МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

Е.Н. ЩЕРБИНИНА, О.В. ОСТРАЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно – издательским советом
государственного образовательного учреждения высшего профессионального
образования "Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2006

УДК 519.21 (07)
ББК 22.171 я7
Щ 64

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент Л.М. Невоструев

Щербинина Е.Н.
Щ 64 Теория вероятностей: методические указания / Е.Н. Щербинина О.В. Острая. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006.-49 с.

Методические указания посвящены основным понятиям теории вероятностей. В нем содержатся теоретические вопросы и практические задания к типовому расчету по данной теме, а также основные рекомендации по выполнению такого задания и список используемой литературы.

Методические указания предназначены для студентов заочного отделения технических специальностей, изучающих теорию вероятностей.

Содержание

1 Случайные события

1.1 Основные понятия теории вероятностей

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Пример 1.1. Если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное.

В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S.

Пример 1.2. Событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти.

Пример 1.3. Если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие при «бросании монеты выпал «герб» - случайное.

В дальнейшем, вместо того чтобы говорить «совокупность условий S осуществлена», будем говорить кратко: «произведено испытание». Таким образом, событие будет рассматриваться как результат испытания.

Пример 1.4. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это испытание. Попадание в определенную область мишени – событие.

События называют ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1.5. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» – несовместные.

Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Пример 1.6. Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

События называют ***равновозможными***, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 1.7. Появление «герба» и появление надписи при бросании монеты – равновозможные события.

1.2 Классическое определение вероятности

Вероятность – одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют ***классическим***.

Каждый из возможных результатов испытания назовем ***элементарным исходом***. Те элементарные исходы, в которых наступает интересующее нас событие, называется ***благоприятствующими*** этому событию.

Отношение числа благоприятствующих событию А элементарных исходов к их общему числу называют ***вероятностью события А*** и обозначают P(A).

Итак, вероятность события А определяется формулой:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих А; n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместные, равновозможные и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае m=0, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = 0.$$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 \le m \le n$, значит $0 \le \frac{m}{n} \le 1$, следовательно $0 \le P(A) \le 1$.

Пример 2.1. Из букв слова УРАВНЕНИЕ выбирается наугад одна буква. Какова вероятность, что эта буква будет гласной?

Решение: $m = 5$ – количество гласных букв, $n = 9$ – всего букв; $P(A) = \frac{5}{9}$.

1.3 Основные формулы комбинаторики

В реальной жизни каждый из нас сталкивался с ситуацией, когда необходимо осуществлять выбор: например, заполнить карточку Спортлото или выбрать места в театре. Заметим, что каждое из этих действий можно осуществить несколькими способами.

Задачи, цель которых - определение числа способов осуществления того или иного действия, называются ***комбинаторными,*** а наука, изучающая способы решения таких задач называется ***комбинаторикой***.

Множество из n элементов называется ***упорядоченным***, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие натуральное число (номер элемента) от 1 до n. В противном случае множество называется ***неупорядоченным***.

Различные упорядоченные множества одного и того же множества из n элементов называются ***перестановками*** этого множества. Число перестановок множества из n элементов равно $n!$: $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, (0!=1).

Пример 3.1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в число только один раз?

Решение: Таких чисел можно составить $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Очень часто в реальной жизни нам приходится решать проблемы следующего типа: как из множества, состоящего из n элементов, выбрать упорядоченное подмножество из m элементов. Например, как рассадить за праздничным столом 12 гостей, если всего 15 мест?

Упорядоченное m – элементное подмножество множества из n элементов называется ***размещением*** из n элементов по m.

Число размещений множества из n элементов по m: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Пример 3.2. Студенту необходимо сдать 4 экзамена в течение 10 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание экзаменов? (Предполагается, что в день сдается только один экзамен.)

Решение: Решение данной задачи сводится к определению числа способов расстановки 4-х различных предметов по 10 местам. Следовательно, число способов составить данное расписание равно:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

В практической жизни нам часто приходится также решать и такие задачи: как из множества, состоящего из n элементов, выбрать неупорядоченное подмножество из m элементов?

Например, в студенческой группе из 25 человек выбрать 3-х для выполнения какой-нибудь общественной работы. Порядок выдвижения кандидатур в этом случае значения не имеет: с точки зрения результатов наборы: " Иванов, Петров, Сидоров"; "Петров, Иванов, Сидоров", ..., "Сидоров, Петров, Иванов" являются одинаковыми.

Произвольное m-элементное неупорядоченное подмножество множества из n элементов называется ***сочетанием*** из n элементов по m.

Число сочетаний множества из n элементов по m: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример 3.3. Сколькими способами можно заполнить карточку "Спортлото 6 из 49 "?

Рушение: Нетрудно заметить, что окончательный результат не зависит от того, в какой последовательности вы зачеркиваете цифры. Следовательно, находим сочетания при n = 49 и m = 6, получаем, что число способов равно:

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!\cdot 43!} = 13983916.$$

Правило умножения:

Если требуется выполнить одно за другим k действий, причем первое действие можно осуществить n_1 способами, второе – n_2 способами, ..., k-тое – n_k способами; то все k действий вместе могут быть выполнены: $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Правило суммы:

Если требуется выполнить одно за другим k действий, причем 1-е действие можно осуществить n_1 способами, 2-е – n_2 способами, ..., k-тое – n_k способами; то одно из k действий могут быть выполнены: $n_1+n_2+\ldots+n_k$ способами.

1.4 Относительная частота

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей. ***Относительной частотой*** события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события А определяется формулой $W(A) = \dfrac{m}{n}$, где m – число появлений события, n – общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту - после опыта.

Пример 4.1. По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Относительная частота поражения цели

$$W(A) = \frac{19}{24}.$$

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

1.5 Произведение событий

***Произведением двух событий* A *и* B** называют событие **A·B**, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

Пример 5.1. Если A - деталь годная, B - деталь окрашенная, то $A \cdot B$ - деталь годная и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Пример 5.2. Если A, B, C — появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то $A \cdot B \cdot C$ - выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Во введении случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют ***безусловной,*** если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют ***условной.*** Например, часто вычисляют вероятность события B при дополнительном условии, что произошло событие A. Заметим, что и безусловная вероятность, строго говоря, является условной, поскольку предполагается осуществление условий S.

***Условной вероятностью* P(B/A)** называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример 5.3. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение: После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P(B/A) = \frac{3}{5}$.

Условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, по определению, равна $P(B/A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}$ (P(A)>0).

Теорема умножения вероятностей: Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A) \tag{5.1}$$

З а м е ч а н и е. Применив последнюю формулу к событию $B\cdot A$, получим $P(B\cdot A)=P(B)\cdot P(A/B)$, или, поскольку событие $B\cdot A$ не отличается от события $A\cdot B$,

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B) \tag{5.2}$$

Сравнивая формулы (5.1) и (5.2), заключаем о справедливости равенства

$$P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Следствие: Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:
$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2A_3\ldots A_{n-1})$, где $P(A_n/A_1A_2A_3\ldots A_{n-1})$ - вероятность события A_n вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ наступили.

Пример 5.4. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков - конусный, а второй - эллиптический.

Решение: Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие A), $P(A)=\dfrac{3}{10}$. Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик - конусный, т. е. условная вероятность $P(B/A)=\dfrac{7}{9}$. По теореме умножения, искомая вероятность $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{30}$.

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A.

***Событие* B *называют независимым от события* A**, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности: $P(B/A)=P(B)$.

Подставив последнее равенство в соотношение $P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$, получим $P(A)\cdot P(B)=P(B)\cdot P(A/B)$. Отсюда $P(A/B)=P(A)$, т.е. условная вероятность события A в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие A не зависит от события B.

Итак, если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B; это означает, что свойство независимости событий взаимно.

Для независимых событий теорема умножения вероятностей имеет вид $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ принимают в качестве определения независимых событий.

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют ***зависимыми***.

Пример 5.5. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) – 0,7.

Решение: События A и B независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Несколько событий называют попарно независимым, если каждые два из них независимы. Например, события A, B, C попарно независимы, если независимы события A и B, A и C, B и C.

Для того чтобы обобщить теорему умножения на несколько событий, введем понятие независимости событий в совокупности.

Несколько событий называют ***независимыми в совокупности*** (или просто ***независимыми***), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Например, если события A_1, A_2, A_3 независимы в совокупности, то независимы события A_1 и A_2, A_1 и A_3, A_2 и A_3, A_1 и $A_2 \cdot A_3$, A_2 и $A_1 \cdot A_3$, A_3 и $A_1 \cdot A_2$. Из сказанного следует, что если события независимы в совокупности, то условная вероятность появления любого события из них, вычисленная в предположении, что наступили какие-либо другие события из числа остальных, равна его безусловной вероятности.

Приведем теперь следствие из теоремы умножения.

Следствие: Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий: $P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

1.6 Сумма событий

***Суммой* A+B *двух событий* A *и* B** называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.

Пример 6.1. Если из орудия произведены два выстрела и A - попадание при первом выстреле, B - попадание при втором выстреле, то A+B - попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

В частности, если два события A и B - несовместные, то A+B - событие, состоящее в появлении одного из этих, событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Событие A+B+C состоит в появлении одного из следующих событий: A, B, C, A и B, A и C, B и C, A и B и C.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий: Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B)=P(A)+P(B).

Следствие: Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Пример 6.2. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих в 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение: Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного шара (событие A) $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Вероятность появления синего шара (событие B) $P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$. События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность $P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Теорема сложения вероятностей совместных событий: Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Пример 6.3. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение: Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события A (попадание первого орудия) и B (попадание второго орудия) независимы. Вероятность события A·B (оба орудия дали попадание) $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Искомая вероятность:
$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94$.

1.7 Полная группа событий

Теорема. Сумма вероятностей несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Пример 7.1. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов А, В и С. Вероятность получения пакета из города А равна 0,7, из города В - 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города С.

Решение: События «пакет получен из города А», «пакет получен из города В», «пакет получен из города С» образуют полную группу несовместных событий, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице: $0{,}7 + 0{,}2 + P = 1$. Отсюда искомая вероятность $P = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через А, то другое принято обозначать $\overline{A}$.

Пример 7.2. Попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если А – попадание, то $\overline{A}$ – промах.

Теорема: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Пример 7.3. Вероятность того, что день будет дождливым, р=0,7. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение: События «день дождливый» и «день ясный» – противоположные, поэтому искомая вероятность $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

1.8 Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема: Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$: $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$, где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$.

Частный случай: Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную р, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий $P(A) = 1 - q^n$.

Пример 8.1. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение: Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности. Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 (т.е. вероятности промахов), соответственно равны: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. $P(A) - 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994$.

1.9 Формула полной вероятности

Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) \cdot \ldots \cdot P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Эту формулу называют «**формулой полной вероятности**».

Пример 9.1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) - стандартная.

Решение: Обозначим через А событие «извлеченная деталь стандартна». Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие H_1), либо из второго (событие H_2). Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, $P(H_1) = \frac{1}{2}$. Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, $P(H_2) = \frac{1}{2}$. Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P(A/H_1) = 0{,}8$. Условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь, $P(A/H_2) = 0{,}9$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь - стандартная, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

1.10 Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют ***гипотезами***. Вероятность появления события А определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) \cdot \ldots \cdot P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие А. Поставим своей задачей определить, как изменились (в связи с тем, что событие А уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности $P(H_1/A), P(H_2/A), \ldots, P(H_n/A)$.

Найдем сначала условную вероятность $P(H_1/A)$. По теореме умножения имеем $P(A \cdot H_1) = P(A) \cdot P(H_1/A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1)$.

Отсюда $P(H_1/A)=\dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}$

Аналогично выводятся формулы, определяющие условные вероятности остальных гипотез:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Заменив здесь P(A) по формуле полной вероятности, получим формулы, которые называют ***формулами Бейеса*** (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

Пример 10.1. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение: Обозначим через А событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза H_1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза H_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса: $P(H_1/A)=\dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}$.

По условию задачи имеем: $P(H_1)=0,6$ (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру); $P(H_2)=0,4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру); $P(A/H_1)=0,94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной); $P(A/H_2)=0,98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной). Искомая вероятность

$$P(H_1/A)=\frac{0,6\cdot 0,94}{0,6\cdot 0,94+0,4\cdot 0,98}\approx 0,59.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы H_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

1.11 Повторение испытаний

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют ***независимыми относительно события* А**.

В разных независимых испытаниях событие А может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие А имеет одну и ту же вероятность.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события А в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$.

Обозначим вероятность наступления события А при n испытаниях ровно k раз $P_n(k)$. Символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой формулы Бернулли.

Вероятность события, состоящего в том, что в n испытаниях событие А наступит k раз и не наступит n-k раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k q^{n-k}$. Таких событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. C_n^k. Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления k раз события А в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$. Полученную формулу называют ***формулой Бернулли***. Число m_0 называется ***наивероятнейшим*** числом наступлений события А в n независимых испытаниях, если значение $P_n(m)$ при $m=m_0$ не меньше остальных значений $P_n(m)$, т.е. $P_n(m_0) \geq P_n(m_i)$, при $m_i \neq m_0$. Если $p \neq 0$ и $p \neq 1$, то число m_0 можно определить из двойного неравенства:

$$np - q \leq m_0 \leq np + q .$$

Пример 11.1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p=0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение: Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна $p=0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q=1-p=1-0,75=0,25$. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна $P_6(4) = C_6^4 \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 = 0,3$.

Формула Бернулли позволяет вычислить вероятность того, что событие появится в n испытаниях ровно k раз. При выводе мы предполагали, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна, однако формула Бернулли непригодна, если число испытаний достаточно велико. В этом случае применяем локальную теорему Лапласа, которая дается асимптотической формулой.

Локальная теорема Лапласа: Если вероятность p появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие А появится в n испытаниях равно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции:

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ при } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

В приложении А помещены значения функции $\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$,

соответствующие положительным значениям аргумента x. Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Итак, вероятность того, что событие А появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ при } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Пример 11.2. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение: По условию, n=400; m=80; p=0,2; q=0,8. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа. По таблице приложения 1 находим $\varphi(0)$ = 0,3989. Искомая вероятность:

$$P(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \frac{\varphi(80 - 400 \cdot 0{,}2)}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 = 0{,}04986.$$

Вновь предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна p ($0 < p < 1$). Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие А появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»)?

Интегральная теорема Лапласа: Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие А появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x'}^{x''} e^{\frac{-z^2}{2}} dz, \text{ где } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами (приложение Б), для $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}}dz$, так как неопределенный интеграл $\int_{x'}^{x''} e^{\frac{-z^2}{2}}dz$ не выражается через элементарные функции.

Т.о., вероятность того, что событие А появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз находится как $P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x'')-\Phi(x')$,где $x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}}dz$ нечетная, т.е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

При $x>5$ значение функции $\Phi(x)$ равно 0,5.

Пример 11.3. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна p=0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение: По условию, p=0,2; q=0,8; n=400; k_1=70; k_2=100. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70,100)=\Phi(x'')-\Phi(x'),\ x'=\frac{70-400\cdot0{,}2}{\sqrt{400\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}=-1{,}25,$$

$$x''=\frac{100-400\cdot0{,}2}{\sqrt{400\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}=2{,}5.$$ Таким образом, имеем

$P_{400}(70,100)=\Phi(2{,}5)-\Phi(-1{,}25)$. По таблице приложения 2 находим: Ф(2,5)=0,4938; Ф(1,25)=0,3944.

Искомая вероятность P_{400}(70, 100)=0,4938+ 0,3944=0,8882.

1.12 Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Вновь будем считать, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна p (0<p<1). Чтобы найти вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon>0$, другими словами, чтобы найти вероятность осуществления неравенства $\left|\frac{m}{n}-p\right| \le \varepsilon$, надо воспользоваться формулой:

$$P\left(\left|\frac{n}{m}-p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\cdot\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{qp}}\right).$$

Пример 12.1. Вероятность того, что деталь не стандартна, p=0,1. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности p=0,1 по абсолютной величине не более чем на 0,03,

Решение: По условию, n=400; p=0,1; q= 0,9; ε=0,03. Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right| \le 0{,}03\right)$. Пользуясь формулой

$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\cdot\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{qp}}\right)$, имеем:

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right| \le 0{,}03\right) = 2\cdot\Phi(0{,}03\cdot\sqrt{\frac{400}{0{,}1\cdot 0{,}9}}) = 2\cdot\Phi\left(2\right) = 2\cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

По таблице приложения 2 находим Ф(2)=0,4772.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности p=0,1 по абсолютной величине не превысит 0,03.

2 Случайные величины

2.1 Виды случайных величин. Задание дискретной случайной величины

Рассмотрим события, состоящие в появлении того или иного числа. При бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Заранее определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 есть ***возможные значения*** этой величины. ***Случайной*** называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, заранее не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Случайные величины бывают дискретные и непрерывные.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывная случайная величина может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные значения, нужно еще указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности.

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X=x_1$, $X=x_2$, ..., $X=x_n$ образуют полную группу, следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. $P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)=1$.

Пример 1.1. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 5000 руб. и десять выигрышей по 1000 руб. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение:

X	0	1 000	5 000
P	0,89	0,1	0,01

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют ***многоугольником распределения***.

Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если вероятность одной из них принять значение, лежащее в любом промежутке области ее значений, не зависит от того, какое значение приняла другая величина.

Потоком событий называется последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. Примером потока служит поступление вывозов на АТС и т.д.

Рассмотрим свойства , которыми могут обладать потоки.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом различные промежутки времени предполагаются непересекающимися.

Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно.

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Интенсивностью потока k называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

2.2 Наиболее часто встречающиеся дискретные случайные величины

1. Случайная величина X, имеющая биномиальное распределение с параметрами n, p: x_k=0, 1, 2, ..., n; $p_k = P(x = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$. Типичный пример - случайная величина, описывающая число успехов при n независимых испытаниях с вероятностью успеха p в каждом.

Пример 2.1. Составить закон распределения случайной величины X- число появлений герба при двух бросаниях монеты.

Решение: Данная случайная величина X может рассматриваться как число успехов m при n=2 испытаниях с вероятностью успеха p=0,5; следовательно, ее возможные значения: 0, 1, 2.

$$P(X = 0) = C_2^0 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}25,$$

$$P(X = 1) = C_2^1 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^1 = 0{,}5,$$

$$P(X = 2) = C_2^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^0 = 0{,}25.$$

2. Случайная величина X, имеющая гипергеометрическое распределение с параметрами N, M, n: $P(X=m)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

В частности, этому закону подчиняется случайная величина, описывающая выбор (без возвращения) объема n из совокупности объема N, содержащей M интересующих нас предметов. Значения m случайной величины - число интересующих нас предметов.

Пример 2.2. В партии из 10 деталей имеется 9 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение: Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами N=10, M=9, n=2, m=1,2: $P(X=m)=\dfrac{C_9^m C_1^{2-m}}{C_{10}^2}$.

$$C_{10}^2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=45.$$

$$C_9^1 C_1^1=\frac{9!}{1!(9-1)!}\,\frac{1!}{1!(1-1)!}=9.$$

$$C_9^2 C_1^0=\frac{9!}{2!(9-2)!}\,\frac{1!}{0!(1-0)!}=36.$$

$P(X=1)=\dfrac{9}{45}=0{,}2$; $P(X=2)=\dfrac{36}{45}=0{,}8$.

x_i	1	2
p_i	0,2	0,8

3. Случайная величина X, имеющая геометрическое распределение с параметром p (0<p<1). Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p (0<p<1) и, следовательно, вероятность его не появления q=1–p. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие A появилось в k-ом испытании, то в предшествующих k-1 испытаниях оно не появлялось. x_k = 0, 1, 2, ..., k, ...; $p_k=P(X=x_k)=p(1-p)^k$.

Пример 2.3. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется составить закон распределения случайной величины X - числа патронов, выданных стрелку.

Решение: Данная случайная величина X может принимать счетное число значений: 1, 2, 3, ..., k, ... P(X=1)=0,2 - стрелок промахнулся при первом выстреле. P(X=2)=0,8·0,2=0,16 - при первом выстреле стрелок попал, а при втором - промахнулся. $P(X=3)=0{,}8^2 \cdot 0{,}2=0{,}128$ – стрелок промахнулся при третьем выстреле, а при первом и втором - попал. $P(X=k)=0{,}8^{k-1} \cdot 0{,}2$ – стрелок промахнулся при k-ом выстреле, а при первых k-1 выстрелах промаха не было. Следовательно, закон распределения случайной величины X имеет вид:

$x_k=k,\ k\in \mathbf{N},\ p_k=0{,}8^{k-1} \cdot 0{,}2$.

4. Случайная величина X, имеющая распределение Пуассона.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения вероятности k появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала ($p\le 0{,}1$). В этих случаях (n велико, p мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона: $P_n(k) = a^k \cdot \frac{e^{-a}}{k!}$. Сделаем важное допущение: произведение $n\cdot p$ сохраняет постоянное значение, а именно $n\cdot p=a$. Это означает, что среднее число появлений события в различных сериях испытаний, т.е. при различных значениях n, остается неизменным.

Пример 2.4. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг.

Решение: $n=10000$, $m=5$, $p=0{,}0001$, $q=0{,}9999$, $n\cdot p=1$.

$$P_{10000}(5) \approx \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} \approx 0{,}003.$$

2.3 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Как уже известно, закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют ***числовыми характеристиками случайной величины***. К числу важных числовых характеристик относится математическое ожидание. Математическое ожидание приближенно равно среднему значению случайной величины. Для решения многих задач достаточно знать математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание M(X) случайной величины X определяется равенством $M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$.

Пример 3.1. Дана дискретная случайная величина X:

x	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$

Найти M(x).

Решение: $M(x)=2\cdot\frac{3}{8}+0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{3}+(-1)\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$.

Математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

Свойства математического ожидания:

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C)=C, C=\text{const}$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(C\cdot x)=C\cdot M(x)$.

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(x\cdot y)=M(x)\cdot M(y)$.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: $M(x+y)=M(x)+M(y)$.

Пример 3.2. $M(x)=1$, $M(y)=-1$. Найти $M(x-3y+3xy-1)$, x и y – независимые случайные величины..

Решение:

$M(x-3y+3xy-1)=M(x)-3\cdot M(y)+3\cdot M(x)\cdot M(y)-1=1-3\cdot(-1)+3\cdot 1\cdot(-1)-1=0$.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p.

Теорема. Математическое ожидание M(X) числа появлений события A в n независимых одинаковых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $M(X)=n\cdot p$.

Пример 3.3. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия p=0,6. Произведено 10 выстрелов. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение: Произведено 10 выстрелов, т.е. n=10. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия p=0,6. По теореме $M(x)=10\cdot 0{,}6=6$.

Случайная величина $Y=X-M(X)$ называется ***отклонением*** случайной величины X.

Заметим, что $M(Y)=M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0$.

Дисперсией (рассеиванием) случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от его математического ожидания. Обозначение: $D(X)=M((X)-M(X))^2$.

Замечание. Нетрудно понять, что дисперсия может быть определена лишь в тех случаях, когда существует соответствующее математическое ожидание. Она характеризует среднее наблюдаемое значение квадрата отклонения (рассеивания) возможных значений случайной величины от ее средне наблюдаемого значения.

Опираясь на свойства математического ожидания, можно получить более удобные для расчетов формулы:

$$D(X)=M((X)-M(X))^2=M(X^2-2\cdot X\cdot M(X)+(M(X))^2)=M(X^2)-2\cdot M(X)\cdot$$
$$\cdot M(X)+M(M(X))^2)=M(X^2)-2\cdot(M(X))^2+(M(X))^2=M(X^2)-(M(X))^2.$$
$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Пример 3.4. Дана дискретная случайная величина X:

x_k	-1	0	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$

Найти D(x).

Решение: Для расчетов воспользуемся формулой:

$D(X)=M(X)^2-(M(X))^2$. $M(X)=\frac{11}{12}$ (смотри пример 3.1.). Определим закон распределения случайной величины X^2:

x_k	0	1	4
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}+$	$\frac{3}{8}$

$$M(X^2)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{3}{8}=2\Rightarrow\ D(X)=2-\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{167}{144}.$$

Свойства дисперсии:

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю: $D(C)=0, C=\text{const}$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат: $D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X)$.

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: D(X+У)=D(X)+D(У).

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: D(X–У)=D(X)+D(У).

Пример 3.5. D(x)=1, D(y)=3. Найти D(x–3y–1).

Решение: $D(x-3y-1)=D(x)+9\cdot D(y)=1+9\cdot 3=28$.

Теорема. Дисперсия D(X) числа появлений события A в n независимых испытаниях равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в каждом испытании: D(X)=npq.

Пример 3.6. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия p=0,6. Найти дисперсию общего числа попаданий, если произведено 10 выстрелов.

Решение: Произведено 10 выстрелов, т.е. n=10. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия p=0,6. По теореме $D(X)=10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=2{,}4$.

***Средним квадратическим отклонением случайной величины* X** называется число, определяемое по формуле: $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

2.4 Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины

Дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Такой способ задания не является общим: он неприменим, например, для непрерывных случайных величин.

Действительно, рассмотрим случайную величину X, возможные значения которой сплошь заполняют интервал (a, b). Можно ли составить перечень всех возможных значений X? Очевидно, что этого сделать нельзя. Этот пример указывает на целесообразность дать общий способ задания любых типов случайных величин. С этой целью и вводят функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т.е. вероятность события $X<x$, обозначим через F(x). Разумеется, если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и F(x), т.е. F (x) – функция от x.

Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е. $F(x) = P(X < x)$.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Теперь можно дать определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют ***непрерывной***, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Свойства функции распределения.

Свойство 1. Значения функции распределении принадлежат отрезку [0, 1].

Свойство 2. F(x) – неубывающая функция, т.е. $F(X_2)\geq F(X_1)$, если $x_2 \geq x_1$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a \leq X<b)=F(b)-F(a)$.

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение равна нулю.

Свойство 3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то: 1) F (x)=0 при $x\leq a$;

2) $F(x)=1$ при $x \geq b$.

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси x, то справедливы следующие предельные соотношения: $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Перечисленные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.

График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y=0$, $y=1$ (первое свойство).

При возрастании x в интервале (a, b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «поднимается вверх» (второе свойство).

При $x \leq a$ ординаты графика равны нулю; при $x \geq b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

Замечание. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

Пример 4.1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения и построить ее график.

Решение: $F(X)=0$ при $x \leq 1$;

$F(X)=0{,}3$; при $1 < x \leq 4$;

$F(X)=0{,}3+0{,}1=0{,}4$; при $4 < x \leq 8$;

$F(X)=0{,}4+0{,}6=1$; при $x > 8$.

График функции распределения изображен на рисунке 1.

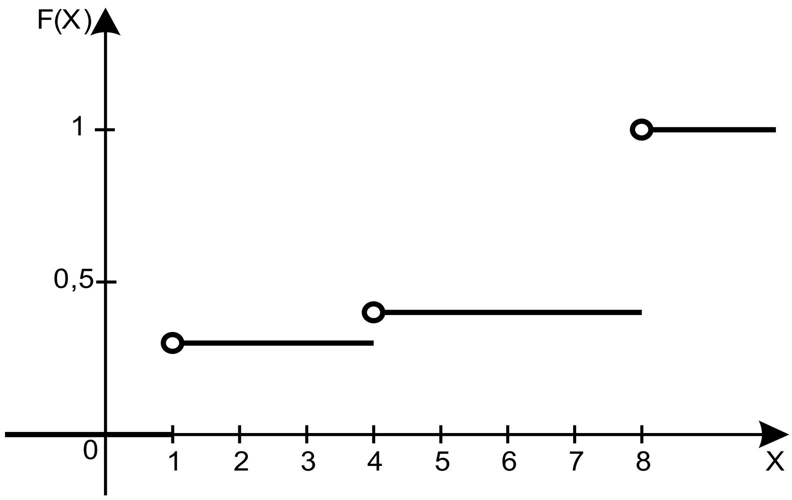

Рисунок 1

2.5 Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Выше непрерывная случайная величина задавалась с помощью функции распределения. Этот способ задания не является единственным. Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределении или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию f(x) – первую производную от функции распределения F (x): $f(x)=F'(x)$.

Пример 5.1. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0;\\ x^2, \text{ при } 0< x\le 1;\\ 1, \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины.

Решение: $f(x)=F'(x)=(x^2)'=2x$, при $0<x\le 1$;

$f(x)=0$, при $x\le 0$;

$f(x)=1'=0$, при $x>1$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0;\\ 2x, \text{ при } 0< x\le 1;\\ 0, \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу. Вычисление основано на следующей теореме.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Зная плотность распределения f(x), можно найти функцию распределения F (x) по формуле: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Свойства плотности распределения.

Свойство 1. Плотность распределения - неотрицательная функция, т.е. $f(x)>0$.

Свойство 2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от -∞ до ∞ равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

Геометрически это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Охивой распределения, равна 1. В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежащей интервалу $(a;b)$, то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Пример 5.2 Известна плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0; \\ \sin x, \text{при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию распределения случайной величины X;

2) $P\left(0 < X < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение:

1) F(x)=0, при x≤0, т.к. f(x)=0,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \sin tdt = -\cos t \Big|_0^x = 1 - \cos x, \text{ при } 0 < x \le \frac{\pi}{2},$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{\pi/2} \sin tdt + \int_{\pi/2}^{x} 0dt = -\cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \text{ при } x > \frac{\pi}{2}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0; \\ 1 - \cos, \text{при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2)\ P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\pi/4} \sin tdt = -\cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.6 Числовые характеристики непрерывных случайных величин

***Математическим ожиданием непрерывной случайной величины* X,** всевозможные значения которой принадлежат отрезку [a, b], называют определенный интеграл $M(x)=\int_a^b x \cdot f(x)dx$.

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то M(x)= $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$

.

По аналогии с дисперсией дискретной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения. Если всевозможные значения X принадлежат отрезку [a, b], то D(x)=$\int\limits_a^b [x-M(x)]^2\cdot f(x)dx$.

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то D(x)= $\int\limits_{-\infty}^{\infty} [x-M(x)]^2\cdot f(x)dx$.

Также можно воспользоваться формулой: D(x)=$\int\limits_a^b x^2 f(x)dx - M^2(x)$.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством σ(x)=$\sqrt{D(x)}$.

Пример 6.1. Дана плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 1;\\ \dfrac{2x-1}{2}, \text{при } 1< x\le 2;\\ 0, \text{при } x>2.\end{cases}$$ случайной величины X.

Найти M(x), D(x).

Решение: M(x)= $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx = 0{,}5\int\limits_1^2 x(2x-1)dx = 0{,}5\left(\frac{2}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2\right)\Big|_1^2 =$

$0{,}5\left(\frac{2}{3}\cdot 2^3-2\right)--0{,}5\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{12}$.

D(x)= $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx - M^2(x) = 0{,}5\int\limits_1^2 x^2(2x-1)dx-\left(\frac{19}{12}\right)^2 = 0{,}5\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 -$

$-\frac{361}{144}=0{,}5\left(\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right)-\frac{361}{144}=\frac{11}{144}$.

σ(x)=$\frac{\sqrt{11}}{12}$.

2.7 Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Мы видим, что нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Вероятностный смысл этих параметров таков: a есть математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

График плотности нормального распределения называют ***нормальной кривой (кривой Гаусса)***, он имеет вид, показанный на рисунке 2:

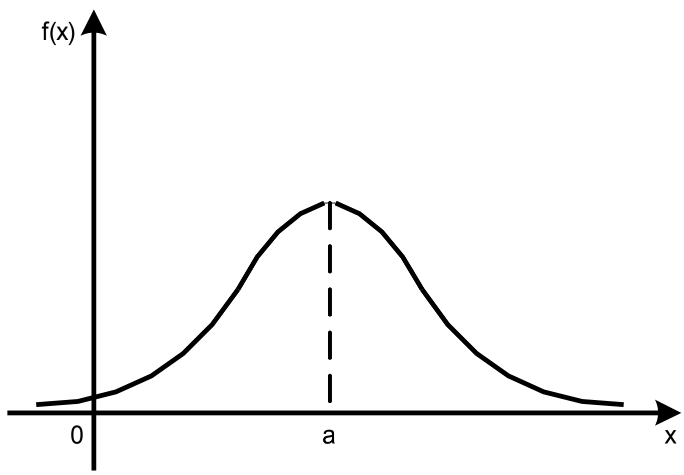

Рисунок 2

При x = a функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Уже известно, что если случайная величина X задана плотностью распределения f(x), то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), такова: $P(\alpha<x<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(a; b)$, равна $P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$. Φ(x) – функция Лапласа (см. приложение Б).

Если требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т. е. требуется найти вероятность осуществления неравенства $|X-a|<\delta$, то применяется формула: $\Phi(|X-a|<\delta)$ $=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Пример 7.1. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами a=14 и σ=3.

Найти: 1) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (10, 15);

2) вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше 0,03.

Решение: 1) Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 15) найдем по формуле:

$$P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right);$$

1) $$P(10<x<15)=\Phi\left(\frac{15-14}{3}\right)-\Phi\left(\frac{10-14}{3}\right)=\Phi(0{,}33)+\Phi(1{,}33)=$$

$$=0{,}1293+0{,}4082=0{,}5375.$$

2) $$\Phi(|X-14|<0{,}03)=2\cdot\Phi\left(\frac{0{,}03}{3}\right)=2\cdot\Phi(0{,}01)=2\cdot 0{,}004=0{,}008.$$

2.8 Показательное распределение

Если случайная величина X имеет ***показательное распределение*** с параметром α ($\alpha>0$), то плотность распределения случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \alpha\cdot e^{-\alpha x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Теорема. Если случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α, то $M(X)=\frac{1}{\alpha}$, $D(X)=\frac{1}{\alpha^2}$.

2.9 Равномерное распределение

Случайная величина X имеет ***равномерное распределение*** на отрезке $[a;b]$, если плотность распределения случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a;b];\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases}\quad (a<b)$$

Можно доказать, что если X – случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[a;b]$, то $M(X)=\frac{a+b}{2}$, $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

.

3 Закон больших чисел

Как уже известно, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих случайных причин, учесть которые невозможно. Казалось бы, поскольку о каждой случайной величине мы располагаем в этом смысле весьма скромными сведениями, то вряд ли можно установить закономерности поведения и суммы достаточно большого числа случайных величин. На самом деле это не так. Оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Для практики очень важно значение условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли (имеются и другие теоремы, которые здесь не рассматриваются). Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, Теорема Бернулли – простейшим. Для доказательства этих теорем пользуются неравенством Чебышева.

3.1 Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева справедливо для дискретных и непрерывных случайных величин. Для простоты рассмотрим это неравенство для дискретных величин.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную таблицей распределения:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Поставим перед собой задачу оценить вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания не превышает по абсолютной величине положительного числа ε. Если ε значения, достаточно мало, то мы оценим, таким образом, вероятность, того, что X примет значения, достаточно близкое к своему математическому ожиданию. П.Л. Чебышев доказал неравенство, позволяющее дать интересующую нас оценку.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

3.2 Теорема Чебышева

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа С), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Сущность теоремы такова: хотя отдельные независимые случайные величины могут принимать значения, далекие от своих математических ожиданий, среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения, близкие к определенному постоянному числу, а именно к числу

$$\frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}.$$

Иными словами, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое рассеянно мало.

Теорема Чебышева справедлива не только для дискретны, но и для непрерывных случайных величин.

3.3 Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления А равна р. Можно ли предвидеть, какова примерно будет относительная частота появления события? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Я.Бернулли, которая получила название «закона больших чисел» и положила начало теории вероятностей как науке.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность р появления события А постоянна, то вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности р по абсолютной величине не превзойдет положительного числа ε, больше, чем разность $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$, т.е.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Другими словами, если ε – сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=1.$$

3.4 Центральная предельная теорема

Нормальное распределение случайной величины широко распространено на практике. Это распространение объясняет центральная предельная теорема.

Теорема. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение близкое к нормальному.

Рассмотрим условие при котором для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ применима центральная предельная теорема.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – независимые случайные величины, каждая их которых имеет математическое ожидание $M(X_k)=a_k$ и $D(X_k)=b_k^2$.

К независимым случайным величинам $X_1, X_2, \ldots, X_n$ применима центральная предельная теорема, если при любом X выполняется неравенство:

$$\lim_{n\to\infty}P\left[\frac{S_n-A_n}{B_n}<X\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{X}e^{-\frac{z^2}{2}}dz,$$

$$\text{где } S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n,\ A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ B^2{}_n=\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

В частности, если все случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ одинаково распределены, то к ним применима центральная предельная теорема, если $D(X_k)\ne 0 \quad k=1,2,\ldots n,\ldots$.

Русский математик А.М. Ляпунов доказал, что если для $\forall\,\delta>0$ при $n\to\infty$ отношение $L_n=\frac{C_n}{B_n^{2+\delta}}\to 0$, где $C_n=\sum_{k=1}^{n}M(X_k-a_k)^{2+\delta}$, то к случайным величинам $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ применима центральная предельная теорема.

4 Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. В первом ящике 6 белых и 4 черных шаров, во втором – 7 белых и 6 черных. Из каждого ящика наугад вынули по 1 шару. Какова вероятность того, что шары разного цвета?
2. На двух станках производят одинаковые детали. Вероятность того, что деталь стандартная для 1-го станка равна 0,8, для 2-го – 0,9. Производительность второго станка втрое больше первого. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной?
3. Вероятность получения по лотерее безвыигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 400 наугад купленных билетов: а) не менее 50 и не более 60 безвыигрышных; б) ровно 100 выигрышных?
4. Отклонение длины детали от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Стандартная длина m=50 см, среднее квадратическое отклонение σ=0,3 см. Какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,9?
5. Случайная величина задана плотностью распределения f(x) Найти 1) коэффициент a; 2) функцию распределения F(x); 3) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ a \cdot x, \text{ при } 0 < x \le 4; \\ 0, \text{ при } x > 4. \end{cases}$$

6. Независимые дискретные случайные величины заданы следующими законами распределения:

x	2	3	5
p	0,3	0,5	0,2

y	1	4
p	0,2	0,8

Найти: 1) закон распределения случайной величины z=x+y; 2) M(z), D(z), σ(z).

7. D(x)=5. Найти 1) D(x–1); 2) D(–3x); 3) D(4x+6).

Вариант 2

1. В партии из 20 изделий 4 изделия имеют скрытый дефект. Какова вероятность того, что из взятых наугад 5 изделий 2 изделия имеют скрытый дефект?
2. На сборочное предприятие поступили однотипные детали с 3-х заводов в количестве: 25 с первого завода, 35 – со второго, 40 – с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0,9, на втором – 0,8, на третьем – 0,7. Какова вероятность того, что взятое наугад изделие будет качественное?
3. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока из взятых наугад трех телевизоров: а) не более одного потребуют ремонта; б) хотя бы один не потребует ремонта.
4. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	-2	-1	0	3	4
p_i	0,01	p	0,23	0,11	0,06

Найти: а) p; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; в) функцию распределения F(x) и построить ее график; г) закон распределения случайной величины y=x+1.

5. Известно, что в среднем 14% станков имеют дефект. Какова вероятность того, что из 300 станков: а) имеют дефект ровно 45 станков; б) не имеют дефекта от 230 до 250 станков?
6. Заданы математическое ожидание a=15, среднее квадратическое отклонение σ=2 нормально распределенной случайной величины X. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (16,25); б) вероятность того, что $|x - a| < 4$.
7. Случайная величина задана функцией распределения F(x). Найти 1) плотность распределения f(x); 2) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ 2\sin x, \text{ при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{6}; \\ 1, \text{ при } x > \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Вариант 3

1. В магазин поступил товар, изготовленный двумя предприятиями. С первого предприятия 150 единиц, из них 30 первого сорта, со второго – 200 единиц, из них 50 первого сорта. Из общей массы извлекается одна единица, она оказалась первого сорта. Какова вероятность того, что она изготовлена вторым предприятием?
2. Известно, что при посадке в среднем $\frac{1}{3}$ саженцев погибает. Какова вероятность того, что из 30: а) выживет ровно 15; б) погибнет от 20 до 25?
3. В группе 30 студентов, из которых 9 слабоуспевающие. Какова вероятность того, что среди четырех случайно выбранных: а) ровно один слабоуспевающий; б) хотя бы один слабоуспевающий?
4. Случайная величина задана плотностью распределения f(x). Найти а) коэффициент a; б) функцию распределения F(x); в) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ a \cdot x, \text{ при } 0 \le x \le 1; \\ 0, \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

5. M(x)=1, M(y)= –2, D(x)=2, D(y)=6. Найти 1) M(9x+2y–xy+5); 2) D(4x–8y–3), x и y – независимы..
6. Составить закон распределения случайной величины X – сумма номеров шаров (пронумерованных от 1 до 3), если вынимают 2 шара. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.
7. Среднее число кораблей, заходящих в порт за 30 минут, равно 2. Какова вероятность того, что за 2 часа в порт зайдут: а) четыре корабля; б) менее четырех кораблей?

Вариант 4

1. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность того, что выбраны: а) два мальчика; б) две девочки; в) мальчик и девочка?
2. Вероятность появления события А равна 0,3. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие А появится не более 4 раз?
3. Имеются 3 ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором – 10 белых и 5 черных, в третьем – 15 черных. Из выбранного наугад ящика вынули шар. Какова вероятность того, что он белый?
4. Случайная величина задана плотностью распределения f(x). Найти а) коэффициент a; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; в) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1; 2).

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ a(3x - x^2), \text{ при } 0 \le x \le 3; \\ 0, \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

5. Заданы математическое ожидание a=1,5, среднее квадратическое отклонение σ=2 нормально распределенной случайной величины X. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (9;19); б) вероятность того, что $|x - a| < 3$.
6. Всхожесть семян данного распределения составляет 90%. Какова вероятность того, что из 800 посеянных семян взойдет не менее 700?
7. Стрелок производит по мишени 3 выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить закон распределения числа попаданий. Найти математическое ожидание, дисперсию.

Вариант 5

1. Для практики на 30 студентов предоставлено 15 мест в Рязани, 8 – в Тамбове, 7 – в Воронеже. Какова вероятность того, что любые два студента попадут в один город?
2. Вероятность того, что покупателю необходима обувь 41 размера, равна 0,2. Какова вероятность того, что из восьми, зашедших в магазин покупателей, не более четырех потребуют обувь этого размера?
3. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Написать закон распределения случайной величины X – число появления красных карандашей. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.
4. Два автобуса отправились к трапам самолета. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса, равна 0,95. Какова вероятность того, что: а) оба придут вовремя; б) оба опоздают; в) хотя бы один опоздает?
5. В первом ящике 10 белых и 5 черных шаров, во втором – 20 черных, в третьем – 2 белых и 3 черных. Из выбранного наугад ящика вынули 1 шар, он оказался черным. Какова вероятность того, что он из второго ящика?
6. M(x)=1, M(y)=3, D(x)=5, D(y)=4. Найти: 1) M(3x+2y–3xy+1); 2)D(4x–3y+5), x и y – независимы.
7. Случайная величина задана функцией распределения F(x). Найти плотность распределения f(x), математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ 9 \cdot x^2, \text{ при } 0 \le x \le \dfrac{1}{3}; \\ 1, \text{ при } x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Студент знает 20 из 25 вопросов по первому разделу курса и 12 из 15 по другому. На экзамене ему случайным образом предлагается по одному вопросу из каждого раздела. Какова вероятность того, что студент ответит правильно: а) только на один вопрос; б) хотя бы на один вопрос?
2. В магазин поступили две равные по количеству партии одноименного товара. Известно, что 25% первой партии и 40% второй составляет товар первого сорта. Какова вероятность того, что выбранная единица товара не первого сорта?
3. Установлено, что в среднем 5% мужчин страдают дальтонизмом. Вычислить вероятность того, что среди 5 мужчин: а) не будет ни одного дальтоника; б) не более одного дальтоника.
4. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x	0	1	2	3	4	5	6
p	0,01	0,12	0,23	0,28	0,19	0,12	0,05

Найти: а) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; б) функцию распределения F(x) и построить ее график.

5. Случайная величина задана функцией распределения F(x). Найти а) коэффициент а; б) плотность распределения f(x); в) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ a \cdot x^3, \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 1, \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

6. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Математическое ожидание a=5, среднее квадратическое отклонение σ=1. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (3; 7).
7. Составить закон распределения случайной величины z=x+y.

y_i	2	4
p_i	0,3	0,7

x_i	0	1	2
p_i	0,1	0,3	0,6

Вариант 7

1. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно 3. Какова вероятность того, что за 2 минуты прибудут: а) 4 самолета; б) менее 3 самолетов?
2. Вероятность появления события А в каждом из 100 независимых испытаниях, равна 0,3. Какова вероятность того, что событие А появится более 40?
3. Вероятность, что данный фильм идет в данный момент в кинотеатре «Космос» равна 0,8, «Восток» – 0,7, «Союз» – 0,5. Какова вероятность того, что данный фильм идет: а) только в одном кинотеатре; б) только в двух кинотеатрах; в) хотя бы в одном кинотеатре?
4. К контролеру поступили изделия, изготовленные тремя рабочими, причем первый предоставил 20 изделий, второй – 15, третий – 17. Вероятность того, что изделие не имеет брака, равны: для первого рабочего 0,6; 2 – 0,5; 3 – 0,4. Контролер проверил одну деталь, она оказалась бракованной. Какова вероятность того, что ее изготовил первый рабочий?
5. Случайная величина задана функцией распределения F(x). Найти а) a; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; в) плотность распределения f(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ a \cdot x^2, \text{ при } 0 < x \le 2; \\ 1, \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

6. Игральная кость подбрасывается 500 раз. Какова вероятность того, что шестерка выпадет 50 раз?
7. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
p_i	p	0,29	0,12	0,15	0,21	0,16	0,04

Найти: а) p; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; в) функцию распределения F(x) и построить ее график; г)закон распределения случайной величины $y = |x|$.

Вариант 8

1. Два друга сдают вождение в автошколе. Вероятность сдать экзамен для первого равна 0,8, для второго – 0,9. Какова вероятность того, что экзамен сдаст: а) только один; б) оба сдадут; в) хотя бы один сдаст?
2. На автозаводе три конвейерных линии, причем на первой собирается 35% всех изделий, на второй – 25%, на третьей – 40%. Вероятность брака для изделий, собранных на первой линии, равна 0,2, на второй – 0,1, на третьей – 0,15. Покупатель приобрел автомобиль, изготовленный на этом заводе. Какова вероятность того, что он не имеет брака?
3. На каждый лотерейный билет с вероятностью $p=0,25$ может выпасть выигрыш. Куплено 14 билетов. Какова вероятность того, что получено ровно 5 выигрышей?
4. Монету бросают 5 раз. Написать закон распределения выпадения «герба». Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, функцию распределения $F(x)$.
5. $M(x)=12$, $M(y)= -10$, $D(x)=4$, $D(y)=1$. Найти 1)$M(2x-6y+5xy-1)$; 2)$D(x-7y+13)$, x и y – независимы..
6. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти а) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; б) функцию распределения $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<0; \\ \dfrac{(x-3)^2}{9}, \text{ при } 0\le x\le 3; \\ 0, \text{ при } x>3. \end{cases}$$

7. Вероятность того, что сошедшая с конвейера деталь стандартная, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей ровно 356 стандартных?

Вариант 9

1. Монету бросают 5 раз. Какова вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз?
2. В урне 12 белых и 8 красных шаров. Вынули 8 шаров. Какова вероятность того, что из них: а) 3 красные; б) красных менее 2?
3. Вероятность выиграть по лотерейному билету, равна 0,4. Купили 4 билета. Написать закон распределения числа выигрышных билетов. Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, функцию распределения F(x).
4. Два оператора набрали по одинаковому комплекту текста. Вероятность того, что первый допустит ошибку, равна 0,1, для второй – 0,2. Была обнаружена ошибка. Какова вероятность того, что ошибся второй оператор?
5. Среднее число автобусов, заходящих на станцию за 1 час, равно 3. Какова вероятность того, что за 3 часа зайдут: а) 4 автобуса; б) менее 4 автобусов?
6. Случайная величина задана функцией распределения F(x). Найти а) a; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; в) плотность распределения f(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ a \cdot x^2, \text{ при } 0 < x \le 5; \\ 1, \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

7. M(x)=2, M(y)=4, D(x)=1, D(y)=5. Найти 1) M(3x+2y–4xy+10); 2)D(2x–3y+5), x и y – независимы..

Вариант 10

1. В партии из 24 изделий 6 изделий имеют скрытый дефект. Какова вероятность того, что из взятых наугад 3 изделий, ровно 2 являются дефектными?
2. На предприятие поступили детали с трех заводов в количестве: 20 с первого завода, 10 – со второго, 20 – с третьего. Вероятность качественного изготовления изделия на 1 заводе 0,8, на 2 – 0,9, на 3 – 0.9. Какова вероятность того, что взятое изделие будет качественное?
3. В городе 3 базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар есть на этих базах одинакова и равна 0,22. Составить закон распределения числа баз, на которых данный товар есть в данный момент. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.
4. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено от 600 до 700, если вероятность того, что отдельное изделие окажется высшего сорта, равна 0,62.
5. Для поражения цели достаточно поражения хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий. Какова вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,3, из второго – 0,4?
6. Независимые дискретные случайные величины заданы следующими законами распределения:

x	1	4	5
p	0,1	0,4	0,5

x	2	3	4
p	0,2	0,1	0,7

Найти: 1) закон распределения случайной величины z=x+y; 2) M(z), D(z), σ(z).

7. Случайная величина задана плотностью распределения f(x). Найти а) функцию распределения F(x); б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0;\\ \dfrac{x}{32}, \text{ при } 0 < x \le 8;\\ 0, \text{ при } x > 8.\end{cases}$$

5 Вопросы по курсу «Теория вероятностей»

1. Основные понятия теории вероятностей. Виды событий.
2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности. Относительная частота события.
3. Основные формулы комбинаторики. Правило суммы и произведения.
4. Сумма событий. Несовместные события. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.
5. Сумма событий. Несовместные события. Полная группа событий.
6. Сумма событий. Несовместные события. Противоположные события.
7. Совместные события. Произведение событий. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей совместных событий.
8. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий.
9. Вероятность появления хотя бы одного события.
10. Сумма событий. Совместные события. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
11. Формула полной вероятности.
12. Вероятность гипотез. Формула Байеса.
13. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
14. Повторение испытаний. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
15. Случайные величины. Виды случайных величин. Закон распределения дискретной случайной величины.
16. Виды распределения дискретной случайной величины.
17. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Математическое ожидание.
18. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания.
19. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Дисперсия. Свойства дисперсии. Среднее квадратическое отклонение.
20. Функция распределения. Свойства функции распределения.
21. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины. Свойства.
22. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
23. Нормальное распределение. Нормальная кривая.
24. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины. Вычисление вероятности заданного отклонения.
25. Показательное распределение.
26. Равномерное распределение.
27. Неравенство Чебышева.
28. Теорема Чебышева.
29. Теорема Бернулли.
30. Центральная предельная теорема.

Список использованных источников

1 **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей / Е.С. Вентцель - М.: Высшая школа, 2001 – 575 с.
2 **Вентцель Е.С.** Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.С. Овчаров - М.: Высшая школа, 2000 – 366 с.
3 **Гмурман В.Е**. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман - М.: Высшая школа, 2004 – 404 с.
4 **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман - М.: Высшая школа, 2004 – 480 с.
5 **Гнеденко Б.В.** Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко - М.: Наука, 1988 – 448 с.
6 **Гусак А.А.** Справочное пособие к решению задач: теория вероятностей / А.А. Гусак, Е.А. Бричникова - Мн.: ТетраСистемс, 2003 – 288 с.
7 **Данко П.Е.** Высшая математика в задачах и упражнениях. Часть 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова - М.: Высшая школа, 2000 – 365 с.
8 **Чистяков В.П.** Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков - М.: Высшая школа, 2000 – 224 с.

Приложение А

(справочное)

Таблица А.1 - Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2254	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1569	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669

1,9	0656	0 644	0 632	0 620	0 608	0 596	0 584	0 573	0 562	0 551
2,0	0 ,0540	0 529	0 519	0 508	0 498	0 488	0 478	0 468	0 459	0 449
2,1	0110	0 431	0 422	0 413	0 404	0 396	0 387	0 379	0 371	0 363
2,2	0355	0 347	0 339	0 332	0 325	0 317	0 310	0 303	0 297	0 290
2,3	0283	0 277	0 270	0 264	0 258	0 252	0 246	0 241	0 235	0 229
2,4	0224	0 219	0 213	0 208	0 203	0 198	0 194	0 189	0 184	0 180
2,5	0175	0 171	0 167	0 163	0 158	0 154	0 151	0 147	0 143	0 139
2,6	0136	0 132	0 129	0 126	0 122	0 119	0 116	0 113	0 110	0 107
2,7	0104	0 101	0 099	0 096	0 093	0 091	0 088	0 086	0 084	0 081
2,8	0079	0 077	0 075	0 073	0 071	0 069	0 067	0 065	0 063	0 061
2,9	0060	0 058	0 056	0 055	0 053	0 051	0 050	0 048	0 047	0 046
3,0	0 ,0044	0 043	0 042	0 040	0 039	0 038	0 037	0 036	0 035	0 034
3,1	0033	0 032	0 031	0 030	0 029	0 028	0 027	0 026	0 025	0 025
3,2	0024	0 023	0 022	0 022	0 021	0 020	0 020	0 019	0 018	0 018
3,3	0017	0 017	0 016	0 016	0 015	0 015	0 014	0 014	0 013	0 013
3,4	0012	0 012	0 012	0 011	0 011	0 010	0 010	0 010	0 009	0 009
3,5	0009	0 008	0 008	0 008	0 008	0 007	0 007	0 007	0 007	0 006
3,6	0006	0 006	0 006	0 005	0 005	0 005	0 005	0 005	0 005	0 004
3,7	0004	0 004	0 004	0 004	0 004	0 004	0 003	0 003	0 003	0 003
3,8	0003	0 003	0 003	0 003	0 003	0 002	0 002	0 002	0 002	0 002
3,9	0002	0 002	0 002	0 002	0 002	0 002	0 002	0 002	0 001	0 001

Приложение Б

(справочное)

Таблица Б.1 - Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$.

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357

0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0	0,	0,	0,	1,	0,	1,	0,

,40	1554	85	3023	30	4032	75	4599
0	0,	0,	0,	1,	0,	1,	0,
,41	1591	86	3051	31	4049	76	4608
0	0,	0,	0,	1,	0,	1,	0,
,42	1628	87	3078	32	4066	77	4616
0	0,	0,	0,	1,	0,	1,	0,
,43	1664	88	3106	33	4082	78	4625
0	0,	0,	0,	1,	0,	1,	0,
,44	1700	89	3133	34	4099	79	4633

Продолжение таблицы Б.1

х	Ф (х)	х	Ф (х)	х	Ф (х)	х	Ф (х)
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,80	4641	00	4772	40	4918	80	4974
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,81	4649	02	4783	42	4922	82	4976
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,82	4656	04	4793	44	4927	84	4977
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,83	4664	06	4803	46	4931	86	4979
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,84	4671	08	4812	48	4934	88	4980
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,85	4678	10	4821	50	4938	90	4981
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,86	4686	12	4830	52	4941	92	4982
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,87	4693	14	4838	54	4945	94	4984
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,88	4699	16	4846	56	4948	96	4985
1	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0,
,89	4706	18	4854	58	4951	98	4986
1	0,	2,	0,	2,	0,	3,	0,
,90	4713	20	4861	60	4953	00	49865
1	0,	2,	0,	2,	0,	3,	0,
,91	4719	22	4868	62	4956	20	49931
1	0,	2,	0,	2,	0,	3,	0,
,92	4726	24	4875	64	4959	40	49966
1	0,	2,	0,	2,	0,	3,	0,
,93	4732	26	4881	66	4961	60	499841
1	0,	2,	0,	2,	0,	3,	0,
,94	4738	28	4887	68	4963	80	499928
1	0,	2,	0,	2,	0,	4,	0,
,95	4744	30	4893	70	4965	00	499968
1	0,	2,	0,	2,	0,	4,	0,

,96	4750	32	4898	72	4967	50	499997
1	0,	2,	0,	2,	0,	5,	0,
,97	4756	34	4904	74	4969	00	499999
1	0,	2,	0,	2,	0,		
,98	4761	36	4909	76	4971		
1	0,	2,	0,	2,	0,		
,99	4767	38	4913	78	4973		