МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

О.Н. ЯРКОВА, Н.П. ФОТ, А.В. ЕРОФЕЕВ

ЦЕПИ МАРКОВА И СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЧАСТЬ 1: «ЦЕПИ МАРКОВА С ДИСКРЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ И ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОМУ
ПРАКТИКУМУ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 080116-ММЭ, 080801.65-ПРИМ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения высшего профессионального
образования Оренбургского государственного университета

Оренбург 2006

УДК 519.217.2:004.4
ББК 22.18я73
Я 74

Рецензент д.э.н., профессор Буреш О.В.

Я 74 Яркова О.Н.
Цепи Маркова и системы массового обслуживания. Часть 1: «Цепи Маркова с дискретным множеством состояний и дискретным временем»[Текст]: методические указания к лабораторному практикуму и самостоятельной работе студентов специальностей 080116-ММЭ, 080801.65-ПРИМ / О.Н. Яркова, Н.П. Фот, А.В. Ерофеев – ГОУ ОГУ, 2006.-41с.

Методические указания предназначены для студентов, изучающих дисциплину «Теория случайных процессов», для выполнения лабораторных работ по разделам: «Однородные цепи Маркова с дискретным множеством состояний и дискретным временем» и «Неоднородные цепи Маркова с дискретным множеством состояний и дискретным временем». По каждому разделу рассмотрена типовая задача и приведена методика ее решения с использованием АПК «Цепи Маркова». Для каждого раздела подобраны задачи. Методические указания предназначено для студентов специальностей 080116-ММЭ, 080801.65-ПРИМ

© Яркова О.Н.,
Фот Н.П.,
Ерофеев А.В.,
ГОУ ОГУ, 2006г.

Содержание

Введение..... 5
1 Описание лабораторного практикума..... 5
2 Постановка задач..... 5
3 Порядок решения задач в АПК «Цепи Маркова».....6
3.1 Однородные цепи Маркова 6
3.2 Неоднородные цепи Маркова 24
4 Содержание письменного отчета.....29
5 Вопросы для самоконтроля..... 29
6 Литература, рекомендуемая для подготовки к выполнению и защите лабораторных работ.....31
7 Задания.....32

Введение

Теория Марковских случайных процессов, в настоящее время, занимает важное место в теоретических и прикладных исследованиях. Методы анализа цепей Маркова основаны на аналитическом подходе к определению их характеристик и, при расчете показателей функционирования цепей, много времени приходится уделять рутинным вычислениям. При этом стандартные математические пакеты прикладных программ не обеспечивают, в полной мере, удобств при проведении подобных расчетов. В предлагаемых методических указаниях описаны процедуры расчета и анализа характеристик функционирования однородных и неоднородных цепей Маркова с дискретным множеством состояний и дискретным временем с использованием «автоматизированного программного комплекса для исследования цепей Маркова и систем массового обслуживания» (сокр. АПК «Цепи Маркова»), позволяющего сосредоточиться на анализе и свойствах изучаемых объектов, минуя рутинные вычисления.

1 Описание лабораторного практикума

Лабораторная работа включает следующие этапы:

- постановка задач;
- ознакомление с порядком выполнения работы в автоматизированном программном комплексе «Цепи Маркова»;
- работа в АПК «Цепи Маркова» в режиме обучения, выполнение расчетов индивидуальных заданий;
- подготовка письменного отчета;
- работа в АПК «Цепи Маркова» в режиме контроля, защита лабораторной работы.

2 Постановка задач

Для заданной однородной цепи Маркова с дискретным множеством состояний и дискретным временем рассчитать основные характеристики функционирования, такие как:

- матрица переходных вероятностей за T тактов времени;
- вероятности состояний через T тактов времени;
- вероятность первого перехода из состояния i в j за T тактов времени;
- вероятность первого возвращения в заданное состояния за T тактов времени;
- среднее время перехода из состояния i в j за T тактов времени;
- среднее время перехода из состояния i в j когда-нибудь;

- среднее время первого перехода из состояния i в j за T тактов времени.

Дать классификацию цепи и состояний.

Для эргодических цепей рассчитать финальные (предельные) вероятности состояний.

Для поглощающих цепей рассчитать:

- среднее время пребывания в невозвратном состоянии m объекта вышедшего из невозвратного состояния i;
- общее среднее время пребывания во всех невозвратных состояниях объекта вышедшего из невозвратного состояния i;
- вероятность попадания в поглощающее состояние m объекта вышедшего из невозвратного состояния i.

Для заданной неоднородной цепи Маркова с дискретным множеством состояний и дискретным временем рассчитать основные характеристики функционирования, такие как:

- матрица переходных вероятностей за T тактов времени;
- вероятности состояний через T тактов времени;

3 Порядок решения задач в АПК «Цепи Маркова»

3.1 Однородные цепи Маркова

Рассмотрим задачу: Предположим, что студент некоторого института каждый год с вероятностью 0,2 выбывает из него, с вероятностью 0,1 - остается на второй год и с вероятностью 0,7 - переходит на следующий курс. Длительность обучения – 5 лет. Возможность восстановления отсутствует.

Вычислить:

- матрицу переходных вероятностей через 3 такта времени;
- вероятности состояний через 4 такта времени;
- вероятность первого перехода из состояния i в j за 4 такта времени;
- вероятность первого возвращения в заданное состояние через 4 такта времени;
- среднее время перехода из состояния I в j за 4 такта времени;
- среднее время перехода из состояния I в j когда-нибудь;
- среднее время первого перехода из состояния I в j за 4 такта времени.

Дать классификацию цепи и состояний. Определить вероятности окончить институт для студентов i-го курса (i=1..5) (вероятности попасть в поглощающее состояние – «окончил институт», а также средние времена пребывания студента i-го курса в институте (общее время пребывания во всех невозвратных состояниях).

Найти вероятность перехода из невозвратного состояния j в поглощающее i.

Обозначим состояния системы следующим образом:

S_1 - студент отчислен из института;
S_2 - студент окончил институт;
S_3 - студент обучается на 5 курсе;
S_4 - студент обучается на 4 курсе;
S_5 - студент обучается на 3 курсе;
S_6 - студент обучается на 2 курсе;
S_7 - студент обучается на 1 курсе.

Так как множество состояний, в которых может находиться система-студент, конечно – семь состояний, то протекающий в системе процесс является дискретным. С определенной степенью погрешности можно предположить, что вероятность пребывания студента в одном из состояний в будущем зависит только от состояния в настоящем и не зависит от его состояния в прошлом. Следовательно, рассматриваемый случайный процесс можно считать марковским. Так как студент может переходить из состояния в состояние только в заранее определенные моменты времени – конец учебного года, следовательно, случайный процесс является процессом с дискретным временем. Зависимостью переходных вероятностей от времени можно пренебречь, т.о. рассматриваемый процесс будет однородным.

На основе этого можно сделать вывод о том, что в системе протекает однородный марковский случайный процесс с дискретным множеством состояний и дискретным временем.

Будем решать данную задачу, используя АПК «Цепи Маркова». Для освоения учебного материала целесообразно использовать режим «Обучение».

Для запуска программы дважды щелкните указателем мыши по ярлыку

на рабочем столе вашего компьютера. На экране монитора появится заставка с выбором режима работы и типа цепи Маркова (рисунок 1).

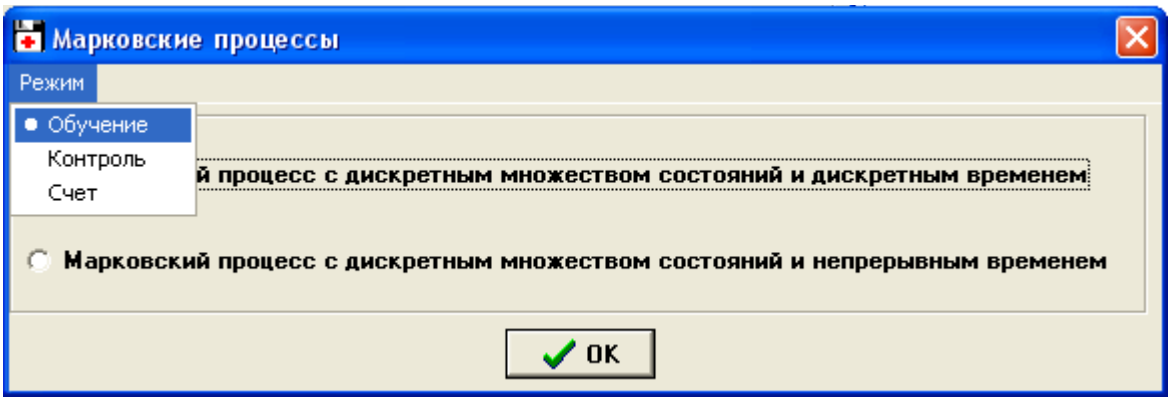


Рисунок 1 - Окно «Марковские процессы»

Выберете пункт «Марковский процесс с дискретным множеством состояний и дискретным временем», а затем режим «Обучение», на вопрос «Посмотреть журнал ошибок» ответьте «Нет» (рисунок 2).

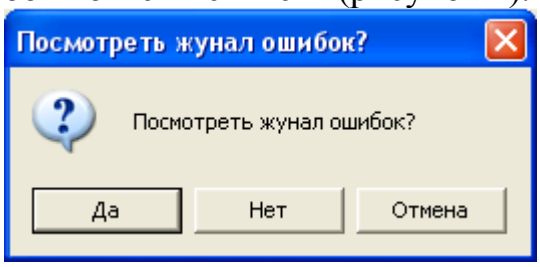


рисунок 2 – Окно просмотра журнала ошибок

Затем нажмите «Ok» и введите личные данные (рисунок3).

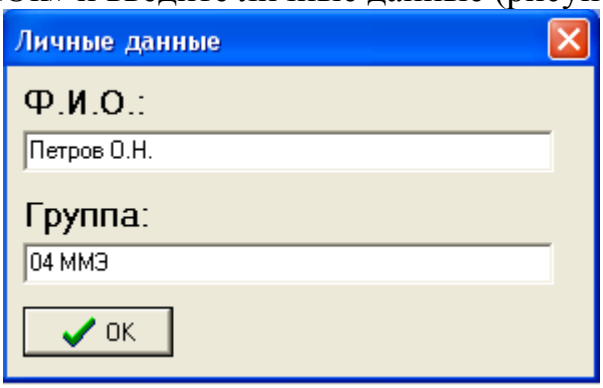


Рисунок 3 – Окно «Личные данные»

Далее вы можете ознакомиться с принятыми обозначениями (рисунок 4).

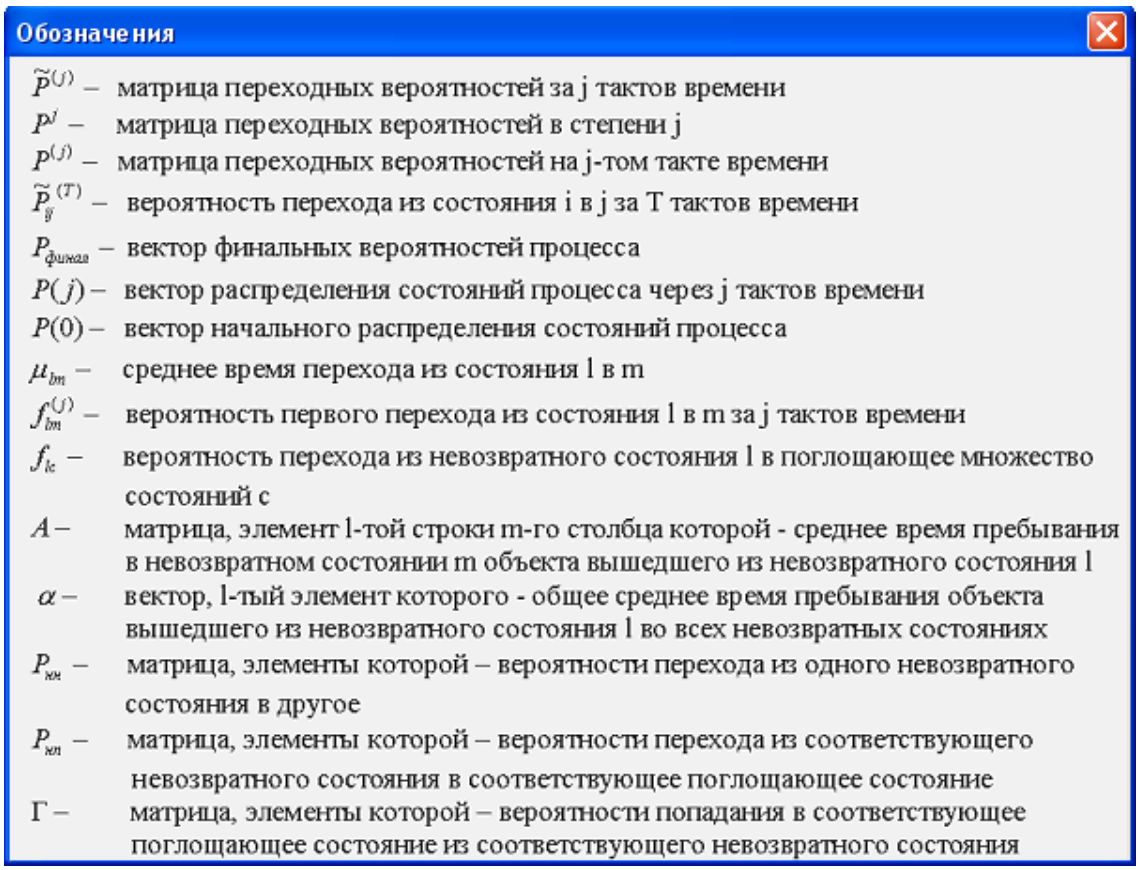


Рисунок 4 – Окно «Обозначения»

Закройте окно «Обозначения» используя ☒ в правом верхнем углу и выберете необходимое действие в окне «Выбор следующего шага» (рисунок 5). При выборе неверного шага вы увидите соответствующее сообщение (рисунок 6)

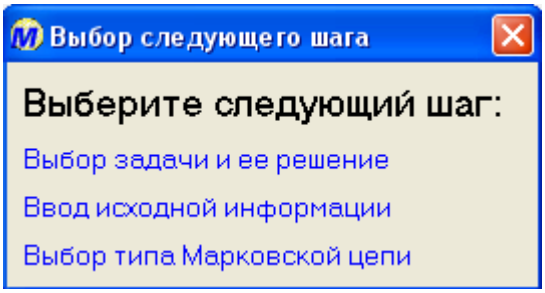


Рисунок 5 – Окно «Выбор следующего шага»

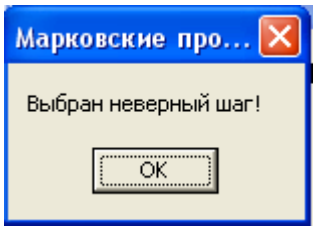


Рисунок 6 – Окно ошибки

В окне «Выбор типа процесса» (рисунок 7) отметим, что исследуемый нами процесс является однородным и ответьте на предложенный вопрос, выбрав верные утверждения. Для этого указателем мыши отметьте те из них, которые считаете правильными. В случае неверного ответа вы увидите сообщение об ошибке.

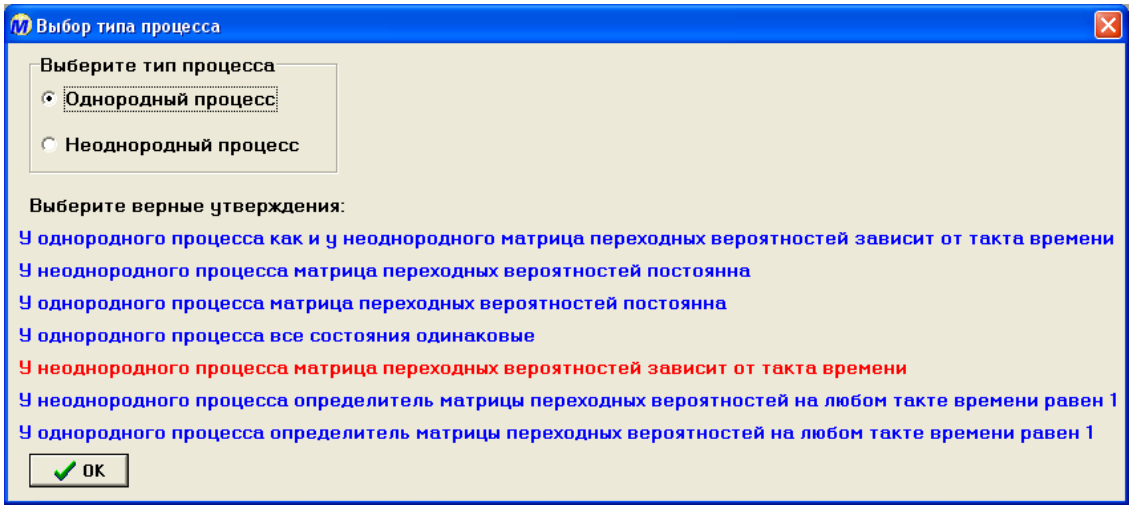


Рисунок 7 – Окно «Выбор типа процесса»

Нажмите «Ok». В окне «Выбор следующего шага» (рисунок 5) выберете соответствующее действие. В следующем окне (рисунок 8) выберете пункт «Количество состояний».

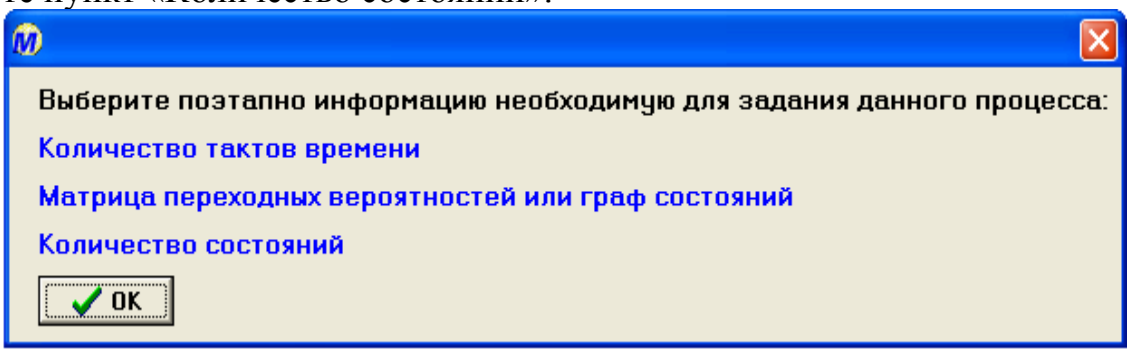


Рисунок 8 – Окно «информация для задания процесса»

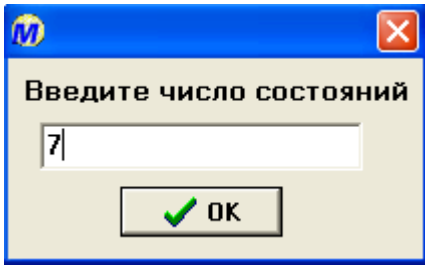


Рисунок 9 – Окно «ввод числа состояний»

Введите количество состояний заданной цепи, в данном случае 7(рисунок 9). Выберете очередной пункт (рисунок 8). Откроется окно – (рисунок 10).

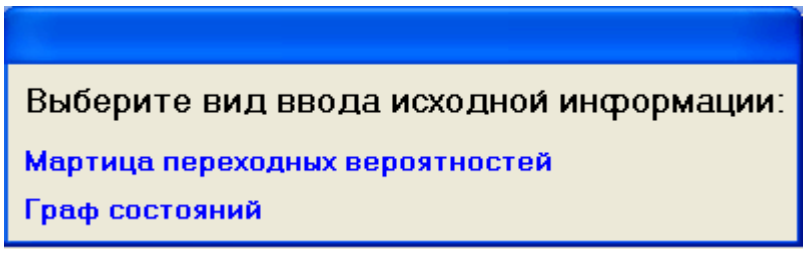
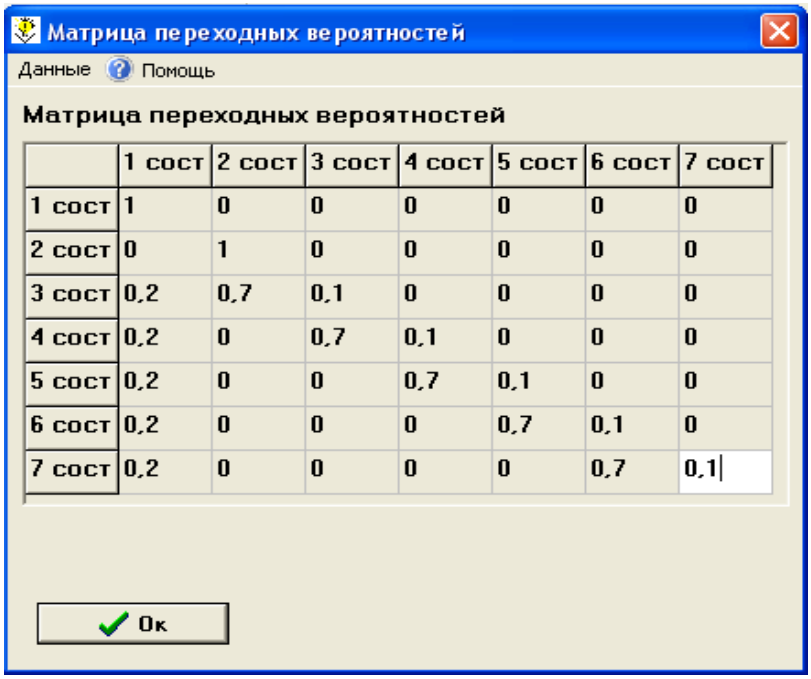


Рисунок 10 – Окно «Вид информации»



	1 сост	2 сост	3 сост	4 сост	5 сост	6 сост	7 сост
1 сост	1	0	0	0	0	0	0
2 сост	0	1	0	0	0	0	0
3 сост	0,2	0,7	0,1	0	0	0	0
4 сост	0,2	0	0,7	0,1	0	0	0
5 сост	0,2	0	0	0,7	0,1	0	0
6 сост	0,2	0	0	0	0,7	0,1	0
7 сост	0,2	0	0	0	0	0,7	0,1

Рисунок 11 – Окно «Матрица переходных вероятностей»

Выберете пункт «Матрица переходных вероятностей», введите матрицу и нажмите «Ok». На данном этапе работы матрицу переходных вероятностей можно сохранить или извлечь ранее сохраненную. Для этого выберете соответственно пункты меню «Данные-Сохранить» или «Данные-Извлечь». Теперь нажмите «Завершить» (рисунок 11).

Далее вы получите задание построить граф состояний по матрице переходных вероятностей, для этого в окне «Граф состояний» (рисунок 12) в блоке «Входные данные» введите соответствующую дугу и вероятность и нажмите кнопку «Добавить». Эти действия производятся для всех возможных переходов, или пока программа не прервет вас следующим заданием «Проверьте правильность построенного графа состояний» (рисунок 13).

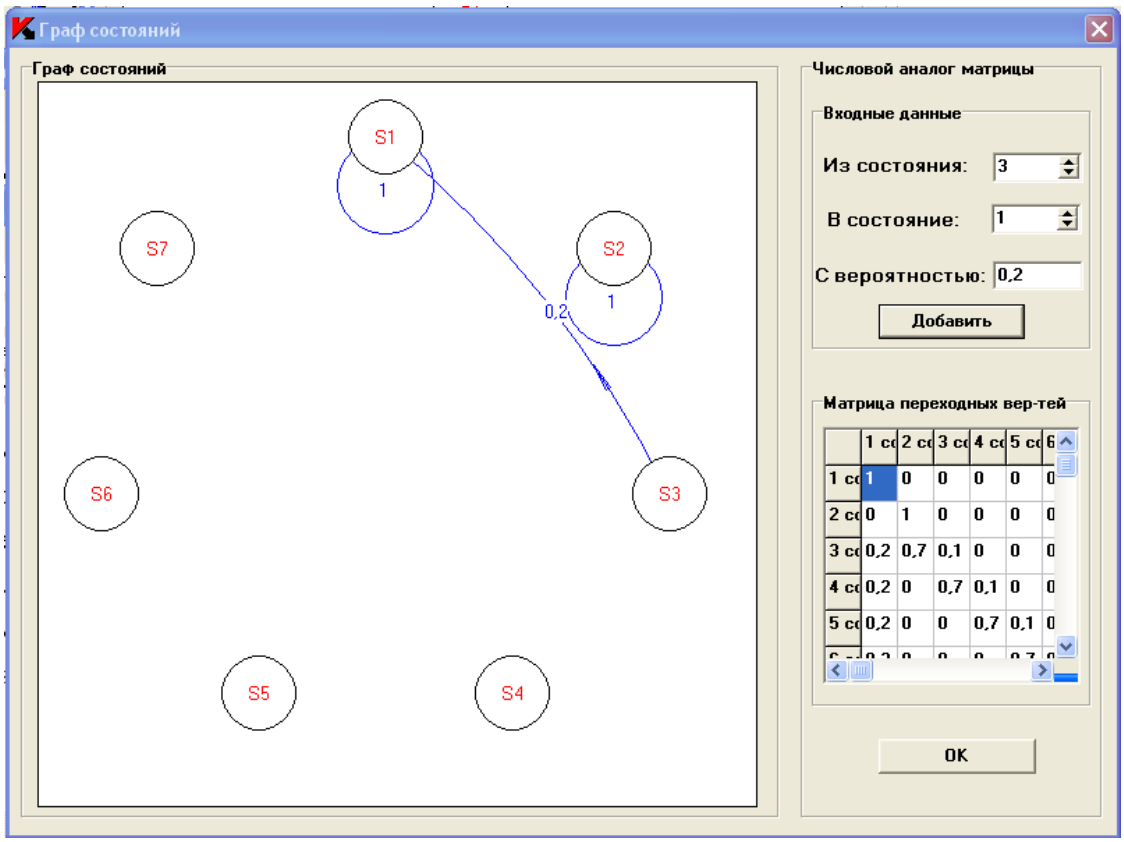


Рисунок 12 – Окно «Граф состояний»

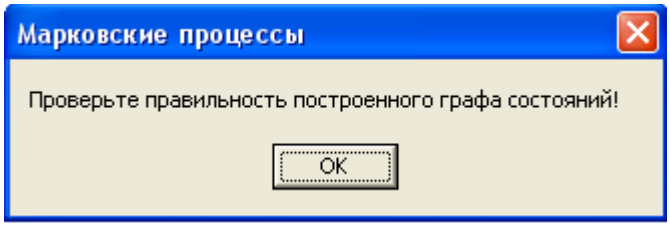


Рисунок 13 – Окно «Марковские процессы»

Если вы нашли ошибку на графе, исправьте ее. Например, для удаления дуги в поле «Входные данные» выберете нужную дугу и в поле «С вероятностью» поставьте значение 0, затем нажмите кнопку «Добавить». В нашем примере дуге S5-S5 соответствует вероятность 1, что не верно, поэтому исправим значение вероятности на 0,1(рисунок 14).

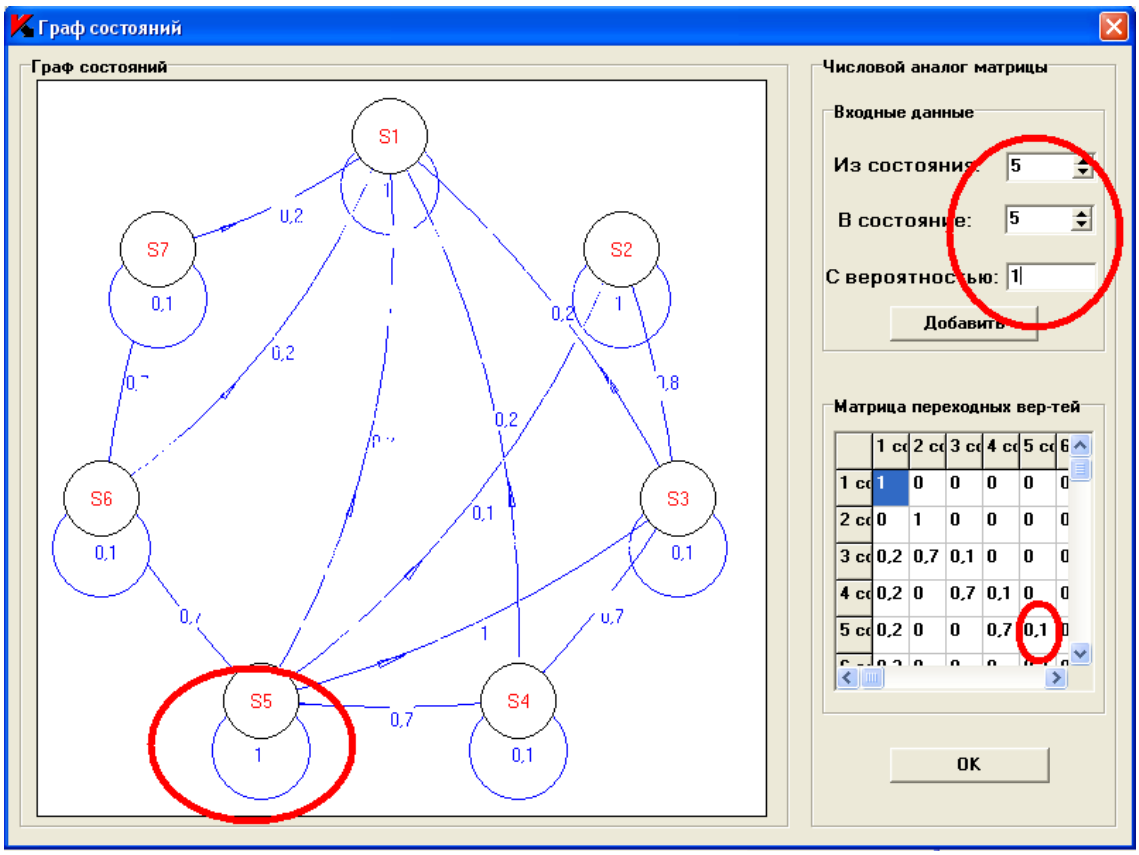


Рисунок 14 – Изменение параметров графа состояний

Исправив все ошибки, нажмите «Ok». В следующем окне нажмите «Ок» (рисунок 8). В окне «Выбор следующего шага» (рисунок 5) выберете пункт «Выбор задачи и ее решение».

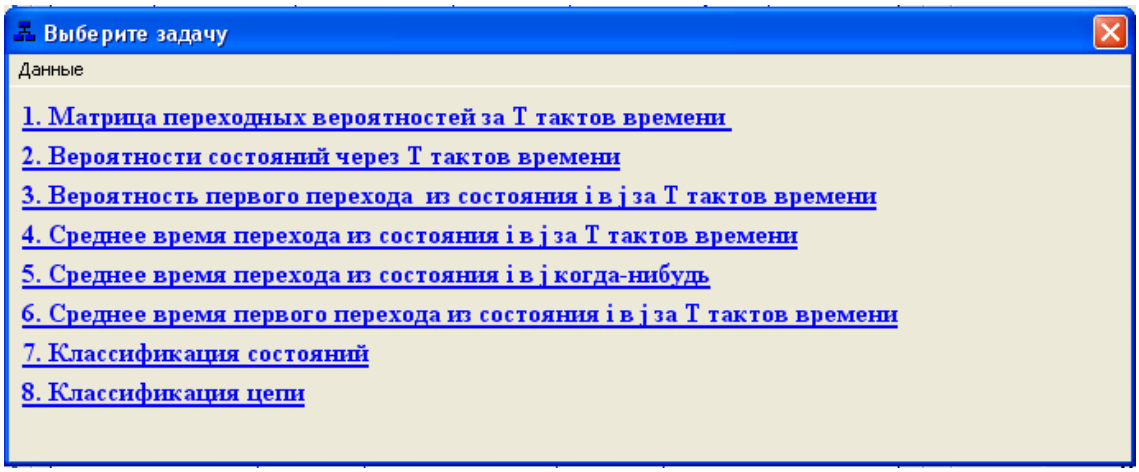


Рисунок 15 - Окно «Выбор задачи»

В окне «Выберете задачу» (рисунок 15) представлены всевозможные характеристики, которые можно рассчитать для данного класса задач. Последовательно выбирайте все пункты:

1) Матрица переходных вероятностей за 3 такта времени

Выберете пункт 1 (рисунок 15). Введите нужное число тактов времени в окне «Число тактов времени» и нажмите «Ok» (рисунок 16)

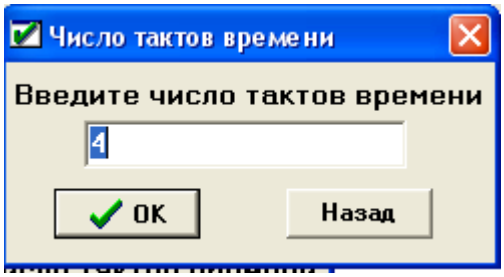
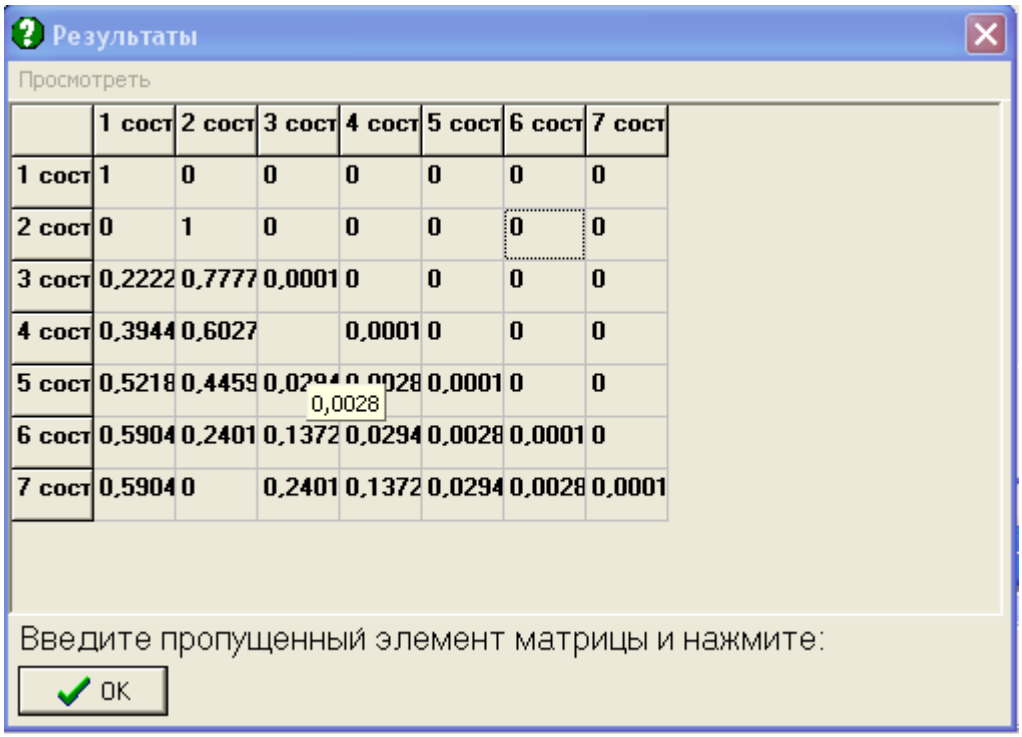


Рисунок 16 – Окно ввода числа тактов времени



	1 сост	2 сост	3 сост	4 сост	5 сост	6 сост	7 сост
1 сост	1	0	0	0	0	0	0
2 сост	0	1	0	0	0	0	0
3 сост	0,2222	0,7777	0,0001	0	0	0	0
4 сост	0,3944	0,6027		0,0001	0	0	0
5 сост	0,5218	0,4459	0,0294	0,0028	0,0001	0	0
6 сост	0,5904	0,2401	0,1372	0,0294	0,0028	0,0001	0
7 сост	0,5904	0	0,2401	0,1372	0,0294	0,0028	0,0001

Рисунок 17 – Окно «Результаты»

Просмотрите таблицу результатов и выполните задание, (в режиме обучения на все задаваемые вопросы есть подсказки) затем нажмите «Ok».

2) Вектор вероятностей состояний через 4 такта времени

Выберете пункт 2 (рисунок 15). Введите нужное число тактов времени в окне «Число тактов времени» и нажмите «Ok» (рисунок 16). Затем введите вектор начальных состояний (рисунок 18).

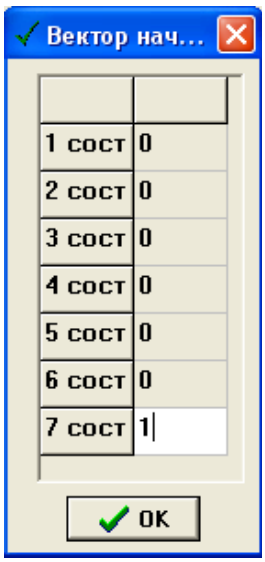


Рисунок 18 – Окно «Вектор начальных состояний»

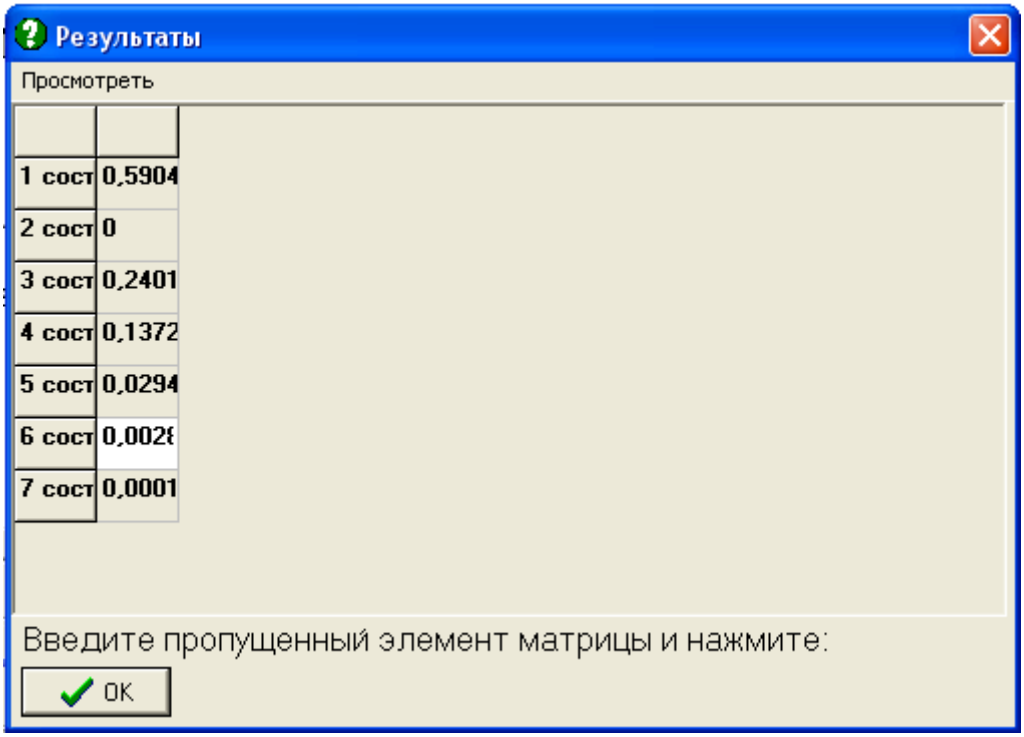
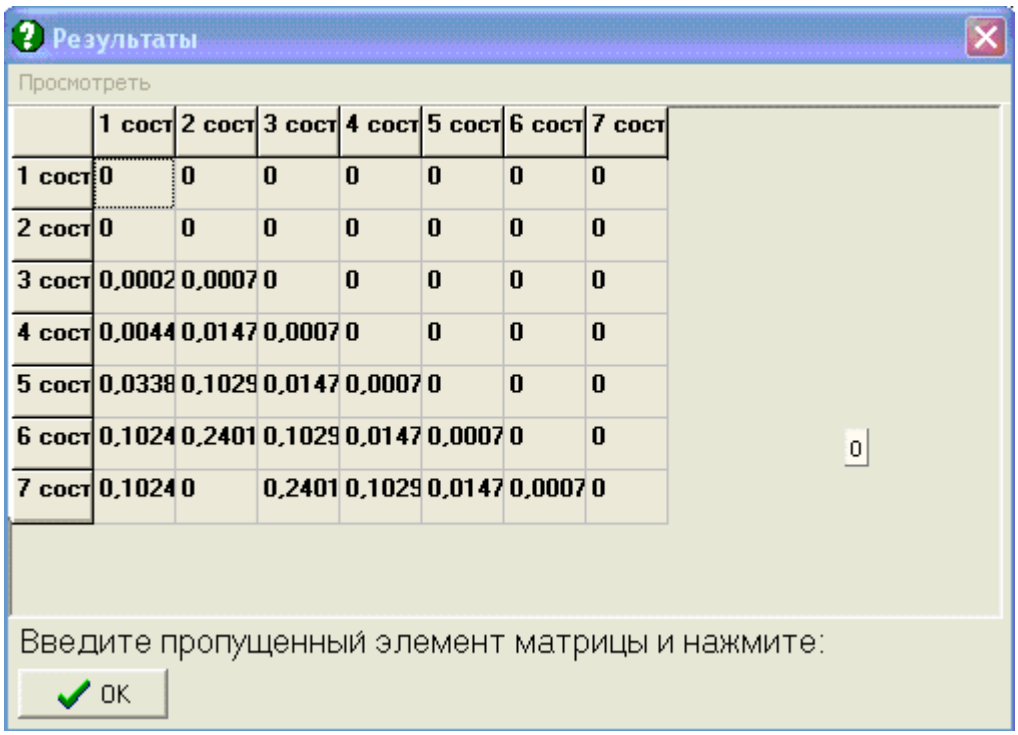


Рисунок 19 – Результаты

Просмотрите таблицу результатов (рисунок 19) и выполните задание, затем нажмите «Ok».

3) Вероятность первого перехода из состояния i в j за T тактов времени.

Выберете пункт 3 (рисунок 15). Введите нужное число тактов времени (4) в окне «Число тактов времени» и нажмите «Ok» (рисунок 16).



Результаты

Просмотреть

	1 сост	2 сост	3 сост	4 сост	5 сост	6 сост	7 сост
1 сост	0	0	0	0	0	0	0
2 сост	0	0	0	0	0	0	0
3 сост	0,0002	0,0007	0	0	0	0	0
4 сост	0,0044	0,0147	0,0007	0	0	0	0
5 сост	0,0338	0,1029	0,0147	0,0007	0	0	0
6 сост	0,1024	0,2401	0,1029	0,0147	0,0007	0	0
7 сост	0,1024	0	0,2401	0,1029	0,0147	0,0007	0

0

Введите пропущенный элемент матрицы и нажмите:

OK

Рисунок 20 – Таблица результатов

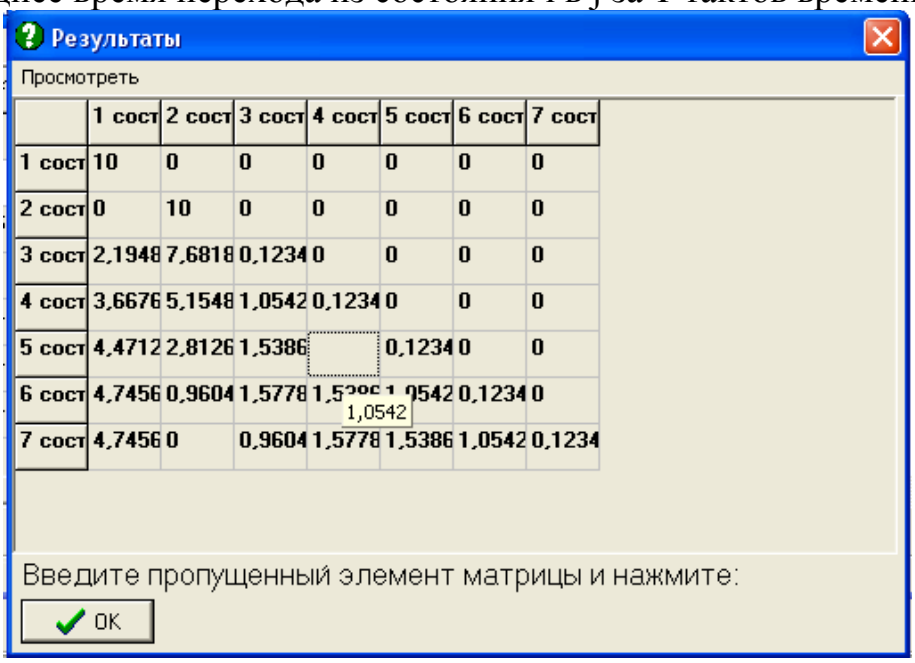
Просмотрите таблицу результатов (рисунок 20) и выполните задание, затем нажмите «Ok».

4) Вероятность первого возвращения в заданное состояние через T тактов времени

Данную характеристику можно вычислить аналогично предыдущей. При этом вероятность первого возвращения в заданное состояние будет получена на главной диагонали матрицы вероятностей первого перехода из состояния i в j за T тактов времени.

Для нашего примера эта матрица приведена на рисунке 20.

5) Среднее время перехода из состояния i в j за T тактов времени



Результаты

Просмотреть

	1 сост	2 сост	3 сост	4 сост	5 сост	6 сост	7 сост
1 сост	10	0	0	0	0	0	0
2 сост	0	10	0	0	0	0	0
3 сост	2,1948	7,6818	0,1234	0	0	0	0
4 сост	3,6676	5,1548	1,0542	0,1234	0	0	0
5 сост	4,4712	2,8126	1,5386		0,1234	0	0
6 сост	4,7456	0,9604	1,5778	1,5386	1,0542	0,1234	0
7 сост	4,7456	0	0,9604	1,5778	1,5386	1,0542	0,1234

1,0542

Введите пропущенный элемент матрицы и нажмите:

OK

Рисунок 21 – Матрица среднего времени перехода за T тактов

Выберете пункт 4 (рисунок 15). Введите нужное число тактов времени в окне «Число тактов времени» и нажмите «Ok» (рисунок 16). Просмотрите таблицу результатов (рисунок 21) и выполните задание, затем нажмите «Ok».

6) Среднее время перехода из состояния i в j когда-нибудь

Выберете пункт 5 (рисунок 15). В следующем окне выполните задание, для этого щелкните указателем мыши на нужную формулу(рисунок 22). Просмотрите таблицу результатов (рисунок 23). Закройте данное окно, нажав на крестик в правом верхнем углу.

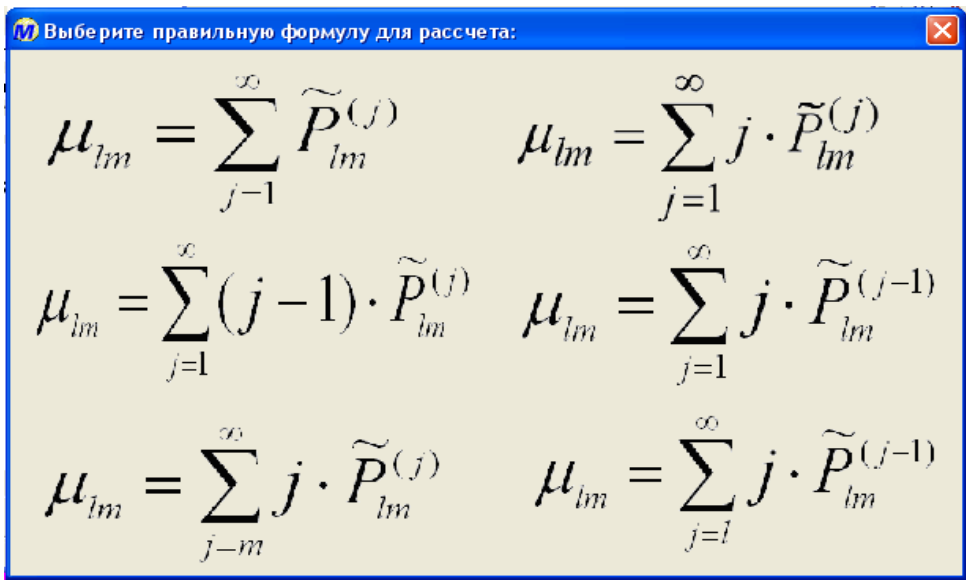
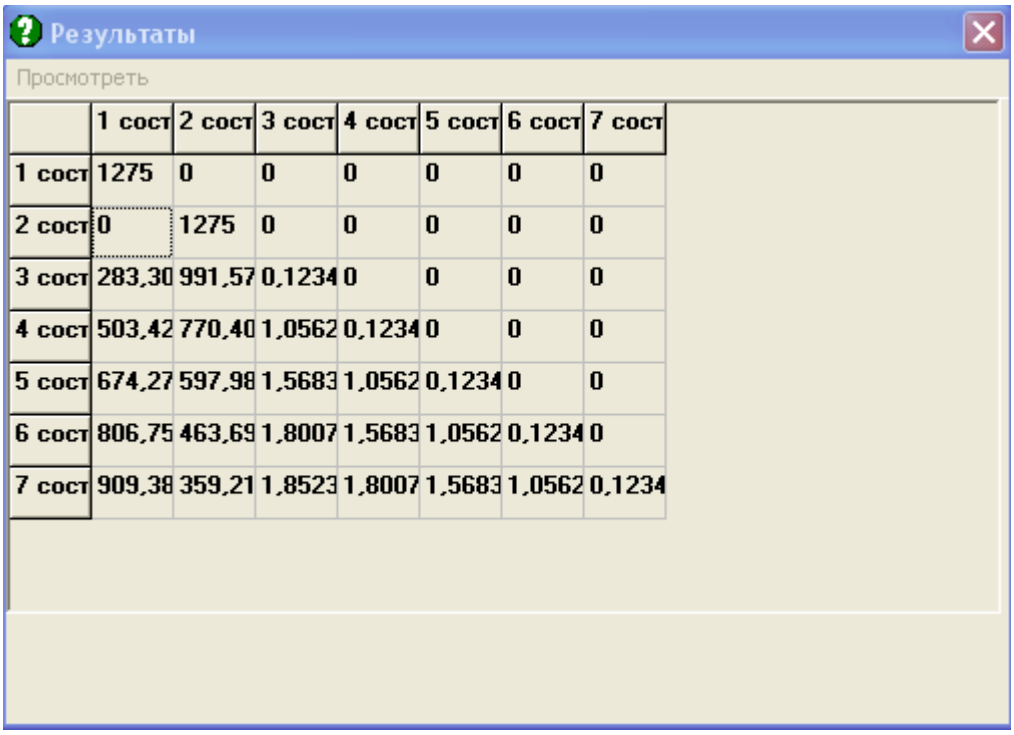


Рисунок 22 – Окно формул



Результаты

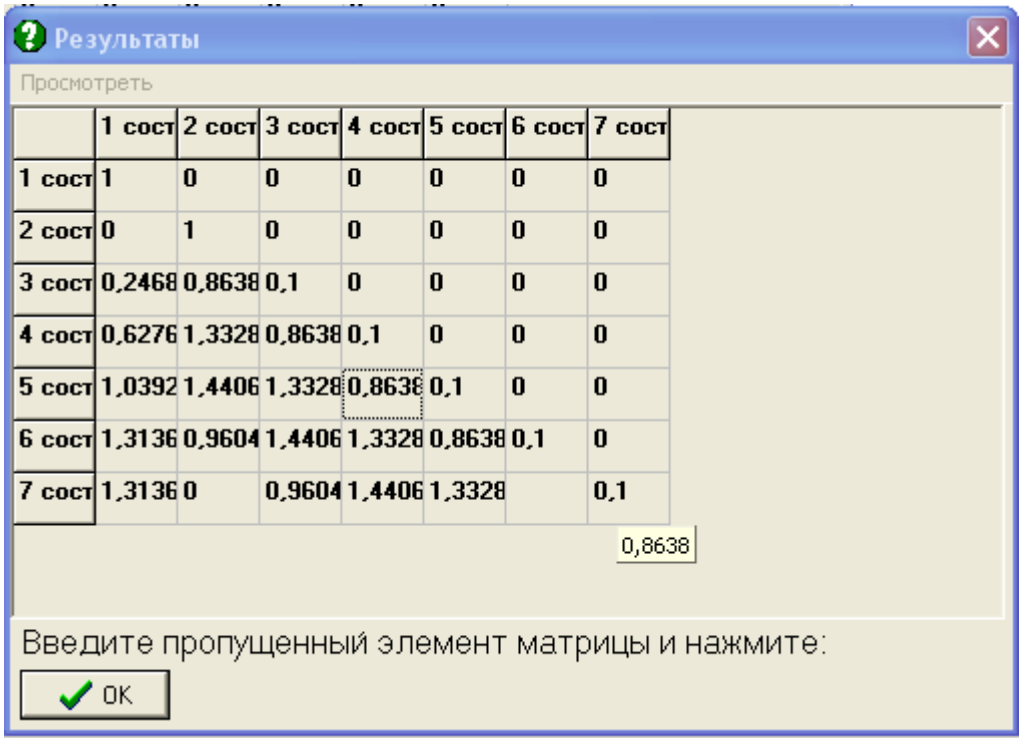
Просмотреть

	1 сост	2 сост	3 сост	4 сост	5 сост	6 сост	7 сост
1 сост	1275	0	0	0	0	0	0
2 сост	0	1275	0	0	0	0	0
3 сост	283,30	991,57	0,1234	0	0	0	0
4 сост	503,42	770,40	1,0562	0,1234	0	0	0
5 сост	674,27	597,98	1,5683	1,0562	0,1234	0	0
6 сост	806,75	463,69	1,8007	1,5683	1,0562	0,1234	0
7 сост	909,38	359,21	1,8523	1,8007	1,5683	1,0562	0,1234

Рисунок 23– Матрица среднего времени перехода когда-нибудь

7) Среднее время первого перехода из состояния i в j за T тактов времени

Выберете пункт 6 (рисунок 15). Введите нужное число тактов времени в окне «Число тактов времени» и нажмите «Ok» (рисунок 16). Просмотрите таблицу результатов (рисунок 24) и выполните задание, затем нажмите «Ok».



	1 сост	2 сост	3 сост	4 сост	5 сост	6 сост	7 сост
1 сост	1	0	0	0	0	0	0
2 сост	0	1	0	0	0	0	0
3 сост	0,2468	0,8638	0,1	0	0	0	0
4 сост	0,6276	1,3328	0,8638	0,1	0	0	0
5 сост	1,0392	1,4406	1,3328	0,8638	0,1	0	0
6 сост	1,3136	0,9604	1,4406	1,3328	0,8638	0,1	0
7 сост	1,3136	0	0,9604	1,4406	1,3328		0,1

0,8638

Рисунок 24 - Матрица среднего времени первого перехода за T тактов

8) Классификация состояний

Выберете пункт 7 (рисунок 15). Ответьте на вопрос, показанный в следующем окне, щелкнув мышью на соответствующую матрицу (рисунок25).

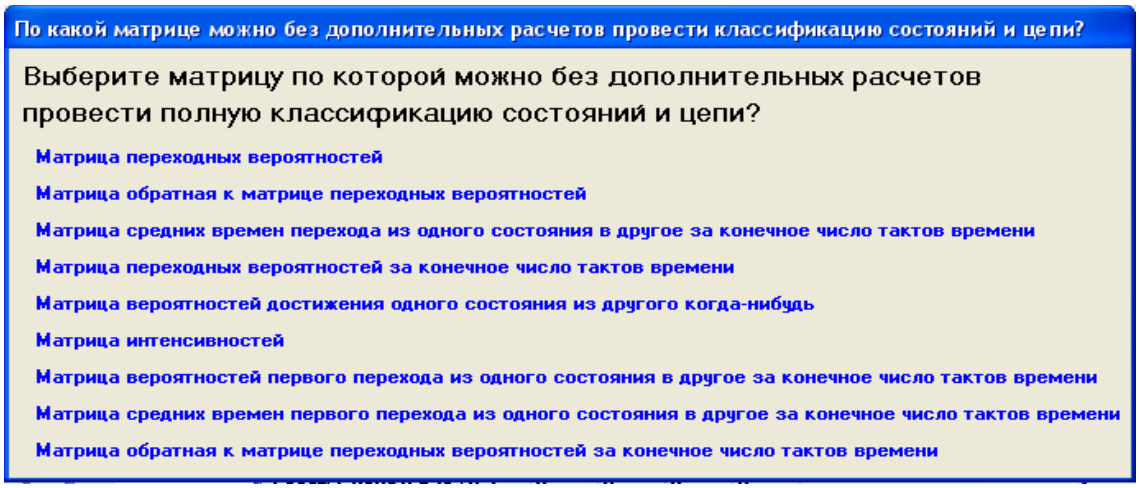


Рисунок 25 – Окно вопроса

В окне (рисунок 26) выберете утверждения соответствующие заданным состояниям, используя ниспадающее меню, и нажмите «Ok».

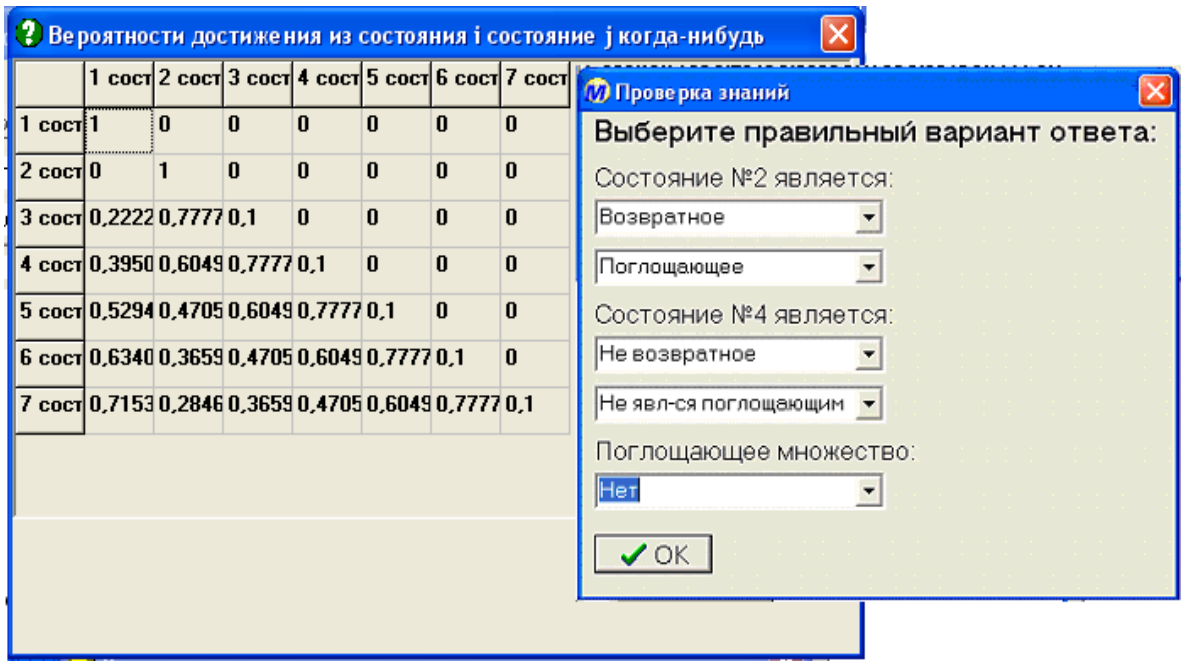


Рисунок 26 – Окно «Проверка знаний»

В случае неверного ответа, программа выдаст соответствующее сообщение, при повторном неверном ответе в режиме обучения вам будет представлено справочное окно с определениями, относящимися к данной теме(рисунок 27).

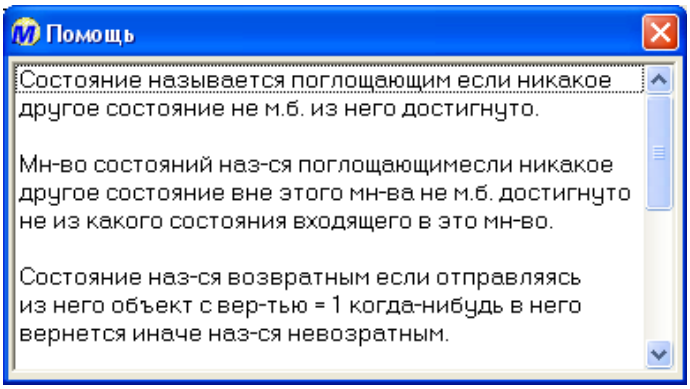


Рисунок 27 – Окно помощи

В случае верного ответа вы увидите окно с описанием всех состояний (рисунок 28). Закройте данное окно, щелкнув правой кнопкой мыши на крестик в правом верхнем углу.

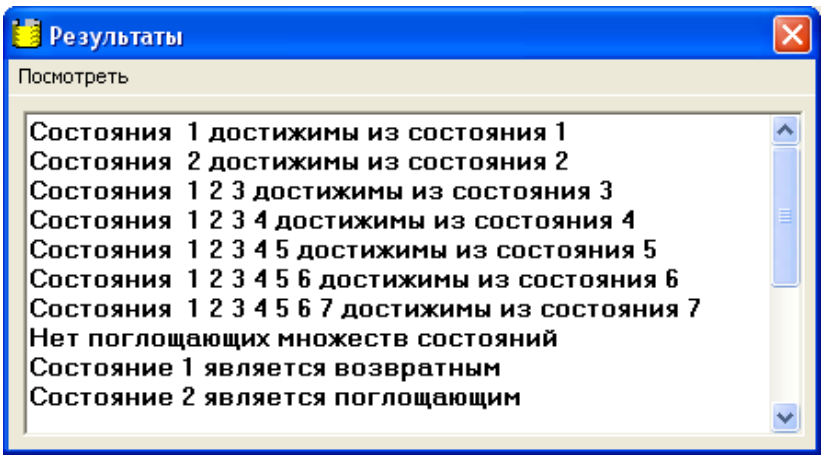


Рисунок 28 – Классификация состояний

Таким образом в нашей цепи имеются два поглощающих состояния, и четыре невозвратных состояния.

9) Классификация цепей

Выберете пункт меню 8 (рисунок 15). Выполните первое задание, выбрав нужный вариант матрицы и щелкнув по нему правой кнопкой мыши. Далее выполните второе задание (рисунок 29). Выполнив все задания, вы увидите окно (рисунок 30). Выберете в данном окне пункт меню «Рассчитать». И выполните следующее задание, отметив нужные характеристики мышью (рисунок 31).

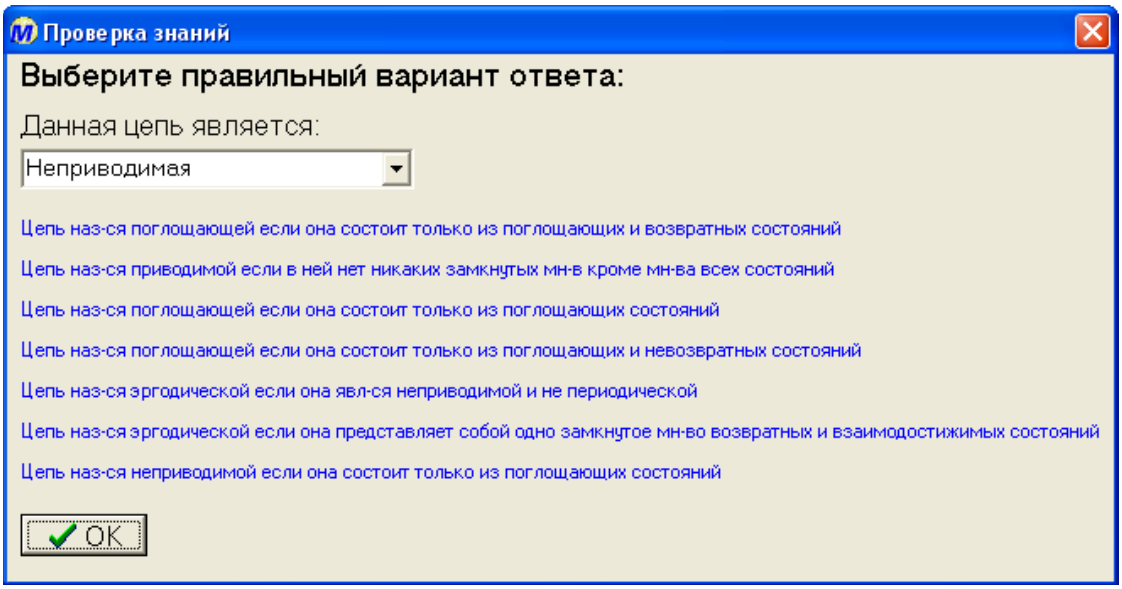


Рисунок 29 – Окно проверки знаний

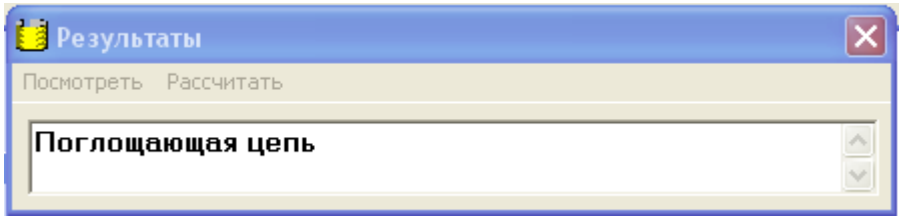


Рисунок 30 – Классификация цепи

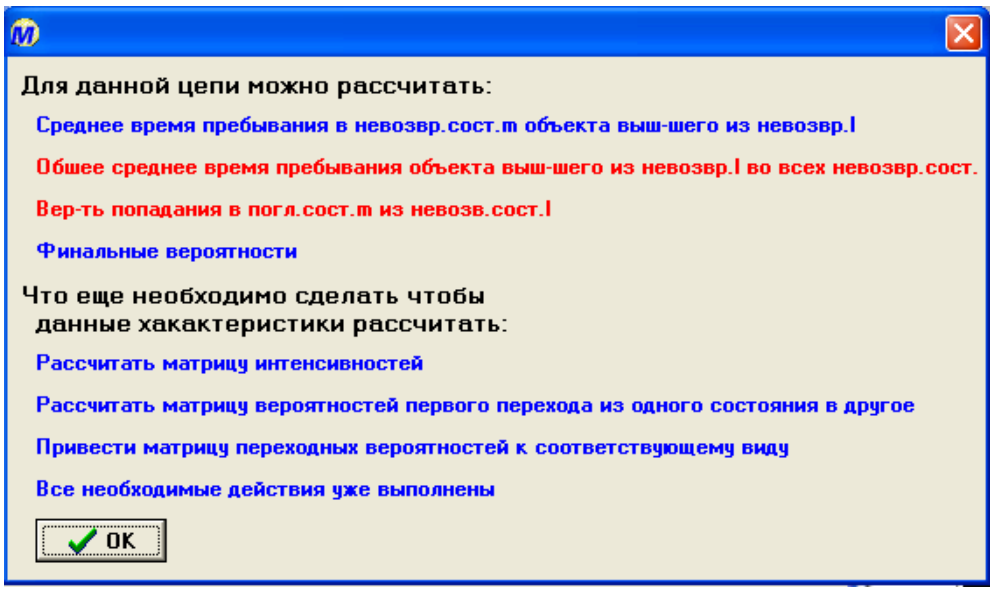


Рисунок 31 – Окно вопросов

Таким образом мы получили, что заданная цепь Маркова является поглощающей, следовательно, матрицу переходных вероятностей нужно привести к каноническому виду и рассчитать такие характеристики, как: среднее время пребывания в невозвратном состоянии m объекта, вышедшего из невозвратного состояния i; общее среднее время пребывания объекта вышедшего из невозвратного состояния i во всех невозвратных состояниях; вероятность попадания в поглощающее состояние m из невозвратного i.

Нажмите «Ok». Выберете пункт «Рассчитать – Приведенная матрица» или нажмите Ctrl-P (рисунок 30). В нашем случае матрица переходных вероятностей записана в канонической форме, следовательно, ее вид останется прежним.

Далее выберете пункт «Рассчитать – Среднее время пребывания в невозвратном состоянии m объекта, вышедшего из невозвратного состояния i» или нажмите Ctrl-S. Результаты расчета посмотрите в окне «Результаты» (рисунок 32) и выполните задание.

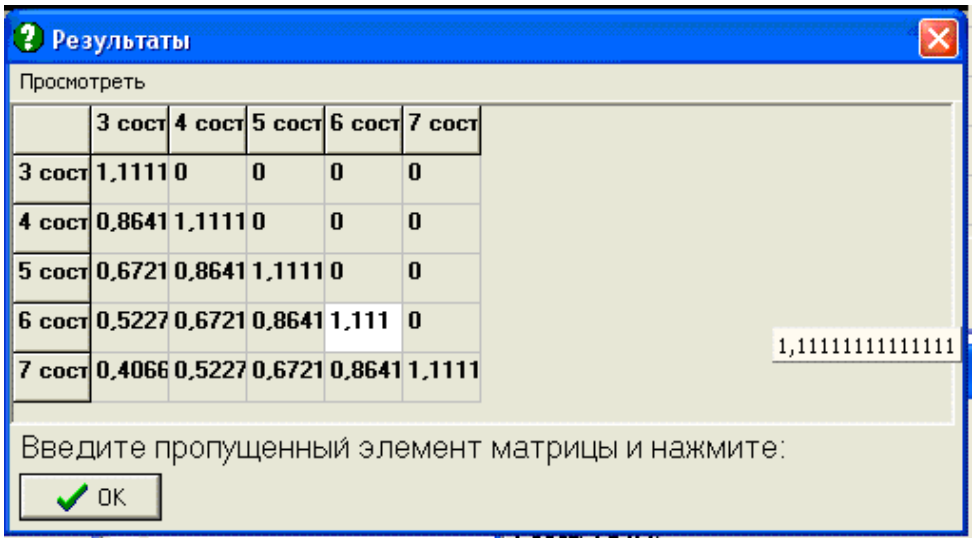


Рисунок 32 – Матрица средних времен

Далее выберете пункт «Рассчитать – Общее среднее время пребывания объекта вышедшего из невозвратного состояния I во всех невозвратных состояниях» или нажмите Ctrl-O. Результаты расчета посмотрите в окне «Результаты» (рисунок 33) и выполните задание.

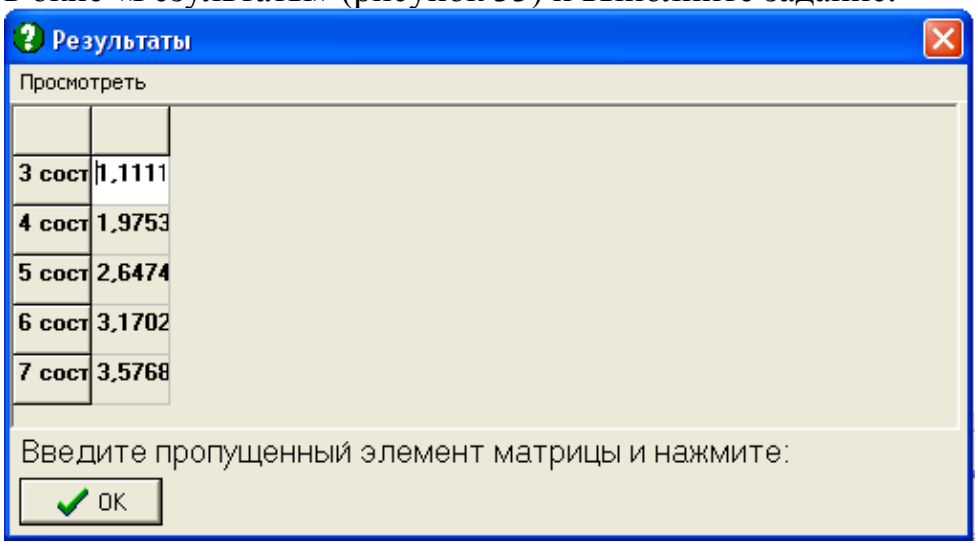


Рисунок 33 – Общее среднее время пребывания

Далее выберете пункт «Рассчитать – Вероятность попадания в поглощающее состояние m из невозвратного i» или нажмите Ctrl-V. Результаты расчета посмотрите в окне «Результаты» (рисунок 34) и выполните задание.

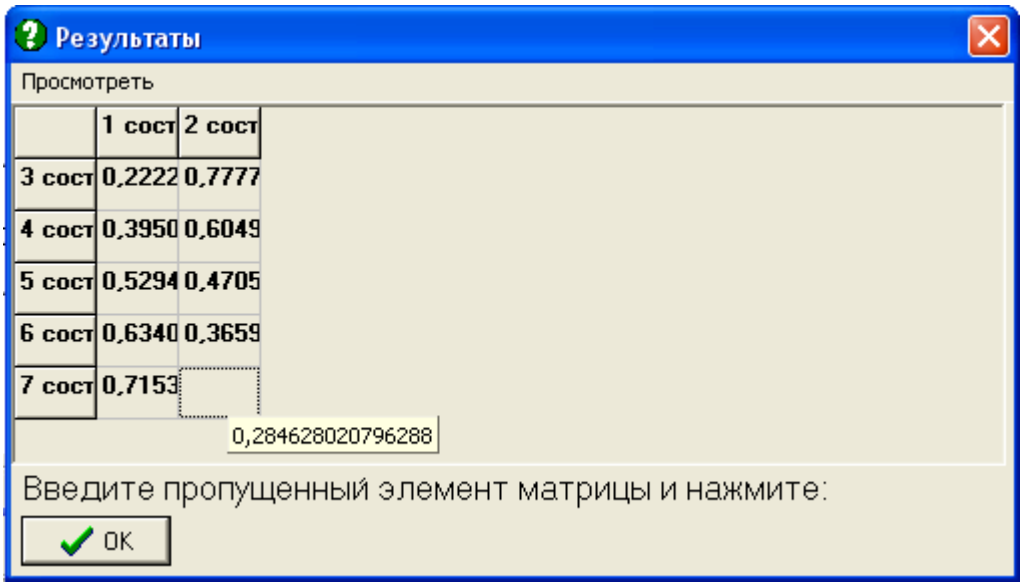


Рисунок 34 – Вероятность попадания в поглощающее состояние

На данном этапе режим обучения закончен и вы можете ознакомиться с журналом ошибок (рисунок 35).

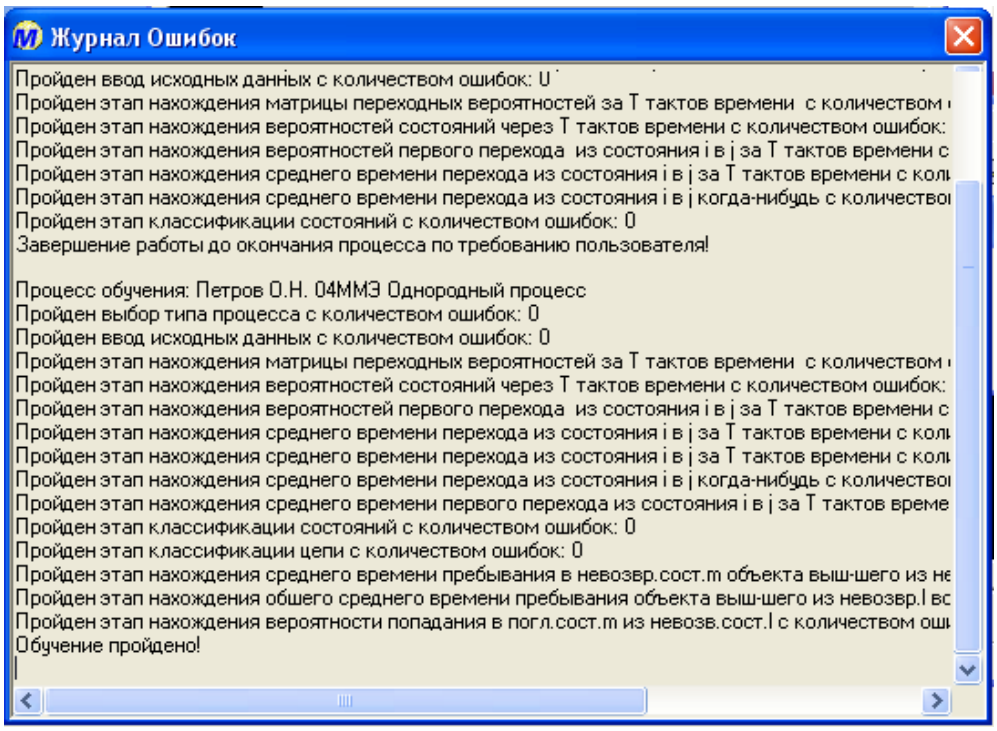


Рисунок 35 – Журнал ошибок

Если на этапе обучения вы допустили много ошибок, можно воспользоваться справкой. Для этого выберете пункт меню «Справка» и в окне «Справка: » (рисунок 36) найдите интересующую вас информацию.

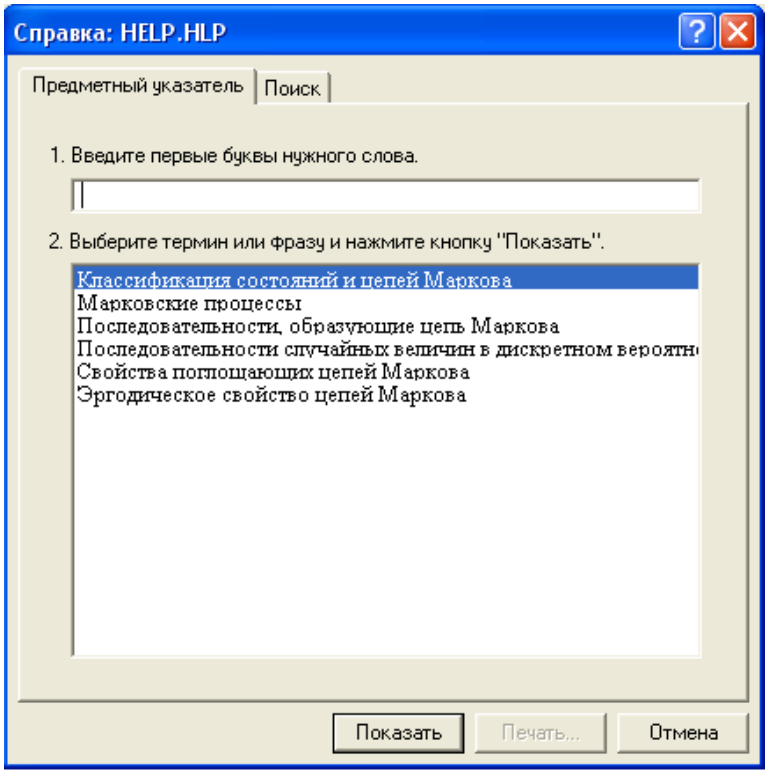


Рисунок 36 - Справка

Выводы: Вектор вероятностей состояний через 4 такта времени, при условии, что начальный момент времени – момент поступления, т.е.

$p_7 = 1; p_{1,..6} = 0$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0{,}5904 & 0 & 0{,}2401 & 0{,}1372 & 0{,}0294 & 0{,}0028 & 0{,}0001 \end{pmatrix}^T$. Таким образом, вероятность того, что через 4 года (4 такта времени) студент останется учиться на первом курсе (состояние 7) достаточно мала (0,0001), что вполне логично, но она не является нулевой. Здесь сказывается возможность академического отпуска с последующим восстановлением. Аналогично можно объяснить вероятности состояний 6-4. Вероятность того, что студент будет учиться на пятом курсе более высокая = 0,2401, но далеко не равна 1, так как в течении 4 лет студент может быть отчислен из института с вероятностью 0,2 в течении года, и с вероятностью 0,5904 за все четыре года. Другими словами только 24% студентов через 4 года будут учиться на пятом курсе, а 59% будут отчислены (для заданной матрицы переходных вероятностей).

Рассмотрим характеристику – вероятность первого возвращения в заданное состояние за Т тактов времени. По условию Т=4. В результате вычислений мы получили, что $f_{ii}^{(4)}=0$, $i=1,2..7$. Эти результаты вполне согласуются с реальным положением дел, так как, обучаясь на каком-либо курсе и перейдя на следующий курс, у студента нет возможности обучаться еще раз на том же курсе. А в случае отчисления, по условию задачи, студент не подлежит восстановлению.

Так как, студент, будучи отчисленным (состояние S_1), или заканчивая обучение (состояние S_2), не может достигнуть состояний обучения- S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, то состояния S_1, S_2 являются поглощающими, а остальные – невозвратными. Это согласуется с матрицей вероятностей достижения состояний когда-нибудь, на основании которой можно сделать вывод, что рассматриваемая цепь Маркова – поглощающая.

Компоненты вектора $\begin{pmatrix} 1{,}111 & 1{,}98 & 2{,}65 & 3{,}17 & 3{,}58 \end{pmatrix}^T$ - общее среднее время пребывания объекта вышедшего из невозвратного состояния I во всех невозвратных состояниях – свидетельствуют о том, что студенты, достигшие 5-го курса в среднем проводят в институте еще 1,11 года (сказывается возможность остаться на 5-м курсе для повторного прохождения курса). Студенты, достигшие 4-го курса, в среднем проводят в институте еще 1,98 года (помимо упомянутого выше фактора повторного обучения в данном случае дает себя знать и перспектива досрочного отчисления). Воздействием этих двух факторов объясняются и средние времена пребывания в институте студентов, обучающихся на других курсах.

Рассмотрим характеристику – вероятность попадания в поглощающее состояние m из невозвратного i.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}78 \\ 0{,}40 & 0{,}6 \\ 0{,}53 & 0{,}47 \\ 0{,}63 & 0{,}37 \\ 0{,}72 & 0{,}28 \end{pmatrix}$$

Последняя строка матрицы показывает, что лишь 28% поступивших в ВУЗ успешно закончат его, а соответственно 72% будут отчислены. Соответственно 4-ая строка показывает, что лишь 37% учащихся второго курса успешно закончат его, а 63% будут отчислены. Для 3-го курса эти показатели соответственно 47% -закончат и 53 – будут отчислены, для 4-го: 60% и 40%, для 5-го 78% - окончат и 22%-будут отчислены. Таким образом у учащегося пятого курса почти в 3 раза больше шансов успешно окончить институт, что соответствует реальному положению дел.

3.2 Неоднородные цепи Маркова

Рассмотрим задачу: В некотором городе вероятность того, что после ясного дня будет дождь, составляет 0,7,а снег – 0,1. Если день – дождливый, то погода сохранится с вероятностью 0,3, будет снег – 0,2. Если выпал снег, то вероятность того, что следующий день будет ясный – 0,6, а осадки (дождь и снег) – равновозможны. Известно, что с каждым днем вероятность осадков увеличивается на 0,02, причем в равной степени (на дворе осень и количество солнечных дней уменьшается). Такая тенденция сохранится в течении 7 дней. Определить: Матрицу вероятностей состояний через 3 суток; вероятность того, что через неделю будет дождь, если сегодня солнечно.

Решение: Составим матрицы переходных вероятностей для каждого такта времени – за один такт времени примем 1 день. Для каждого такта времени возможны три состояния – дождь (s_1), снег (s_2), ясно (s_3).

Матрицы переходных вероятностей будут иметь вид:

1-такт: $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$ 2-такт: $\begin{pmatrix} 0.31 & 0.21 & 0.48 \\ 0.21 & 0.21 & 0.58 \\ 0.71 & 0.11 & 0.18 \end{pmatrix}$ 3-такт: $\begin{pmatrix} 0.32 & 0.22 & 0.46 \\ 0.22 & 0.22 & 0.56 \\ 0.72 & 0.12 & 0.16 \end{pmatrix}$

4-такт: $\begin{pmatrix} 0.33 & 0.23 & 0.44 \\ 0.23 & 0.23 & 0.54 \\ 0.73 & 0.13 & 0.14 \end{pmatrix}$ 5-такт: $\begin{pmatrix} 0.34 & 0.24 & 0.42 \\ 0.24 & 0.24 & 0.52 \\ 0.74 & 0.14 & 0.12 \end{pmatrix}$ 6-такт: $\begin{pmatrix} 0.35 & 0.25 & 0.4 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.75 & 0.15 & 0.1 \end{pmatrix}$

7-такт: $\begin{pmatrix} 0.36 & 0.26 & 0.38 \\ 0.26 & 0.26 & 0.48 \\ 0.76 & 0.16 & 0.08 \end{pmatrix}$

Так как множество состояний, в которых может находиться система-студент, конечно – три состояния, то протекающий в системе процесс является дискретным. С определенной степенью погрешности можно предположить, что вероятность пребывания погоды в одном из состояний в будущем зависит только от состояния в настоящем и не зависит от его состояния в прошлом. Следовательно, рассматриваемый случайный процесс можно считать Марковским. Предположительно, погода может переходить из состояния в состояние только в заранее определенные моменты времени – конец дня, следовательно, случайный процесс является процессом с

дискретным временем. Переходные вероятности зависят от времени, т.о. рассматриваемый процесс будет неоднородным.

На основе этого можно сделать вывод о том, что в системе протекает неоднородный Марковский случайный процесс с дискретным множеством состояний и дискретным временем.

Будем решать данную задачу, используя АПК «Цепи Маркова». Будем использовать режим «Обучение». Запустите программу. На экране монитора появится заставка с выбором режима работы и типа цепи Маркова (рисунок 1). Выберете пункт «Марковский процесс с дискретным множеством состояний и дискретным временем», а затем режим «Обучение», на вопрос «Посмотреть журнал ошибок» ответьте «Нет» (рисунок 2). Затем нажмите «Ok» и введите личные данные (рисунок3). Далее вы можете ознакомиться с принятыми обозначениями (рисунок 4). В окне «Выбор следующего шага» выберете пункт «Выбор типа Марковской цепи» (рисунок 5). Выберете режим «Неоднородный процесс» в окне (рисунок 7), кликнув левой кнопкой мыши на соответствующей надписи, затем ответьте на поставленные вопросы и нажмите «Ок» внизу окна. На экране появится окно (рисунок 37)

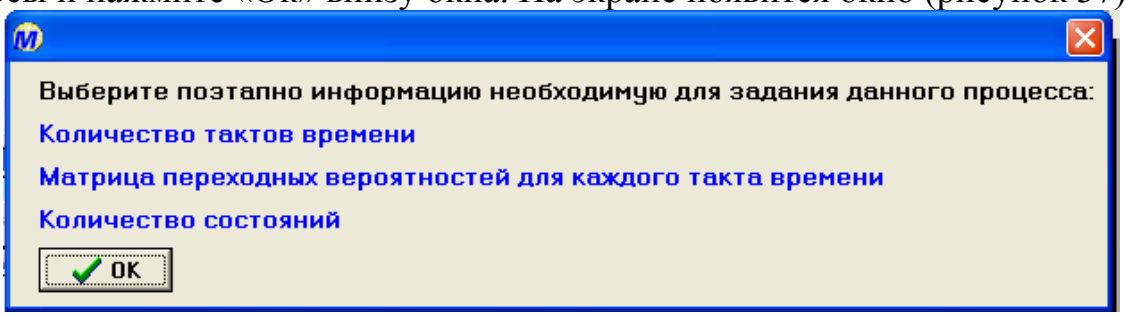


Рисунок 37 – Окно выбора информации для ввода данных

Выберете режим «Введите количество тактов времени» и введите в соответствующее окно нужное число (рисунок 38).

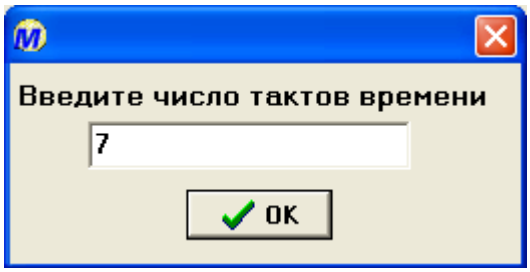


Рисунок 38 – Окно ввода числа тактов времени

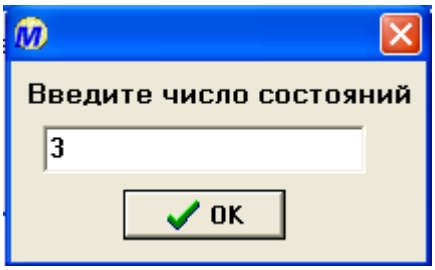


Рисунок 39 – Окно ввода числа состояний

Для нашей задачи это 7 тактов. Нажмите «Ок». Затем выберете пункт «Количество состояний» (рисунок 37) и введите нужное число (рисунок 39). Нажмите «Ок». Затем выберете пункт «Матрица переходных вероятностей для каждого такта» и введите матрицы (рисунок 40).

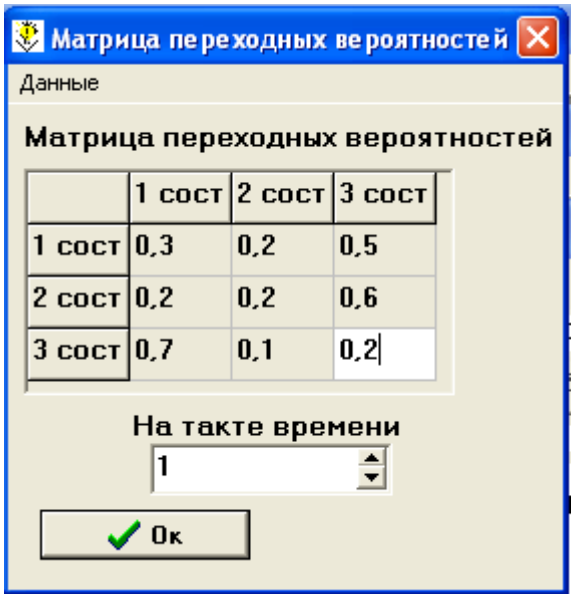


Рисунок 40 – Матрица переходных вероятностей

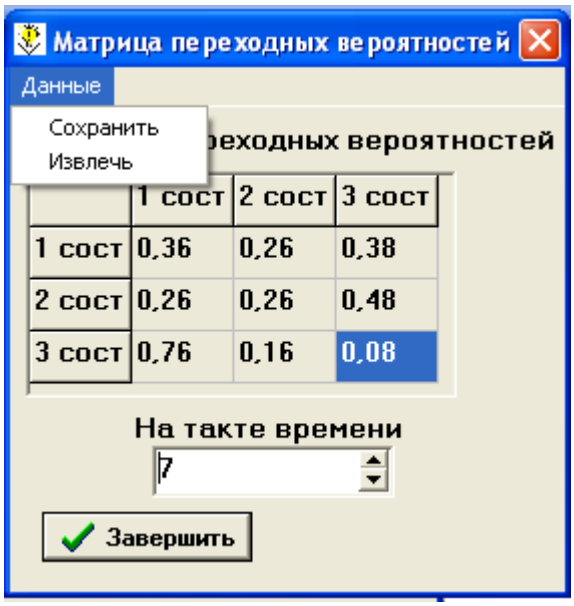


Рисунок 41 - Сохранение данных

После ввода матрицы для каждого такта времени нажмите «Ок», и только затем увеличивайте значение поля «На такте времени» и вводите следующую матрицу. После ввода матриц переходных вероятностей для всех тактов времени данные можно сохранить (рисунок 41). Нажмите кнопку «Завершить». Далее выберете пункт «Выбор задачи и ее решение» в окне «Выбор следующего шага» (рисунок 5).

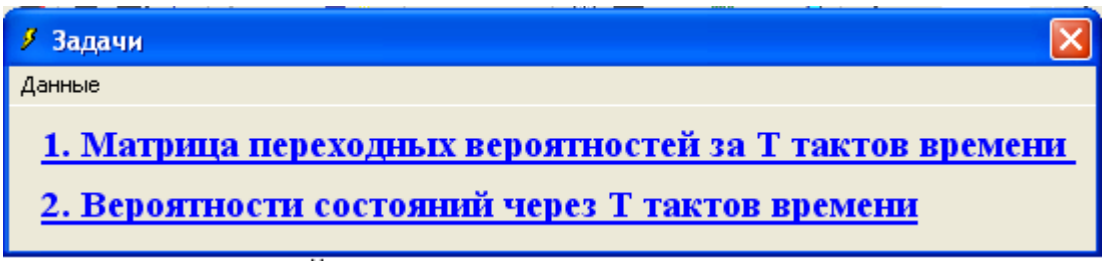


Рисунок 42 – Задачи

В окне «Задачи» (рисунок 42) выберете пункт «1.Матрица переходных вероятностей за Т тактов времени». В окне «Моменты времени» (рисунок 43) введите нужные значения, в нашем случае это 0 и 3 и нажмите «Ок».

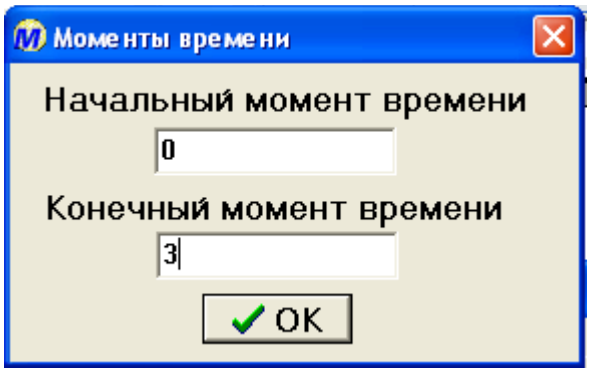


Рисунок 43 – Окно «Моменты времени»

В окне «Результаты» (рисунок 44) представлена матрица вероятностей состояний через 3 дня.

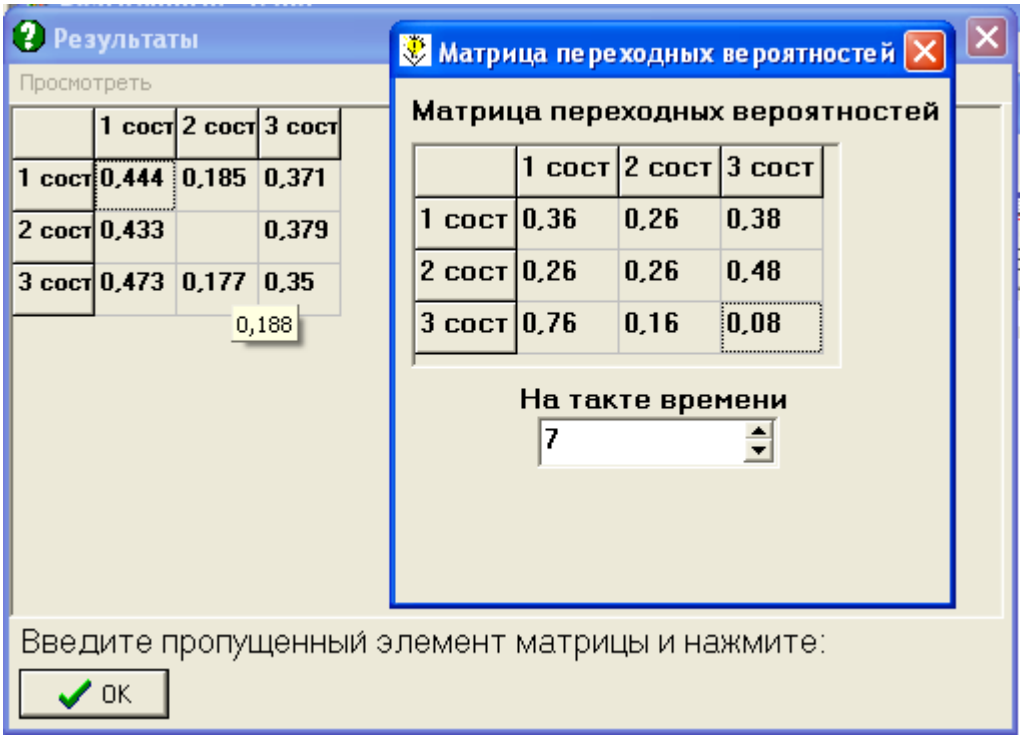


Рисунок 44 - Матрица вероятностей состояний через 3 дня

Выполните задание, для этого можно воспользоваться окном «Матрица переходных вероятностей», и нажмите «Ок». Затем в окне «Задачи» (рисунок 42) выберете пункт «2.Вероятности состояний через Т тактов времени». Так как по условию нашей задачи сегодня солнечно, следовательно вектор начальных состояний имеет вид $(1,0,0)^T$. Введите вектор начальных вероятностей состояний , а так же начальный и конечный моменты времени (рисунок 45) и нажмите «Ок».

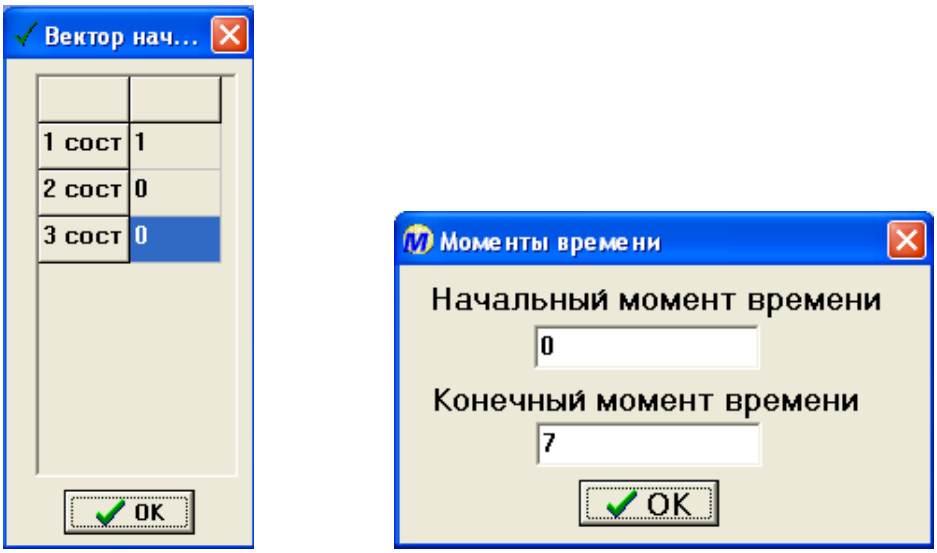


Рисунок 45 – Данные для расчета

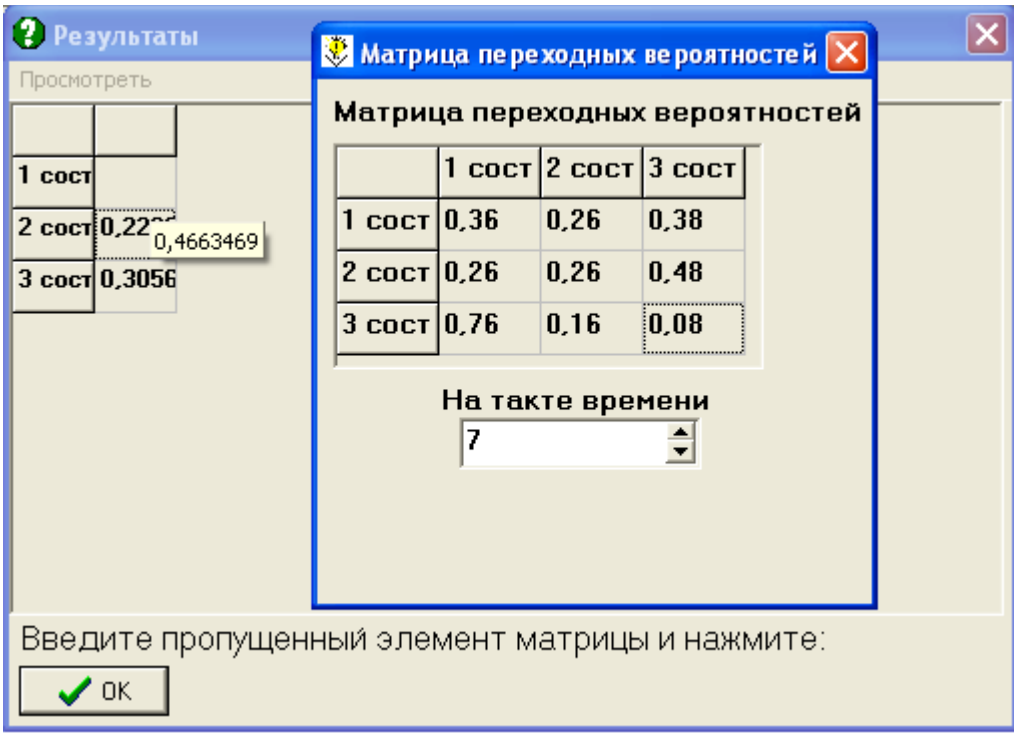


Рисунок 46 - Вектор вероятностей состояний через неделю

Вы получите вектор вероятностей состояний через неделю (рисунок 46). Выполните задание и нажмите «Ок». Таким образом дождливо через неделю будет с вероятностью 0.466.

4 Содержание письменного отчета

Отчет должен содержать:

- титульный лист;
- постановку задачи;
- краткие теоретические сведения по рассматриваемой в работе тематике;
- основные этапы расчета в АПК «Марковские процессы»;
- выводы.

5 Вопросы для самоконтроля

1) Что называется Марковским случайным процессом.

2) В чем различие между однородным и неоднородным Марковскими процессами.

3) Матрица переходных вероятностей.

4) Вероятности перехода из состояния в состояние через s тактов времени для однородных и неоднородных цепей.

5) Уравнение Колмогорова

6) Вероятность первого возвращения объекта в заданное состояние через t тактов времени.

7) Вероятность первого достижения из состояния i состояния j.

8) Вероятность f_{jj} того, что, выйдя из состояния j в момент времени t, объект когда-нибудь вернется в это состояние.

9) Среднее время μ_{jj} первого возвращения в состояние j (при условии, что $f_{jj} = 1$).

10) Вероятность первого достижения состояния *j* при выходе из состояния *i* ровно через *k* тактов времени.

11) Вероятность f_{ij} того, что, выйдя из состояния *i* в момент времени *t*, объект когда-нибудь попадет в состояние *j*.

12) Среднее время μ_{ij} первого достижения состояния j при выходе из состояния *i* (при условии, что $f_{ij} = 1$) .

13) Дать определения достижимого и недостижимого состояний.

14) Дать определение периодического состояния.

15) Периодическая цепь. Теорема солидарности.

16) Дать определение поглощающего состояния.

17) Дать определение возвратного состояния.

18) Дать определение неприводимой цепи.

19) В чем разница между поглощающим множеством состояний и множеством поглощающих состояний.

20) Определение и каноническая форма записи поглощающих цепей Маркова.

21) Определение эргодической цепи Маркова.

22) Эргодическое свойство цепей Маркова.

23) Какие характеристики можно рассчитать, используя вектор предельных вероятностей системы.

24) Среднее значение времени t_{ij} пребывания в невозвратном состоянии j объекта вышедшего из невозвратного состояния i.

25) Общее время, включая время пребывания в исходном невозвратном состоянии i, которое объект проводит во всех невозвратных состояния до попадания в какое – либо поглощающее состояние.

26) Вероятность попадания в поглощающее состояние $j = 1...m$ объекта вышедшего из невозвратного состояния i.

6 Литература, рекомендуемая для подготовки к выполнению и защите лабораторных работ

1 **Решетникова Н.П.**, Анализ цепей Маркова [Текст]: учебно-методическое пособие/ Н.П. Решетникова, Н.В.Юдаева - Саратов «Научная книга», 2001.-32с.

2 **Феллер В.**, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т1/ В.Феллер - М: Мир, , 1967.- 499с.

3 **Волков И.К.**, Случайные процессы [Текст]: учебник для вузов/ И.К. Волков, С.М.Зуев, Г.М.Цветкова – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. - 448с.

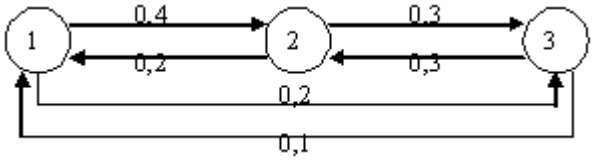
4 **Кемени Д.Д.**, Конечные цепи Маркова/ Д.Д. Кемени, Д.Л.Снелл, - М.: Наука, 1970. - 272с.

5 **Миллер Б.М.**, Теория случайных процессов в примерах и задачах/ Б.М. Миллер, А.Р. Панков - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.- 320с.

7 Задания

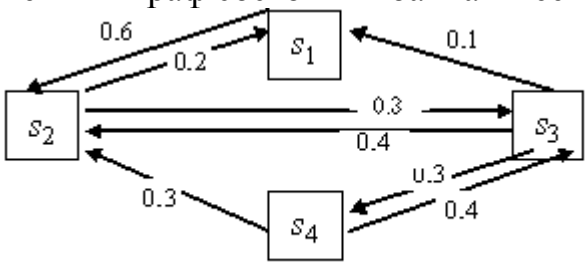
Однородный процесс:

1) Пусть состояния банка, характеризуются одной из процентных ставок: 2%, 3%, 4%, которые устанавливаются в начале каждого квартала и фиксированы на всем его протяжении. Анализ работы банка в предшествующие годы показал, что изменение переходных вероятностей с течением времени пренебрежимо мало. Известно, что в конце предыдущего года процентная ставка банка составляла 3%, а размеченный граф состояний банка имеет вид:



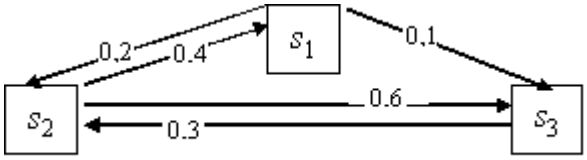
где состояние 1 соответствует процентной ставке 2%; состояние 2 – 3%; состояние 3 – 4%.Определить вероятности указанных состояний в банке в конце года. Определить вероятности перехода из состояния i в j за 2 шага (i=1..3, j=1..3).Определить вероятности 1-го возвращения из состояния i в j за 3 шага (i=1..3, j=1..3).Определить среднее время первого возвращения из состояния i в j (i=1..3, j=1..3). Рассчитать все основные характеристики функционирования цепи.

2) Пусть состояния банка, характеризуются одной из процентных ставок: 3%, 4%, 5%,6%, которые устанавливаются в начале каждого месяца и фиксированы на всем его протяжении. Анализ работы банка в предшествующий период показал, что изменение переходных вероятностей с течением времени пренебрежимо мало. Известно, что в конце предшествующего квартала процентная ставка банка составляла 5%, а размеченный граф состояний банка имеет вид:



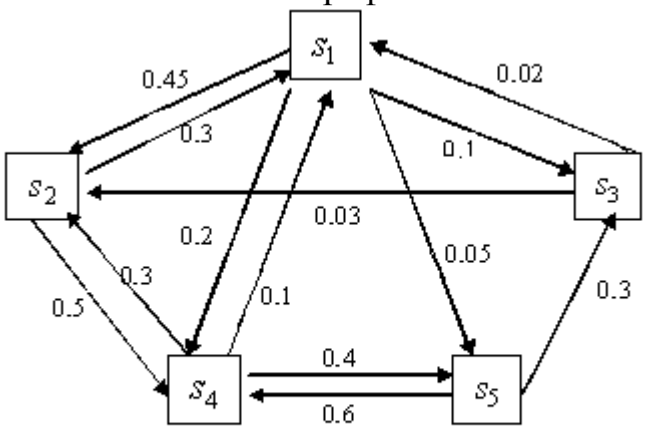
где состояние 1 соответствует процентной ставке 3%; состояние 2 – 4%; состояние 3 – 5%; состояние 4 – 6%. Определить вероятности указанных состояний в банке в конце квартала. Определить вероятности перехода из состояния i в j за 2 шага (i=1..4, j=1..4). Определить вероятности 1-го возвращения из состояния i в j за 3 шага (i=1..4, j=1..4). Определить среднее время первого возвращения из состояния i в j (i=1..4, j=1..4).

3) Состояния банка, характеризуются соответственно процентными ставками: 5%, 8%, 11%, которые устанавливаются в начале года и не меняются до следующего года. Переходные вероятности постоянны.. Известно, что в 2000 году процентная ставка банка составляла 5%, а размеченный граф состояний банка имеет вид:



где состояние 1 соответствует процентной ставке 5%; состояние 2 – 8%; состояние 3 – 11%. Определить вероятности указанных состояний в банке в 2004 году. Определить вероятности перехода из состояния i в j за 2 шага (i=1..3, j=1..3). Определить вероятности 1-го возвращения из состояния i в j за 3 шага (i=1..3, j=1..3). Определить среднее время первого возвращения из состояния i в j (i=1..3, j=1..3).

4) Состояния банка s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 характеризуются соответственно процентными ставками 4%, 6%, 10%, 11%, 14%, которые устанавливаются в начале каждого квартала и не изменяются на всем протяжении. Переходные вероятности, как показали предшествующие наблюдения, не изменяются. Известно, что в первом квартале первого года вероятности состояний имели следующие значения: $p_1(0) = 0.04$; $p_2(0) = 0.2$; $p_3(0) = 0.45$; $p_4(0) = 0.25$; $p_5(0) = 0.06$ Размеченный граф состояний имеет вид



Определить вероятности указанных состояний в банке через два года

Определить вероятности перехода из состояния i в j за 2 шага (i=1..5, j=1..5).

Определить вероятности 1-го возвращения из состояния i в j за 3 шага (i=1..5, j=1..5).

Определить среднее время первого возвращения из состояния i в j (i=1..5, j=1..5).

5) В некотором регионе планируется построить ГЭС. В связи с необходимостью обосновать экономическую эффективность данного проекта за уровнем воды в реке еженедельно производятся наблюдения. Он может находится в одном из трех состояний: низкий, нормальный и высокий. По результатам наблюдений в течение 100 недель были сделаны следующие выводы: изменение уровня воды с низкого на нормальный, равно как и с высокого на нормальный, происходило в Q случаях; изменение уровня воды с низкого на высокий, равно как и с высокого на низкий, происходило в V случаях; изменение уровня воды с нормального на низкий, равно как и на высокий, происходило в R случаях; известно, что на прошедшей неделе уровень воды был нормальный.

Определить:

- вероятности состояний через 14 недель;
- вероятность первого изменения уровня с низкого на высокий за 8 недель;
- среднее время изменения уровня с низкого на нормальный за 4 недели;
- среднее время изменения уровня с высокого на нормальный когда-нибудь;
- среднее время изменения уровня с нормального на низкий за 5 недель.

Варианты заданий:

a) Q=30, R=20, V=10;
b) Q=30, R=15, V=20;
c) Q=40, R=20, V=40;
d) Q=20, R=10, V=10;
e) Q=50, R=25, V=35;

6) Центральный процессор мультипрограммной системы в любой момент времени выполняет либо программы пользователя (S1), либо программы операционной системы(S2), либо находится в состоянии ожидания(S3).

Вероятность того, что система из состояния S2 переходит в состояние S1 совпадает с вероятностью того, что система из состояния S3 переходит в состояние S2, а также совпадает с вероятностью того, что система находится в состоянии S1 и никуда не переходит и равна «p». Вероятность того, что система из состояния S1 переходит в состояние S2 совпадает с вероятностью того, что система из состояния S2 переходит в состояние S3, а также совпадает с вероятностью того, что система находится в состоянии S3 и никуда не переходит и равна «q». Переходные вероятности постоянны. Известно, что в начальный момент времени процессор находится в состоянии ожидания. Считать, что один такт времени не совпадает с тактом процессора и равен 1 секунде. Составить граф функционирования системы. Рассчитать основные характеристики функционирования системы, такие как:

- матрица переходных вероятностей за 2 такта времени;
- вероятности состояний через 3 такта времени;

- вероятность первого перехода из состояния i в j (i=1..3, j=1..3) за 2 такта времени;

- среднее время перехода из состояния i в j (i=1..3, j=1..3) за 3 такта времени;

- среднее время первого перехода из состояния i в j (i=1..3, j=1..3) за 2 такта времени.

Рассчитать финальные (предельные) вероятности состояний в случае, если цепь эргодическая.

Варианты заданий:

a) p=0,7; q=0,2;
b) p=0,8; q=0,15;
c) p=0,6; q=0,3;
d) p=0,7; q=0,25;
e) p=0,75; q=0,2.

7) Для комбайнера Пшеничкина наступила уборочная страда: требуется убрать поле озимых площадью N га. Известно, что при уборке урожая комбайн движется кругами. За каждый такой проход с вероятностью p хлеб убирается с площади 1га. Вероятность того, что на каждом круге комбайн может выйти из строя равна q=1-p, и, следовательно, он не сможет перейти на следующий круг, не отремонтировав машину. По завершении работы радостный Пшеничкин направляется домой.

Для приведенных ниже данных Пшеничкину интересно:

а) каково среднее время пребывания его на втором круге жатвы (на i-том круге);

б) общее время, затраченное им на уборку доброго урожая;

в) вероятность завершения работы, если до ее начала поле было полностью неубранным;

г) вероятность уборки всего урожая, если к началу работы механизатор Гречкин уже убрал m га.

д) рассчитать основные характеристики функционирования цепи (T-количество тактов времени, для которых необходимо рассчитать характеристики):.

a) p=0.4; N=7; m=6; T=3;
b) p=0.5; N=6; m=3; T=2;
c) p=0.9; N=3; m=1; T=3;
d) p=0.1; N=5; m=2; T=2;
e) p=0.75; N=4; m=2; T=3.

8) При производстве деталь машины проходит от начала изготовления до конца 4 стадии: отливка, штампование, шлифование и контроль. На каждую последующую стадию деталь проходит с вероятностью k; остается на переработку на этой же стадии с вероятностью q; и бракуется с вероятностью b.

Рассчитать основные характеристики функционирования цепи (T-количество тактов времени, для которых необходимо рассчитать характеристики):. Для значения параметров:

а) k= 0.8 q=0.15 b=0.05 T=4; - низший процент брака на производстве.

б) k=0.5 q=0.4 b=0.1 T=4; - низший процент качества производства.

в) k=0.5 q=0.2 b=0.3 T=4; - высокий процент брака на производстве.

9) Рассмотрим игру, состоящую из трех туров. Игрок может перейти на следующий тур с вероятностью q. Если игрок не смог пройти какой-то из туров, то он может пройти его заново, т.е. он остается на том же туре с вероятностью r. При прохождении всех трех туров игрок побеждает с вероятностью b. Ну а если игроку надоело играть он может выйти из игры (вероятность выхода равна p).

Рассчитать основные характеристики функционирования системы (T-количество тактов времени, для которых необходимо рассчитать характеристики):

a) q=0.65 r=0.3 p=0.05 T=3;

b) q=0.5 r=0.3 p=0.2 T=2;

c) q=0.2 r=0.6 p=0.2 T=2;

d) q=0.45 r=0.2 p=0.35 T=3;

e) q=0.34 r= 0.34 p=0.32 T=3.

10) Фирме по доставке живой воды поступило несколько заказов. В результате исследований было установлено, что экономически эффективнее доставлять воду по адресам в следующей последовательности: пункт A – склад; пункт B; пункт C; пункт D. В следующий пункт машина может переехать с вероятностью q. Также она может сломаться в каждом пункте с вероятностью p=1-q и остаться там.

Рассчитать основные характеристики функционирования системы (T-количество тактов времени, для которых необходимо рассчитать характеристики):

a) q=0.65 T=3 ;

b) q=0.5 T=2;

c) q=0.2 T=3;

d) q=0.45 T=3;

e) q=0.34 T=2.

11) Некоторый банкомат может находиться только в 4 возможных состояниях: совсем не работать; работать в нормальном режиме; работать, но при этом выдавать только чеки о состоянии счетов (закончились деньги); выдавать деньги, но не выдавать чеки (закончилась кассовая лента). Вероятность того, что в следующий момент после того, как банкомат работал в нормальном режиме у него закончится кассовая лента равна вероятности того, что у банкомата закончатся деньги и равна p. После того как у банкомата закончилась лента или деньги, его быстро загружают

недостающими составляющими и он переходит в рабочее состояние с вероятностью q (если закончилась лента) и 1-q (если закончились деньги). При этом одновременно и деньги и лента закончится не могут. Кроме того банкомат может сломаться, если до этого он работал исправно с вероятностью (1-4*p); если перед этим кончились деньги или лента с вероятностью (1-2*q). Если банкомат ломается, то это надолго – из этого состояния он не в силах будет выйти.

Рассчитать основные характеристики функционирования системы (T-количество тактов времени, для которых необходимо рассчитать характеристики)::

Исходные данные:

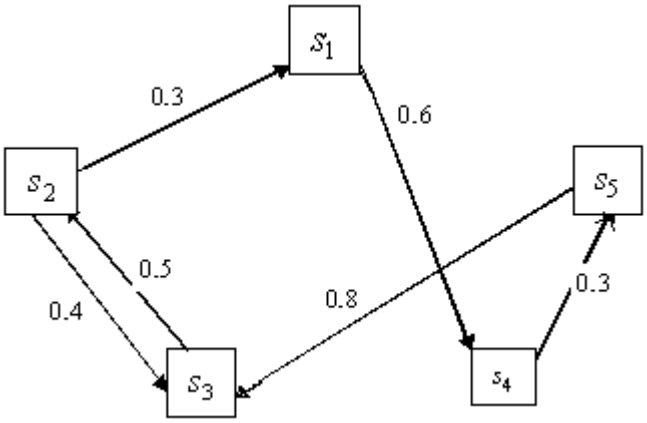
a) p=0.1; q=0.35;T=3;
b) p=0.2; q=0.25;T=2;
c) p=0.15; q=0.15;T=4;
d) p=0.2; q=0.1;T=3;
e) p=0.15; q=0.2;T=4;

Неоднородный процесс

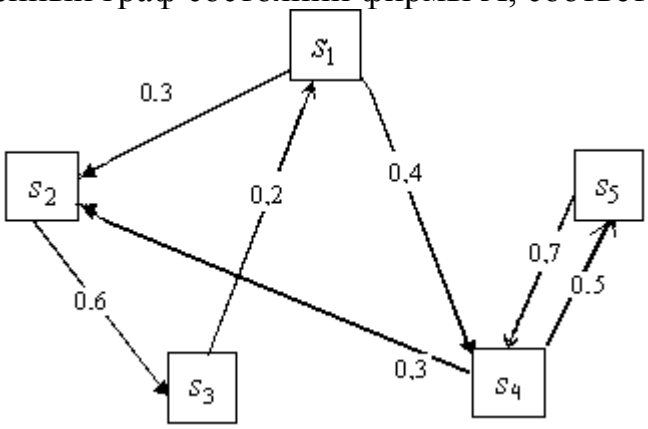
1) Рассматривается деятельность двух конкурирующих торговых фирм А и В на протяжении полугода с января по июнь. В начале каждого месяца рассматриваемого года фирма В предпринимает действия (например, поставляет на рынок более качественный товар или по более низким ценам), в результате каждого из которых фирма А может оказаться в одном из следующих пяти состояний:

s_1 - положение дел фирмы А оценивается как отличное;
s_2 - положение дел фирмы А хорошее;
s_3 - фирме А нанесен незначительный ущерб;
s_4 - фирме А нанесен значительный ущерб;
s_5 - фирма А на грани банкротства.

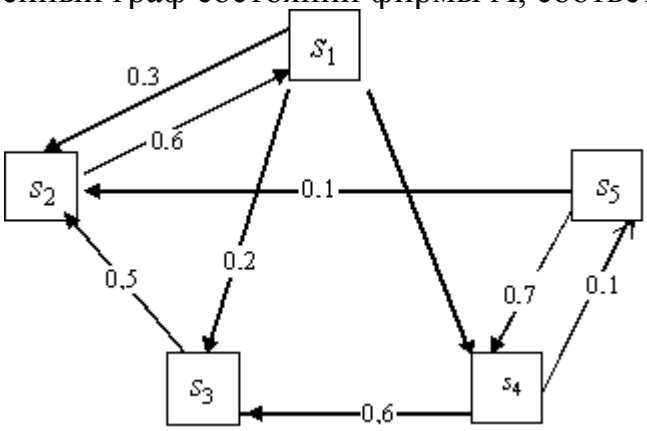
Предполагается, что в течение каждого месяца рассматриваемого года фирма А остается в том же состоянии, в котором она оказалась в начале каждого месяца. Перед рассматриваемым периодом фирма находилась в состоянии s_2. Переходные вероятности изменяются в начале каждого месяца, а размеченные графы состояний, соответствующие месяцам с января по июнь, следующие:



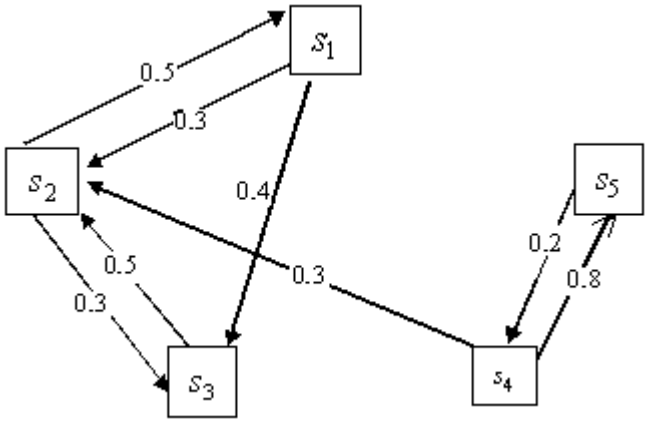
Размеченный граф состояний фирмы А, соответствующий январю.



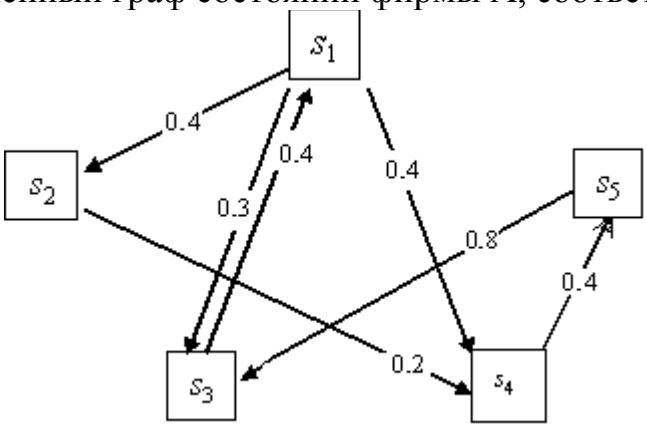
Размеченный граф состояний фирмы А, соответствующий февралю.



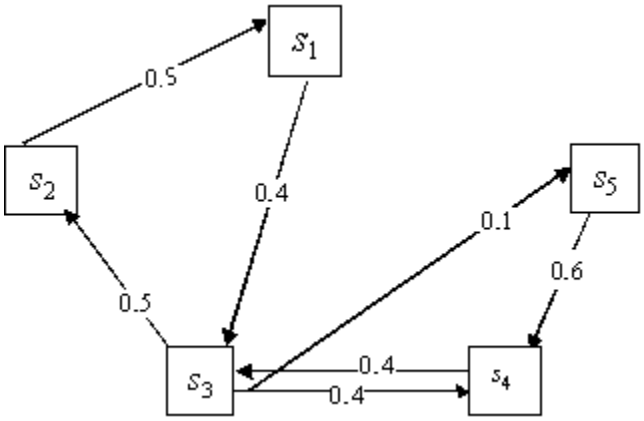
Размеченный граф состояний фирмы А, соответствующий марту.



Размеченный граф состояний фирмы А, соответствующий апрелю.



Размеченный граф состояний фирмы А, соответствующий маю.



Размеченный граф состояний фирмы А, соответствующий июню.

Определить вероятности состояний фирмы А в июне рассматриваемого года.

Определить вероятности перехода из состояния i в j за 4 шага (i=1..5, j=1..5).

2) Пусть состояния банка, характеризуются одной из процентных ставок: 2%, 3%, 4%, которые устанавливаются в начале каждого квартала и фиксированы на всем его протяжении. Анализ работы банка в предшествующие годы показал, что переходные вероятности зависят от моментов установления процентных ставок. Матрицы переходных вероятностей задаются следующим образом:

$$p(1) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}, \quad p(2) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$p(3) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}, p(4) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Известно, что в конце предыдущего года процентная ставка банка составляла 4%.

Определить вероятности указанных состояний в банке в конце года.

Определить вероятности перехода из состояния i в j за 2 шага (i=1..3, j=1..3)

3) Пусть состояния банка, характеризуются одной из процентных ставок: 2%, 3%, 4%, 5% которые устанавливаются в начале каждого квартала и фиксированы на всем его протяжении. Анализ работы банка в предшествующие годы показал, что переходные вероятности зависят от моментов установления процентных ставок. Матрица переходных вероятностей задается следующим образом:

$$p(1) = \begin{pmatrix} p & 1.5p & 0.5p & 1-3p \\ 1-3p & p & 1.5p & 0.5p \\ 0.5p & 1-3p & p & 1.5p \\ 1.5p & 0.5p & 1-3p & p \end{pmatrix}.$$

Каждый квартал вероятность p увеличивается на 15%. Известно, что в конце предыдущего года процентная ставка банка составляла 4%. Определить вероятности указанных состояний в банке в конце года. Определить вероятности перехода из состояния i в j за пол-года.

Варианты заданий:

а) p=0.5

б) p=0.25

в) p=0.3

г) p=0.4

д) p=0.35

4) Фирме по доставке живой воды поставляет один раз в месяц воду по нескольким адресам. В результате исследований было установлено, что экономически эффективнее доставлять воду по адресам в следующей последовательности: пункт A –склад; пункт B; пункт C; пункт D; пункт E. В следующий пункт машина может переехать с вероятностью q. Также она может сломаться в каждом пункте с вероятностью p=1-q и остаться там. Каждый месяц вероятность q того что машина сломается увеличивается на 10%.

Определить вероятности того, что машина сломается в каждом из пунктов, через T месяцев.

a) q=0.35 T=3 ;

b) q=0.4 T=2;

c) q=0.2 T=3;

d) q=0.4 T=3;

e) q=0.25 T=2.

5) В некотором институте студент может пересдать сессию (повысит свою оценку) 2 раза преподавателю и 1 раз комиссии (только для не сдавших ранее преподавателю), при этом оценка ниже, чем была получена на экзамене, не ставится. Во время первой пересдачи вероятность получить каждую из возможных оценок одинакова. Во время второй пересдачи лояльность преподавателя к студентам, уже сдавшим сессию повышается и вероятность получить ту же оценку, что и раньше снижается в 2 раза, однако двоечники «отлично» уже не получат. Если студент пересдает экзамен комиссии , то вероятности быть отчисленным (получит «неуд») и получить тройку («хорошо» и «отлично» не ставится) равны.

Определить:

вероятность получить «хорошо» во время первой пересдачи;

вероятность сдать экзамен на «отлично»;

вероятность быть отчисленным, при условии, что во время студент экзамен не сдал.

6) В некотором университете студент может пересдать сессию (повысит свою оценку на 1 балл) 2 раза преподавателю и 1 раз комиссии (только для не сдавших ранее), при этом оценка ниже, чем была получена на экзамене, не ставится. Во время первой пересдачи вероятность получить каждую из возможных оценок одинакова. Во время второй пересдачи лояльность преподавателя к студентам, уже сдавшим сессию повышается и вероятность получить ту же оценку, что и раньше снижается в 2 раза. Если студент пересдает экзамен комиссии, то вероятности быть отчисленным (получит «неуд») в 2 раза ниже, чем получить тройку.

Определить:

вероятность сдать экзамен во время первой пересдачи;

вероятность сдать экзамен на «хорошо»;

вероятность быть отчисленным, при условии, что во время студент экзамен не сдал.

7) Компания А– разработчик ПО находится на 7 месте в рейтинге самых известных разработчиков ПО. Среди пар разработчиков регулярно проводятся конкурсы на разработку новых проектов. Для компаний, силы которых равны, после одержания победы на очередном конкурсе, компания выигрывает с вероятностью 15%, а проигрывает с вероятностью 35% (что можно объяснить занятостью большинства разработчиков, проектом выигранным в предыдущем конкурсе). Однако, после проигрыша ситуация меняется с точностью до наоборот: выигрывает с вероятностью 35%, а терпит поражение с вероятностью 15%. В случае предыдущего ничейного результата (проектом занимаются сразу две компании разработчиков) все три исхода равновозможны (победа, ничья, поражение). По статистике, если компания участвует в конкурсе с компанией превосходящей ее по силе, шансы на победу уменьшаются в два раза, а вероятность проиграть

повышается в 2 раза. И наоборот, если компания соперник слабее, вероятность выиграть увеличивается в два раза, а проиграть снижается в 2 раза. Компании предстоят конкурсы последовательно с компанией B (силы равны) и C (более сильная) и D(более слабая). При условии, что предыдущий конкурс компания A выиграла определить: вероятность проигрыша во третьем конкурсе; вероятность победы в четвертом конкурсе.

8) Компания A– разработчик ПО находится на 7 месте в рейтинге самых известных разработчиков ПО. Среди пар разработчиков регулярно проводятся конкурсы на разработку новых проектов. Для компаний, силы которых равны, после одержания победы на очередном конкурсе, компания выигрывает с вероятностью 10%, а проигрывает с вероятностью 30% (что можно объяснить занятостью большинства разработчиков, проектом выигранным в предыдущем конкурсе). Однако, после проигрыша ситуация меняется с точностью до наоборот: выигрывает с вероятностью 30%, а терпит поражение с вероятностью 10%. В случае предыдущего ничейного результата (проектом занимаются сразу две компании разработчиков) все три исхода равновозможны (победа, ничья, поражение). По статистике, если компания участвует в конкурсе с компанией превосходящей ее по силе, шансы на победу уменьшаются в два раза, а вероятность проиграть повышается в 2 раза. И наоборот, если компания соперник слабее, вероятность выиграть увеличивается в два раза, а проиграть снижается в 2 раза. Компании предстоят конкурсы последовательно с компанией B (более сильная) и C (силы равны) и D(более слабая). При условии, что предыдущий конкурс компания A выиграла определить: вероятность победы во втором конкурсе; вероятность проигрыша в четвертом конкурсе.