МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра физики

И.Н. АНИСИНА, А.А. ОГЕРЧУК

# «ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОЛЕСА МЕТОДОМ ВРАЩЕНИЯ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 117

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов

Оренбург 2007

УДК 530.231(076.5)
ББК 22.21 я73
А 67

Рецензенты
доктор физико-математических наук, профессор Н.А.Манаков
кандидат технических наук, доцент Ф.Г.Узенбаев

**Огерчук А.А.**
**А-67 Определение момента инерции колеса методом вращения: методические указания к лабораторной работе № 117 / А.А.Огерчук, И.Н.Анисина. - Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007. – 9 с.**

Методические указания предназначены для студентов дневного, вечернего и заочного факультетов технических специальностей для выполнения лабораторной работы №117 «Определение момента инерции колеса методом вращения»

**ББК 22.21 я73**

# Содержание

# 1 Лабораторная работа №117. Определение момента инерции колеса методом вращения

## 1.1 Цель работы

**1.1.1 Уяснить физический смысл момента инерции тел.**
**1.1.2 Познакомиться с экспериментальным методом определения момента инерции колеса.**
**1.1.3 Определить расчетным и опытным путем момент инерции колеса методом вращения.**

## 1.2 Теоретические сведения

Вращательное движение абсолютного твердого тела относительно неподвижной оси описывается уравнением:

$$J \cdot \varepsilon = M \tag{1}$$

где $J$ — момент инерции твердого тела относительно оси вращения,
ε – угловое ускорение тела, определяемое как вторая производная от угла поворота по времени,
$M$ — момент внешних сил, приложенных к телу, называемый иначе вращательным моментом.

Уравнение (1) выражает основной закон динамики вращательного движения, как материальной точки, так и любого твердого тела вокруг неподвижной оси.

Таким образом, с физической точки зрения момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Его значение можно определить как теоретически, так и экспериментально.

Теоретическое определение сводится к тому, что тело мысленно разбивается на большое число n элементарных кусочков или материальных точек массой $\Delta m_i$. Определяется момент инерции $J_i$ каждого i – го кусочка относительно оси вращения тела, затем находится момент инерции тела J, как сумма моментов инерции всех элементарных кусочков, т.е.

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i \tag{2}$$

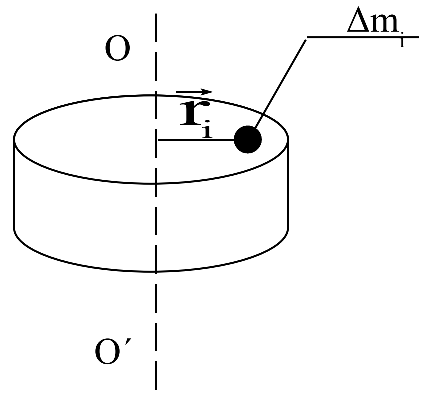


Рисунок 1

Момент инерции i-ой материальной точки массой $\Delta m_i$ относительно оси OO′ – скалярная величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от точки до оси вращения OO′ (см. рисунок 1):

$$J_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 . \tag{3}$$

Следовательно, момент инерции любого твердого тела согласно формуле (2) и (3) найдется так:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot r_i^2 \qquad (4)$$

Величина $J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot r_i^2$, равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстоянии от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно этой оси.

Если тело разбили на бесконечное число кусочков, то суммирование в выражении (4) превращается в интегрирование и выражение (4) принимает вид:

$$J = \int_0^m r^2 dm \qquad (5)$$

Если вокруг оси вращается система тел с моментами инерции $J_1$, $J_2$,…$J_n$ , то общий момент инерции системы тел будет равен сумме моментов инерции отдельных тел системы:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n$$

Момент инерции существует безотносительно к вращению. Всякое тело независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется или покоится.

Для некоторых тел простой формы, возможен прямой расчет момента инерции.

***Примеры вычислений момента инерции различных тел.***

1 Полый цилиндр или обруч (вся масса сосредоточена на ободе).
Разобьем тело на элементарные части и запишем для тела момент инерции

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 = I; \; I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Так как для обруча $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots$ - радиус обруча, то

$I = r^2 \left(m_1 + m_2 + \ldots + m_n\right)$ или $I = mr^2$ (6) где

$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$ масса всего обруча (полого цилиндра).

2 Сплошной цилиндр или диск радиуса *R*. Ось совпадает с осью вращения. Тогда момент инерции

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho \, 2\pi r h dr = \rho \, 2\pi \, h \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi h \rho \, \frac{R^4}{4} = \pi \rho h \frac{R^4}{2}$$

Величина $\pi R^2 h$ – объем диска, значит $\rho \pi R^2 h$ – масса диска m.
Следовательно,

$$J = \frac{mR^2}{2}$$

3 Шар. Момент инерции $I = \frac{2}{5} mR^2$, где $R$ - радиус шара.

4 Стержень из однородного материала, Ось вращения проходит через середину стержня. Разобьем стержень на элементы массы $\Delta m$ и запишем момент инерции для i-го элемента

$$I_i = \Delta m x^2$$

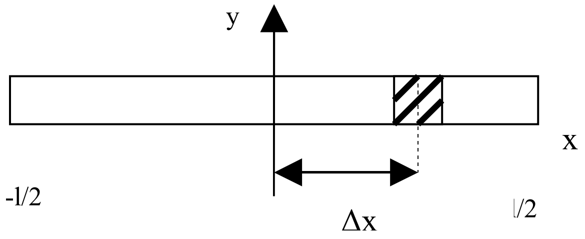


Рисунок 2

Вычислим момент инерции всего стержня учитывая, что линейная плотность массы τ равна:

$\tau = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$ (здесь $m$ и $l$ - масса и длина стержня)

$$I = \sum I_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dm \cdot x^2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \tau d = \tau \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1/2}^{1/2} = \tau \left( \frac{l^3}{8 \cdot 3} + \frac{l^3}{8 \cdot 3} \right) = \tau \frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} ml^2$$

т.е. $I = \frac{1}{12} ml^2$

5 Велосипедное колесо. Разобьем обод колеса на $N$ отдельных фрагментов, размеры которых много меньше радиуса колеса. Тогда каждый такой фрагмент можно считать материальной точкой, и момент инерции для него запишется как

.

Момент инерции всего колеса определится как сумма моментов инерции отдельных фрагментов.

$$I = \sum_{i=1}^{N} \Delta I_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i = MR^2$$

.

Вклад ступицы в момент инерции колеса можно не учитывать, так как расстояние отдельных фрагментов ступицы в момент инерции колеса много меньше вкладов от фрагментов обода колеса, поскольку радиус ступицы много меньше радиуса обода колеса.

Момент инерции рассмотренных тел даны относительно осей, проходящих через центры инерции (центры масс) этих тел. Чтобы найти I относительно произвольной оси, надо к моменту инерции $I_0$ (относительно оси через центр масс) прибавить произведение $m$ тела на $a^2$ :

$I = I_0 + ma^2$ (теорема Штейнера),

где $a$ - расстояние от произвольной оси до параллельной оси, проходящей через центр масс.

При сложной форме тела и неравномерном распределении его плотности аналитический расчет величины момента инерции может стать достаточно сложной задачей.

В данной работе рассматриваются способ экспериментального определения момента инерции с помощью изучения вращательного движения велосипедного колеса.

**Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения**.

Рассмотрим, как и в предыдущем случае, тело $A$, закрепленное на оси $O$, проходящей через центр масс (рисунок 3). Соосно с телом закреплен цилиндр $C$, на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом $B$.

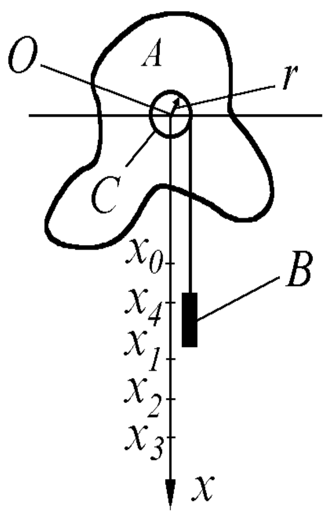


Рисунок 3

Под действием силы тяжести груз будет опускаться, приводя исследуемое тело $A$ во вращение. Уравнение движения груза $B$, уравнение вращательного движения тела $A$ и уравнение кинематической связи имеют вид

$$ma = mg - T, \quad (7)$$

$$J\varepsilon = Tr - M_{mp}, \quad (8)$$

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (9)$$

где $m$ — масса груза $B$,

$J$ — момент инерции исследуемого тела вместе с цилиндром $C$,

$g$ — ускорение силы тяжести,

$T$ — натяжение нити,

$r$ — радиус цилиндра, на который намотана нить,

$M_{тр}$ — момент сил трения,

$a$ — ускорение тела $B$.

Из уравнений (7)–(9) получаем

$$J = mr^2\left(\frac{g}{a} - 1\right) - \frac{M_{тр} r}{a}. \tag{10}$$

Таким образом, если известно ускорение груза $B$ и момент сил трения в оси, то по формуле (10) мы можем определить момент инерции исследуемого тела.

Предположим, что груз начинает опускаться с отметки $x_0 = 0$, а мы измеряем время $\Delta t$ прохождения его между двумя точками $x_1$ и $x_2$. Движение груза на участке $x_1 - x_2$ является равноускоренным, и можно записать

$$x_1 = x_0 + \frac{at_1^2}{2}, \tag{11}$$

$$x_2 = x_0 + \frac{a(t_1 + \Delta t)^2}{2}, \tag{12}$$

где $t_1$ — время прохождения участка $x_1 - x_0$, $\Delta t$ — время прохождения участка $x_2 - x_1$.

Из (11) и (12) следует:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}\right) \tag{13}$$

Решая это уравнение относительно ускорения $a$, находим

$$a = 2\frac{(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}{\Delta t^2} \tag{14}$$

Таким образом, для определения $a$ нам нужно знать $x_0, x_1, x_2$ и время $\Delta t$ прохождения грузика между точками с координатами $x_1$ и $x_2$.

Рассмотрим соотношения, позволяющие определить момент сил трения.

При опускании груза с отметки $x_0$ на полную длину нити до отметки $x_3$ его потенциальная энергия переходит в кинетическую и в некоторое количество тепловой энергии, по величине равное работе сил трения,

$$mg(x_3 - x_0) = E_к + \Phi \cdot M_{тр} \tag{15}$$

где $\Phi$ — полный угол поворота тела при его опускании, $E_к$ — кинетическая энергия системы в нижней точке. Предполагается, что момент силы трения при движении остается постоянным, т.е. не зависит от скорости.

После того, как груз опустится на полную длину нити до отметки $x_3$, тело будет продолжать вращаться, и нить начнет наматываться на цилиндр. В результате груз поднимется до отметки $x_4$. Очевидно,

$$E_K = mg(x_3 - x_4) + \Phi_1 \cdot M_{mp}, \qquad (16)$$

где $\Phi_1$ — полный угол поворота тела при подъеме груза.

Учитывая, что $(x_3 - x_0) = r \cdot \Phi$ и $(x_3 - x_4) = r \cdot \Phi_1$, получаем величину момента силы трения

$$M_{mp} = mgr\frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4} \qquad (17)$$

### 1.3 Экспериментальная часть

Работа выполняется на установке, представляющей собой велосипедное *колесо* (рисунок 4), закрепленное на горизонтальной оси. Колесо имеет соосный с ним *цилиндр*, на который наматывается нить с прикрепленным к ней *грузом.* На внутренней стороне обода колеса симметрично по диаметру расположены два *устройства для крепления груза* из легких и коротких трубок. Помещая груз в *устройство* для его *крепления*, получаем физический маятник, который может колебаться около положения равновесия. Угол отклонения может быть определен по *угломерной шкале*. В том случае, когда груз освобожден под действием силы тяжести он начнет опускаться, приводя колесо во вращение. Для измерения временных интервалов используется секундомер.

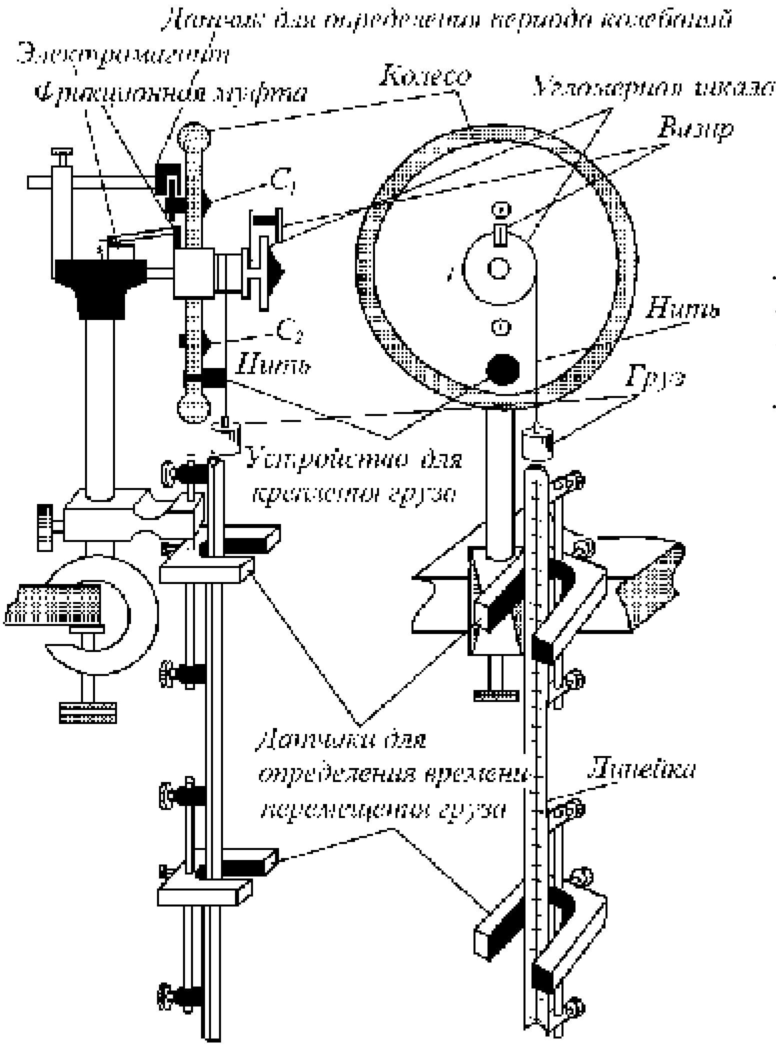


Рисунок 4- Блок- схема установки для определения момента инерции колеса

1 Освободить груз и измерить время $\Delta t$ прохождения груза между отметками $x_1$ и $x_2$. Измерения провести не менее 7 раз для фиксированных значений $x_0, x_2$ и разных $x_1$, каждый раз занося данные в табл. 1.

2 Измерить координату $x_3$ точки, до которой опускается груз при полностью размотанной нити и координату $x_4$ точки, до которой поднимается груз при дальнейшем наматывании нити на цилиндр, пока колесо продолжает свободно вращаться.
3 Несколько раз (в разных направлениях) измерить радиус $r$ цилиндра, на который наматывается нить.

Таблица 1

| n | $x_1$ | $x_2$ | $\Delta t$ | $a_n$ | $\langle a \rangle$ | $S_a$ | $x_0$ | $x_3$ | $x_4$ | $M_{тр}$ | $\langle M_{тр} \rangle$ | $S_{M тр}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| . . . . . | | | | | | | | | | | | |

4 По формулам $a = 2\dfrac{(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}{\Delta t^2}$ и $M_{mp} = mgr\dfrac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}$ определить ускорения $a_n$ и моменты сил трения $M_{тр}$ для каждого измерения. Результаты измерений заносятся в табл. 1.

5 Поскольку $a_n$, $M_{тр}$ определяются для различных значений $x_1$, то будем считать полученные значения ускорений и моментов сил трения независимыми. Найти выборочные средние значения ускорения и момента сил трения и выборочные стандартные отклонения этих величин. Результаты вычислений занести в таблице 1.

6 Вычислить выборочное среднее значение радиуса цилиндра $\langle r \rangle$ и среднеквадратичную ошибку этой величины.

7 По формуле $J = mr^2\left(\dfrac{g}{a} - 1\right) - \dfrac{M_{mp} r}{a}$ определить значение момента инерции колеса и его погрешность.

8 По формуле $I = mR^2$ рассчитать момент инерции колеса и сравнить со значением, полученным экспериментально в пункте 7.

### 1.4 Контрольные вопросы

1.4.1 Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.

1.4.2 Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?

1.4.3 Чему равны моменты инерции следующих тел: обруч, диск, цилиндр, шар, однородный стержень? Как их получить?

1.4.4 Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.

## Список использованных источников

1 **Алешкевич В.А.,** Механика твердого тела: лекции: Университетский курс общей физики / В.А. Алешкевич, Л.Г.Деденко, В.А. Караваев. - Изд-во физического факультета МГУ, 1998. – 12 с.

2 **Савельев, И.В.** Курс общей физики: учебное пособие: в 3т.-Т.1: Механика. Молекулярная физика / И.В.Савельев. – М.: Наука,1988. – 496 с.

3 **Трофимова, Т.И.** Курс физики : учебное пособие для вузов / Т.И.Трофимова. – М.: Высш.шк., 2001. – 542 с.