МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

О.А. ТЯПУХИНА, Т.А. ОГУРЦОВА

РЯДЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2006

УДК 517.537.3 (07)
ББК 22.161.1 я 7
Т 99

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики ГОУ ОГУ Отрыванкина Т.М.

Тяпухина О.А., Огурцова Т.А.
Т99 Ряды: Методические указания/ О.А. Тяпухина, Т.А. Огурцова – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. – 49 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий и проверочных работ по дисциплине «Математика», раздел «Ряды».
Рекомендуются для студентов экономических специальностей дневного, вечернего и заочного отделений.

ББК 22.161.1 я 7

Содержание

Введение

При написании методических указаний «Ряды» авторы стремились раскрыть содержание основных понятий и теорем данного раздела математики на специально подобранных примерах и попытались создать в каком-то смысле задачник по теме «Ряды», пригодный как для самообразования, так и для активной работы с преподавателем на практических занятиях.

Каждый раздел сборника начинается с необходимого теоретического минимума, включающего важнейшие определения, теоремы и формулы.

В пособие включены типовые примеры и подробно рассматриваются методы их решения. В конце каждого пункта имеются задачи для самостоятельной работы студентов.

Методические указания содержат раздел, включающий темы «Разложение функций в степенные ряды» и «Некоторые приложения степенных рядов», которые авторы рекомендуют для преподавания студентам, изучающим математику в течении трех семестров.

В методических указаниях приводятся 25 вариантов типовых заданий для проведения проверочных работ по усвоению материала раздела «Ряды». Варианты заданий не содержат задач из раздела 5.

1 Числовые ряды

1.1 Основные понятия

Числовым рядом называется бесконечная сумма членов числовой последовательности

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \qquad (1)$$

где a_i - члены ряда, a_n - общий (или n-ый) член ряда.

Сумма n первых членов ряда (1) называется n-ой частичной суммой ряда и обозначается через S_n.

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Суммой числового ряда (1) называется предел последовательности его частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если он существует.

Сходящимся называется числовой ряд (1), для которого существует конечный предел последовательности частичных сумм, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

В противном случае ряд называется *расходящимся.*

Пример 1. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$ сходится.

Решение.. Возьмем сумму S_n первых n членов ряда:

$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Легко видеть, что слагаемые могут быть представлены в виде:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};\ \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};\ldots;\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности частичных сумм этого ряда равен единице:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Таким образом, данный ряд сходится и его сумма S равна 1.

Пример 2.

Показать, что ряд 1-1+1-1+1-1+…$+(-1)^{n-1}+\ldots=\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

Решение. Для этого ряда последовательность частичных сумм имеет вид $S_1=1,\quad S_2=0,\quad S_3=1,\ldots,$ т.е. $S_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ 1, & n=2k-1,\ k\in N\end{cases}$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует.

Следовательно, данный ряд расходится.

Свойства сходящихся рядов

Свойство 1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(1)$ сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n=\lambda a_1+\lambda a_2+\ldots+\lambda a_n+\ldots, \tag{2}$$

где λ – произвольное число, также сходится и его сумма равна λ*S*. Если же ряд (1) расходится и $\lambda\neq 0$, то и ряд (2) расходится.

Свойство 2. Если сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, а их суммы равны соответственно S_1 и S_2, то сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$, причем сумма каждого ряда равна соответственно $S_1\pm S_2$.

Свойство 3. Если к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (1) сходятся или расходятся одновременно.

1.2 Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ является сходящимся, то его общий член a_n стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ или этот предел не существует, то теорема позволяет сказать, что ряд расходится.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0$, т.е. не выполняется необходимое условие ходимости ряда.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

Решение. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1} = \begin{cases} 1, \text{ если } n - \text{нечетное число;} \\ -1, \text{ если } n - \text{четное число.} \end{cases}$$

То есть общий член ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится.

Пример 6. Установить сходимость или расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{4n+3}{4n-1}\right).$$

Решение. Найдем предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{4n+3}{4n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{4}{4n-1}\right) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0.$$

Таким образом, ряд может как сходиться, так и расходиться.

Воспользуемся определением для частичных сумм ряда:

$$S_n = \ln\left(\frac{7}{3}\right) + \ln\left(\frac{11}{7}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{4n-1}{4n-5}\right) + \ln\left(\frac{4n+3}{4n-1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{11}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4n-5}\cdot\frac{4n+3}{4n-1}\right) = \ln\left(\frac{4n+3}{3}\right).$$

Далее, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{4n+3}{3}\right) = \infty$, ибо при $n\to\infty$ $\dfrac{4n+3}{3}\to\infty$ и $\ln\left(\dfrac{4n+3}{3}\right)\to\infty$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, следовательно, ряд расходится.

Задания для самостоятельной работы.

I. Написать первые пять членов по заданному общему члену.

1) $a_n = \dfrac{2}{3n-1}$; 2) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(n+4)}$; 3) $a_n = \dfrac{n+1}{2^{n-1}(3n+2)}$;

4) $a_n = (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n}{3^{n-1}(n^2+1)}$;

5) $a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2n+5}, \text{если} \quad n = 2k \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \text{если} \quad n = 2k-1 \end{cases}, \; k \in N.$

II. Найти формулу для общего члена ряда.

1) $1 + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{1}{4^n} + \ldots;$ 2) $1 + \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e^2} + \dfrac{1}{e^3} + \ldots;$

3) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{8} + \dfrac{7}{16} + \dfrac{9}{32} + \ldots;$ 4) $\dfrac{2}{3} - \left(\dfrac{3}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{11}\right)^3 - \left(\dfrac{5}{15}\right)^4 + \ldots;$

5) $\dfrac{1}{2+3} + \dfrac{1}{4+3} + \dfrac{1}{8+3} + \dfrac{1}{16+3} + \ldots;$ 6) $1 + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots.$

III. Найти суммы рядов и выяснить вопрос о сходимомости.

1) $\dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \ldots;$ 2) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)};$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right).$

IV. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n+3}{6n-4};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2+5};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^4-1}{n^3+8};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\dfrac{1}{n};$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n.$

1.3 Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Признак сравнения.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряды с положительными членами, и пусть члены первого ряда не превосходят членов второго, т.е. $a_n \le b_n$ при любом *n*. Тогда:

а) если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) если расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ряд, с которым сравнивается исследуемый ряд, будем называть эталонным. Наиболее часто в качестве эталонного используют ряды:

1) Гармонический ряд:

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$; он расходится.

2) Обобщенный гармонический ряд:

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}};$$

при $\alpha>1$ он сходится, а при $\alpha\leq 1$ - расходится.

3) Геометрический ряд:

$$aq+aq^{2}+aq^{3}+\ldots+aq^{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n};$$

при $|q|<1$ он сходится, при $|q|\geq 1$ - расходится.

Пример 7. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^{2}}=2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\ldots$

Решение. Так как его общий член $b_n=\frac{n+1}{n^2}$ при достаточно больших n сравним с $\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$, то сравним наш ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармоническим рядом, который расходится. Имеем $\frac{n+1}{n^2}>\frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+2^{n}}$.

Решение. Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}$, который сходится $\left(q=\frac{1}{2}<1\right)$. Имеем $\frac{1}{3+2^{n}}<\frac{1}{2^{n}}$. Следовательно, данный ряд сходится.

Предельный признак сравнения.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ - ряды с положительными членами, и существует конечный предел отношения их общих членов $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A\neq 0$. Тогда ряды либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Пример 9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^{3}}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$. Предел отношения общих членов равен $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)n^{2}}{n^{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}}{1}=1\neq 0$.

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический $(\alpha > 1)$, то по предельному признаку сравнения сходится и данный ряд.

Пример 10. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{5n}$.

*Решение.*Сравним ряд с гармоническим рядом. Предел отношения общих членов $\lim_{n\to\infty} \frac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5} \neq 0$. Следовательно, из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ следует расходимость данного ряда.

Таблица неравенств, используемых при исследовании рядов на сходимость с помощью признака сравнения.

1) Если $a > b > 0$ *и* $c > d > 0$, то $ac > bd$.

2) Если $a \geq b > 0$ *и* $0 < d < c$, то $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

2$'$) Если $0 < a \leq b$ *и* $d > c > 0$, то $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.

3) Если $a > b \geq 0$, *то* $a^n > b^n$, $n \in N$.

4) Если $a > b$, то $a^{2n+1} > b^{2n+1}$.

5) Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, $n \geq 2$.

6) Если $a > b$, то $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$, $n \in N$.

7) $e^n > 1 + n$, $n \in N$.

8) $\ln(1 + n) < n$, $n \in N$.

9) $(\ln n)^p < n$, $n \in N$ и $p > 0$.

10) $\sin a_n < a_n$, $\forall a_n > 0$.

11) $tg\, a_n > a_n$, $\forall a_n \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

12) $arctg\, a_n < a_n$, $\forall a_n > 0$.

13) $n^{\alpha} \leq n$, $\alpha \leq 1$.

14) $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}, n \in N$.

14′) $n! \geq n^{\frac{n}{2}}, n \in N$.

15) $\dfrac{n!}{n^n} < \dfrac{2}{n^2}\ (n > 3)$.

15′) $(1 + a_n)^{\alpha} > 1 + \alpha a_n, a_n > 0, \alpha > 1$.

16) $-1 \leq \sin a_n \leq 1, \forall a_n \in R$.

17) $-1 \leq \cos a_n \leq 1, \forall a_n \in R$.

18) $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin a_n \leq \dfrac{\pi}{2}, \forall a_n \in [-1;1]$.

19) $0 \leq \arccos a_n \leq \pi, \forall a_n \in [-1;1]$.

20) $-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\, a_n < \dfrac{\pi}{2}, \forall a_n \in R$.

21) $0 < \mathrm{arcctg}\, a_n < \pi, \forall a_n \in R$.

Признак Даламбера.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell.$$

Тогда:

а) если $\ell < 1$, то ряд сходится;

б) если $\ell > 1$, то ряд расходится;

в) если $\ell = 1$, то ряд может сходиться или расходиться.

Замечание.

Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$ или a^n.

Пример 11. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!}$**.**

Решение. Вычисляем

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n^2 (n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Так как $\ell < 1$, то по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 12. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{n^2}$**.**

Решение. Вычисляем

$\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2 4^n} = 4\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 = 4 > 1$. Так как $\ell > 1$, то по признаку Даламбера данный ряд расходится.

Пример 13. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2+8}$

Решение: Вычисляем

$$\ell = \lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+8)}{\left[(n+1)^2+8\right](n^2+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right]\left(1+\frac{8}{n^2}\right)}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{8}{n^2}\right]\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 1.$$

Признак Даламбера не позволяет выяснить вопрос о сходимости ряда. Однако этот ряд является расходящимся по необходимому признаку, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2+8} = 1 \neq 0$.

Радикальный признак Коши.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Тогда:

а) если $\ell < 1$, то ряд сходится;

б) если $\ell > 1$, то ряд расходится;

в) если $\ell = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться.

Пример 14. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+5}{3^n+1}$.

Решение. Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n+5}{3^n+1}} = \dfrac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1+\left(\frac{5}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}} = \dfrac{2}{3} < 1$.

Т.к. $\ell < 1$, то по признаку Коши ряд сходится.

Пример 15. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, то применим радикальный признак Коши к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Вычисляем

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e} < 1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд, согласно свойству (1) числовых рядов.

Интегральный признак Коши.

Пусть члены ряда положительны и не возрастают, т.е. $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$, а функция $f(x)$, определенная при $x \ge 1$, непрерывная и невозрастающая и $f(1) = a_1, \quad f(2) = a_2, \ldots, \; f(n) = a_n, \ldots$.

Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Пример 16.

Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Она непрерывна и не возрастает на полуинтервале $[1;+\infty)$. Члены ряда равны значениям функции при $x = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \ldots$.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b, & \text{при } \alpha \ne 1 \\ \left.\ln x\right|_1^b, & \text{при } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{при } \alpha \ne 1 \\ \lim\limits_{b\to\infty}\ln b, & \text{при } \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{при } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{при } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Таким образом, интеграл $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится и при $\alpha \le 1$ расходится.

Пример 17. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln^2 n}+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$. Она удовлетворяет условиям интегрального признака Коши. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}$ сходится. Значит, ряд с общим членом $\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ сходится.

Задания для самостоятельной работы.

I. С помощью признаков сравнения исследовать ряды на сходимость:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{n^7}+4}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{n^6+2n^4+1}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+7}{n^2+n+6}$; 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^8+1}$.

II. С помощью признака Даламбера исследовать ряды на сходимость:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5^n}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{2^n(3n-2)}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n+2)}{(n+1)!}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n+1}}$; 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{1+n^3}$.

III. С помощью радикального признака исследовать ряды на сходимость:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n}\right)^{3n}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}4^n\cdot n^n$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{6^n}$; 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^{n}$.

IV. С помощью интегрального признака исследовать ряды на сходимость:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^2}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(n+3)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4+9n^2}$.

V. Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{3^{n-1}+n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-4n+5}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!(2n+3)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{e^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{7^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)\ln(3n+1)}$.

2 Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \qquad (5)$$

где $a_n>0$ для всех $n\in N$ (т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следует друг за другом поочередно).

Для знакочередующихся рядов имеет место *достаточный* признак сходимости Лейбница.

Признак Лейбница.

Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится, если:

1 Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. $a_1>a_2>\ldots>a_n>\ldots$;

2 Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

При этом сумма S ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ удовлетворяет неравенствам

$$0<S<a_1. \qquad (6)$$

Замечания.

1) Если хотя бы одно из условий признака Лейбница не выполняется, то ряд расходится.

2) Исследование знакочередующегося ряда вида

$$-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^n a_n+\ldots \qquad (7)$$

(с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

Ряды (5) и (7), для которых выполняются условия признака Лейбница, называются *лейбницевскими* (или рядами Лейбница).

Пример 18. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Решение. Проверим условия признака Лейбница

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$ - последовательность, составленная из абсолютных величин членов ряда, убывает.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Оба условия выполняются, следовательно, ряд сходится.

Пример 19. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^7}{7n^6+3}$.

Решение. Предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^7}{7n^6+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{7}{n}+\frac{3}{n^7}}=\infty$.

Следовательно, второе условие не выполняется, и ряд расходится.

Следствие. Погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.

Пример 20. Вычислить приближенно сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$.

Решение. Данный ряд лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать: $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\ldots=S$. Взяв пять членов, т.е. заменив S на

$S_5=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{256}+\frac{1}{3125}\approx 0{,}7834,$ сделаем ошибку, меньшую, чем $\frac{1}{6^6}=\frac{1}{46656}<0{,}00003$.

Итак, $S\approx 0{,}7834$.

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется *знакопеременным*.

Теорема (общий достаточный признак сходимости).

Пусть дан знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (8)$$

Если сходится ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \qquad (9)$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд (8).

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (8), то это не означает, что будет сходится ряд (9).

Пример 21. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Решение. Рассмотренный ранее ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ по признаку Лейбница сходится.

Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится (гармонический ряд).

2.1 Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Так, ряд, показанный в примере 18, условно сходящийся.

Пример 22. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$ - знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница:

1) $\frac{1}{1!} > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=0$.

И ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$, составленный из модулей членов данного ряда, также сходится по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 23. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^3}$.

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}=\frac{|\sin 1|}{1^3}+\frac{|\sin 2|}{2^3}+\ldots$$

Сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$, который сходится как обобщенный гармонический ряд при $\alpha>1$.

Так как $|\sin n|\le 1$, то $\dfrac{|\sin n|}{n^3}\le\dfrac{1}{n^3}$.

Следовательно, из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n|}{n^3}$. А значит и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^3}$ сходится абсолютно.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм (переместительность, сочетательность, распределительность).

Основные свойства абсолютно сходящихся рядов:

1 Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2 Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна S_1+S_2 (или соответственно S_1-S_2).

3 Под произведением двух рядов $u_1+u_2+\ldots$ и $v_1+v_2+\ldots$ понимают ряд вида

$$\left(u_1v_1\right)+\left(u_1v_2+u_2v_1\right)+\left(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1\right)+\ldots+\left(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1\right)+\ldots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 \cdot S_2$.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие свойства, вообще говоря, не имеют места. Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для установления абсолютной сходимости используют все признаки знакоположительных рядов, заменяя всюду общий член ряда его модулем.

Задания для самостоятельной работы.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^6}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n-1}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[7]{n^3}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(3n+5)}{n^2-n+9}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n^3+1}{4+7n^3}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}}{n^2+8}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{3n+2}{3n-1}\right)^n$; 9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\ln n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+3}\dfrac{\sqrt[4]{n^6}}{n^3+5}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{e^{3n}}$; 12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\ln^5 n}{n}$.

3 Функциональные ряды

Ряд, членами которого являются функции от x, называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \quad . \tag{10}$$

Придавая x определенное значение x_0, мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots, \tag{11}$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то x_0 называется точкой сходимости функционального ряда; если же числовой ряд расходится – точкой расходимости функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости*.

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: $S=S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ – частичная сумма ряда.

Пример 24. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Решение. Данный ряд является геометрическим со знаменателем $q=x$. Следовательно, этот ряд сходится при $|x| < 1$, т.е. при всех $x \in (-1;1)$; сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ при } |x| < 1.$$

Пример 25. Исследовать сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2^2 x}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| + \ldots \quad . \qquad (12)$$

Так как при любом $x \in R$ имеет место соотношение $\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, а ряд с общим членом $\frac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический ряд, $\alpha = 2 > 1$), то по признаку сравнения ряд (12) сходится при $x \in (-\infty;\infty)$. Следовательно исходный ряд абсолютно сходится при всех $x \in R = (-\infty;+\infty)$.

Задания для самостоятельной работы.

I. Дан функциональный ряд

$$\frac{3x+1}{x^2+x+1} + \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n + \ldots.$$

Сходится ли ряд в точках x=1, x=2, x=3 ?

II. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\frac{1!}{1}\left(x^2 - 4x + 6\right) + \frac{2!}{2^2}\left(x^2 - 4x + 6\right)^2 + \ldots + \frac{n!}{n^x}\left(x^2 - 4x + 6\right)^n + \ldots$$

в точках x=1 и x=2.

III. Найти область сходимости ряда

а) $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots$;

б) $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{2^2\left(x^2+1\right)^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2\left(x^2+1\right)^n}+\ldots$.

4 Сходимость степенных рядов

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т.е. так называемый *степенной ряд.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots . \tag{13}$$

Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются коэффициентами ряда (13), $x \in R$ - действительная переменная.

Ряд (13) разложен по степеням x. Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $\left(x - x_0\right)$, т.е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x - x_0\right) + \ldots + a_n\left(x - x_0\right)^n + \ldots, \tag{14}$$

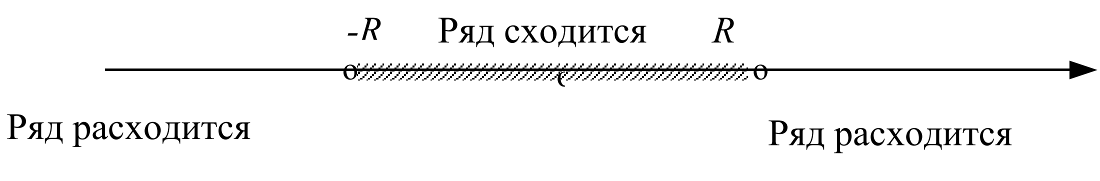
где x_0 – некоторое постоянное число.

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x=x_1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $\left(-|x_0|;|x_0|\right)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда, при всех значениях x вне этого интервала степенной ряд расходится.



Интервал $\left(-|x_0|;|x_0|\right)$ называют интервалом сходимости степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R;R)$. Число R называют радиусом сходимости степенного ряда, т.е. $R > 0$ - это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (13) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Отметим, что на концах интервала сходимости (т.е. при $x = \pm R$) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (13) можно поступить следующим образом.

Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$$

и применим к нему признак Даламбера. Допустим, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $|x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, т.е. ряд сходится при тех значениях x, для которых

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

ряд, составленный из модулей членов степенного ряда (13), расходится при тех значениях x, для которых $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Таким образом, для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ радиус абсолютной сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Замечания.

1 Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ находят из неравенства $|x - x_0| < R$, и он имеет вид $(x_0 - R, x_0 + R)$.

2 Если степенной ряд содержит не все степени *x*, т.е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Пример 22. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Решение. Воспользуемся формулой для нахождения радиуса, т.к. ряд содержит все степени *x*.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty .$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси.

Пример 23. Найти область сходимости степенного ряда

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad .$$

Решение. Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем

$$|u_n| = \frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+1}|(2n-1)}{(2n+1)|x^{2n-1}|} = |x^2| \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При *x*=-1 имеем ряд $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$, который сходится по признаку Лейбница.

При *x*=1 имеем $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, - этот ряд тоже сходится по признаку Лейбница. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок [-1;1].

Пример 24. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$.

Решение. Находим радиус сходимости по формуле

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)2^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2$. Следовательно, ряд сходится при $-2<x+2<2$, т.е. при $-4<x<0$.

При x=–4 имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

При x=0 имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуинтервал $[-4;0)$.

Свойства степенных рядов.

1 Сумма $S(x)$ степенного ряда (13) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R,R)$.

2 Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

3 Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать. При этом для ряда

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\ . \tag{15}$$

при $-R<x<R$ выполняется равенство

$$S'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots\ . \tag{16}$$

4 Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости. При этом для ряда (15) при $-R<a<x<R$ выполняется равенство

$$\int\limits_a^x S(t)dt=\int\limits_a^x a_0dt+\int\limits_a^x a_1tdt+\int\limits_a^x a_2t^2dt+\ldots+\int\limits_a^x a_nt^ndt+\ldots\ . \tag{17}$$

Ряды (16) и (17) имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

Перечисленные свойства 1-4 остаются справедливыми и для степенных рядов вида $\sum\limits_{n=0}a_n(x-x_0)^n$.

Задания для самостоятельной работы.

Найти область сходимости рядов

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^2$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!(x-5)^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Sin^2\frac{1}{n}(x-1)^n$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}$.

5 Разложение функций в степенные ряды

5.1 Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т.е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Как известно, для любой функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 и имеющей в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad (18)$$

где $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $c\in(x_0,x)$ - остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c=x_0+Q(x-x_0)$, где 0< Q >1 .

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков (т.е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $x\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}R_n(x)=0$, то из формулы Тейлора получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$, называемое *рядом Тейлора*:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (19)$$

Если в ряде Тейлора положить x_0=0, то получим разложение функции по степеням x в так называемый ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n . \qquad (20)$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции (это необходимое условие) в окрестности точки x_0. Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции $f(x)$: он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции $f(x)$.

Теорема. Для того чтобы ряд Тейлора (19) функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n \to \infty$, т.е. чтобы $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Таким образом, задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд сведена по существу к определению значений x, при которых $R_n(x) \to 0$ (при $n \to \infty$). Если сделать это непросто, то следует каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд Тейлора сходится к данной функции.

На практике часто пользуются следующей теоремой.

Теорема. Если модули всех производных функций $f(x)$ ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом $M>0$, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$, т.е. имеет место разложение (19).

5.2 Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена (20) нужно:

а) найти производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$;

б) вычислить значения производных в точке $x_0=0$;

в) написать ряд (20) для заданной функции и найти его интервал сходимости;

г) найти интервал $(-R; R)$, в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Маклорена совпадают.

Замечание. В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Приведем таблицу, содержащую разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций (эти разложения следует запомнить):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in (-1;1), \text{ где } \alpha \in R;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1;1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad x \in (-1;1];$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1;1];$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, x \in [-1;1].$$

Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(4-x)$.

Решение: Так как $f(x) = \ln(4-x) = \ln 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = \ln\left[1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right]$, то воспользовавшись формулой разложения в ряд Маклорена функции $\ln(1+x)$, в которой заменим x на $\left(-\frac{x}{4}\right)$, получим:

$$\ln(4-x) = \ln 4 + \left(-\frac{x}{4}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3} - \ldots$$

или $\ln(4-x) = \ln 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots$,

если $-1 < -\frac{x}{4} \le 1$, т.е. $-4 \le x > 4$. Δ

Задания для самостоятельной работы.

I. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $(x-1)$.

II. Разложить $\frac{1}{x}$ в ряд по степеням $(x-2)$ (воспользоваться равенством $\frac{1}{x}=\frac{1/2}{1+(x-2)/2}$).

III. Разложить e^{3x} в ряд по степеням $x-1$.

IV. Найти сумму ряда при $x\in(-1;1)$, применяя почленное интегрирование или дифференцирование :

а) $-2x+4x^3-6x^3+8x^7-...+(-1)^n(2n)x^{2n-1}+...$;

б) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...$.

5.3 Некоторые приложения степенных рядов

Приближенное вычисление значений функции

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью $\varepsilon>0$.

Если функцию $f(x)$ в интервале $(-R;R)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$$

и $x_1\in(-R;R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, т.е.

$$f(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+...+a_nx_1^n+...,$$

а приближенное – частичной сумме $S_n(x_1)$, т.е.

$$f(x_1)\approx S_n(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+...+a_nx_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом n.

Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда, т.е.

$$|f(x_1)-S_n(x_1)|=|r_n(x_1)|,$$

где $r_n(x_1)=a_{n+1}x_1^{n+1}+a_{n+2}x_1^{n+2}+...$.

Таким образом, ошибку $|f(x_1)-S_n(x_1)|$ можно найти, оценив остаток $r_n(x_1)$ ряда.

Для рядов лейбницевского типа

$$|r_n(x_1)|=|u_{n+1}(x_1)+u_{n+2}(x_1)+u_{n+3}(x_1)+...|<|u_{n+1}(x_1)|.$$

В остальных случаях составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти (подобрать) положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся геометрический ряд), который легко бы суммировался. И в качестве оценки $|r_n(x_1)|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Пример 25. Вычислить число *e* с точностью до 0,001.

Решение. Подставляя x=1 в формулу разложения функции e^x, получим

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots .$$

Справа стоит знакоположительный ряд. Возьмем *n* слагаемых и оценим ошибку $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n \cdot n!}$$

т.е. $r_n(x) < \dfrac{1}{n \cdot n!}$. Остается подобрать наименьшее натуральное число *n*, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{1}{n \cdot n!} < 0{,}001$.

Нетрудно вычислить, что $n \geq 6$.

Поэтому имеем

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2\frac{517}{720} \approx 2{,}718 .$$

Замечание. Оценку остатка ряда можно производить с помощью остаточного члена ряда Маклорена

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|,$$

где *c* находится между 0 и x_1. В нашем примере $R_n(1) = \dfrac{e^c}{(n+1)!}$, $0 < c < 1$. Так как $e^c < e^1 < 3$, то $R_n(1) < \dfrac{3}{(n+1)!}$. При *n*=6 имеем: $R_6(1) < \dfrac{3}{7!} < 0{,}001$,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718 .$$

Приближенное вычисление определенных интегралов

Бесконечные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции либо нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R;R)$ включит в себя отрезок $[a;b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функции.

Пример 26. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $(-x^2)$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad x \in (-\infty;\infty).$$

Интегрируя обе части равенства на отрезке $\left[0;\frac{1}{4}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty;\infty)$, получим:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4^3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 4^5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 4^7\cdot 3!} + \ldots \qquad .$$

Получим ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{1}{3\cdot 4^3\cdot 1!} = 0{,}0052 > 0{,}001$, а $\frac{1}{5\cdot 4^5\cdot 2!} < 0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем: $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245$.

Задания для самостоятельной работы.

Вычислить приближенно с точностью ε :

1). $\frac{1}{\sqrt[3]{\ell}};\varepsilon = 0{,}0001$; 2). $\ln 1{,}4;\varepsilon = 0{,}001$;

3). $Sin 18^0;\varepsilon = 0{,}001$; 4). $3\sqrt{500};\varepsilon = 0{,}001$;

5). $\int\limits_0^{0,2} \sqrt[3]{1 + x^2}dx;\varepsilon = 0{,}0001$; 6). $\int\limits_0^{0,25} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right)dx;\varepsilon = 0{,}001$;

7). $\int\limits_0^{0,5} Cos\frac{x^2}{4}dx;\varepsilon = 0{,}001$; 8). $\int\limits_0^{0,5} \frac{arctgx}{x}dx;\varepsilon = 0{,}001$.

6 Варианты типовых заданий

Вариант 1

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{24}{3n^2-12n-5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{6^{n+2}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5-3}{1+8n^5}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+2)!4^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\ln(2n)}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(3n)^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n^2-3)}{n!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{n(n+1)}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n\cdot n$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов:*

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n\sqrt[3]{1+n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{7^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt[5]{n^5-4}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2x^n$.

Вариант 2

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n-2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-5}{n(n^2-1)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^9\cdot\sqrt{n^3}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{\ln^3(n-1)}{n-1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{6^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+n^3}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2}{n^3+2}$;

5) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^{n-1}}{n^3-1}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{2n+9}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-5}{7n+2}x^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2n\cdot 4^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(x+3)^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n\cdot 2^n}{5^n\cdot\sqrt[3]{n}}$.

Вариант 3

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{25n^2-5n-6}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n^2}{n\cdot(n+1)(n+2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3n^4}{n^4+3n^2+2n-5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{n^2+8}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$; 5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 4^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{2n+3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n+1)}{n^2+n+1}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(3n-1)^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(2n+1)^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n-1)\cdot\sqrt{n+1}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 2^n}$.

Вариант 4

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4}{n(n-3)(n+1)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3\cdot\sqrt[8]{n^7}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2-n^8}{3n^8+n^2-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^8(n+7)}{n+7}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\cdot(n+1)!}{(2n)!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{n^3+1}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n-1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-8^n\right)\cdot n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\cdot\sqrt{n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot x^n}{8n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot(x-3)^n}{\left(n^4+1\right)^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 3^n\cdot(x-1)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot(n+1)x^{n+1}}$.

Вариант 5

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{2n^2+3n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n-2)(n-5)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^{n-1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\cdot n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot e^n}{4n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt[5]{n^{23}}}{n^2}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{\sqrt[3]{8n^3-12}}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n\cdot(x-1)^{2n}}$.

Вариант 6

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n-5}{n(n^2-1)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,e^{-n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(n+1)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^7+1}{n^3+3}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+7}{1+5n^2}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{7}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^n\cdot\sqrt{n^3+3}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n^5+4}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(3-n)}{2^n\cdot(n^2+4)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n-1)}{4^n}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*
1) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-5}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{5n+6}x^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(x+6)^n}{2n-1}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x+5)^n}{n\cdot 5^n}$.

Вариант 7

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^{n-1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{n+1}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n-4)}{n-4}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{5n^8 - 9n^7 + 10}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{5n-2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{n^9}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (n^7 + 2)$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{4+3n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{1+3n} x^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x+5)^n}{16^n \cdot (2n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{x^n}$.

Вариант 8

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 4)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3n^9}{27n^9 - n^6 + 8}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^7 \cdot \sqrt[3]{n^8}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{2^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln(3n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+7}{3+2n}\right)^{n^2}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 9^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^3 + 4}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 5^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{e^{n^2}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)^n}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)(n+5)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 9^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot (1-n)^4$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^2 \cdot (x+2)^n}$.

Вариант 9

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{8^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n-7)^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$;

4) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot \sqrt{\ln^3 n}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{5n-8}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{\sqrt[3]{n^3-4}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x-1)^n}{4n-3}$.

Вариант 10

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^6+1}{n^5+9}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n+3)}{n+3}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4n+5}{n^7-n+9}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos\frac{\pi}{6n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n!}{7}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{e^{n^3+1}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2-n}{6^n}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^n \cdot x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-5}{4n+1} x^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n (x+4)^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{3n+5}$.

Вариант 11

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1} \cdot \sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$;

4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n-1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^2+3n-1}{5n-2n^2} \right)^{2n}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3} \right)^n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{4^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2+1}$;

4) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n\cdot\ln^3 n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(3n^2+1\right)^3$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cdot(n+1)^2$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot n}{(n+1)\cdot 2^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{\sqrt[3]{3n^3+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot 5^n\cdot(x+1)^{n+1}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot(x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}$.

Вариант 12

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-13}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+2)(n+1)n}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot\sqrt[3]{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n+1}\cdot\left(\frac{4n+1}{7n-3}\right)^n$;

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 7^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{5n-9}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{7n-2}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 4^{n-1}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2\cdot 4^n}$.

Вариант 13

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{2n^2 + 3n + 1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \cdot \sqrt[4]{n^3}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi}{3n^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot 4^n}{(n+2)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n!$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{13n+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^{10}}{e^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{e^{2n+1}}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n-3} \cdot x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n \cdot (x+3)^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot n \cdot x^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 \cdot x^{2n}}{2n+1}$.

Вариант 14

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+5}{(n+2)(n^2-1)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^{n-1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 + 3n^{10}}{n^{10} + 18}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$; 5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{n^6}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n\cdot(2n+1)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{\left(1+n^3\right)^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{(n+1)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 13n.$

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{2n-3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cdot\sqrt{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(3n+1)^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot\sqrt[3]{n+1}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2\cdot(x+3)^{2n}}{(2n+1)}$.

Вариант 15

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$; 2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{8n-10}{(n-1)(n+1)(n-2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n-2)(n-5)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^2+1}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n^3}{3n-7n^3+1}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt[8]{n^{31}}}{n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{9}\right)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{3n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2}{3^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{e^{n^2+1}}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{\sqrt[5]{3n^5-5}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)x^{n+1}}{n+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

Вариант 16

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{14}{49n^2-42n-40}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{3n-1}{n\left(n^2-1\right)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{\sqrt[5]{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^3+1}{3\left(4+n^3\right)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^3(n+8)}{n+8}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{(2n+1)^2\cdot\sqrt{3^n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{n(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-3)^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 5n}{(n+1)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^7+3}}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n-1)}{9n+8}x^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n\cdot(n+1)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-2)^3\cdot(x+3)^{2n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^n}{10n-12}$.

Вариант 17

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8}{16n^2-8n-15}$; 2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{9n^2+12n-5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{6^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n}{e^{2n}+9}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{5^{n-1}\cdot(n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{9^{n-1}}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{8}{3}\right)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^2}{7^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{6^{n-1}}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{7n+10}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{\sqrt[3]{12n^3-1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+3)\cdot 5^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n!}$.

Вариант 18

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4+5n}{n(n+1)(n-2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,2n}{5n-3}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{7n-1}{7n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n^7}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{1+n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{n!}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cdot\sqrt[3]{4+n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)^3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.

Вариант 19

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{5n - 2}{(n - 1)n(n + 2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} + 1$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3(n + 6)}{n + 6}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{5n - 7}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n^3 + 1)}{(n + 1)!}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 4^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n + 2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n - 5)^{2n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n + 1) \cdot 3^{2n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{2n + 1}\right)^n$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 3}{5n - 4} \cdot x^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{4n + 6}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 2)^n}{n^2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 1)^n}{(4n - 3) \cdot 8^n}$.

Вариант 20

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n(n + 1)(n + 2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n + 3}{n(n + 1)(n + 3)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{8 \cdot \sqrt[3]{n^{16}}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n^2}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n+4}}}{\sqrt{n + 4}}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{7^n}{n+3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\cdot\sqrt[7]{n^2}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^4(n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{5n^3+1}{1+n^2}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(5n+6)x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{1+n^3}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\cdot(x-4)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2x-3)^n}{2^{n-1}}$.

Вариант 21

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+17}{1+n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{5^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot\ln^2(2n+1)}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{7}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt[4]{n^{43}}}{n^4}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1+n)^3$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{\sqrt[4]{7n^4+3}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+1)^n}{3}$.

Вариант 22

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 - n}{n(n+1)(n+2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{4}{\left(n^2 + n - 2\right)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln(2n+3)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!(2n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \sqrt{5+n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{n!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 4^{n-1}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

Вариант 23

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n(n+2)(n+3)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{8^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^7+4}{1-n+3n^7}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n\cdot 3^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n^3(n+1)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^5}{n^3+2}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+6}{7n-1}x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!\,x^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 4^{n-1}}$.

Вариант 24

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+21n-10}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-2}{(n-1)n(n+2)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7n^{91}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+n^2\right)^2}{\left(1+n^3\right)^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{1+n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{(n+3)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(3n)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{4}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{n+1}}{4n^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{7}{8}\right)^n$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n}{3n+2}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+4\right)x^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{\sqrt{21n^2+4}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{7^n\cdot\sqrt{n}}$.

Вариант 25

1 *Найти сумму ряда, и выяснить вопрос о сходимости ряда*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\left(n^2 - 1\right)}$.

2 *Исследовать ряды на сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{n^7}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^7}{3^{n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n+5)}{n+5}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{(n+3)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{9n+7}\right)^n$.

3 *Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 - 1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n \cdot (5n-3)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^n}{\sqrt[7]{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3n^7 - 1}{8n^2 + 9}$.

4 *Найти область сходимости следующих рядов*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (4n+7)x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{16^n \cdot (2n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)^{2n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n \cdot 4^n}{(3n+1)^2}$.

Список использованных источников

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. /Д.Т. Письменный – 2-е изд., испр. – М.: Айрис – пресс, 2005. – 256 с.:ил.
2. Шипачев В.С. Курс высшей математики: под ред. А.Н. Тихонова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ТК Вебли, Изд-во Проспект, 2005. – 600 с.
3. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебн. пособие для вузов/ В.С. Шипачев. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2003. – 304с.: ил.
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн. 2. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы: Учеб. пособие для университетов, пед. вузов. / Под ред. В.А. Садовничего. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш.шк., 2000. – 712 с.: ил.
5. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 471 с.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.2. Учеб. пособие для вузов/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова – 6-е изд. – М.: Издательский дом «Оникс 21 век»: Мир и образование, 2003. – 416 с., ил.