МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Орский политехнический колледж

Т.В. ПЕРГУНОВА, В.И. КАЮКОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2006

УДК 512.64 (076.5)
ББК 22.143я73
П 26

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Пергунов

Пергунова Т.В.
П 26 **Элементы линейной алгебры: методические рекомендации по высшей математике / Т.В. Пергунова, В.И. Каюков - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006.-35 с.**

Методические рекомендации предназначены для организации самостоятельной и индивидуальной работы студентов 2-го курса политехнических колледжей. Составлены в соответствии с учебной программой предметной подготовки по высшей математике для специальности 230105 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»

П 26 ББК 22.143я73

ISBN

Содержание

Введение

Данное пособие состоит из двух разделов теоретической и практической части, в виде индивидуальных заданий.

В теоретической части дается достаточно обширное содержание курса линейной алгебры, предусмотренное государственным стандартом и рабочей программой. Ниже представлено тематическое планирование лекционного материала.

Тема лекции	Кол-во ч.
1 Понятие матрицы. Операции над матрицами.	4
2 Определители 2-го и 3-го порядков. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.	2
3 Свойства определителей. Способы вычисления определителей. Обратная матрица.	2
4 Системы линейных уравнений. Решение систем матричным методом.	1
5 Метод Крамера	1
6 Метод Гаусса	2
ИТОГО	**12**

Во втором разделе даны три индивидуальных задания. Приведены образцы решения типовых задач. Перед каждым индивидуальным заданием представлены вопросы для самоконтроля. Раздел «Линейная алгебра» входит в обязательный минимум математической подготовки студентов колледжа и включен в вопросы итогового экзамена по высшей математике.

Вопросы к экзамену по высшей математике (элементы линейной алгебры)

1 Понятие матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами.
2 Определители 2-го и 3-го порядков
3 Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителя n-го порядка
4 Свойства определителей. Различные способы вычисления определителей.
5 Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы
6 Системы линейных уравнений. Решение систем матричным методом.
7 Решение систем линейных уравнений методом Крамера
8 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

1 Матрицы

Определение 1: Матрицей размера $m \cdot n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами.

Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита: *A, B, C, ….*

Элементы матрицы обозначаются строчными буквами латинского алфавита: a_{ij} – элемент, i – строки и j - столбца.

$$\underset{m \cdot n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица 1 распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики (усл. ед.) может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям:

Таблица 1 – Распределение ресурсов по отдельным отраслям экономики

Ресурсы	Отрасли экономики	
	Промышленность	Сельское хозяйство
Электроэнергия	5,3	4,1
Трудовые ресурсы	2,8	2,1
Водные ресурсы	4,8	5,1

$$\underset{3 \cdot 2}{A} = \begin{pmatrix} 5{,}3 & 4{,}1 \\ 2{,}8 & 2{,}1 \\ 4{,}8 & 5{,}1 \end{pmatrix}$$

В этой записи, например матричный элемент $a_{11} = 5{,}3$ показывает, сколько электроэнергии потребляет промышленность, а элемент $a_{22} = 2{,}1$ – сколько трудовых ресурсов потребляет сельское хозяйство.

Определение 2: Две матрицы A и B равны, если их элементы совпадают, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ и они имеют одинаковые размеры: $i, j = 1, 2, \dots, m(n)$

1.1 Виды матриц

1.1.1 $A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ – матрица-строка; $B = \begin{pmatrix} в_{11} \\ в_{21} \\ в_{n1} \end{pmatrix}$ - матрица-столбец.

1.1.2 матрица $n \cdot n$ называется квадратной – n-*го* порядка (т.е. число строк и столбцов совпадает и равно n);
1.1.3 элементы вида a_{ii} (например, $a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots$) называются диагональными и образуют, главную диагональ;
1.1.4 если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется диагональной. Если у диагональной матрицы на главной диагонали стоят одни единицы (1), то матрица называется единичной.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица 3-го порядка

Матрица, все элементы которой равны нулю (0), называется нулевой.

1.2 Операции над матрицами

1.2.1 Умножение матриц на число

Правило: Чтобы умножить матрицу на число , нужно каждый элемент этой матрицы умножить на заданное число.

$$B = \lambda A \;\Leftrightarrow\; в_{ij} = \lambda\, a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 5$, тогда $B = 5\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

Следствие: Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

В частности $0 \cdot A = 0$

1.2.2 Сложение матриц

Сложение определено **только** для **матриц одинаковой размерности**

Правило: Чтобы сложить две матрицы, нужно сложить их соответствующие элементы.

$C = A + B \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$A - B = A + (-1) \cdot B$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Умножение матриц

Две матрицы можно перемножить только в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}$, элементы которой строятся по правилу:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{S=1}^{k} a_{is}b_{sj}\ ,\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n,$$

т.е. каждый элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i –той строки матрицы A на соответствующие элементы j – го столбца матрицы B.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 0\cdot 5 + 2(-2) & 0+0+0 & 1+0+2 \\ -3+5+0 & 0+1+0 & 3+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Свойства операций над матрицами аналогичны операциям над числами, но в данном случае операция умножения не обладает свойством коммутативности:

а) если AB существует, то BA может не быть, например,

$\underset{2\cdot 3}{A} \cdot \underset{3\cdot 3}{B}$, $\underset{3\cdot 3}{B} \cdot \underset{2\cdot 3}{A}$ - нет

б) если существует AB и BA, то их размеры могут не совпадать:

$\underset{2\cdot 3}{A} \cdot \underset{3\cdot 2}{B} = \underset{2\cdot 2}{C}$; $\underset{3\cdot 2}{B} \cdot \underset{2\cdot 3}{A} = \underset{3\cdot 3}{Д}$

в) даже если совпадают размерности, то $AB \neq BA$, например,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Итак, свойства операций над матрицами:

1 $A + B = B + A$ (коммутативный закон)

2 $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативный закон)

3 $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$

4 $A\ (B + C) = AB + AC$ (дистрибутивный закон)
5 $(A + B)\ C = AC + BC$
6 $\lambda\ (AB) = (\lambda\ A)\ B = A\ (\lambda\ B)$
7 $A\ (BC) = (AB)\ C$

Для нулевой матрицы

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \div \begin{matrix} A + 0 = 0 + A = A \\ A \cdot E = E \cdot A = A \end{matrix}$, где E – единичная матрица

1.2.4 Транспонированием матрицы $\underset{m \cdot n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется замена строк матрицы на соответствующие ее столбцы:

$$\underset{n \cdot m}{A'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства :
1 $(A')' = A$
2 $(\lambda\ A)' = \lambda\ A'$
3 $(A+B)' = A' + B'$
4 $(AB)' = B'A'$

Рассмотренные выше операции над матрицами позволяют упростить решения некоторых экономических задач.

Пример:

Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый элемент a_{ij} $(i=1,\ 2,\ 3;\quad j=1,\ 2)$ показывает , сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix}$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$. Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Решение:

Затраты 1-го сырья составляют $S_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$ *ед.* и 2-го – $S_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$ *ед.*, поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение

$$S = C \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}$$

Тогда общая стоимость сырья $Q = 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900$ *ден.ед.* может быть записана в матричном виде $Q = S \cdot B = (CA)B = (70900)$.

Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: в начале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу $R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а затем общую стоимость сырья

$$Q = CR = C(AB) = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900)$$

На данном примере мы убедились в выполнении ассоциативного произведения матриц: $(CA)B = C(AB)$

2 Определители

Необходимость введения понятия определителя – числа, характеризующего квадратную матрицу A – тесно связано с решением систем линейных уравнений.

Определение 1: Определителем матрицы 1-го порядка $A = (a_{11})$ называют число, равное $\Delta_1 = |A| = a_{11}$.

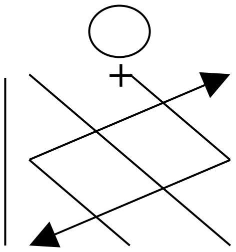
Определение 2 : Определителем квадратной матрицы 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называют число, которое вычисляется по формуле: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$

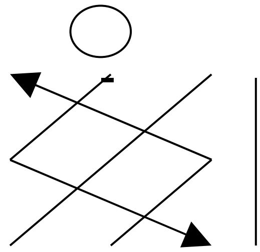
Определение 3: Определителем квадратной матрицы 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$. Это число – алгебраическая сумма из 6 слагаемых. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы.



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



- правило треугольника или правило Сарруса для вычисления членов определителя 3-го порядка и их знаков.

Пример. Вычислить определитель 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 6 - 0 - 1 - (-3) = 6$$

Слагаемые определителя называются его членами. Их число равно n !

Миноры и алгебраические дополнения

Определение 4: Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n–го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученный из данной матрицы, вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Например, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Каждая матрица n–го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$-го порядка.

Определение 5: Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца *(i + j)* – четное число и отличается от минора знаком, когда *(i + j)* – нечетное число.

Пример – Найти все алгебраические дополнения элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = (-1)^3 M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = (-1)^3 M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{22} = (-1)^4 M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^4 M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^5 M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^5 M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^6 M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Теорема Лапласа: Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

(*) $$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}A_{ik}$$

Доказательство:

1) никакой член определителя Δ не входит одновременно в два слагаемых суммы (*), т.к. например, из i-той строки в первом слагаемом взят только элемент a_{i1} , а во втором – только a_{i2} ;

2) сколько слагаемых в сумме (*)? Число членов в сумме (*) равно $(n-1)! \cdot n = n!$, т.е. столько же, сколько в определителе, следовательно определитель совпадает с суммой (*).

Пример - Вычислить определитель способом разложения по столбцам и строкам.

Разложим определитель по третьей строке (т.к. там есть 0).

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & -1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}=2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & -4\\ -5 & 3 & -3\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ -5 & -1 & -4\\ 1 & -5 & -3\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)(-1)^{7}\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & -1 & 3\\ 1 & -5 & 3\end{vmatrix}=40$$

Пример - Вычислить определитель треугольной матрицы.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 3 & 0 & 7\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=5(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=5(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-5\cdot 3=-15$$

Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Например, $$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

Свойства определителей:

1) если какая-либо строка или столбец определителя состоит из одних нулей, то определитель равен 0;

2) если все элементы какой-либо строки или столбца умножить на какое-либо число, то весь определитель умножится на это число.

Пример - $$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 15 & 24\\ 2 & -4 & 8\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 5 & 8\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot 4\begin{vmatrix}1 & 5 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix};$$

3) при транспонировании матрицы определитель не изменяется

$$|A'|=|A|$$

4) при перестановке двух строк или двух столбцов определителя местами знак определителя меняется на противоположный;

5) если в определителе есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен 0.

$\Delta = -\Delta$; $2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$;

6) если элементы одной строки (или столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки, то такой определитель равен 0;

7) определитель не изменяется, если к элементам одной строки прибавить элементы другой (строки, умноженной на какое-либо число);

8) сумма произведений элементов одной строки на алгебраические дополнения элементов другой строки равна 0;

Обратная матрица

Замечание: Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное a^{-1}, такое, что $- a \cdot a^{-1} = 1$. Аналогичное понятие вводится для квадратной матрицы.

Определение: Пусть A – квадратная матрица, тогда A^{-1} называют обратной матрицей, если выполняется равенство

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Определение: Матрица называется невырожденной (неособенной), если ее определитель отличен от 0, и вырожденной (особенной), если $\Delta = 0$

Определение: Матрица называется присоединенной к матрице A если ее элементами являются алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы A'. Обозначается $\tilde{A}$.

Теорема: Обратная матрица к матрице A существует тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная.

Обратная матрица вычисляется по формуле :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \qquad (**)$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1) вычисляем определитель матрицы $A \div |A|$.

Если $|A| = 0$, то матрица вырожденная и обратная матрица не существует.

Если $|A| \neq 0$, то матрица невырожденная и обратная матрица существует.

2) составляем A' – транспонированную матрицу к матрице A ;

3) находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji}$ и строим их них присоединенную матрицу $\tilde{A}$;

4) вычисляем обратную матрицу по формуле (**) ;

5) проверяем правильность вычисления обратной матрицы A', исходя из определения.

Пример - $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}\ ?$$

1) $|A| = 1\cdot A_{11} + (-1)\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13} = 1 + 3 + 1 = 5 \neq 0$

2) $$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $A'_{ij} = A_{ji} \qquad A'_{11} = A_{11} \qquad A'_{12} = A_{21} \qquad A'_{13} = A_{31}$

4) $$\tilde{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

5) $$A^{-1} \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

3 Решение систем линейных уравнений

3.1 Метод обратной матрицы

Определение: Системой m линейных уравнений с n переменными называется система вида:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты системы,
$i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$, а b_i – свободные члены.

Определение: Совокупность чисел $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ называется **решением** системы линейных уравнений, если при подстановке их вместо переменных во все уравнения системы они обращаются в верные равенства.

Определение: Система называется **совместной** , если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае – **несовместной.**

Определение: Совместная система называется **определенной** , если она имеет единственное решение, и **неопределенной** , если имеется бесконечно много решений.

Определение: Матрицу A , состоящую из коэффициентов левой части уравнений называют матрицей системы (или основной матрицей).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец переменных

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матрица – столбец свободных членов

Тогда систему (*) можно записать в матричной форме: $\underset{m\cdot n}{A} \cdot \underset{n\cdot 1}{X} = \underset{m\cdot 1}{B}$ - матричной уравнение.

Решаем его, умножая на A^{-1} слева.

Имеем, $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, известно, что

$A^{-1} \cdot A = E$, тогда

$X = A^{-1} \times B$

1) Понятие обратной матрицы рассматривается только для квадратных матриц, когда $m = n$, поэтому этот метод решения систем возможен только для квадратных матриц.

2) Очевидно, что если матрица A – вырожденная, то обратной не существует и если хотя бы одно число b_i отлично от нуля, то система будет несовместной.

3) Если все свободные числа в (*) равны нулю, т.е. система будет однородной, то в этом случае она всегда имеет решение $x = 0$. такое решение называется тривиальным.

4) Если квадратная матрица невырождена, то система (*) всегда имеет единственное решение.

Например, $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot X = B \qquad X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

3.2 Метод Крамера

Применяется для систем уравнений с одинаковым числом уравнений и неизвестных.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{ni}x_i + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Выделим столбец слагаемых при неизвестных x_i со своими коэффициентами.

Составим определитель:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ заменим на $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\quad \Delta x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $\quad i$- столбец

а) Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, x_i вычисляется по формуле:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$$

б) если $\Delta = 0$, то $\quad \Delta \cdot x_i = \Delta x_i$

$0 \cdot x_i = \Delta x_i$

1) если $\Delta x_i = 0$, то решение системы – любые действительные числа

2) если $\Delta x_i \neq 0$, то решений нет.

Вернемся к предыдущему примеру из 3.1 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{11} + 11 \cdot A_{21} + 8 \cdot A_{31} = 3 \cdot 1 + 11 \cdot 3 - 8 \cdot 2 = 20$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{12} + 11 \cdot A_{22} + 8 \cdot A_{32} = 3 \cdot (-3) + 11 \cdot 11 - 8 \cdot 1 = 10$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{13} + 11 \cdot A_{23} + 8 \cdot A_{33} = 3 \cdot 1 + 11 \cdot (-2) + 8 \cdot 3 = 5$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

Ответ: (4; 2; 1)

Правильность решения можно проверить, подставив найденные значения в уравнения системы и убедившись в том, что они обращаются в верные равенства.

Существенными недостатками методов Крамера и обратной матрицы является их большая трудоемкость. Эти методы редко используются.

3.3 Метод Гаусса

Рассмотрим решение системы методом Гаусса на конкретном примере.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса – методом последовательного исключения неизвестных. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Второе уравнение системы берем за ведущее, т.к. коэффициент перед x_1 равен *1*. Меняем местами первое и второе уравнения системы. Если коэффициенты перед x_1 во всех уравнениях не равны *1*, то берем любое уравнение за ведущее, предварительно разделив его на коэффициент при x_1 . Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

В полученной системе первое уравнение возьмём за ведущее, умножим его на *(-8)* и сложим со вторым уравнением системы, затем умножим на *(-4)* и сложим с третьим уравнением системы. Тем самым мы исключили x_1 из второго и третьего уравнений системы. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ ....- 5x_2 + 2x_3 = -20 \\ ....- 3x_2 + x_3 = -13 \end{cases}$$

Второе уравнение системы делим на *(-5)*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ ....x_2 - 2/5\, x_3 = 4 \\ .....- 3x_2 + x_3 = -13 \end{cases}$$

Второе уравнение берем за ведущее, умножим его на *3* и сложим с третьим уравнением, т.е. исключим x_2 из третьего уравнения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ ....x_2 - 2/5\, x_3 = 4 \\ ....- 1/5\, x_3 = -1 \end{cases}$$

Делим элементы третьей строки на *(- 1/5)*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ ....x_2 - 2/5\, x_3 = 4 \\ ....x_3 = 5 \end{cases}$$

Теперь последовательно находим:
$x_3 = 5$, $x_2 = 4 + 2/5x_3 = 4 + 2/5 \cdot 5 = 6,$ $x_2 = 6$
$x_1 = 2 - x_2 + x_3 = 2 - 6 + 5 = 1$

Ответ: $x_1 = 1,\ \ x_2 = 6,\ \ x_3 = 5$
Проверка:
Если бы в ходе наших преобразований получилось уравнение
$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = 0$, то оно исключается из системы.
Если бы получилось уравнение вида $0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = b$, где $b \neq 0$, то такое равенство невозможно и система решений не имеет.

Пример 2. Решить систему методом Гаусса. Найти общее, частное и базисное решение системы. Сделать проверку частного решения.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + ...2x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

Оставим без изменения первое уравнение системы и за ведущую переменную принимаем x_1 . Умножим первое уравнение на *(-2)* и сложим со вторым, затем соответственно на *(-3)* и *(-4)* и сложим с третьим и четвертым уравнениями системы, т.е. исключим x_1 из 2-го, 3-го, 4-го уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -7 \\ ....3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 13 \\ ....3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 13 \\ ......-7x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 27 \end{cases}$$

Второе и третье уравнения системы одинаковы. Исключаем третье уравнение из системы.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -7 \\ ......3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 13 \\ ......7x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 27 \end{cases}$$

За ведущую переменную берем x_2 , делим второе уравнение на *3*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -7 \\ ....x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = \frac{13}{3} \\ ....7x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 27 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на *(-7)* и сложим с третьим уравнением

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -7 \\ ....x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = \frac{13}{3} \\ ....\frac{5}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

За ведущую переменную берем x_3 , делим третье уравнение системы на $\frac{5}{3}$, в результате получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -7 \\ \ldots\ldots\ldots x_2 - \dfrac{2}{3}x_3 + \dfrac{4}{3}x_4 = \dfrac{13}{3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_3 - \dfrac{7}{5}x_4 = -2 \end{cases}$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 назовем базисными, а неизвестную x_4 - свободной. Придавая свободной неизвестной произвольные значения, получим бесчисленное множество решений. Выражая базисные переменные через остальные (свободные), получим общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{6}{5}x_4 \qquad x_2 = 3 - \dfrac{2}{5}x_4 \qquad x_3 = -2 + \dfrac{7}{5}x_4 \end{cases}$$

Давая свободной переменной произвольное значение, получаем одно из частных решений.

Например, $x_4 = 5$, тогда $x_1 = 1 - 6 = -5$, $x_2 = 3 - 2 = 1$, $x_3 = -2 + 7 = 5$

Частное решение в котором все свободные переменные равны 0, называют **базисным** решением $x_4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$

Проверка частного решения:

$$\begin{cases} -5 - 2\cdot 1 + 5 - 5 = -7 \\ 2\cdot(-5) - 1\cdot 1 + 2\cdot 5 = -1 \\ 3\cdot(-5) - 3\cdot 1 + 5 + 5 = -8 \\ 4\cdot(-5) - 1 + 5 + 3\cdot 5 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -5 - 2 = -7 \\ -11 + 10 = -1 \\ -18 + 10 = -8 \\ -21 + 20 = -1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{6}{5}x_4 \\ x_2 = 3 - \dfrac{2}{5}x_4 \\ x_3 = -2 + \dfrac{7}{5}x_4 \end{cases}$ - Общее решение

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ - Базисное решение

$\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = 5 \end{cases}$ - Одно из частных решений

Вопросы для самоконтроля

К заданию № 1 :

1. Сформулируйте определение минора M_{ij} элемента a_{ij} .

2. Сформулируйте определение алгебраического дополнения элемента a_{ij}

3. Запишите формулы вычисления определителя n- го порядка с помощью разложения по элементам какой-либо строки или столбца

4. Укажите преобразования над строками или столбцами определителя, которые не меняют его значения.

5. Как изменяется определитель, если поменять местами какие-либо его строки, или столбца?

6. Чему равен определитель транспонированной матрицы?

7. Проверьте для двух матриц 2-го порядка, что $|AB| = |A|\cdot|B|$

8. Как связаны между собой определители матрицы A и обратной матрицы A^{-1} ?

9. Укажите условия равенства нулю определителя.

К заданию № 2 :

1. Сформулируйте определение ранга матрицы.

2. Укажите преобразования, не меняющие ранга матрицы

3. Сформулируйте правила сложения и умножения матриц

4. Перечислите свойства сложения и умножения матриц

5. Докажите, что определитель диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

6. Существует ли обратная матрица для матрицы, у которой какая-либо строка является линейной комбинацией других строк?

7. Сформулируйте условие существования обратной матрицы

8. Какую матрицу называют присоединенной?

9. Запишите формулу вычисления обратной матрицы.

К заданию № 3 :

1. Назовите условия применимости методов Крамера и обратной матрицы для решения систем линейных уравнений?

2. Какая система называется однородной? Когда однородная система имеет единственное решение и чему оно равно? Может ли система однородных линейных уравнений иметь два , три и вообще конечное число не нулевых решений?

3. Что представляет собой общее решение однородной системы линейных уравнений?

4. при каком условии система линейных неоднородных уравнений разрешима? Когда она имеет единственное решение?

5. Укажите суть решения неоднородной системы Гаусса?

4 Индивидуальные практические задания

4.1 Индивидуальная домашняя контрольная работа № 1

1 Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов α_{i2}, α_{3j}. Вычислить определитель Δ :

а) разложив его по элементам i – й строки;

б) разложив его по элементам j – го столбца;

в) получив предварительно нули в i – й строке.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 4$, $j = 1$

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $i = 3$, $j = 3$

1.3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ $i = 4$, $j = 1$

1.4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ $i = 1$, $j = 3$

1.5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 2$, $j = 4$

1.6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 1$, $j = 2$

1.7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i = 2$, $j = 3$

1.8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i = 3$, $j = 1$

1.9. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ $i = 4$, $j = 3$

1.10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 4$, $j = 2$

1.11. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 3$, $j = 4$

1.12. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i = 1$, $j = 2$

1.13. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 4$

1.14 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 4$

1.15 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 3$

1.16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 2$

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 1$

1.18. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 4$

1.19. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 3$

1.20 $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 3$

1.21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 2$

1.22 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 2$

1.23 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 4$

1.24 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i = 3, j = 2$

1.25 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 2, j = 3$

1.26 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 1$

1.27 $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ $i = 3, j = 4$

1.28 $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 1, j = 2$

1.29 $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 4$

1.30 $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $i = 2, j = 2$

2 Даны две матрицы А и В . Найти :
а) АВ ;   б) ВА ;   в) A^{-1} ;   г) AA^{-1} ;   д) $A^{-1}A$

2.1 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.2 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

2.3 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2.4 $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

2.5 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

2.6 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2.7 $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

2.8 $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

2.9 $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

2.10 $A=\begin{pmatrix}2&6&1\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}4&-3&2\\-4&0&5\\3&2&-3\end{pmatrix}$

2.11 $A=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\0&5&2\end{pmatrix}$

2.12 $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}3&5&4\\-3&0&1\\5&6&-4\end{pmatrix}$

2.13 $A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&3&-1\\8&4&-1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}3&5&5\\7&1&2\\1&6&0\end{pmatrix}$

2.14 $A=\begin{pmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$

2.15 $A=\begin{pmatrix}1&-2&5\\3&0&6\\4&3&4\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$

2.16 $A=\begin{pmatrix}5&4&2\\1&2&4\\3&0&5\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}5&4&-5\\3&-7&1\\1&2&2\end{pmatrix}$

2.17 $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\4&3&2\\2&2&-7\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}2&7&0\\5&3&1\\1&-6&1\end{pmatrix}$

2.18 $A=\begin{pmatrix}8&-1&-1\\5&-5&-1\\10&3&2\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}$

2.19 $A=\begin{pmatrix}3&-7&2\\1&-8&3\\4&-2&3\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}0&5&-3\\2&4&1\\2&1&-5\end{pmatrix}$

2.20 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.21 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

2.22 $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.23 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

2.24 $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

2.25 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.26 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.27 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2.28 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.29 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.30 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3 Решить систему уравнений:
а) по формулам Крамера,
б) с помощью обратной матрицы,
в) методом Гаусса.

3.1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

3.2 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

3.4 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

3.5 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

3.6 $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

3.7 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

3.8 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

3.9 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

3.10 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$

3.11 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

3.12 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

3.13 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

3.14 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

3.15 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

3.16 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

3.17 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

3.18 $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

3.19 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

3.20 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$

3.21 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$

3.22 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

3.23 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

3.24 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

3.25 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

3.26 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

3.27 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$

3.28 $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

3.29 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$

3.30 $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$

4.2 Образец решения индивидуальных домашних заданий

Нулевой вариант

1 Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2} , a_{3j} . Вычислить определитель Δ : а) разложив его по элементам i-ой строки; б) разложив его по элементам j-го столбца; в) получив предварительно нули в i-ой строке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad i=1, \quad j=4$$

Решение: по определению минор M_{ij} есть определитель полученный из Δ после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца. Тогда

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 28 + 20 - 32 + 21 + 10 = -21$$

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 20 + 18 - 28 - 15 - 12 = -3$$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 21$, $\quad A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot M_{34} = 3$

а) Разложение определителя по элементам i-ой строки имеет вид: при $i=1$ $\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14}$.

найдем алгебраические дополнения A_{1j} , $j = 1, 2, 3, 4$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -9 & 2 & 7 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 28 + 42 - 36 + 48 - 49 - 18 = 15$$

$A_{12} = 21$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 5 & -9 & 7 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 54 + 196 - 120 + 144 - 126 - 70 = 78$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} M_{14} = -\begin{vmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -(27 + 56 + 30 - 36 - 36 - 35) = -6$$

$\Delta = 2 \cdot 15 - 5 \cdot 21 + 1 \cdot 78 - 2 \cdot 6 = -9$

б) Разложение по элементам j-го столбца, при $j=4$, имеет вид:

$\Delta = a_{14} A_{14} + a_{24} A_{24} + a_{34} A_{34} + a_{44} A_{44}$

$A_{14} = -6$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 5 & -9 & 2 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -18 - 40 - 30 + 36 + 25 + 24 = -3$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix} = 28 + 25 + 27 + -35 - 18 - 30 = -3$$

$$\Delta = 2(-6) + 4(-3) + 7 \cdot 3 + 2(-3) = -12 - 12 + 21 - 6 = -9$$

в) Преобразуем определитель, выполняя элементарные преобразования над его столбцами: будем последовательно умножать третий столбец на *-2 ; 5 ; -2* и складывать с 1-м, 2-м и 4-м столбцами. В результате получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 6 - 12 - 3 = -9$$

2 Даны две матрицы A и B. Найти :

а) $A \cdot B$ б) $B \cdot A$ в) A^{-1} г) $A \cdot A^{-1}$ д) $A^{-1} \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение :

а) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}$$

б) $$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix}$$

в) Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 8 = 3$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 12 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 & 0 & 2/3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

г) $$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

д) $$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Решить систему уравнений: $\begin{cases} 4x + 7y - 3z = -10 \\ 2x + 9y - z = 8 \\ -x + 6y - 3z = 3 \end{cases}$

а) по формулам Крамера ;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса

а) по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -108 + 7 - 36 - 27 + 24 + 42 = -98$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -10 & 7 & -3 \\ 8 & 9 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 270 - 21 - 144 + 81 - 60 + 168 = 294$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & -10 & -3 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -96 - 10 - 18 - 24 + 12 - 60 = -196$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -10 \\ 2 & 9 & 8 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 108 - 56 - 120 - 90 - 192 - 42 = -392$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{294}{-98} = -3 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{196}{-98} = 2 \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-392}{-98} = 4$$

Ответ: (-3 ; 2 ; 4)

б) матричный метод

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Тогда систему можно записать в виде

$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ или $A \times X = B$, откуда находим $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} – обратная матрица, которая вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ - алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 6 = -21 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -(-21 + 18) = 3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 - 1) = 7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 3 = -15$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 9 = 21 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -(24 + 7) = -31$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 27 = 20$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 + 6) = -2 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 14 = 22$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{98}\begin{pmatrix} -21 & 3 & 20 \\ 7 & -5 & -2 \\ 21 & -31 & 22 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{98}\begin{pmatrix} -21 & 3 & 20 \\ 7 & -15 & -2 \\ 21 & -31 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{98}\begin{pmatrix} 210 + 24 + 60 \\ -70 - 120 - 6 \\ -210 - 248 + 66 \end{pmatrix} = -\frac{1}{98}\begin{pmatrix} 294 \\ -196 \\ -392 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: (-3 , 2 , 4)

Проверим правильность вычисления обратной матрицы, пользуясь ее определением: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (единичная матрица)

$$-\frac{1}{98}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -21 & 3 & 20 \\ 7 & -15 & -2 \\ 21 & -31 & 22 \end{pmatrix} = -\frac{1}{98}\begin{pmatrix} -98 & 0 & 0 \\ 0 & -98 & 0 \\ 0 & 0 & -98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{98}\begin{pmatrix} -21 & 3 & 20 \\ 7 & -15 & -2 \\ 21 & -31 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{98}\begin{pmatrix} -98 & 0 & 0 \\ 0 & -98 & 0 \\ 0 & 0 & -98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в) метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & -3 & -10 \\ 2 & 9 & -1 & 8 \\ -1 & 6 & -3 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & 9 & -1 & 8 \\ 4 & 7 & -3 & -10 \end{array}\right)^{-2;-4} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 21 & -7 & 14 \\ 0 & 31 & -15 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 31 & -15 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & -30 & 10 & -20 \\ 0 & 31 & -15 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & -30 & 10 & -20 \\ 0 & 1 & -5 & -18 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -18 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 14 & 56 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Ответ: $x = -3$, $y = 2$, $z = 4$

Список использованных источников

1 **Кремер, Н.Ш.** Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер [и др.]. – М.: «Банк и биржа», Изд-во «ЮНИТИ», 1998. – 472 с.

2 **Шипачев, В.С.** Высшая математика / В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998. – 368 с.

3 **Курош, Г.А.** Курс высшей алгебры / Г.А. Курош. – М.: НАУКА, 1968. – 432 с.

4 **Шипачев, В.С.** Задачи по высшей математике / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 1998. – 303 с.