МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
«Оренбургский государственный университет»

Колледж электроники и бизнеса ОГУ

Т.В.Атяскина

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2006

ББК 22.18я73
А- 92
УДК 519.6(075.32)

Рецензент
Заместитель директора по НМР Кузюшин С.А.

Атяскина Т.В.
А-92 **Дискретная математика [Текст]:
методические указания к практическим работам.
/Т.В.Атяскина. – Оренбург: ГОУ ОГУ,
2006. – 36 с.**

Методические указания предназначены для выполнения практических работ, обеспечивающих учебный процесс по дисциплине “Дискретная математика” в колледже электроники и бизнеса ОГУ для студентов 2 курса в 4 семестре специальности 230105 “программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем” очной формы обучения.

Рабочая программа составлена с учетом Государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов - утвержденного 30.12.2003 Министерством Образования Российской Федерации.

ББК 22.18я73

Содержание

Введение

Дискретная математика - молодая дисциплина, возникшая в XX в. Этот предмет был “отсоединен” от основной математике в связи с тем , что был накоплен большой объем информации по таким разделам как «Алгебра и теория чисел» , «Логика» и т.п.

Общество XXI в. – общество информационное. Центр тяжести в решении задач переместился от задач вычислительной математики к задачам на дискретных структурах.

В дисциплине мало методов, но много определений и терминов. Основой дискретной математики являются следующие разделы:

1.Элементы теории множеств.

2.Элементы математической логики.

3.Элементы теории графов.

4.Основы алгебры вычетов.

Дискретная математика имеет широкий спектр приложений, прежде всего в областях, связанных с информационными технологиями и компьютерами. В самом первоначальном названии компьютера -“электронная вычислительная машина” - слово “цифровая” указывает на принципиально дискретный характер работы данного устройства.

Дискретная или, как часто говорят, компьютерная математика на пороге XXI века стала универсальным языком описания и исследования многих систем, превратилась в базовый инструмент анализа и моделирования. Именно на этом языке сегодня осмысливают свои проблемы и поддерживают профессиональное общение системные аналитики, управленческие консультанты, специалисты по организационному проектированию.

Предмет «Дискретная математика» является обще-профессиональной дисциплиной, устанавливающей базовый уровень знаний для освоения других специальных дисциплин. Она базируется на дисциплинах «Элементы высшей математики», «Основы алгоритмизации и программирования». Вместе с тем знания, умения и навыки, приобретенные при изучении дисциплины «Дискретная математика» используются в дисциплинах: «Математическая статистика», «Математические методы», «Технология разработки программных продуктов».

Курс рассчитан на 60 часов лекций, 32 часа лабораторно-практических занятий. Промежуточная оценка знаний и умений студентов проводится с помощью контрольных работ, которые включают в себя основные проблемы курса. Итоговый контроль в виде экзамена предусмотрен в пятом семестре третьего курса.

1 Практическая работа № 1. Операции над множествами

Цель работы. Изучить понятие множества. Научиться выполнять операции над множествами.

1.1 Ход работы

1) Изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники).
2) Выполнить задание своего варианта.
3) Составить отчет по работе.
4) Защитить работу.

1.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) Тема работы.
2) Цель работы.
3) Ход работы.
4) Формулировка заданий.
5) Решение заданий своего варианта.

1.3 Методические указания к практической работе № 1

1.3.1 Понятие множества

Множество – основное фундаментальное понятие в математике. Оно не определяется. Его можно проиллюстрировать примерами:
1) множество студентов в данной аудитории;
2) множество действительных чисел;
3) множество корней квадратного уравнения x^2-4=0.

Множество обозначается большими латинскими буквами: A, B, C…

Считается, что множество состоит из элементов, которые обозначаются маленькими латинскими буквами: a, в, c,…

Обозначения:

$\{\}$-знак множества;

$a\in A$- элемент a принадлежит множеству A;

$a\notin A$- элемент a не принадлежит множеству A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым**, и обозначается- Ø.

Множество B называется **подмножеством** множества A, если любой элемент множества B принадлежит и множеству A.($B \subseteq A$)

Два множества называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество, содержащее все рассматриваемые в какой-либо задаче подмножества, называется **универсальным**, и в общем случае обозначается -U.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется **конечным (счетным),** в противном случае **бесконечным.** Количество элементов счетного множества называется **мощностью** и обозначается $|A|$.

Замечания:

1) Во множестве элементы не повторяются;

2) Элементы во множестве могут располагаться в любом порядке.

1.3.2 Операции над множествами

Пусть A, B, $C \in U$.

I. Пересечение множеств.

Пересечением множеств A и B называют новое множество C, состоящие из тех и только тех элементов, которые одновременно входят в A и B.

Обозначают $A \cap B$, т.е. $C = A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$

Примеры:

1.Даны множества:

$A = \{x \mid x \in R$ и $2 \leq x \leq 7\}$

$B = \{x \mid x \in R$ и $-1 \leq x \leq 5\}$

Найти $A \cap B$.

Решение: Изобразим множества A и B на числовой прямой (см. рисунок 1). Найдем пересечение этих множеств:

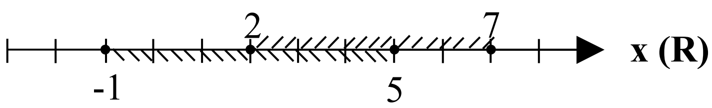

Рисунок 1-Пересечение множеств A и B

$C = A \cap B = \{x \mid x \in R$ и $-2 \leq x \leq 5\}$

2.Пусть A - множество треугольников на плоскости;

B - множество правильных многоугольников на плоскости.

Тогда $A \cap B$ - множество правильных треугольников на плоскости.

II.Объединение множеств.

Объединением множеств А и В называют третье множество С, состоящие из таких элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств.

Обозначают $C = A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ или } x\in B\}$

Примеры:

1. Даны множества $A=\{2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$

Найти $A\cup B$, $A\cap B$

Решение: $A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$; $A\cap B=\{3,4\}$

2.Даны множества $A=\{x \mid x\in R \text{ и } -2\leq x<5\}$

$B=\{x \mid x\in R \text{ и } 1<x<8\}$

Найти $A\cup B$

Решение: Изобразим множества А и В на числовой прямой (смотри рисунок 2). Найдем их объединение:

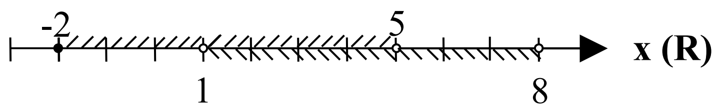

Рисунок 2-Объединение множеств А и В

$A\cup B=\{x \mid x\in R \text{ и } -2\leq x<8\}$

III. Разность множеств.

Под разностью двух множеств А и В понимают новое множество С элементов х таких, что х принадлежит А, но не принадлежит В.

Обозначают $C=A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ и } x\notin B\}$

Примеры:

1.Даны множества $A=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$, $B=\{-1,0,2,3,10\}$

Найти $A\backslash B$

Решение: $A\backslash B=\{1,4,5\}$

2.Даны множества

$A=\{x \mid x\in R \text{ и } 2\leq x\leq 7\}$

$B=\{x \mid x\in R \text{ и } -1\leq x\leq 5\}$

Найти $A\backslash B$

Решение: Изобразим множества А и В на числовой прямой (смотри рисунок 3). Найдем их разность:

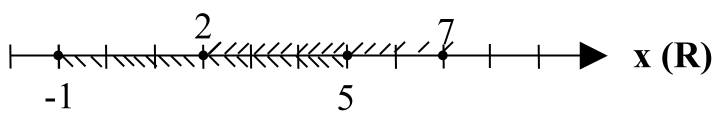

Рисунок 3-Разность множеств А и В

$A\backslash B=\{x \mid x\in R \text{ и } 5<x\leq 7\}$

IV. Дополнение.

Дополнение к множеству А называют множество всех элементов из U, не принадлежащих А.

Обозначают $A'=\{x \mid x\in U$ и $x\notin A\}$

Примеры:

1. Пусть U- множество целых чисел;
   A- множество четных чисел.

Тогда A'- множество нечетных чисел.

2.Пусть A=[1;6], U=R

Тогда $A'=(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$

1.4 Варианты заданий

Задание № 1

Пусть $\boldsymbol{A=\{1;2\};\ B=\{2;3\};\ C=\{1;3\}}$

Найти:

I Вариант	II Вариант
а) $A\cup B\cup C$	а) $A\cap B\cap C$
б) $A\cap(B\cup C)$	б) $(A\cap B)\cup C$

Задание № 2

Найти множество:

I Вариант	II Вариант
$(A'\cup B)\cap C$,	$(A\cap B)\cup C'$,
если A=[3,8]; B=(1,6]; C=(-7,4)	если A=(5,6);B=[-1,10); C=[0,2]

Задание № 3

Даны множества:

I Вариант	II Вариант
$A=\{x/x\in R$ и $x^2-15x+56<0\}$	$A=\{x/x\in R$ и $x^2-7x+10>0\}$
$B=\{x/x\in R$ и $-2<x<3\}$	$B=\{x/x\in R$ и $-3<x<54\}$
$C=\{x/x\in R$ и $2x>1\}$	$C=\{x/x\in R$ и $6x<3\}$

Найти множество:

I Вариант	II Вариант
$(A\cup B')\cap(A\cup C')$	$(A\cup C)\cap(B'\cup C)$

Задание № 4

Пусть универсальное множество U -множество всех сотрудников некоторой фирмы; А – множество всех сотрудников данной организации старше 40 лет; В – множество сотрудников, имеющих стаж работы не мене 5 лет; С – множество программистов фирмы .

Каков содержательный смысл каждого из следующих множеств:

I Вариант	II Вариант
а) $A \cap (B \cup C)$	а) $(A \cap B) \cup C$
б) $(A \cap B) \cup C'$	б) $A \cap (B \cup C')$

1.5 Вопросы к защите практической работы № 1

1) Что такое множество? Как его обозначают? Приведите примеры.
2) Что такое подмножество? Приведите пример.
3) Какое множество называется счетным? Какое – пустым?
4) Способы задания множеств.
5) Какое множество можно назвать универсальным?
6) Поясните термин «мощность множества».
7) Что называется пересечением множеств?
8) Что называется объединением множеств?
9) Что понимается под разностью двух множеств?
10) Что называется дополнением множества?

2 Практическая работа № 2. Операции над высказываниями

Цель работы. Изучить понятие высказывания. Научиться записывать различные высказывания логическими формулами, определять значение истинности высказываний.

2.1 Ход работы

1) Изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники).
2) Выполнить задание своего варианта.
3) Составить отчет по работе.
4) Защитить работу.

2.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) Тема работы.
2) Цель работы.
3) Ход работы.
4) Формулировка заданий.
5) Решение заданий своего варианта.

2.3 Методические указания к практической работе № 2

2.3.1 Понятие высказывания

Высказыванием называется повествовательное предложение, которое может быть либо истинным, либо ложным.

Примеры:

1."Волга впадает в Каспийское море" -истинное высказывание.

2.$2\cdot 2=5$ -ложное высказывание.

3.$X+3=7$ -не является высказыванием, т.к. истинность этого равенства зависит от значения X.

4."Давайте, разберемся" - не является высказыванием.

Высказывание обозначается большими латинскими буквами A, B, …

Подобно тому, как из заданных чисел можно получить другие числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления, так из заданных высказываний получаются новые с помощью операций, имеющих специальные названия: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность и отрицание. Эти операции означают соединение отдельных предложений связками «и», «или», « если…,то…», «тогда и только тогда, когда…» и присоединение к высказыванию частицы «не».

2.3.2 Операции над высказываниями

Конъюнкция высказываний.

Конъюнкцией высказываний A и B называют третье высказывание C, истинное в том и только том случае, когда оба высказывания A и B истинны.

Обозначают $A\Lambda B$, читают «A и B»

И (1)-истинна, Л (0)-ложь

В таблице 1 можно просмотреть значение истинности конъюнкции высказываний A и B.

Таблица 1 – Таблица истинности конъюнкции высказываний

A	**B**	**AΛB**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Примеры:

1.Даны высказывания:

А: «Число 2- четное» – и

В: «Число 2-простое» – и

Тогда АΛВ: «Число 2-четное и простое» – и

2.Даны высказывания:

А: « 3<12» – и

В: «12<10» – л

Тогда АΛВ: «3<12<10» – л.

Дизъюнкция высказывания.

Дизъюнкцией высказываний называется такое новое высказывание, которое ложно лишь в одном случае, когда оба высказывания ложны.

Обозначают АVВ, читают «А или В»

В таблице 2 можно просмотреть значение истинности дизъюнкции высказываний А и В.

Таблица 2 - Таблица истинности дизъюнкции высказываний

A	**B**	**AVB**
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Примеры:

1.Даны высказывания:

А: «22 двузначное число» – и

В: «22 нечетное число» – л

Тогда А∨В: «22 двузначное или нечетное число»–и.

2.Дано А∨В: «3≤3» - и

Тогда А: «3<3» – л, В: «3=3» – и.

Вывод: Дизъюнкция нескольких высказываний истина, если истинно хотя бы одно из этих высказываний.

Импликация высказываний.

Импликацией высказываний А и В называют высказывание ложное лишь в одном случае, когда А- истинно, а В- ложно.

Обозначают А→В, читают «если А, то В»

В таблице 3 можно просмотреть значение истинности импликации высказываний А и В.

Таблица 3 - Таблица истинности импликации высказываний

А	**В**	**А→В**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример: Даны высказывания:

А: «Последняя цифра числа 15 равна 5»–и

В: «Число 15 делится на 5»–и

Тогда А→В: «Если последняя цифра числа 15 равна 5, то число 15 делится на 5»–и.

Эквиваленция высказываний.

Эквиваленцией высказываний А и В называют конъюнкцию высказываний А→В и В→А.

Обозначают А↔В, читают «А тогда и только тогда, когда В»

В таблице 4 можно просмотреть значение истинности эквиваленции высказываний А и В.

Таблица 4 - Таблица истинности эквиваленции высказываний

А	**В**	**А↔В**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Высказывание A↔B- истинно, если оба высказывания A и B истинны или оба высказывания ложны.

Отрицание высказываний.

Отрицанием высказывания А называют новое высказывание, истинное в том и только том случае, когда высказывание A ложно.

Обозначают $\overline{A}$, читают «не А»

В таблице 5 можно просмотреть значение истинности отрицания высказывания А.

Таблица 5 - Таблица истинности отрицания высказывания

А	$\overline{\textbf{A}}$
И	Л
Л	И

Примеры:

1.Дано высказывание А: «Петя не умеет говорить по-английски».
Тогда отрицание высказывания А будет высказывание:
$\overline{A}$: «Петя умеет говорить по-английски».

2.Дано высказывание А: «5>10»
Тогда $\overline{A}$: «5≤10»

Выражение, составленное из высказываний с помощью операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции называется **логической формулой**.

Пример: Представить логическими формулами следующее высказывание:

«Идет дождь или снег».

Это сложное высказывание состоит из двух простых:
А: «Идет дождь»;
В: «Идет снег».

Высказывания А, В соединены связкой «или», поэтому логическая формула имеет вид: $A \vee B$

2.4 Варианты заданий

Задание № 1

Указать какие из следующих предложений являются высказываниями и определить, истинны они или ложны:

I Вариант

а) $\frac{1917}{852} = \frac{9}{4}$

б)"Все треугольники – равнобедренные"

в)"Вы были в театре?"

II Вариант

а) $x^2 - 8x + 15 = 0$

б) $a \in \{a, b, c\}$

в)"Кит может летать"

Задание № 2

Среди следующих сложных высказываний выделить:

I Вариант — конъюнкцию; II Вариант — дизъюнкцию

и определить ложны они или истинны:

а)"Число 27 кратно 3 и 9"
б)"Число 2 – простое или чётное"
в)"Если треугольник равнобедренный, то он равносторонний"
г)"Дважды два равно пяти или небо голубое"
д)"254:2=127 и $2 \cdot 127 = 254$".

Задание № 3

Записать логическими формулами и определить значение истинности следующих высказываний:

I Вариант

а) Если $2 \cdot 2 = 4$, то $7^2 = 81$

б) Сумма внутренних углов любого треугольника меньше 180° тогда и только тогда, когда 2>3

II Вариант

а) Если 3>2, то параллельные прямые пересекаются

б) 18 без остатка делится на 4 тогда и только тогда, когда 18 делится на 2

Задание № 4

Даны высказывания А: (Я купил велосипед); В: (Я участвовал в соревнованиях по велоспорту); С: (Я путешествовал по Англии). Сформулировать высказывания, соответствующие следующим выражениям:

I Вариант

а) $A \vee B$

II Вариант

а) $A \wedge B$

б) $(\overline{A} \wedge B) \vee \overline{C}$ б)$(\overline{A} \vee \overline{C}) \wedge B$

Задание № 5

Записать логическими формулами следующие сложные высказывания:

”Если допоздна работаешь с компьютером и при этом пьёшь много кофе, то утром просыпаешься в дурном расположении духа или с головной болью”.

2.5 Вопросы к защите практической работы № 2

1) Что называется высказыванием? Приведите примеры высказываний.
2)Что такое - таблица истинности? Как обозначаются значения истинности.
3) Перечислите операции над высказываниями и их обозначения.
4) Сформулируйте определение конъюнкции высказываний.
5) Сформулируйте определение дизъюнкции высказываний.
6) Сформулируйте определение импликации высказываний.
7) Сформулируйте определение эквиваленции высказываний.
8) Что называется отрицанием высказывания? Приведите пример.
9) Что называется логической формулой?

3 Практическая работа № 3. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Цель работы. Изучить понятие ДНФ И КНФ. Научиться упрощать формулы логики с помощью равносильных преобразований, строить таблицы истинности, приводить формулы логики к ДНФ и КНФ.

3.1 Ход работы

1) Изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники).
2) Выполнить задание своего варианта.
3) Составить отчет по работе.
4) Защитить работу.

3.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) Тема работы.
2) Цель работы.
3) Ход работы.

4) Формулировка заданий.
5) Решение заданий своего варианта.

3.3 Методические указания к практической работе № 3

3.3.1 Законы логики. Равносильные преобразования

Формулы А и В называют **равносильными**, если они принимают одинаковые значения истинности на одних и тех же наборах значений переменных высказываний

Обозначают $A \equiv B$

Замечание: Равносильные формулы имеют одинаковые таблицы истинности.

Наиболее часто используемые равносильные формулы получили название законов логики высказываний.

Основные законы логики высказываний и их названия указаны в таблице 6.

Таблица 6 – Законы логики высказываний

№	Формула	Название закона
1	**2**	**3**
1	$\overline{\overline{A}} \equiv A$	Двойное отрицание
2	$A \vee B \equiv B \vee A$	Коммутативность дизъюнкции
3	$A \wedge B \equiv B \wedge A$	Коммутативность конъюнкции
4	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$	Ассоциативность дизъюнкции
5	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$	Ассоциативность конъюнкции
6	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции
7	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции
8	$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$	Закон де Моргана
9	$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$	Закон де Моргана
10	$A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$	
11	$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	
12	$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) \equiv (A \vee C) \rightarrow B$	
13	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \equiv A \rightarrow (B \wedge C)$	
14	$A \rightarrow B \equiv \overline{B} \rightarrow \overline{A}$	Закон контрапозиции
15	$A \wedge B \rightarrow C \equiv A \wedge \overline{C} \rightarrow \overline{B}$	Закон расширенной контрапозиции
16	$A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv A \wedge B \rightarrow C$	

Продолжение таблицы 6

1	2	3
17	$A \lor \overline{A} \equiv И$ $A \lor И \equiv И$ $A \lor Л \equiv A$	Законы дополнительности
18	$A \land \overline{A} \equiv Л$ $A \lor И \equiv A$ $A \lor Л \equiv Л$	Законы дополнительности
19	$\overline{A \land \overline{A}} \equiv И$	Закон противоречия

Формула называется **тождественно истинной**, если она принимает значение истина при любом наборе значений переменных высказываний.

Формула называется **тождественно ложной**, если она принимает значение ложь, при любом наборе значений переменных высказываний.

Формула называется **выполнимой**, если существует хотя бы один набор значений переменных высказываний, на которых формула принимает значение истинно.

Замечание: Любое тождественно истинное высказывание является выполнимым, обратное неверно.

Вывод: Для множества формул в логике высказываний существуют два алгоритма, с помощью которых можно установить является ли формула тождественно истинной, тождественно ложной или только выполнимой:

1) с помощью построения таблиц истинности;
2) с помощью равносильных преобразований.

Пример: С помощью таблицы истинности выяснить является ли формула - тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой.
$(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$

Построение таблицы истинности данной формулы показано в таблице 7.

Таблица 7 – Таблица истинности

A	B	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$A \to B$	$\overline{B} \to \overline{A}$	$(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$
И	И	Л	Л	И	И	И
И	Л	И	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И

В последнем столбце все значения получились истинными. Таким образом, формула - тождественно истинная, следовательно, выполнимая.

3.3.2 Понятие ДНФ и КНФ

Элементарной конъюнкцией от переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ называется формула логики высказываний, которые представляют собой конъюнкцию переменных высказываний или их отрицание.

Примеры элементарных конъюнкций: $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$; $x \wedge y \wedge \bar{y}$

Теорема 1: Элементарная конъюнкция $A(x_1, x_2, \ldots x_n)$ является тождественно ложной тогда и только тогда, когда существуют переменные высказывания x_i и $\bar{x}_i$ в элементарной конъюнкции для некоторого i .

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называют формулу логики высказываний, которые представляют собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Теорема 2 (критерий ложности): ДНФ тождественно ложна тогда и только тогда, когда в каждую элементарную конъюнкцию входят элементы вида x_i и $\bar{x}_i$ для некоторого i

Замечание: i для каждой элементарной конъюнкции свой

Примеры:

1) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_1 \wedge x_2)$ - ДНФ

2) $(y \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{x} \wedge z) \vee (z \wedge \bar{z} \wedge y) \equiv Л$ – ДНФ

Элементарной дизъюнкцией от переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ называют формулу логики высказываний которые представляют собой дизъюнкцию переменных высказываний или их отрицание.

Примеры элементарных дизъюнкций: $x_1 \vee x_2 \vee x_3$; $x \vee y \vee \bar{y}$

Теорема 3: Элементарная дизъюнкция $A(x_1, x_2, \ldots x_n)$ является тождественно истинной тогда и только тогда, когда существуют переменные высказывания x_i и $\bar{x}_i$ в элементарной дизъюнкции для некоторого i .

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называют такую форму логики высказываний, которая представляет собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Теорема 4 (критерий истинности): КНФ тождественно истинно тогда и только тогда, когда каждая элементарная дизъюнкция содержит набор переменных x_i и $\bar{x}_i$ для некоторого i

Замечание: i для каждой элементарной дизъюнкции свой.

Примеры:
1) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_1 \vee x_2)$ – КНФ
2) $(y \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{x} \vee z) \wedge (z \vee \bar{z} \vee y) \equiv$ И – КНФ

Две операции конъюнкция и дизъюнкция называются **двойственными** друг к другу, то есть конъюнкцию можно заменить дизъюнкцией, и наоборот.

Для того чтобы от дизъюнкции перейти к конъюнкции, и наоборот, нужно установить двойное отрицание и одно из них применить вместе с законом де Моргана.

Для того чтобы от ДНФ перейти к КНФ, и наоборот, можно применить законы дистрибутивности.

Пример: Привести формулу к КНФ и ДНФ $(x \leftrightarrow y) \wedge (z \rightarrow y)$

С помощью равносильных преобразований, используя законы логики высказываний, получим:
$(x \leftrightarrow y) \wedge (z \rightarrow y) \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \wedge (z \rightarrow y) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{z} \vee y)$–КНФ
Перейдем от КНФ к ДНФ, используя закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и законы дополнительности:

$(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{z} \vee y) \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge x \wedge y) \vee (y \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee$
$\vee (y \wedge \bar{y} \wedge y) \vee (y \wedge x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge x \wedge y) \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge x)$ – ДНФ

Замечание: Для того чтобы проверить правильно ли привели формулу к КНФ и ДНФ, можно построить таблицы истинности первоначальной и получившихся формул. Последние столбцы таблиц этих формул должны принимать одинаковые значения истинности.

3.4 Варианты заданий

Задание № 1

С помощью равносильных преобразований выяснить является ли формула выполнимой, тождественно истинной или тождественно ложной. Проверить получившийся результат с помощью таблицы истинности:

I Вариант

а) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

б) $(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee ((\overline{x_1} \vee x_1) \rightarrow$
$\rightarrow (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}))$

II Вариант

1) $P \rightarrow (P \vee Q)$

2) $((x_2 \vee \overline{x_3}) \rightarrow x_3) \vee$
$(x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_3})$

Задание № 2

С помощью равносильных преобразований преобразовать формулу так, чтобы она содержала только операции

I Вариант	II Вариант
конъюнкции и отрицания	дизъюнкции и отрицания

а) $x\vee y\to x\wedge z$

б) $x_1\wedge x_2\vee\overline{x_2}\wedge(x_3\vee x_4)$

Задание № 3

Привести формулу к

I Вариант	II Вариант
КНФ	ДНФ
а) $x\vee(\bar{y}\wedge z)\vee(y\wedge\bar{x})$	а) $(\bar{y}\vee z)\wedge y\wedge(\bar{x}\vee z)$
б) $(\overline{x\wedge y}\to\bar{x})\wedge(\overline{x\wedge y\to\overline{y}})$	б) $\bar{x}\wedge(y\to x)\wedge\left(\overline{x\wedge y\to\bar{x}}\right)$

3.5 Вопросы к защите практической работы № 3

1) Какие формулы называются равносильными?

2) Какие формулы называются тождественно истинными, тождественно ложными, выполнимыми.

3) Что называется элементарной конъюнкцией? Приведите примеры элементарных конъюнкций.

4) Что называется элементарной дизъюнкцией? Приведите примеры элементарных дизъюнкций.

5)Сформулируйте определение ДНФ. Приведите примеры.

6) Сформулируйте определение КНФ. Приведите примеры.

7) Сформулируйте критерий ложности.

8) Сформулируйте критерий истинности.

9) Как можно перейти от операции конъюнкции к дизъюнкции, и наоборот?

10) Как можно перейти от КНФ к ДНФ, и наоборот?

4 Практическая работа № 4. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Проблема разрешимости

Цель работы. Изучить понятие СДНФ И СКНФ. Научиться составлять СДНФ и СКНФ по таблице истинности. Научиться решать проблему разрешимости.

4.1 Ход работы

1) Изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники).
2) Выполнить задание своего варианта.
3) Составить отчет по работе.
4) Защитить работу.

4.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) Тема работы.
2) Цель работы.
3) Ход работы.
4) Формулировка заданий.
5) Решение заданий своего варианта.

4.3 Методические указания к практической работе № 4

4.3.1 Понятие СДНФ и СКНФ

Функция $F(x_1,x_2, x_3,\ldots x_n)$ называется **СДНФ**, если
1) она является ДНФ;
2) каждая элементарная конъюнкция ДНФ содержит все наименования переменных, от которых зависит формула, и каждое наименование входит в него один раз;
3)среди элементарных конъюнкций ДНФ нет одинаковых.

Примеры:
1) $(\bar{x}\Lambda y\Lambda z)V(\bar{x}\Lambda\bar{y}\Lambda z)V(x\Lambda y\Lambda z)$- СДНФ
2) $(x\Lambda y)V(\bar{x}\Lambda y\Lambda z)V(x\Lambda y\Lambda z)$- не является СДНФ, т.к в первой скобке нет переменной z

Функция $F(x_1,x_2, x_3,\ldots x_n)$ называется **СКНФ**, если
1)она является КНФ;
2)каждая элементарная дизъюнкция содержит все наименования переменных, от которых зависит формула и это наименование входит только один раз;
3)среди элементарных дизъюнкций КНФ нет одинаковых.

Пример:

$(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$- СКНФ

Теорема 1: Если формула не тождественно истинная, то для нее существует и при том единственная СКНФ.

Теорема 2: Если формула не тождественно ложная, то для нее существует и при том единственная СДНФ.

Совершенные формы можно строить с помощью двух алгоритмов:
1)связан с равносильными преобразованиями;
2)связан с построением таблицы истинности.

4.3.2 Алгоритмы построения СДНФ и СКНФ по таблице истинности

Алгоритм построения СДНФ с помощью таблице истинности

Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере, используя таблицу 8.

Таблица 8 – Таблица истинности

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
И	И	И	И
И	И	Л	И
И	Л	И	Л
И	Л	И	Л
Л	И	И	И
Л	И	Л	Л
Л	Л	И	И
Л	Л	Л	Л

1) выбираем те строки таблицы 8, на которых формула принимает значение истина: 1, 2, 5, 7;
2) для каждой выбранной строки строим элементарную конъюнкцию из переменных, от которых зависит формула следующим образом: если переменная в строке принимает значение истина, то она непосредственно входит в элементарную конъюнкцию, если ложь, то она входит с отрицанием

   1: $x \wedge y \wedge z$,
   2: $x \wedge y \wedge \bar{z}$,
   5: $\bar{x} \wedge y \wedge z$,
   7: $\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$;
3) из элементарных конъюнкций составляем ДНФ
   $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)$ –СДНФ

Замечание: Если все строки формулы в таблице истинности принимают значение ложь, то СДНФ построить нельзя.

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности.

Данный алгоритм аналогичен алгоритму построения СДНФ.

1) выбираем строки таблицы, на которых формула принимает значение ложь;
2) для каждой выбранной строки строим элементарную дизъюнкцию из переменных, от которых зависит формула, следующим образом: если переменная в строке принимает значение ложь, то она сама входит в элементарную дизъюнкцию, если истина, то она входит с отрицанием;
3) из элементарных дизъюнкции составляем КНФ.

Замечание: Если все строки формулы в таблице принимают значение истина, то СКНФ построить нельзя.

4.3.3 Решение проблемы разрешимости

В логике высказывания существует проблема разрешимости. Ее смысл следующий: надо указать алгоритм для всех формул логики высказываний, с помощью которого можно сказать, является ли формула тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой.

Решением проблемы разрешимости, с помощью ДНФ и КНФ

Для определения типа формулы надо построить ДНФ (КНФ) и проверить критерий ложности (критерий истинности). Если критерий выполнен, то формула тождественно ложна (тождественно истинна), если нет, то строим КНФ (ДНФ) и проверяем критерий истинности (критерий ложности), если критерий выполнен, то формула тождественно истинна (тождественно ложна) в противном случае, формула только выполнима.

Проблема разрешимости с помощью СДНФ и СКНФ.

1) Если СДНФ построена, то формула не является тождественно ложной. Далее считаем число слагаемых в СДНФ: если их 2^n,где n- число переменных, от которых зависит формула, то формула тождественно истинна, в противном случае выполнима.
2) Если СКНФ построена, то формула не тождественно истинна. Если число слагаемых в СКНФ равно 2^n, где n- число переменных, то формула тождественно ложна, в противном случае формула выполнима.

4.4 Варианты заданий

Задание № 1

Из ниже указанных формул выбрать

I Вариант

СДНФ:

а) $F(x,y,z)= (x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge \overline{z})\vee(\overline{x}\wedge y\wedge z)\vee(\overline{x}\wedge \overline{y}\wedge z)$

б) $F(a,b)=(a\vee \overline{b})\wedge(a\vee b)\wedge(a\vee a)$

в) $F(x,y,z)= (\overline{x}\vee y)\wedge(\overline{y}\vee x)\wedge(\overline{z}\vee y)$

г) $F(a,b,c)=(a\wedge b\wedge \overline{c})\vee(\overline{a}\wedge b\wedge c)$

д) $F(x,y,z)= (x\vee y\vee z)\wedge(x\vee y\vee \overline{z})\wedge(\overline{x}\vee y\vee z)\wedge(\overline{x}\vee \overline{y}\vee z)$

II Вариант

СКНФ:

Задание № 2

Построить СДНФ и СКНФ функций:

I Вариант

а) $\boldsymbol{x \wedge y \vee x \wedge \overline{y} \to x}$

б) $\boldsymbol{(\overline{x \wedge y} \to \overline{x}) \wedge (\overline{x \wedge y \to \overline{y}})}$

II Вариант

а) $\boldsymbol{x \to y \wedge \overline{x} \vee \overline{y}}$

б) $\boldsymbol{(\overline{x \to y}) \leftrightarrow (\overline{\overline{x} \vee y \wedge \overline{x}})}$

Задание № 3

Решить проблему разрешимости для следующих формул:

а) $F(x,y,z)= (x\wedge y\wedge \overline{x})\vee(x\wedge y\wedge \overline{y})\vee(\overline{z}\wedge y\wedge z)\vee(\overline{x}\wedge \overline{y}\wedge y)$

б) $F(a,b)=(a\vee \overline{b})\wedge(a\vee b)\wedge(\overline{a}\vee b)\wedge(\overline{a}\vee \overline{b})$

в) $F(x,y,z)= (\overline{x}\vee y\vee z)\wedge(\overline{y}\vee x\vee z)\wedge(\overline{z}\vee y\vee x)$

г) $F(a,b,c)=(a\wedge b\wedge \overline{c})\vee(\overline{a}\wedge b\wedge c)$

д) $F(x,y,z)= (x\vee y\vee \overline{y})\wedge(x\vee z\vee \overline{z})\wedge(\overline{x}\vee y\vee x)$

4.5 Вопросы к защите практической работы № 4

1) Сформулируйте определение СДНФ. Приведите пример СДНФ.

2) Сформулируйте определение СКНФ. Приведите пример СКНФ.

3) Как построить СДНФ формулы по таблице истинности?

4) Как построить СКНФ формулы по таблице истинности?

5) В чем заключается смысл проблемы разрешимости в логике высказываний?

6) Как решить проблему разрешимости с помощью ДНФ и КНФ?

7) Как решить проблему разрешимости с помощью СДНФ и СКНФ?

5 Практическая работа № 5. Операции над предикатами

Цель работы. Изучить понятие предиката. Научиться выполнять операции над предикатами и находить множество истинности предикатов.

5.1 Ход работы

1) Изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники).
2) Выполнить задание своего варианта.
3) Составить отчет по работе.
4) Защитить работу.

5.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) Тема работы.
2) Цель работы.
3) Ход работы.
4) Формулировка заданий.
5) Решение заданий своего варианта.

5.3 Методические указания к практической работе № 3

5.3.1 Понятие предиката

В математике постоянно используются высказывания, зависящие от одной или нескольких переменных.

Предложения, в которые входят переменные и которые при замене этих переменных их значения становится высказываниями, называются **предикатами**.

Если предложение зависит от одной переменной, то это **одноместный предикат**, от двух переменных, то это **двуместный предикат** и т.д.

Множество ***T*** значение переменных при подстановки, которых в предикат получается истинное высказывание, называется **множеством истинности предиката.**

Если предикат двуместный, трехместный и т.д., то для каждой переменной должно быть указано множество его значений.

Если в предикат входят переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежащий соответственно множеству $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то декартова произведение множеств X_1

$\times X_2 \times \ldots \times X_n$ является **областью определения** этого **предиката**, а множество Т картежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, что при замене $\boldsymbol{x_1}$ на $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ на $\boldsymbol{a_2}$, … $\boldsymbol{x_n}$ на $\boldsymbol{a_n}$, получается истинное высказывание - называют **областью истинности предиката.**

Обозначение предикатов:

A(x), где $x \in X$ –одноместный предикат;

B(x, y), где $x \in X, y \in У$ – двуместный предикат.

Пример: Даны предикаты, определить их множество истинности

1) $2\mathbf{x}+5=3$, $x \in N$
   $T=\{\varnothing\}$ –множество истинности предиката
2) $2\mathbf{x}+5=3$, $x \in R$
   $T=\{-1\}$
3) $\mathbf{x}<7$, $\mathbf{x} \in N$
   $T=\{1,2,3,4,5,6\}$.
4) «В многоугольнике x имеется y вершин» - двуместный предикат A(x,y), где $x \in X$, $y \in У$ (X – множество многоугольников, У=N - множество натуральных чисел (определяет число вершин))

Тогда (квадрат, 5)$\notin$ T

(квадрат, 4)$\in$ T

5.3.2 Операции над предикатами

Конъюнкцией двух предикатов F(x) и Q(x), имеющих общую область определения X, называют такой предикат $F(x) \Lambda Q(x)$, $x \in X$ такой, что для любого $a \in X$ значение этого предиката является конъюнкцией высказываний $F(a) \Lambda Q(a)$.

Множество истинности для предиката $F(x) \Lambda Q(x)$ служит пересечением множеств истинности F(x) и Q(x).

Примеры: Даны предикаты. Найти множество истинности конъюнкции предикатов.

1) F(x): ”$3\leq x$”, x є *N*

Q(x): “ $x\leq 6$”, x є ***N***

F(x) Λ Q(x): “$3\leq x\leq 6$”

2) F(x): “ $x^2+y^2=25$”

Q(x): “$x+y=7$”

$$F(x)\Lambda Q(x): \quad \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$$

Замечание: Всякая система уравнений есть конъюнкция этих уравнений.

Дизъюнкцией двух предикатов F(x) и Q(x) называется такой предикат F(x)VQ(x), что для всех aєX, значение этого предиката является дизъюнкция высказываний F(a)VQ(a).

Множество истинности для предиката F(x)VQ(x) является объединение множеств истинности F(x) и Q(x).

Пример: Даны предикаты. Найти множество истинности дизъюнкции предикатов.

F(x): “$x<4$”, x є *R*

Q(x): “$x=4$”, x є *R*

F(x) V Q(x): “$x\leq 4$”, $x\in R$

Импликацией двух предикатов F(x) и Q(x), определенных на одном и том же множестве X, называют предикат F(x) → Q(x), который при любом a є *X*, имеет значение F(a) → Q(a). .

Примеры: Даны предикаты. Составить импликацию предикатов и выяснить их истинность.

1) F(x): “$2x=6$”

Q(x): “$x^2=9$”

F(x) → Q(*x*): “Если $2x=6$, то $x^2=9$” – И

2) F (x): “Последняя цифра числа x равна 0”

Q(x): ”Натуральное число *x* делится на 5”

F(x) → Q(x): “Если последняя цифра числа x равна 0, то это число делится на 5 ” –И

Эквиваленцией двух предикатов F(x) и Q(x), определенных на одном и том же множестве *X* , называют предикат F(x)↔Q(x) такой, что для всех a є *X*, его значение равно F(a)↔Q(a).

Пример: Даны предикаты. Составить эквиваленцию предикатов и выяснить их истинность.

F(x): “натуральное число ***x*** делится на 3”
Q(x): “сумма цифр числа ***x*** делится на 3”
F(x)↔Q(x): ”натуральное число ***x*** делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3” – И

Отрицанием предиката F(x) называется предикат $\overline{F(x)}$, определенный одним и тем же множеством X, значением которого для любого a є X, является отрицание выказывания $\overline{F(x)}$.

Пример: Дан предикат. Найти отрицание предиката

F(x): “$\boldsymbol{x}\geq 5$”, x є *R*
$\overline{F(x)}$: “$\boldsymbol{x}<5$”, x є*R*

Два предиката, заданные на одном и том же множестве *X,* называются **равносильными**, если множества их истинности совпадает.

5.4 Варианты заданий

Задание № 1
Найти множество истинности коньюнкции двух предикатов

I Вариант

а) A(x): ″$10\geq x$″
B(x): ″$x+4=16$″, x€R
б) F(x;y): ″$x+y=2$″
Q(x;y): ″$x^2+y^2\leq 16$″, x€R

II Вариант

а) B(x): ″$6<x$″
A(x): ″$2x+3=7$″, x€R
б) F(x;y): ″$x+y=4$″
Q(x;y): ″$x^2+y^2\leq 25$″, x€R

Задание № 2
Найти множество истинности дизъюнкции двух предикатов

I Вариант

а) P(x): ″$x>6$″
A(x): ″$x\geq -2$″
б) P(x): ″$x+2\geq 10$″
Q(x): ″$2x+3=7$″

II Вариант

а) P(x): ″$x\leq 6$″
Q(x): ″$x<-2$″
б) P(x): ″$4+x\geq 13$″
Q(x): ″$3x+2=6$″

Задание № 3

Составить импликацию и эквиваленцию предикатов, и выяснить истинность полученных предикатов

I Вариант

а) F(x): ″ Последняя цифра натурального числа x равна 2″
Q(x): ″ Натуральное число x делится на 2″
б) F(x): ″$2x+3=x+1$″
Q(x): ″$2x=14$″

II Вариант

а) F(x): ″ Последняя цифра натурального числа x равна 3″
Q(x): ″ Натуральное число x делится на 3″
б) F(x): ″$3x+2=2x+3$″
Q(x): ″$3x=15$″

Задание № 4

Найти множество истинности предикатов

I Вариант

а) $3x+4=-4,\ x\in N$
б) $x^2+y^2=5$, $x,y\in R$
в) $y=2x+1,\ x,y\in R$

II Вариант

а) $2x+5=5,\ x\in N$
б) $x^2+y^2=7$,$x,y\in R$
в) $y=3x-1,\ x,y\in R$

Задание № 5

Привести примеры равносильных предикатов

5.5 Вопросы к защите практической работы № 5

1) Что называется предикатом? Приведите примеры предикатов.
2) Что называется множеством истинности предиката?
3) Какие предикаты называются одноместными, двуместными, n-местными? Как они обозначаются? Приведите примеры.
4) Перечислите операции, которые можно осуществлять над предикатами.
5) Что называют конъюнкцией двух предикатов?

6) Что называют дизъюнкцией двух предикатов?
7) Что называют импликацией двух предикатов?
8) Что называют эквиваленцией двух предикатов?
9) Что называют отрицанием предиката?
10) Какие предикаты называются равносильными? Приведите примеры равносильных предикатов.

6 Практическая работа № 6. Высказывания с кванторами

Цель работы. Изучить понятие кванторы. Научиться записывать высказывания, используя кванторы, и определять их истинность. Научиться строить отрицание высказывания с кванторами.

6.1 Ход работы

1) Изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники).
2) Выполнить задание своего варианта.
3) Составить отчет по работе.
4) Защитить работу.

6.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) Тема работы.
2) Цель работы.
3) Ход работы.
4) Формулировка заданий.
5) Решение заданий своего варианта.

6.3 Методические указания к практической работе № 3

6.3.1 Понятие кванторов

Рассматривая понятия предиката, мы указали один из способов получения высказывания. Для этого достаточно в предикат подставить какое-нибудь значение переменной.

Существуют и другие способы получения высказываний из высказывательных форм (предикатов).

Рассмотрим предикат $F(x)$, $x\in X$:

1) Предложение «Для всех $x\in X$ истинно $F(x)$» является высказыванием.

Это высказывание обозначается: $(\forall x \in X)F(x)$

Символ $\forall$ **-** называют **квантором всеобщности** (общности), а присоединение этого символа к предикату $F(x)$ – «навешивание квантора всеобщности»

Квантор общности выражается с помощью слов « каждый», «всякий», «любой».

2) Из предиката $F(x)$, где $x \in X$ можно получить другое высказывание «Во множестве X существует такой элемент a, что $F(a)$ истинное высказывание»

Это высказывание обозначают: $(\exists x \in X)F(x)$

Символ $\exists$ - называют **квантором существования**.

Квантор существования выражается словами «некоторые», «найдётся», «существует» и др.

3) Можно составить и такое высказывание «Во множестве X есть один и только один элемент a, такой что $F(a)$ - истинное высказывание».

Это высказывание обозначают: $(\exists! x \in X)F(x)$

Символ $\exists!$ – называют **квантором единственности**.

Квантор единственности выражается словами «единственный», «один и только один».

Пример: Записать предложения с помощью кванторов, и определить их истинность:

1) «Все целые числа кратны 3»

$F(x)$: «число кратное 3»

$(\forall \mathbf{x} \in X)F(x)$ – Л

2) «Некоторые целые числа кратны 3»

$(\exists x \in X)F(x)$ – И.

Рассмотренные примеры получения высказываний с помощью кванторов относятся к одноместным предикатам. Всё сказанное остаётся справедливым и для многоместных предикатов, но при этом надо иметь в виду, что в подобных случаях для получения высказываний надо связать квантором каждую переменную.

При навешивании кванторов на многоместные предикаты, каждая переменная может быть связанная своим квантором.При этом два квантора одного предиката можно менять местами, истинность высказывания при этом не изменится.При навешивании разноименныхкванторов нельзя менять местами их порядок, т.к. может измениться истинность высказывания.

Примеры:

1)X – это множество людей; $F(x)$: «Рост человека меньше 180см».

Рассмотрим все варианты навешивания кванторов, определим их истинность:

$(\forall x\in X)F(x)$ – «У всех людей рост меньше 180 см» - Л

$(\exists x\in X)F(x)$ – «У некоторых людей рост меньше 180 см» - И

$(\exists! x\in X)F(x)$ – «У единственного человека рост меньше 180см» - Л

2) $Q(x)$: «2x+3=9», $x\in R$;

$(\forall x\in X)Q(x)$ – «Любое действительное число являются корнем уравнения 2x+3=9»-Л

$(\exists! x\in X)F(x)$ –«Единственное число является корнем уравнения 2x+3=9» - И

3) $F(x, y)$ – «Человек x родился в году y»

X – множество людей;

Y – множество годов рождения;

$x\in X$, $y\in Y$

$(\forall x\in X)(\exists y\in Y)F(x)$ $F(x, y)$ «Для каждого человека x есть год y, в котором он родился»– И

$(\exists y\in Y)(\forall x\in X)$ $F(x, y)$ – «Существует год y, в котором родился любой человек x» - Л

6.3.2 Построение отрицание высказывания с кванторами

Правило: Для того, чтобы построить отрицание высказываний с кванторами, нужно заменить квантор общности на квантор существования (и наоборот), а предложение стоящие после квантора, - на его отрицание.

В символическом виде эти правила можно записать так:

$$\overline{(\forall x\in X)F(x)} = (\exists x\in X)\ \overline{F(x)}$$

$$\overline{(\exists x\in X)F(x)} = (\forall x\in X)\ \overline{F(x)}$$

Таким образом, отрицание высказывания с кванторами может быть построена двумя способами:

1) Заменить квантор общности на квантор существования (и наоборот), а предложение стоящие после квантора, - на его отрицание.
2) Перед данным высказыванием ставятся слова «неверно, что».

Пример:

$(\exists x\in X)A(x)$: «Некоторые двузначные числа больше 60»

$\overline{(\exists x\in X)A(x)} = (\forall x\in X)\overline{A(x)}$: «Все двузначные числа не больше 60.»

6.4 Варианты заданий

Задание № 1

На множестве натуральных чисел заданы неопределённые высказывания:

P(x): “Число x - чётное”

Q(x): “Число x – кратно 4”

I Вариант	II Вариант
а) $(\forall x\in N):p(x)$	а) $(\exists x\in N):q(x)$
б) $(\exists x\in N):q(x)$	б) $(\forall x\in N):p(x)$

Сформулировать следующие высказывания, в словесной форме и определите их истинность.

Задание № 2

Записать следующие высказывания, воспользовавшись кванторами:

I Вариант	II Вариант
а) Всякое число равно самому себе;	а) Какого бы ни было число y, квадрат его не отрицателен;
б) Всякое число, либо положительно, либо отрицательно, либо равно нулю;	б) Существует x такое, что x-2=5

Задание № 3

Рассмотреть все варианты навешивания кванторов на предикат P(x,y), описать в словесной форме полученные высказывания и определить их истинность, если P(x,y), определенный на множестве людей, означает:

I Вариант	II Вариант
а) “x является родителем y”	а) “x является родственником y”
б) “x живёт в одном городе с y”	б) “x является сыном y”

Задание № 4

Построить отрицание высказывания. Определить истинность высказывания и его отрицание:

I Вариант	II Вариант
Если сумма цифр числа x, делится на 5, то и число делится на 5;	Если последняя цифра числа x чётная, то это число делится на 2;

6.5 Вопросы к защите практической работы № 6

1) Какие существуют способы получения высказываний из высказывательных форм?.

2) Что называется квантором всеобщности? Каким символом он обозначается?

3) С помощью, каких слов выражается квантор общности? Приведите примеры.

4)) Что называется квантором существования? Каким символом он обозначается?

5) С помощью, каких слов выражается квантор существования? Приведите примеры.

6) Что называется квантором единственности? Каким символом он обозначается?

7) С помощью, каких слов выражается квантор единственности? Приведите примеры.

8) Измениться ли истинность высказывания, если поменять местами в многоместном предикате одноименные кванторы? Привести примеры.

9) Измениться ли истинность высказывания, если поменять местами в многоместном предикате разноименные кванторы? Привести примеры.

10) Перечислить способы построения отрицания высказывания с кванторами. Привести примеры.

Список использованных источников

1 **Гончарова Г.А.** Элементы дискретной математики [Текст] /Г.А.Гончарова, А.А.Мочалин. –М.: Форум: инфра-м, 2004. –128 с.

2 **Коротина В.А.** Алгебра и теория чисел.Часть I [Текст] /В.А.Коротина. –О.: Оренбургская губерния, 1995. -40 с.

3 **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов [Текст] /Ф.АНовиков. –СПб.: Питер, 200. -304 с.

4 **Москинова Г.И.** Дискретная математика .Математика для менеджеров в примерах и упражнениях [Текст] /Г.И.Москинова. –М.: Логос, 2002.-240 с.

5 **Васильев Л.В.** Математика для бакалавров технических направлений [Текст] /Л.В.Васильев, Ю.Д.Максимов, М.Ф.Романов, А.В.Ястребов. –СПб.: Специальная литература, 1999. -256 с.

6 **Акимов О.Е.** Дискретная математика: логика, группы, графы [Текст] /О.Е.Акимов. –М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 352с.

7 **Яблонский С.В.** Введение в дискретную математику [Текст] /С.В.Яблонский. –М.: Наука, 1986. –397с.

8 **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики [Текст] /В.А.Горбатов. –М.: Высшая школа, 1986. –301с.

9 **Кузнецов О.П.** Дискретная математика для инженера [Текст] /О.П.Кузнецов, Г.М.Адельсон-Вельский. –М.: Энергоатомиздат, 1988. –с.

10. **Нефедов В.Н.** Курс дискретной математики [Текст] /В.Н.Нефедов, В.А.Осипов. –М.: МАИ, 1992. –с.