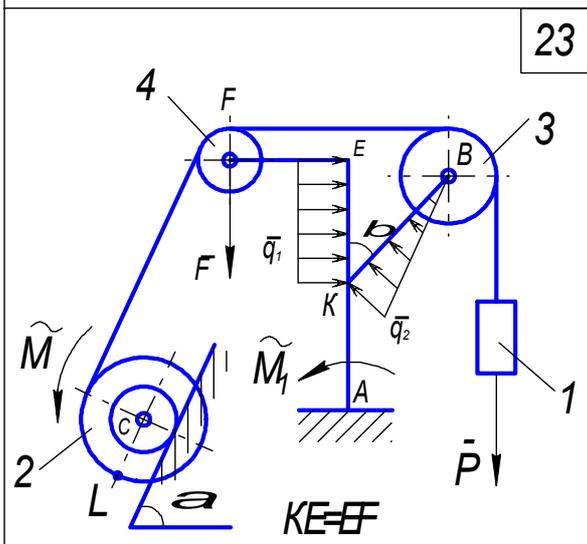
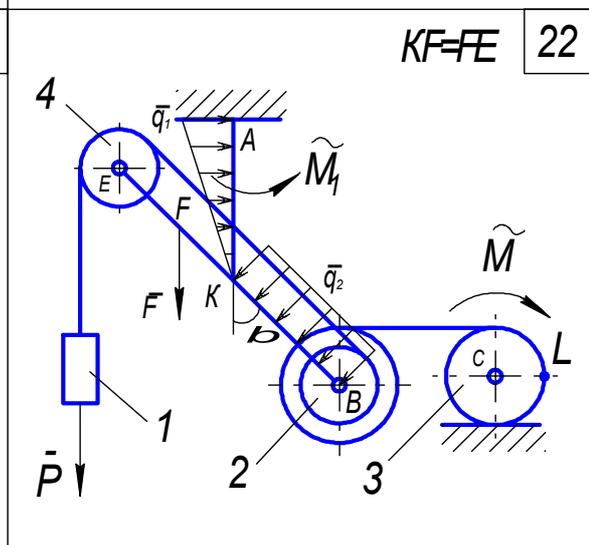
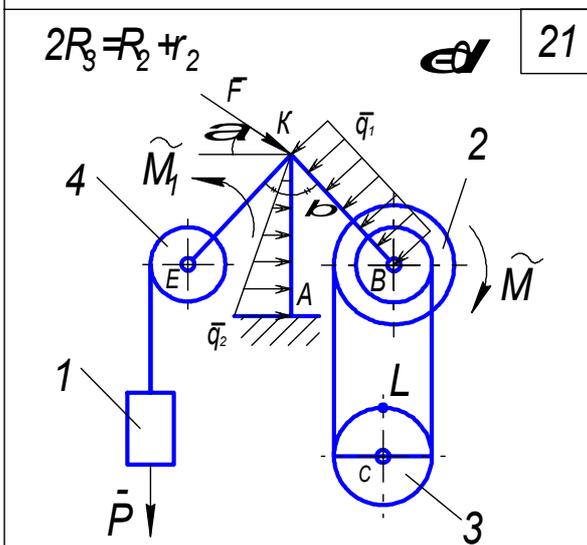
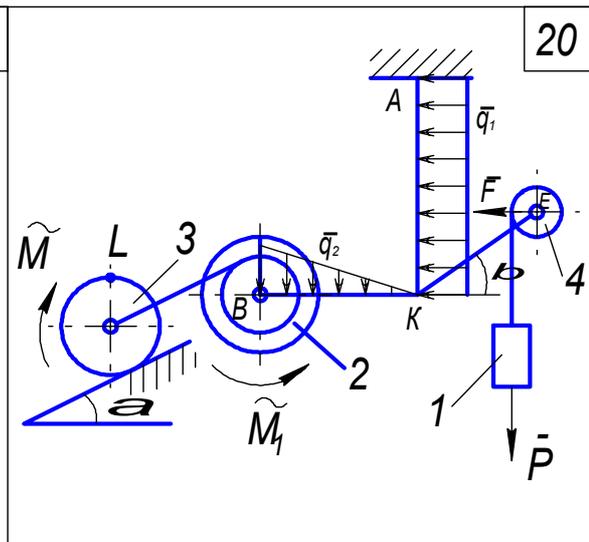
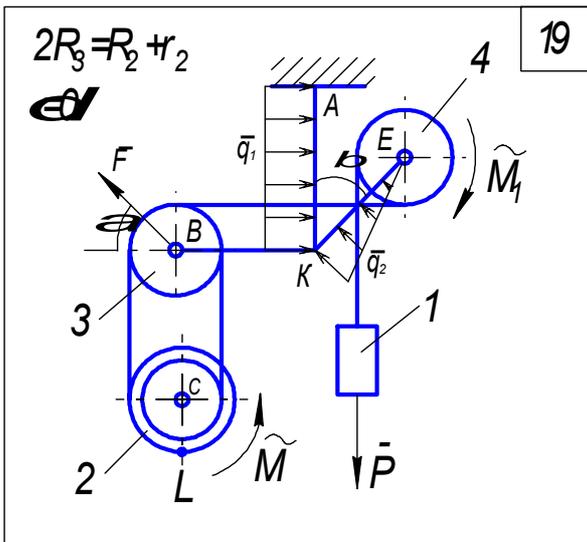


Рисунок 4 – Схемы механизмов

Таблица 1 – Исходные данные

А-Я	m_1	m_2	m_3	R_3	R_2	r_2	ρ	АК	КЕ	КВ	S	δ
разм	кг	кг	кг	см	см	см	см	см	см	см	м	см
А	3	2	1	30	40	20	25	50	60	70	0,20	0,2
Б	4	3	2	40	30	10	20	70	50	50	1	-
В	10	8	5	50	50	20	30	100	80	120	0,5	0,4
Г	20	15	30	80	40	25	35	50	60	100	0,8	-
Д	5	10	3	40	50	30	40	40	50	60	0,4	0,3
Е	1	3	2	60	25	20	15	30	20	40	0,1	0,1
Ж	20	10	10	70	55	40	50	50	50	50	0,5	-
З	4	2	3	50	30	20	20	40	40	60	0,4	0,2 5
И	15	10	5	60	40	15	30	80	50	70	0,3	-
К	1,5	0,5	1,1	55	45	25	35	45	60	80	0,5	0,6
Л	1	0,4	2	25	15	10	12	40	40	40	0,1	0,2
М	8	10	4	30	25	15	22	50	30	40	0,7	-
Н	5	2	1	20	10	5	8	20	20	30	0,5	0,1
О	1	3	4	25	20	10	15	30	30	30	1	-
П	10	2	5	20	30	10	25	50	50	100	0,5	0,3
Р	1	0,3	0,5	40	40	20	35	40	50	60	1	0,2
С	2	1	0,5	20	20	10	15	30	40	50	0,5	-
Т	20	10	5	30	45	30	40	100	50	100	1	0,7
У	5	4	3	20	20	15	15	40	40	60	2	0,1
Ф	15	5	5	50	50	40	45	100	100	150	1	-
Х	1,5	0,5	0,5	30	30	20	22	60	60	60	1	0,2
Ш	3	1	2	20	40	30	35	50	40	60	0,5	-
Э	5	3	1	20	20	15	20	40	40	50	1	0,3
Ю	4	1	2	30	25	15	20	30	40	70	1,5	-

Я	10	6	2	20	20	10	18	25	25	50	0,6	0,1
---	----	---	---	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----

Продолжение таблицы 1

А-Я	α	B	f	F	M_1	q_1	q_2	M	P
разм	град	град	-	H	Hсм	H/см	H/см	Hм	H
А	30	45	-	100	10	10	5	+	-
Б	60	30	0,5	-	10	20	10	-	+
В	30	30	-	50	-	15	12	-	+
Г	45	45	0,1	120	20	10	10	+	-
Д	45	30	0,2	-	-	5	10	+	-
Е	60	60	-	60	5	25	15	-	+
Ж	45	60	0,3	-	10	30	15	+	-
З	60	30	-	100	-	10	20	+	-
И	60	45	-	-	15	35	25	-	+
К	30	30	0,5	200	12	10	10	-	+
Л	30	45	-	-	20	5	10	+	-
М	45	45	0,1	50	10	8	8	+	-
Н	45	60	0,2	-	20	5	15	-	+
О	45	30	-	50	10	15	10	+	-
П	60	0	0,3	-	25	5	20	-	+
Р	30	0	-	150	5	10	25	+	-
С	30	90	0,1	-	15	5	20	+	-
Т	45	90	0,1	-	10	10	10	-	+
У	45	0	-	250	-	20	20	+	-
Ф	60	0	-	100	5	15	15	+	-
Х	60	90	0,3	-	-	20	25	+	-
Ш	30	60	0,2	50	10	5	10	-	+
Э	60	30	-	300	5	25	25	-	+

Ю	60	45	0,2	-	10	10	5	+	-
Я	45	45	-	120	12	12	22	+	-

2.2 Пример выполнения задания

Содержание задания изложено в п. 2.1, поэтому приведем лишь схему механизма (рисунок 5) и исходные данные.

Дано: $m_1=1\text{кг}$; $m_2=3\text{кг}$; $m_3=4\text{кг}$; $R_3=0,15\text{м}$; $R_2=0,2\text{м}$; $r_2=0,1\text{м}$; $\rho_2=0,15\text{м}$;
 $AK=0,3\text{м}$; $KE=0,3\text{м}$; $KB=0,3\text{м}$; $\alpha=45^\circ$; $\beta=30^\circ$; $F=50\text{Н}$;

$\tilde{M}_1=0,10\text{ Н}\cdot\text{м}$; $q_1=1000\text{ Н/м}$; $q_2=1000\text{ Н/м}$;

Найти: \tilde{M} , R_A , R_B , F_{Hi} ; V_L ; a_L при $t_1=1\text{с}$

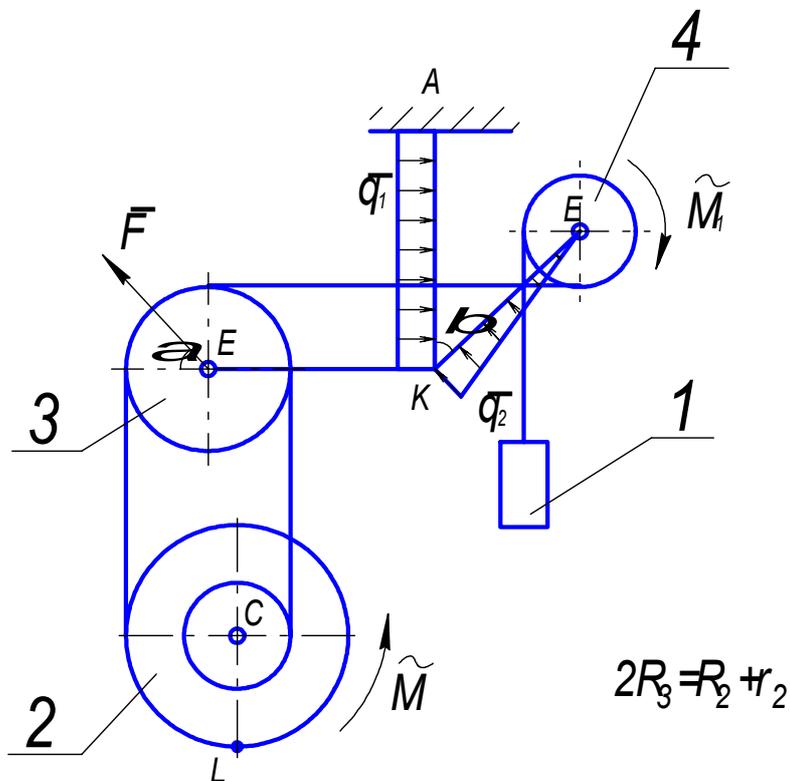


Рисунок 5 – Схема механизма

Решение

1 Равновесие системы

Рассмотрим равновесие механической системы, состоящей из звена АВЕ и тел 1,2,3,4, соединенных нерастяжимыми нитями.

А Определение \tilde{M} .

Воспользуемся уравнением возможных мощностей

$$\sum \overline{F_K} \cdot \overline{V_i} = 0 \quad (1)$$

Сообщим системе возможную угловую скорость ω_4 в направлении момента \tilde{M}_1 (рисунок 6) и составим уравнение (1):

$$-m_1 g V_1 + \tilde{M}_1 \omega_4 + \tilde{M} \omega_2 - m_2 g V_c = 0 \quad (2)$$

Возможные мощности отрицательны, если направление возможных скоростей и сил противоположны друг другу.

Найдем кинематические соотношения между скоростями точек и тел системы.

Так как нити нерастяжимы и проскальзывание между нитями и телами отсутствует, то точки на ободе колес 4, 3 и на внешнем ободе колеса 2 имеют такую же скорость, что и тело 1:

$$V_1 = \omega_4 R_4 \Rightarrow \omega_4 = \frac{V_1}{R_4} \quad (3)$$

$$V_1 = \omega_3 R_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{V_1}{R_3}$$

$$V_D = V_1 = V_{D'}$$

Для тела 2

$$\frac{V_1}{1P} = \frac{V_{D'}}{D'P} \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{1P} = \frac{V_1}{(R_2 + r_2) - 1P}$$

откуда

$$1P = \frac{R_2 + r_2}{2} = \frac{0,2 + 0,1}{2} = 0,15 \text{ м}$$

и $1P = D'P = 0,15 \text{ м}$

где P – мгновенный центр скоростей тела 2,

Очевидно:

$$V_1 = \omega_2 \cdot 1P \Rightarrow \omega_2 = \frac{V_1}{1P} = \frac{V_1}{0,15}; \quad (4)$$

$$V_C = \omega_2 \cdot CP$$

$$CP = R_2 - 1P = 0,2 - 0,15 = 0,05 \text{ м}$$

$$V_C = \frac{V_1}{0,15} \cdot 0,05 = \frac{V_1}{3} \quad (5)$$

С учетом (3) – (5) уравнение (2) примет вид

$$-m_1gV_1 + \tilde{M}_1 \frac{V_1}{R_4} + \tilde{M} \frac{V_1}{0,15} - m_2g \frac{V_1}{3} = 0$$

$$V_1 \cdot \left(-m_1g + \frac{\tilde{M}_1}{R_4} + \frac{\tilde{M}}{0,15} - \frac{m_2g}{3} \right) = 0$$

или

$$-m_1g + \frac{\tilde{M}_1}{R_4} + \frac{\tilde{M}}{0,15} - \frac{m_2g}{3} = 0$$

откуда

$$\tilde{M} = 0,15 \cdot \left(m_1g - \frac{\tilde{M}_1}{R_4} + \frac{m_2g}{3} \right) = 0,15 \cdot \left(1 \cdot 9,8 - \frac{0,1}{0,11} + \frac{3 \cdot 9,8}{3} \right) = 2,8 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

где, в соответствии со схемой механизма (рисунок 6)

$$R_4 = KE \cos \beta - R_3 = 0,3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,15 = 0,11 \text{ м}$$

Б Определение сил натяжения нитей F_i

Определение F_{1-4}

Рассмотрим тело 1. Оборвем нить и заменим ее действие силой реакции F_{1-4} (рисунок 7)

$$\sum F_{ky} = 0; \quad F_{1-4} - m_1g = 0$$

$$F_{1-4} = m_1g = 9,8 \text{ Н}$$

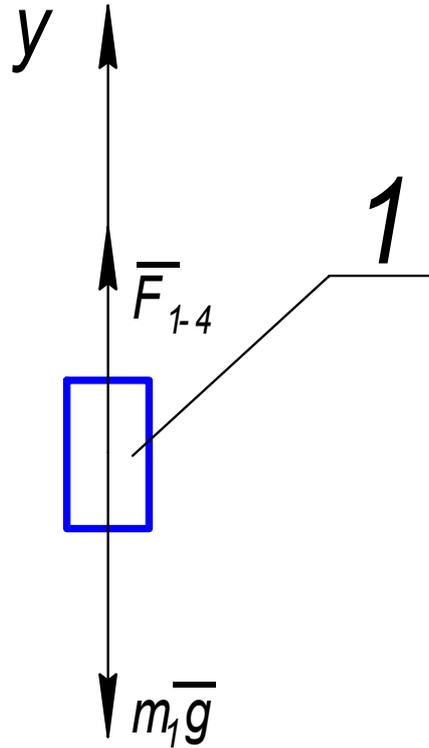


Рисунок 7 - Определение F_{1-4}

Определение F_{4-1} , F_{4-3}

Рассмотрим тело 4. Действие шарнира E заменим двумя составляющими \bar{X}_E , \bar{Y}_E силы реакции. Оборвем нити и заменим их действие силами реакций \bar{F}_{4-1} и \bar{F}_{4-3} (рисунок 8), причем $F_{4-1} = F_{1-4} = 9,8 \text{ Н}$ по третьему закону Ньютона.

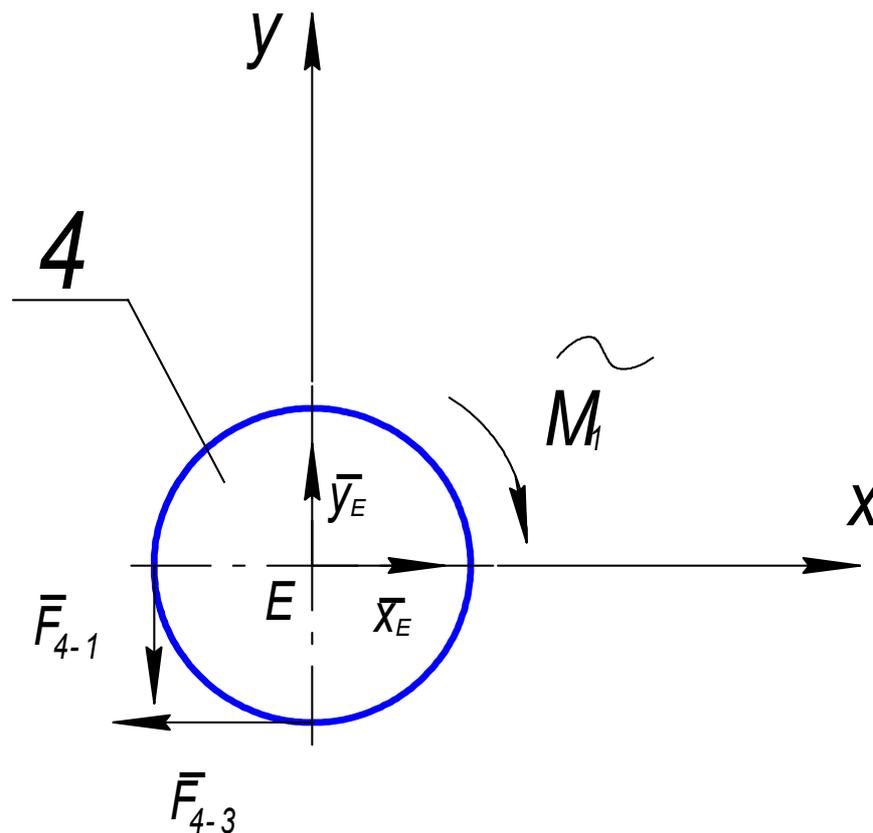


Рисунок 8 – Определение F_{4-1} , F_{4-3}

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = 0, \quad -\tilde{M}_1 + F_{4-1} \cdot R_4 - F_{4-3} \cdot R_4 = 0$$

$$F_{4-3} = \frac{F_{4-1} \cdot R_4 - \tilde{M}_1}{R_4} = \frac{9,8 \cdot 0,11 - 0,1}{0,11} = 8,9 \text{ Н}$$

$$\sum F_{KX} = 0, \quad X_E - F_{4-3} = 0 \Rightarrow X_E = F_{4-3} = 8,9 \text{ Н}$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_E - F_{4-1} = 0 \Rightarrow Y_E = F_{4-1} = 9,8 \text{ Н}$$

Определение F_{3-2} , F'_{3-2}

Предварительно найдем X_B , Y_B . Для этого рассмотрим тела 2 и 3 (рисунок 9). Действие шарнира B заменим составляющими \vec{X}_B, \vec{Y}_B силы реакции. Оборвем нить и заменим ее действие силой реакции нити F_{3-4} . Причем $F_{3-4} = F_{4-3} = 8,9 \text{ Н}$ по третьему закону Ньютона.

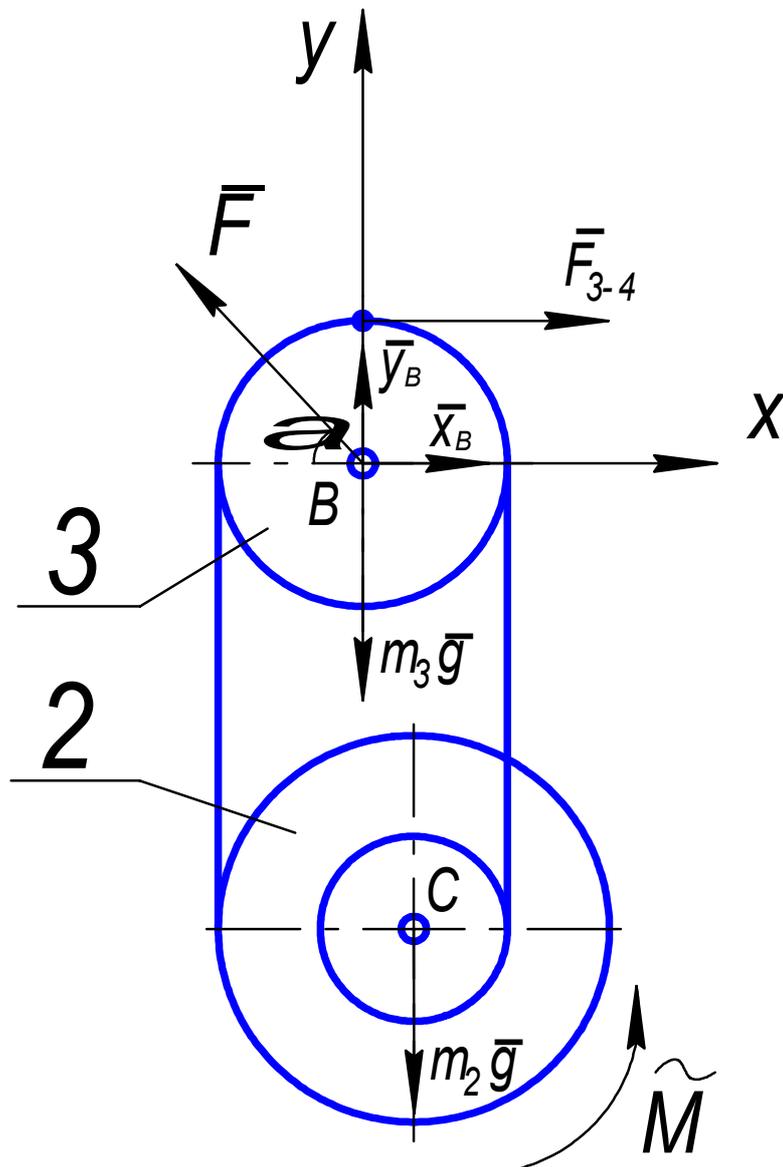


Рисунок 9 – Определение X_B , Y_B .

$$\sum F_{KX} = 0, \quad F_{3-4} + X_B - F \cos \alpha = 0$$

$$X_B = F \cos \alpha - F_{3-4} = 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 8,9 = 26,6 \text{ Н}$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_B + F \sin 45^\circ - m_3 g - m_2 g = 0$$

$$Y_B = -F \sin 45^\circ + m_3 g + m_2 g = -50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (4 + 3) \cdot 9,8 = 33,1 \text{ Н}$$

Теперь рассмотрим тело 3. Оборвем нити и заменим их действие силами реакций F_{3-2} , F'_{3-2} (рисунок 10)

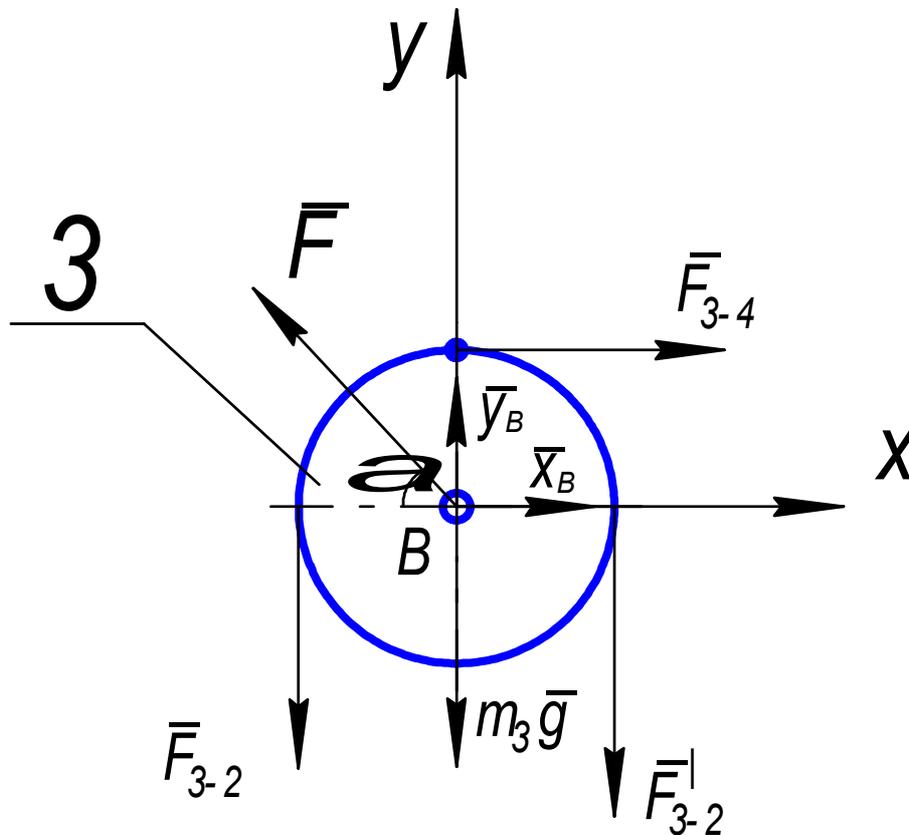


Рисунок 10 – Определение F_{3-2} , F'_{3-2} .

$$\begin{cases} \sum F_{KY} = 0, & Y_B - m_3 g + F \sin \alpha - F_{3-2} - F'_{3-2} = 0 \\ \sum M_B(\bar{F}_K) = 0, & -F_{3-4} \cdot R_3 - F'_{3-2} \cdot R_3 + F_{3-2} \cdot R_3 = 0 \end{cases}$$

или

$$(6) \quad \begin{cases} Y_B - m_3 g + F \sin \alpha - F_{3-2} - F'_{3-2} = 0 \\ -F_{3-4} - F'_{3-2} + F_{3-2} = 0 \end{cases}$$

(7)

Сложим левые и правые части уравнений (6) и (7), получим

$$Y_B - m_3 g + F \sin \alpha - 2 \cdot F'_{3-2} - F_{3-4} = 0$$

$$F'_{3-2} = \frac{1}{2} \cdot (Y_B - m_3 g + F \sin 45^\circ - F_{3-4}) = \frac{1}{2} \left(33,1 - 4 \cdot 9,8 + 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 8,9 \right) = 10,25 \text{ Н}$$

Из уравнения (7)

$$F_{3-2} = F_{3-4} + F'_{3-2} = 8,9 + 10,25 = 19,15 \text{ Н}$$

Определение реакций в точках А и В.

Рассмотрим звено АВЕ (рисунок 11). Реакцию жесткой заделки А представим двумя составляющими \bar{X}_A , \bar{Y}_A реакции и парой сил с моментом M_A . Действие шарниров В и Е заменим составляющими \bar{X}_B , \bar{Y}_B и \bar{X}_E , \bar{Y}_E сил реакции. Значения X_B , Y_B были определены выше (см. рис. 9).

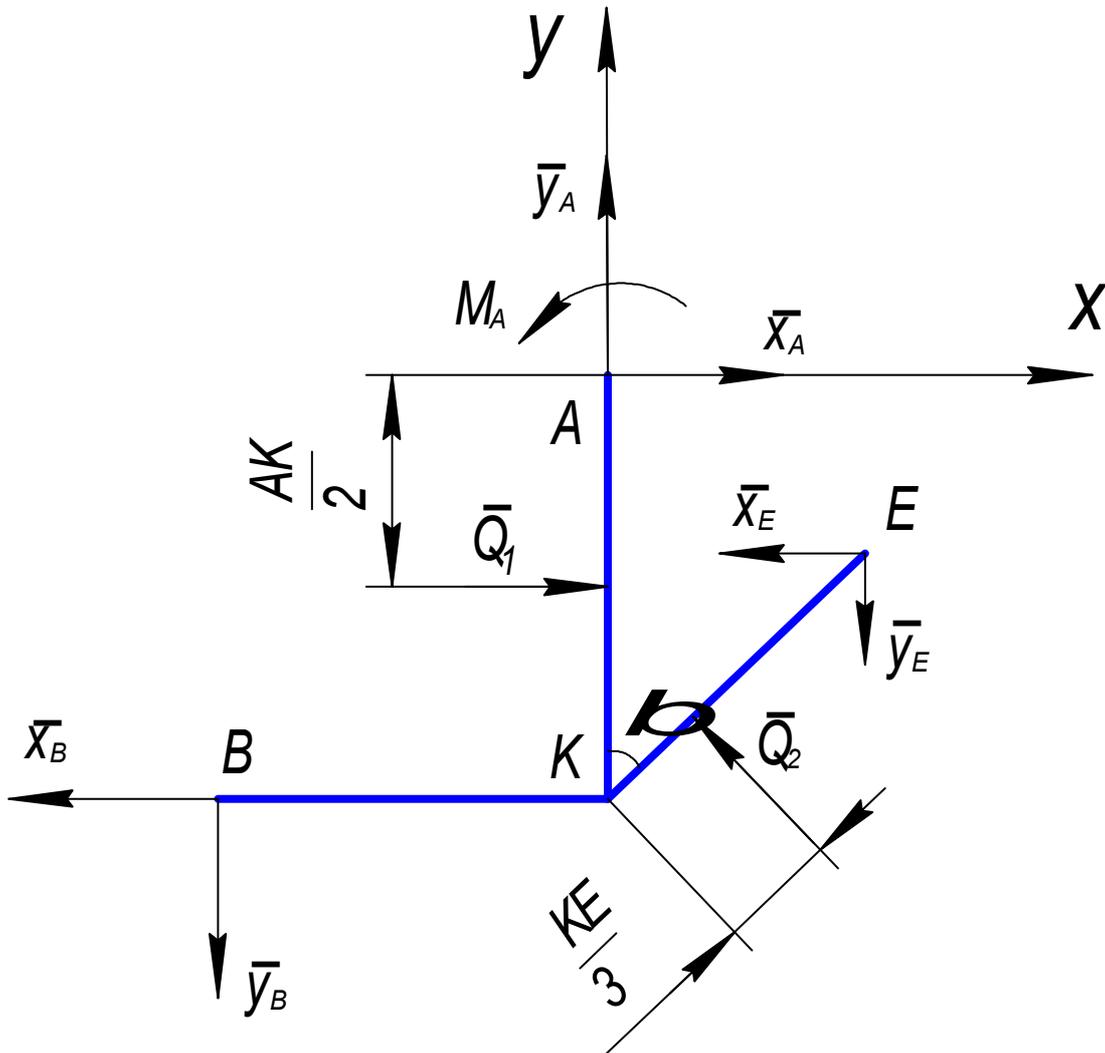


Рисунок 11 – Определение реакций в точках А и В.

$$\sum F_{KX} = 0, \quad X_A - X_E + Q_1 - Q_2 \cos \beta - X_B = 0 \quad (8)$$

$$\sum F_{KY} = 0, \quad Y_A - Y_E + Q_2 \sin \beta - Y_B = 0 \quad (9)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_K) = 0, \quad M_A + Q_1 \cdot \frac{AK}{2} - X_B \cdot AK + Y_B \cdot BK + Q_2 \sin \beta \cdot \frac{KE}{3} \sin \beta - Q_2 \cos \beta \cdot \left(AK - \frac{KE}{3} \cdot \cos \beta \right) - Y_E \cdot KE \cdot \sin \beta - X_E \cdot (AK - KE \cos \beta) = 0 \quad (10)$$

Из уравнения (8)

$$X_A = X_E - Q_1 + Q_2 \cos \beta + X_B = 8,9 - 300 + 150 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 26,6 = -134 \text{ Н}$$

Из уравнения (9)

$$Y_A = Y_E - Q_2 \sin 30^\circ + Y_B = 9,8 - 150 \cdot \frac{1}{2} + 33,1 = -32,1 \text{ Н}$$

Из уравнения (10)

$$\begin{aligned} M_A &= -Q_1 \cdot \frac{AK}{2} + X_B \cdot AK - Y_B \cdot BK - Q_2 \sin 30^\circ \cdot \frac{KE}{3} \sin 30^\circ + \\ &+ Q_2 \cos 30^\circ \cdot \left(AK - \frac{KE}{3} \cdot \cos 30^\circ \right) + Y_E \cdot KE \cdot \sin 30^\circ + X_E \cdot (AK - KE \cos 30^\circ) = \\ &= -300 \cdot 0,15 + 26,6 \cdot 0,3 - 33,1 \cdot 0,3 - 150 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot \frac{1}{2} + \\ &+ 150 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(0,3 - 0,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 9,8 \cdot 0,3 \cdot \frac{1}{2} + 8,9 \cdot \left(0,3 - 0,3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -21,09 \text{ Н} \cdot \text{М} \end{aligned}$$

2 Исследование движения механической системы.

Зададим значение момента $M = 2 \cdot \tilde{M} = 2 \cdot 2,8 = 5,6 \text{ Н} \cdot \text{М}$ и рассмотрим движение заданной механической системы.

А Определение закона движения системы.

Вспользуемся уравнениями Лагранжа II рода. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты вертикальное перемещение точки C (рисунок 12)

$$q = y_C$$

Тогда уравнение Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_C} = Q_{y_C} \quad (11)$$

Определим кинетическую энергию T системы как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3 системы (звенья АВЕ и тело 4 невесомы)

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (12)$$

Так как тело 1 движется поступательно, тело 2 совершает плоскопараллельное движение, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси В, то

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1 V_1^2}{2}; & T_3 &= \frac{I_3 \omega_3^2}{2}; \\ T_2 &= \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_2^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Учитывая, что тела соединены нерастяжимыми нитями (все точки, лежащие на одной нити, имеют одинаковую скорость), и, принимая во внимание результаты вычислений (3)-(5), выразим все скорости из формул (13) через скорость V_C :

$$V_1 = 3 V_C; \quad \omega_2 = \frac{3 V_C}{0,15} = \frac{V_C}{0,05}; \quad \omega_3 = \frac{3 V_C}{R_3}; \quad \omega_4 = \frac{3 V_C}{R_4} \quad (14)$$

Осевые моменты инерции тел 2 и 3:

$$I_C = m_2 \rho_2^2; \quad I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} \quad (15)$$

Подставим (14) и (15) в формулы (13):

$$T_1 = \frac{m_1}{2} \cdot 9 V_C^2; \quad T_3 = \frac{m_3 R_3^2}{4} \cdot \frac{9 V_C^2}{R_3^2} = \frac{9 m_3 V_C^2}{4}; \quad T_2 = \frac{m_2 \cdot V_C^2}{2} + \frac{m_2 \rho_2^2}{2} \cdot \frac{V_C^2}{0,05^2}$$

По формуле (12) получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{V_C^2}{2} \cdot \left(9 m_1 + m_2 + \frac{m_2 \rho_2^2}{0,05^2} + \frac{9 m_3}{2} \right) = \\ &= \frac{V_C^2}{2} \cdot \left(9 \cdot 1 + 3 + \frac{3 \cdot 0,15^2}{0,05^2} + \frac{9 \cdot 4}{2} \right) = \frac{57 V_C^2}{2} = \frac{57 \dot{y}_C^2}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} = 57 \dot{y}_C; \quad \frac{\partial T}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} \right) = 57 \ddot{y}_C \quad (17)$$

Определяем обобщенную силу Q_{y_C} , соответствующую данной обобщенной координате.

Изображаем действующие на механизм активные силы (рисунок 12): силы тяжести $m_1 \bar{g}$, $m_2 \bar{g}$, $m_3 \bar{g}$, силы \bar{F} , \bar{Q}_1 , \bar{Q}_2 и пары сил с моментами \tilde{M}_1 и M .

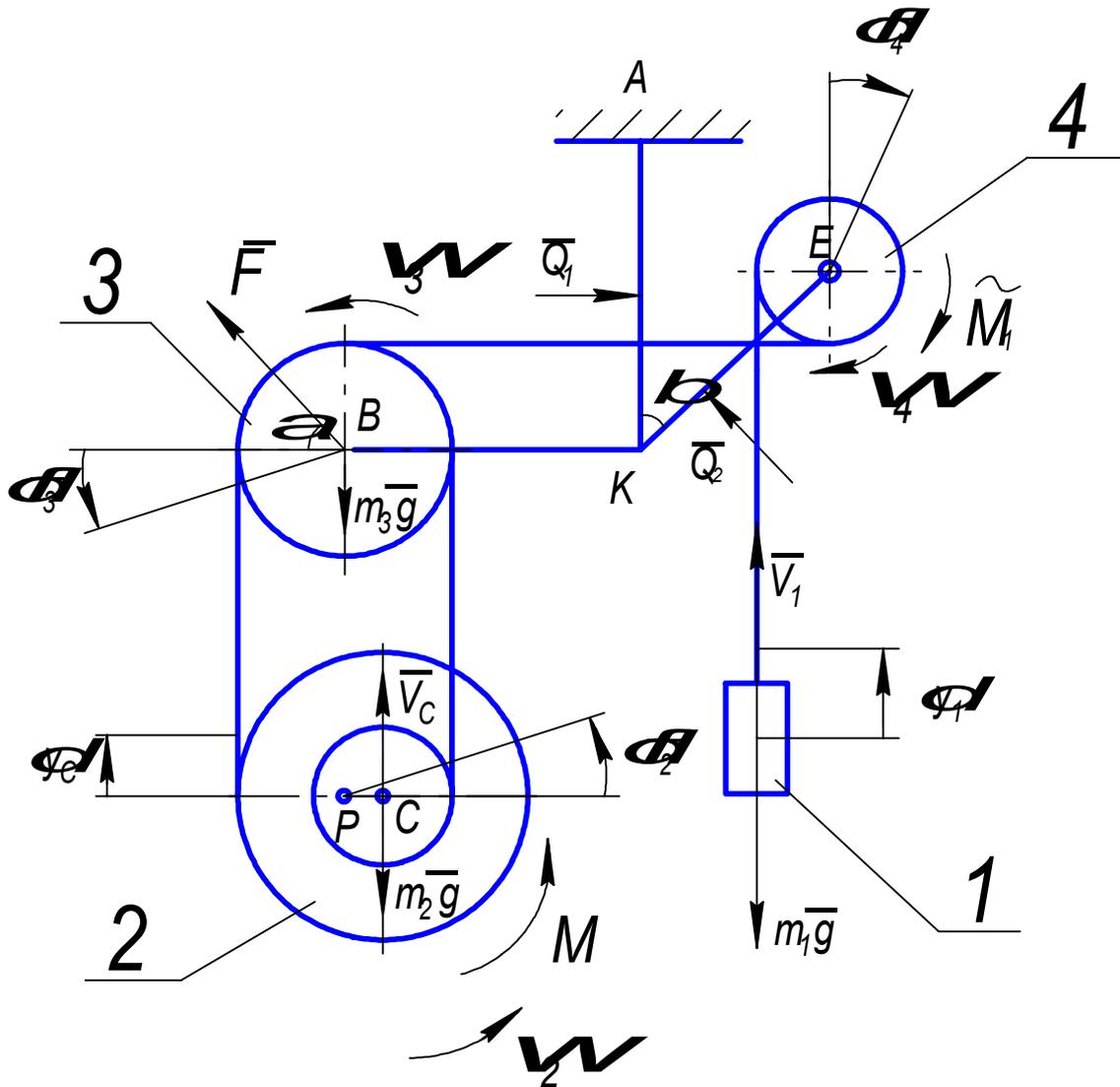


Рисунок 12 – Определение обобщенной силы Q_{y_C}

Сообщим системе возможное перемещение в направлении её действительного движения и найдем обобщенную силу

$$Q_{yc} = \frac{\sum \delta A_k^a}{\delta y_C},$$

где $\sum \delta A_k^a$ - возможная работа действующих сил.

$$\sum \delta A_k^a = -m_1 g \cdot \delta y_1 + \tilde{M}_1 \cdot \delta \varphi_4 + M \cdot \delta \varphi_2 - m_2 g \cdot \delta y_C$$

Учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь такая же, как между соответствующими скоростями. Поэтому в соответствии с (14) запишем

$$\delta y_1 = 3 \delta y_C; \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta y_C}{0,05}; \quad \delta \varphi_3 = \frac{3 \delta y_C}{R_3}; \quad \delta \varphi_4 = \frac{3 \delta y_C}{R_4}$$

Тогда

$$Q_{yc} = \frac{-m_1 g \cdot 3 \delta y_C + \tilde{M}_1 \cdot \frac{3 \delta y_C}{R_4} + M \cdot \frac{\delta y_C}{0,05} - m_2 g \cdot \delta y_C}{\delta y_C} = \quad (18)$$

$$= -3m_1 g + \frac{3\tilde{M}_1}{R_4} + \frac{M}{0,05} - m_2 g = -3 \cdot 1 \cdot 9,8 + \frac{3 \cdot 0,1}{0,11} + \frac{5,6}{0,05} - 3 \cdot 9,8 = 55,9 \text{ Н}$$

Подставляя величины (17) и (18) в уравнение (11), получим следующее дифференциальное уравнение движения системы:

$$57 \ddot{y}_C = 55,9$$

или

$$\ddot{y}_C = 0,98 \quad (19)$$

Интегрируем дважды полученное дифференциальное уравнение

$$\dot{y}_C = 0,98 t + C_1$$

$$y_C = 0,49 t^2 + C_1 t + C_2$$

При нулевых начальных условиях постоянные интегрирования

$$C_1 = 0, C_2 = 0.$$

Таким образом, уравнение проекции скорости

$$\dot{y}_C = 0,98 t \quad (20)$$

и искомое уравнение движения механической системы с одной степенью свободы

$$y_C = 0,49 t^2 \quad (21)$$

Б Определение зависимости скорости точки С от пройденного ею пути $V_C = f(S_C)$

Применим теорему об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i \quad (22)$$

где T_0 и T кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях;

$\sum A_k^e$ - сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещение системы из начального положения в конечное;

$\sum A_k^i$ - сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Так как рассматриваемая система состоит из абсолютно твердых тел, связанных между собой нерастяжимыми нитями, то

$$\sum A_k^i = 0$$

Так как в начальном положении система находилась в покое, то $T_0 = 0$.

Уравнение (22) примет вид

$$T = \sum A_k^e \quad (23)$$

Кинетическая энергия системы T определена в п. 2а

$$T = 28,5 V_C^2 \quad (24)$$

Определим сумму работ внешних сил.

Покажем внешние силы, действующие на систему (рисунок 13): силы тяжести $m_1 \bar{g}$, $m_2 \bar{g}$, $m_3 \bar{g}$, пары сил с моментами \tilde{M}_1 и M , силы \bar{Q}_1 , \bar{Q}_2 , \bar{F} и реакция жесткой заделки A , слагающаяся из силы, которую представим двумя составляющими \bar{x}_A , \bar{y}_A , и пары сил с моментом M_A .

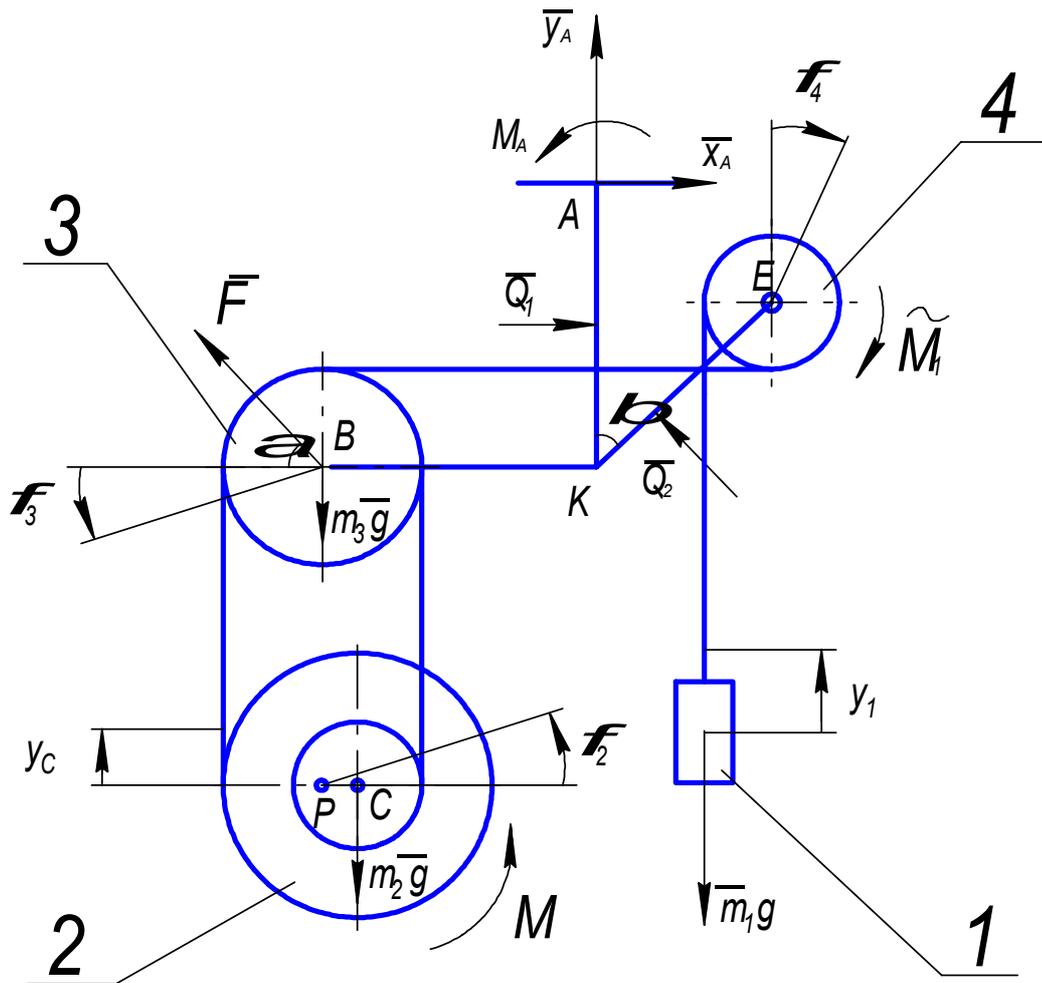


Рисунок 13 – Определение работы внешних сил.

Обозначим:

y_1, y_C – перемещение груза 1 и центра масс тела 2 соответственно ($y_C = S_C$);

$\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ - углы поворотов тел 2, 3, 4.

Учитывая, что зависимости между перемещениями точек или углами поворотов тел будут такими же, как между соответствующими скоростями, из соотношений (14) получим

$$y_1 = 3y_C; \quad \varphi_2 = \frac{y_C}{0,05}; \quad \varphi_3 = \frac{3y_C}{R_3}; \quad \varphi_4 = \frac{3y_C}{R_4} \quad (25)$$

Вычислим работу внешних сил:

$$A(m_1\bar{g}) = -m_1gy_1 = -3m_1gy_C;$$

$$A(\tilde{M}_1) = \tilde{M}_1 \varphi_4 = \tilde{M}_1 \cdot \frac{3y_C}{R_4};$$

$$A(M) = M \varphi_2 = M \cdot \frac{y_C}{0,05};$$

$$A(m_2 \tilde{g}) = -m_2 g y_C;$$

Работа остальных сил будет равна нулю, так как эти силы приложены в неподвижных точках.

Сумма работ внешних сил:

$$\begin{aligned} \sum A_k^e &= \left(-3m_1 g + \frac{3\tilde{M}_1}{R_4} + \frac{M}{0,05} - m_2 g \right) \cdot y_C = \left(-3 \cdot 1 \cdot 9,8 + \frac{3 \cdot 0,1}{0,11} + \frac{5,6}{0,05} - 3 \cdot 9,8 \right) \cdot y_C = \\ &= 55,9 \cdot y_C \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно теореме (23) приравняем значения T и $\sum A_k^e$, определяемые формулами (24) и (26), получим

$$\begin{aligned} 28,5 \cdot V_C^2 &= 55,9 \cdot y_C \\ V_C &= \sqrt{\frac{55,9 \cdot y_C}{28,5}} = 1,4 \sqrt{y_C} \end{aligned}$$

В Вычисление количества движения системы в произвольный момент времени.

Количество движения заданной механической системы (рисунок 14):

$$\bar{Q} = \bar{Q}^{(1)} + \bar{Q}^{(2)} + \bar{Q}^{(3)} \quad (27)$$

(весом балки АВ и тела пренебрегаем по условию)

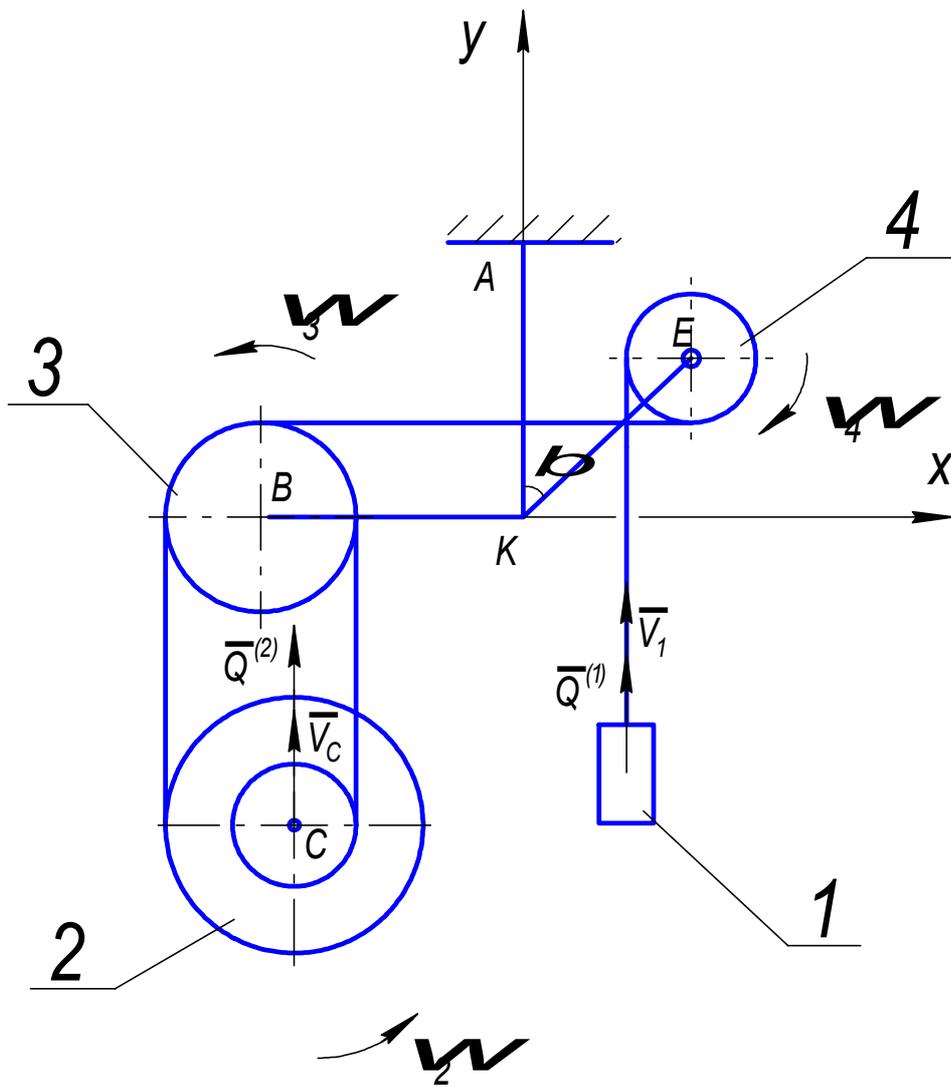


Рисунок 14 – Определение количества движения системы.

$$\begin{aligned} \bar{Q}^{(1)} &= m_1 \bar{V}_1; & \bar{Q}^{(2)} &= m_2 \bar{V}_C; & \bar{Q}^{(3)} &= m_3 \bar{V}_B \\ \bar{Q}^{(3)} &= 0, \text{ т.к. } V_B = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Спроецируем выражение (27) на координатные оси:

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_x^{(1)} + Q_x^{(2)} = 0 \\ Q_y &= Q_y^{(1)} + Q_y^{(2)} = Q^{(1)} + Q^{(2)} \end{aligned}$$

Учитывая выражения (5) и (20) найдем

$$Q^{(1)} = m_1 V_1 = m_1 \cdot 3 V_C = 3 m_1 \cdot 0,98 t = 3 \cdot 1 \cdot 0,98 t = 2,94 t$$

$$Q^{(2)} = m_2 V_C = 3 \cdot 0,98 t = 2,94 t$$

$$Q_y = 2,94 t + 2,94 t = 5,88 t$$

Количество движения системы:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = 5,88 t.$$

Г Определение скорости и ускорения точки L в момент времени $t_1=1c$.

Учитывая, что тело 2 совершает плоскопараллельное движение и положение мгновенного центра скоростей P (рисунок 6), а также значение угловой скорости ω_2 (см. п. 1а, формула (4)) известны, найдем

$$V_L = \omega_2 \cdot LP \quad (29)$$

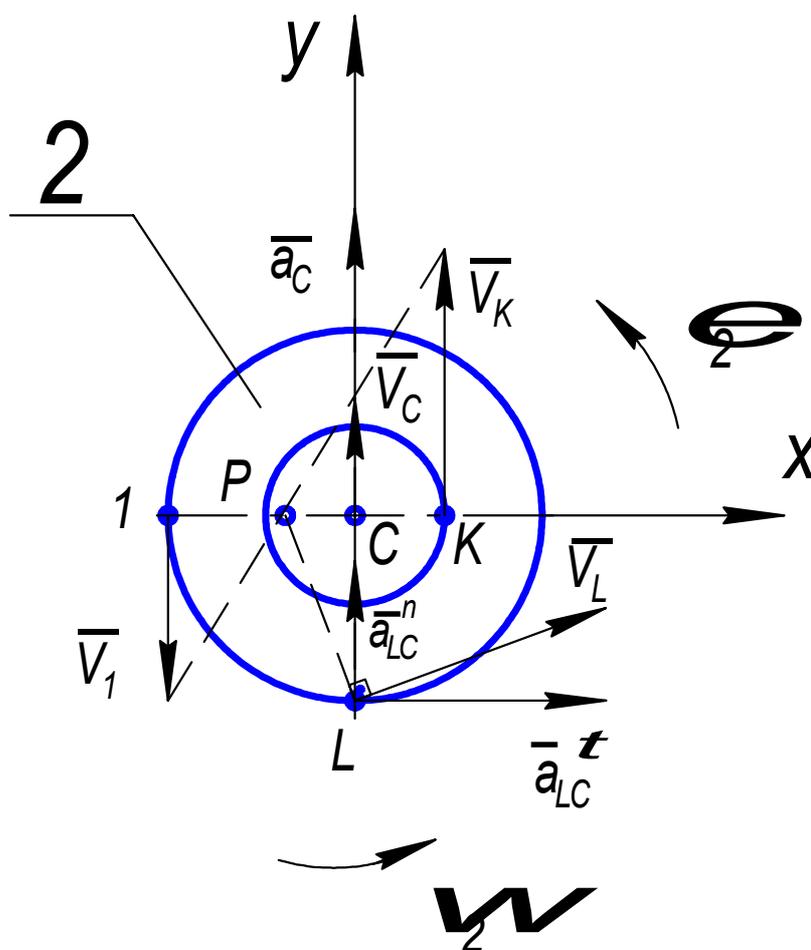


Рисунок 15 – Определение скорости и ускорения точки L

Из рисунка 15

$$LP = \sqrt{PC^2 + CL^2} = \sqrt{0,05^2 + 0,2^2} = 0,21 \text{ м}$$

$$\omega_2 = \frac{V_C}{0,05} = \frac{0,98t}{0,05} = 19,6t$$

По формуле (29)

$$V_L = 19,6t \cdot 0,21 = 4,12t$$

При $t = 1$ с.

$$V_L = 4,12 \text{ м/с}$$

Вектор \bar{V}_L перпендикулярен отрезку LP и направлен в сторону вращения тела 2.

Ускорение точки L найдем по теореме о сложении ускорений точек плоской фигуры, принимаемая за полюс точку C

$$\bar{a}_L = \bar{a}_C + \bar{a}_{LC}^n + \bar{a}_{LC}^{\tau} \quad (30)$$

$$a_C = \ddot{y}_C = 0,98 \text{ м/с}^2 \text{ (см. формулу (19))}$$

Нормальное и тангенциальное ускорение точки L во вращении тела 2 вокруг полюса C

$$a_{LC}^n = \omega_2^2 \cdot CL; \quad a_{LC}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot CL \quad (31)$$

где ε_2 – угловое ускорение тела 2.

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 19,6 \text{ рад/с}^2$$

Получим

$$a_{LC}^n = 19,6^2 \cdot t^2 \cdot 0,2 = 76,8t^2 \Big|_{t=1} = 76,8 \text{ м/с}^2$$

$$a_{LC}^{\tau} = 19,6 \cdot 0,2 = 3,92 \text{ м/с}^2$$

Вектор \bar{a}_{LC}^n направлен от точки L к полюсу C, вектор \bar{a}_{LC}^{τ} перпендикулярен CL и направлен соответственно угловому ускорению ε_2 (рисунок 15)

Ускорение точки L находим способом проекций:

$$a_{Lx} = a_{CL}^{\tau} = 3,92 \text{ м/с}^2$$

$$a_{Ly} = a_C + a_{LC}^n = 0,98 + 76,8 = 77,78 \text{ м/с}^2$$

$$a_L = \sqrt{a_{Lx}^2 + a_{Ly}^2} = \sqrt{3,92^2 + 77,78^2} = 77,9 \text{ м/с}^2$$

Д Вычисление динамических добавок компонентов реакции заделки А.

Рассмотрим движение тел заданной механической системы. Применим принцип Даламбера, согласно которому, приложив к данному телу соответствующие силы инерции, можно считать тело находящимся в равновесии и применять уравнения статики.

В соответствии с выражениями (14) найдем ускорения:

$$a_1 = 3a_C = 3 \cdot 0,98 = 2,94 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_C}{0,05} = \frac{0,98}{0,05} = 19,6 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{3a_C}{R_3} = \frac{3 \cdot 0,98}{0,15} = 19,6 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_4 = \frac{3a_C}{R_4} = \frac{3 \cdot 0,98}{0,11} = 26,7 \text{ рад/с}^2$$

Рассмотрим тело 1 (рисунок 16, а) Добавим к действующим силам $m_1 \bar{g}$ и $\bar{F}_{Н1-4}$ силу инерции $\bar{F}_1^{ин}$, направленную против ускорения \bar{a}_1 , и составим уравнение кинестатики:

$$\sum F_{ky} = 0, \quad F_{1-4} - F_1^{ин} - m_1 g = 0$$

$$F_1^{ин} = m_1 a_1 = 1 \cdot 2,94 = 2,94 \text{ Н}$$

$$F_{1-4} = F_1^{ин} + m_1 g = 2,94 + 1 \cdot 9,8 = 12,74 \text{ Н}$$

Аналогично, для тел 2, 3, и 4 системы.

Тело 4 (рисунок 16,б):

$$\sum M_E(\bar{F}_k) = 0, \quad -\tilde{M}_1 - F_{4-3} \cdot R_4 + F_{4-1} \cdot R_4 = 0$$

$$F_{4-1} = F_{1-4} = 12,74 \text{ Н}$$

$$F_{4-3} = \frac{-\tilde{M}_1 + F_{4-1} \cdot R_4}{R_4} = \frac{-0,1 + 12,74 \cdot 0,11}{0,11} = 11,83 \text{ Н}$$

$$\sum F_{kx} = 0, \quad x_E - F_{4-3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = F_{4-3} = 11,83 \text{ Н}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad y_E - F_{4-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_E = F_{4-1} = 12,74 \text{ Н}$$

Тела 2 и 3 (рисунок 16, в):

$$\sum F_{kx} = 0, \quad x_B - F \cos \alpha + F_{3-4} = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad y_B + F \sin \alpha - m_3 g - m_2 g - F_2^{ин} = 0,$$

где $F_2^{ин} = m_2 a_C = 3 \cdot 0,98 = 2,94 \text{ Н}; \quad F_{3-4} = F_{4-3} = 11,83 \text{ Н},$

следовательно,

$$x_B = F \cos \alpha - F_{3-4} = 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 11,83 = 23,67 \text{ Н}$$

$$y_B = -F \sin \alpha + m_3 g + m_2 g + F_2^H = -50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot 9,8 + 3 \cdot 9,8 + 2,94 = 36,04 \text{ Н}$$

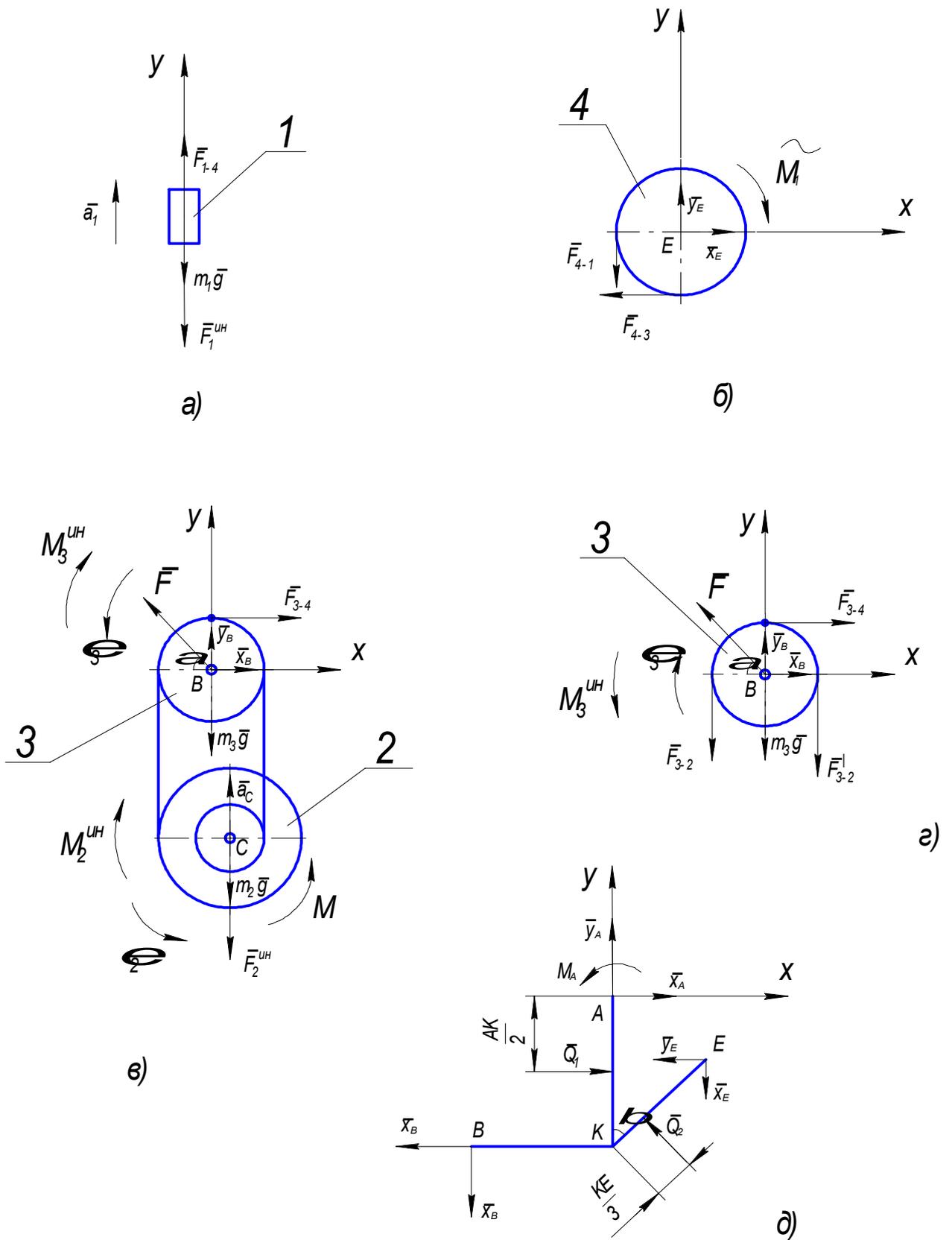


Рисунок 16 – Определение динамических добавок компонентов реакции

заделки А.

Тело 3 (рисунок 16, г):

$$\sum F_{ky} = 0, \quad y_B + F \sin \alpha - m_3 g - F_{3-2} - F'_{3-2} = 0 \quad (32)$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0, \quad F_{3-2} \cdot R_3 - M_3^H - F'_{3-2} \cdot R_3 - F_{3-4} \cdot R_3 = 0 \quad (33)$$

где $M_3^H = I_B \cdot \varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} \cdot 19,6 = \frac{4 \cdot 0,15^2}{2} \cdot 19,6 = 0,88 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Умножим уравнение (32) на R_3 и сложили левые и правые части уравнений (32) и (33), получим

$$y_B \cdot R_3 + F \sin \alpha \cdot R_3 - m_3 g R_3 - F_{3-2} \cdot R_3 - F'_{3-2} \cdot R_3 + F_{3-2} \cdot R_3 - M_3^H - F'_{3-2} \cdot R_3 - F_{3-4} \cdot R_3 = 0$$

Отсюда

$$F'_{3-2} = \frac{1}{2R_3} \cdot (y_B + F \cdot \sin \alpha - m_3 g - F_{3-4}) \cdot R_3 - \frac{M_3^H}{2R_3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(36,04 + 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot 9,8 - 11,83 \right) - \frac{0,88}{2 \cdot 0,15} = 7,32 \text{ Н}$$

Тогда из уравнения (32)

$$F_{3-2} = y_B + F \sin \alpha - m_3 g - F'_{3-2} = 36,04 + 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot 9,8 - 7,32 = 25,02 \text{ Н}$$

Балка АВ (рисунок 16, д):

$$\sum F_{kx} = 0, \quad x_A + Q_1 - x_E - x_B - Q_2 \cos 30^\circ = 0 \quad (33)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad y_A - y_E + Q_2 \sin 30^\circ - y_B = 0 \quad (34)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M_A + Q_1 \cdot \frac{AK}{2} - x_B \cdot AK + y_B \cdot BK + Q_2 \sin 30^\circ \cdot \frac{KE}{3} \sin 30^\circ -$$

$$- Q_2 \cos 30^\circ \cdot \left(AK - \frac{KE}{3} \cdot \cos 30^\circ \right) - x_E (AK - KE \cos 30^\circ) -$$

$$- y_E \cdot KE \cdot \sin 30^\circ = 0 \quad (36)$$

Из уравнения (34)

$$x_A = x_E - Q_1 + Q_2 \cos 30^\circ + x_B = 11,83 - 300 + 150 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 23,67 = -134 \text{ Н}$$

Из уравнения (35)

$$y_A = y_E - Q_2 \sin 30^\circ + y_B = 12,74 - 150 \cdot \frac{1}{2} + 36,04 = -26,22 \text{ Н}$$

Из уравнения (36)

$$\begin{aligned} M_A &= -Q_1 \cdot \frac{AK}{2} + x_B \cdot AK - y_B \cdot BK - Q_2 \sin 30^\circ \cdot \frac{KE}{3} \cdot \sin 30^\circ + \\ &+ Q_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \left(AK - \frac{KE}{3} \cdot \cos 30^\circ \right) + y_E \cdot KE \cdot \sin 30^\circ + x_E \cdot \left(AK - KE \cdot \cos 30^\circ \right) = \\ &= -300 \cdot 0,15 + 23,67 \cdot 0,3 - 36,04 \cdot 0,3 - 150 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot \frac{1}{2} + 150 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(0,3 - 0,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \\ &+ 12,74 \cdot 0,3 \cdot \frac{1}{2} + 11,83 \cdot \left(0,3 - 0,3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -26,04 \text{ Н}\cdot\text{м} \end{aligned}$$

Динамические добавки компонентов реакции заделки А:

$$/X_{A \text{ движ.}} - X_{A \text{ равн.}}/ = 134 - 134 = 0$$

$$/Y_{A \text{ движ.}} - Y_{A \text{ равн.}}/ = /26,22 - 32,1/ = 5,88 \text{ Н}$$

$$/M_{A \text{ движ.}} - M_{A \text{ равн.}}/ = /26,04 - 21,09/ = 4,95 \text{ Н}$$

Список использованных источников

1 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для студ. вузов /А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского. - 11-е изд., стер.-М.;Интеграл-Пресс, 2004.-382 с.

2 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для вузов/С.М.Тарг.-15-е изд., стер.-М.:Высш. шк.,2005.- 416 с.

3 Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: учебное пособие для студ. вузов по техн. спец. В 2-х томах/ Н. В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р.Меркин. СПб.:Лань.-5-ое изд.,-испр.-1998.-729 с.

4 Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2-х т./М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-9-е изд., перераб.-М.:Наука, 1990.-670 с.