МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Гуманитарный юридический колледж

Кафедра общеобразовательных дисциплин

О.В. ДОМАЕВА

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию
Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2008

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я722
Д66

Рецензент
кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой Информационного права В.И. Кутузов

Домаева О.В.
Д66 **Математика: методические указания /О.В. Домаева.- Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. – 60 с.**

Методические указания составлены с учетом практики преподавания в средних профессиональных учебных заведениях и базируется на требованиях государственного образовательного стандарта СПО и типовой программы. Методические указания призваны способствовать лучшей организации самостоятельной работы студентов. С этой целью в нем содержится перечень основных тем учебного курса «Математика», вопросы к каждой лекции, список контрольных вопросов и упражнений для самопроверки и подготовке к семинарским занятиям, приводится список учебной литературы

Методические указания предназначены для учебной работы по дисциплине «Математика» со студентами специальности 030503 - «Правоведение» в 4 семестре.

ББК 22.1я722

Содержание

Введение

Методические указания ориентированы на студентов старших курсов ГЮК ГОУ ОГУ, рассматривающих математику как элемент общего образования и непредполагающих использовать ее в своей будущей профессии.

Однако, для выполнения профессиональных задач, юрист должен уметь обобщать, конкретизировать информацию, проводить анализ и синтез, классификацию и систематизацию имеющейся информации. В процессе математической деятельности все это естественным образом включается в арсенал приемов и методов человеческого мышления.

Методические указания охватывают материал, относящийся к теории множеств, рассматриваются элементы линейной алгебры, элементы аналитической геометрии на плоскости, элементы математического анализа.

Материалы методических указаний разбиты на разделы. После каждого теоретического блока даны вопросы и упражнения для самопроверки и подготовки к семинарским занятиям, в конце приводится список литературы.

1 Элементы теории множеств

1.1 Лекция 1 Основные теоретико-множественные понятия математики. Множество действительных чисел

1.1.1 Множество. Основные понятия
1.1.2 Операции над множествами
1.1.3 Рациональные числа. Основные законы действий над рациональными числами
1.1.4 Иррациональные числа
1.1.5 Действительные числа

1.1.1 Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики.

Под *множеством* в математике понимают совокупность или собрание некоторых объектов. Сами объекты, входящие в данное множество, называются *элементами* этого множества. Тот факт, что элемент a входит в множество A, записывается следующим образом: $a \in A$. Если элемент b не входит в множество A, то это записывается так: $b \notin A$.

Пример 1 - Если **N** – множество натуральных чисел, то $2 \in \mathbf{N}$, $10 \in \mathbf{N}$, но $-5 \notin \mathbf{N}$ и $1{,}7 \notin \mathbf{N}$.

Пример 2 - Пусть A – множество всех стран Европы, тогда Англия $\in A$, в то время как Индия $\notin A$.

Множество может содержать как конечное число элементов, так и бесконечное. В первом случае множество называется *конечным*, а число его элементов – *порядком* этого множества, во втором случае множество называется *бесконечным*. Так, например, множество **N** натуральных чисел бесконечно, а множество всех букв греческого алфавита конечно, а порядок его 24, так как в греческом алфавите 24 буквы.

Для обозначения множества часто используют фигурные скобки. Так запись

$A = \{a, b, c, d\}$ означает, что множество A содержит четыре элемента: a,b,c и d.

В математике рассматривают и множество, которое не содержит ни одного элемента. Это множество называется *пустым* и обозначается символом Ø.

Например, *пустым* множеством является множество всех целых решений уравнения $x^2 + x + 1 = 0$.

Два множества, содержащие одни и те же элементы, называются *равными.* Для обозначения равенства множеств используют знак =. Таким образом, из записи $A=B$ следует, что B – это то же множество, что и A, но записанное при помощи другого символа.

Если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B.Этот факт записывается так: $A \subset B$ (читается: множество B содержит множество A, или множество A содержится в множестве B). Знак $\subset$ называется знаком *включения*. Например, множество четных чисел есть подмножество множества целых чисел.

Если A не содержится в B, то пишут: $A \not\subset B$.

Пустое множество $\varnothing$ считается подмножеством любого множества.

Любое множество считается подмножеством самого себя: $A \subset A$.

1.1.2 Над множествами можно производить различные операции. Рассмотрим некоторые из них.

Определение. *Пересечением множеств A и B называется множество тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.*

Пересечение множеств обозначается символом $\cap$: $A \cap B$.

Например, если $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{a, b, k, l, m\}$, то $A \cap B = \{a, b\}$.

Иногда пересечение множеств называется *произведением* множеств.

Равенство $A \cap B = \varnothing$ означает, что множества A и B не содержат одинаковых элементов.

Если $A \subset B$, то, очевидно, $A \cap B = A$. Очевидно, что $A \cap A = A$.

Из определения пересечения двух множеств следует, что $A \cap B = B \cap A$.

Можно образовать пересечение любого конечного числа множеств.

Например, если $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, m, n\}$, $C = \{b, c, k, l\}$, то $A \cap B \cap C = \{c\}$ (множество $A \cap B \cap C$ содержит один элемент c).

Определение. *Объединением множеств A и B называется множество тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из множеств A и B.*

Объединение множеств обозначается символом $\cup$: $A \cup B$. Например, если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e, f\}$, то $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Иногда объединение множеств называется *суммой* множеств.

Из определения объединения следует, что $A \cup A = A$.

Соотношение $A \cup B = \varnothing$ равносильно двум соотношениям: $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

Если $A \cup B = A$, то это означает, что $B \subset A$; если же $A \cup B = B$, то $A \subset B$.

Из определения объединения двух множеств следует, что $A \cup B = B \cup A$.

Операцию объединения можно распространить и на число множеств, больше двух.

Например, если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{a, m, n\}$, то $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, m, n\}$.

Определение. *Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.*

Разность множеств А и В обозначается символом \ : $A \setminus B$.

Например, если $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{a, c, d, e, f\}$, то $A \setminus B = \{b\}$.

Из определения следует, что $A \setminus A = \varnothing$ и если $A \setminus B = \varnothing$, то это означает, что $A \subset B$.

В частом случае, если множество B есть подмножество множества A, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A и обозначается символом $\overline{B}$. Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, то $\overline{B}$ $\{3, 4\}$.

Определение. *Множество, состоящее из двух элементов, в котором определен порядок следования элементов, называется упорядоченной парой.*

Для записи упорядоченной пары используются круглые скобки. Так, запись ($a;\ b$) означает двухэлементное множество, в котором элемент a считается первым, а элемент b – вторым.

Из определения упорядоченной пары следует, что пары ($a;\ b$) и ($b;\ a$) являются различными, в то время как множества $\{a,\ b\}$ и $\{b,\ a\}$суть одно и то же множество.

Две пары ($a;\ b$) и ($c;\ d$) считаются равными тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

По аналогии с упорядоченной парой можно определить и понятие упорядоченной тройки, упорядоченной четверки и т.д.

1.1.3 Одним из основных понятий математики является понятие числа. Исторически первыми возникли в практике и были введены в науку *натуральные числа*.

Натуральные числа используют в связи со счетом количества отдельных предметов, например, при подсчете количества книг на полке, количества деталей, изготовленных за смену и т.д.

Натуральные числа образуют бесконечное множество, которое принято обозначать через **N:**

N = {1, 2, 3, 4, …}.

Для практических целей натуральных чисел оказалось недостаточно, в частности, при делении чисел, при измерении длин отрезков и различных физических величин возникла необходимость расширения множества натуральных чисел введением долей единиц и количества этих долей.

Например, если некоторая величина разделена на n частей и взято m таких частей, то вводится так называемое *дробное число* $\frac{m}{n}$, где m и n - натуральные числа.

Практическая потребность привела к введению отрицательных чисел, чтобы иметь возможность измерять величины, способные изменяться в противоположных направлениях от выбранной точки отсчета. Например, при измерении сил, действующих на пружину, растягивающие пружину силы можно считать положительными, а сжимающие пружину – отрицательными.

Таким образом, каждому числу, натуральному или дробному, сопоставляется *отрицательное число*. Если число (положительное) обозначать буквой a или (+ a), соответствующее ему *противоположное* (отрицательное) число записывается как минус a или (- a).

К этим числам присоединяется число 0, соответствующее началу отсчета как положительных, так и отрицательных чисел.

Натуральные числа, им противоположные (отрицательные) и число 0 образуют множество **Z** *целых чисел*.

Целые числа могут быть записаны в виде дробей, например $4 = \frac{4}{1}$, $-5 = -\frac{5}{1}$

Множество, состоящее из положительных и отрицательных целых, и дробных чисел и числа 0, называется множеством рациональных чисел. Обозначим его через **Q**. Таким образом, всякое рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – любое целое число, а n - натуральное число.

Следовательно, **N** содержится в **Z,** а **Z** в **Q.** Символически это записывается следующим образом: **N**$\subset$ **Z** $\subset$ **Q.** Знак $\subset$ обозначает включение или принадлежность одного множества другому.

Другими словами, **Z** есть расширенное множество **N, Q –** расширенное множество **Z,** и**,** таким образом, **Q** является расширенным множеством **N.**

Основные законы действий над рациональными числами. Основными действиями над числами являются сложение и умножение, а основным отношением между ними являются сравнение чисел, т.е. установление того, какое из двух чисел больше (меньше), если такое сравнение возможно.

Переместительный или коммутативный закон сложения:

$$a + b = b + a.$$

Сочетательный или ассоциативный закон сложения:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Сложение рационального числа с нулем:

$$a + 0 = a$$

Сложение рационального числа с соответствующим ему числом противоположного знака:

$$a + (- a) = 0$$

Переместительный или коммутативный закон умножения:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Сочетательный или ассоциативный закон умножения:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Умножение рационального числа на единицу:

$$a \cdot 1 = a.$$

Умножение рационального числа на ноль:

$$a \cdot 0 = 0.$$

Умножение не равного нулю рационального числа на число, равное отношению единицы к этому числу (такие числа а и $\frac{1}{a}$ ***называются взаимно обратными):***

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \text{ для } a \neq 0$$

Распределительный (дистрибутивный) закон умножения относительно сложения:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Введем знак $\Rightarrow$. Запись А $\Rightarrow$ В обозначает, что из А следует В.

Свойство транзитивности:

$$a < b,\ b < c \Rightarrow a < c.$$

Правило сложения неравенств: для любого числа с

$$a < b \Rightarrow \quad a + c < b + c$$

Правило умножения неравенств на число, отличное от нуля:

$$a < b \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c \text{ при } c > 0$$

$$a < b \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c \text{ при } c < 0.$$

Представление рациональных чисел десятичными дробями. Любое положительное или отрицательное целое число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем, равным единице, например, $3 = \frac{3}{1}$, $-5 =$

$= -\frac{5}{1}$.

Число 0 можно представить в виде обыкновенной дроби с числителем, равным нулю: $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} \cdots$.

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, например, $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{7}{35}$.

Если знаменатель обыкновенной дроби есть степень числа 10, то эту дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби.

Например, $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{197}{100} = 1{,}97$; $\frac{187}{1000} = 0{,}187$.

Если знаменатель обыкновенной дроби содержит в себе какие-либо простые множители, отличающиеся от 2 и 5, и эти множители не сокращаются с числителем, то такая дробь не обращается в десятичную.

Подобные дроби можно обращать лишь в приближенные десятичные дроби: $\frac{11}{21} = \frac{11}{3 * 7} = 0{,}52389...$; $\frac{17}{63} = \frac{17}{3^2 * 7} = 0{,}2648$.

Периодические дроби

Существуют рациональные числа, которые нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, например, $\frac{1}{3}, -\frac{4}{7}$.

Бесконечная десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр неизменно повторяются в одной и той же последовательности, называется периодической десятичной дробью, а совокупность повторяющихся цифр называется периодом этой дроби.

Периодические дроби бывают чистыми и смешанными. Чистой периодической дробью называется дробь, у которой период начинается сразу же после запятой, например 3,171717…. Смешанной называется дробь, у которой между запятой и первым периодом есть одна или несколько неповторяющихся цифр, например, 0,231919….

Периодические дроби сокращенно записываются следующим образом: 3,171717… = - 3,(17); 0,231919… = - 0,23(19), т.е. период дроби заключается в скобки. Например, число 3,(17) читается: три целых и 17 в периоде.

Бесконечная десятичная дробь, получающаяся при обращении обыкновенной дроби, должна быть периодической.

Каждое рациональное число можно представить в виде конечной периодической десятичной дроби

Например, рациональное число $\frac{7}{11}$ делением 7 на 11 можно представить периодической десятичной дробью 0,(63).

Конечные десятичные дроби можно записывать в виде бесконечных десятичных дробей:

0,27 = 0,27000… = 0,27(0).

Целые числа также можно записывать в виде бесконечных десятичных дробей: 17 = 17,000… = 17,(0).

Можно утверждать, что каждое рациональное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби.

Верно и обратное утверждение.

Любая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

1.1.4 Иррациональные числа

Потребности логического развития математики и ее практических приложений показали недостаточность множества рациональных чисел для решения многих задач.

Покажем, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Задача сводится к решению уравнения $x^2 = 2$. Очевидно, что не существует такого целого числа, квадрат которого равен 2, ибо $1^2 < 2$, а $2^2 > 2$.

Допустим, что такое число найдется среди дробных чисел, поэтому будем считать, что дробь $x = \frac{m}{n}$ несократима, т.е. число m и n взаимно простые. Предположим, что имеет место равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, тогда $m^2 = 2n^2$. Отсюда следует, что натуральное число m^2 – четное, так как $2n^2$ - число четное. Если m^2 – четное, то и m – четное, т.е. $m = 2p$, где p – натуральное число. Имеем: $(2p)^2 = 2n^2$ или $4p^2 = 2n^2$, $2p^2 = n^2$, т.е. число n^2 также четное, отсюда следует, что и n – четное.

Приходим к выводу, что числа m и n четные, т.е. не являются взаимно простыми. Это противоречит первоначальному предположению, что m и n – взаимно простые. Следовательно, не существует такого рационального числа, квадрат которого равен 2, а значит $\sqrt{2}$ бесконечная непериодическая десятинная дробь

Иррациональным числом называется бесконечная непериодическая десятичная дробь. Иррациональные числа образуют множество I всех бесконечных непериодических десятичных дробей.

1.1.5 Действительные числа.

Объединение множества **Q** всех рациональных чисел и множества ***I*** всех иррациональных чисел называется множеством **R** действительных или вещественных чисел, т.е. **Q** ⊂ **R**, ***I*** ⊂ **R**.

Во множестве действительных чисел действуют законы аналогичные законам действий над рациональным числами **Q.** Множество неотрицательных действительных чисел обозначают $\mathbf{R}_+$, а множество отрицательных действительных чисел обозначается $\mathbf{R}_-$.

Множество **R** всех действительных чисел называется *числовой прямой*, а сами действительные числа – *точками числовой прямой*.

Наиболее часто встречаются следующие числовые множества: *замкнутый промежуток* (или *отрезок*) с началом a и концом b

$$[a;\ b] \text{ или } a \le x \le b;$$

открытый промежуток (или *интервал*) с началом a и концом b (точки a и b не включаются):

$$(a;\ b) \text{ или } a < x < b;$$

полуоткрытые промежутки с началом a и концом b

$$(a;\ b] \text{ или } a < x \le b \text{ и}$$

$$[a;\ b) \text{ или } a \le x < b,$$

число $b – a$ называется длиной промежутка с концами a и b;

бесконечные промежутки (лучи, полупрямые)

$$(a, +\infty) \text{ или } a < x < +\infty,$$

$$(-\infty, a) \text{ или } -\infty < x < a,$$

$$[a, +\infty) \text{ или } a \le x < +\infty,$$

$$(-\infty, a] \text{ или } -\infty < x \le a;$$

числовая прямая

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R} \text{ или } -\infty < x < +\infty.$$

Контрольные вопросы

1 Приведите примеры неопределяемых понятий математики.
2 Какие множества называются конечными, бесконечными, равными ?
3 Что называется порядком множеств ?
4 Что называется подмножеством множества?
5 Что называется пересечением множеств?
6 Что называется объединением множеств?
7 Что называется разностью двух множеств?
8 Какие числа называются рациональными. Перечислите основные законы действий над рациональными числами?
9 Какие числа называются иррациональными?
10 Какие числа называются действительными?
11 Что называется числовой прямой, числовым отрезком, числовым интервалом?

Упражнения

1 Запишите множество A, элементы которого суть делители числа 24.
2 Найдите множество целых корней уравнения $9x^2 – 1 = 0$.
3 Опишите множество точек $M\ (x;y)$ плоскости, для которых:
а) $y \le 3$;

б) $(x-2)^2+(y+1)^2 \le 9$.

4 Множество A содержит 4 элемента. Сколько подмножеств содержится в этом множестве?

5 Найдите пересечение множеств $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{-1,2,3,4,5,6\}$.

6 Докажите, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.

7 Пусть множество $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, множество $B = \{1,2,4,6,8\}$, множество $C = \{-1,0,3,4,7,8\}$. Найдите множества:

1) $A \cap B$; *б)* $A \cup B \cup C$; *в)* $A \cup C$; *г)* $(A \cup B) \cap C$; *д)* $A \cap B \cap C$; *е)* $A \cup (B \cap C)$.

8 Запишите в виде бесконечной периодической дроби следующие числа:

а)23; *б)* 6,04; *в)* 0,1; *г)* $\frac{1}{8}$; *д)* $\frac{3}{7}$; *е)* $\frac{1}{6}$.

9 Сравните следующие пары чисел:

а) 3,162354 и 3,162344; *б)* – 2,17265 и – 2,17572;

в) – 0,547 и 0,541; *г)* 0,38666… и 0,386.

10 Даны множества чисел: **Q** - рациональных, **Z** - целых, **R** - действительных, $\mathbf{N}_{\text{чет}}$ - четных натуральных, **N** - натуральных. Выпишите эти множества в таком порядке, чтобы каждое следующее включало предыдущее.

11 Найдите пересечение множества натуральных чисел, делящихся на 4, с множеством натуральных чисел, делящихся на 6.

12 Выполните действия с рациональными числами:

а) $1\frac{7}{20} : 2{,}7 + 2{,}7 : 1{,}35 + \left(0{,}4 : 2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(4{,}2 - 1\frac{3}{40}\right)$;

б) $\left(7\frac{2}{3}-6\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{14}\right) : \left(8,75\cdot\frac{2}{7}-1\frac{1}{6}\right)+\frac{7}{18}:\frac{14}{27}$;

в) $\left(\frac{0,216}{0,15}+\frac{2}{3}:\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{196}{225}-\frac{7,7}{24\frac{3}{4}}\right)+0,695:1,39$;

г) $15 : \dfrac{(0,6+0,425-0,005):0,01}{30\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}}$;

д) $\dfrac{\left(\frac{7}{15}+\frac{14}{45}+\frac{2}{9}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\left(2\frac{2}{3}-1,75\right)}{\left(\frac{3}{7}-0,25\right):\frac{3}{28}-1}$;

е) $\dfrac{\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1,25):2,5}$;

ж) $\dfrac{\left(1,75:\dfrac{2}{3}-1,75\cdot 1\dfrac{1}{8}\right):\dfrac{7}{12}}{\left(\dfrac{17}{80}-0,0325\right):400}$.

2 Элементы линейной алгебры

2.1 Лекция 2 Линейные уравнения и неравенства. Системы линейных уравнений и неравенств

2.1.1 Уравнения с одним неизвестным

2.1.2 Определение линейного уравнения, решение линейного уравнения. Исследование линейного уравнения

2.1.3 Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

2.1.4 Определение линейного неравенства, решение линейного неравенства

2.1.5 Системы двух линейных неравенств с двумя неизвестными

2.1.1 Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением. В зависимости от числа неизвестных входящих в уравнение, рассматривают уравнение с одним, с двумя и т.д. неизвестными.

Неизвестные числа в уравнениях обычно обозначаются буквами $x,y,z\ldots$

Рассмотрим уравнение с одним неизвестным. Выражения, стоящие слева и справа от знака равенства называются левой и правой частями уравнения.

Областью допустимых значений переменной в уравнении, или областью определения уравнения, называется множество значений неизвестной x, при каждом из которых имеют смысл выражения в левой и правой частях уравнения одновременно. Корнем уравнения называется значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство. Решить уравнение – это значит найти все его корн или установить что их нет.

Два уравнения называются равносильными, если они имеют одинаковые решения. Если уравнения не имеют корней, то они также считаются равносильными.

Теоремы о равносильности уравнений

Первая теорема. *Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение равносильное данному.*

Вторая теорема. *Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится уравнение равносильное данному.*

Эти теоремы используются при решении уравнений.

2.1.2 ***Линейным уравнением, или уравнением первой степени с одним неизвестным, называется уравнение вида ax + b = 0, где a и b некоторые числа, a x – неизвестное.***

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -\dfrac{b}{a}$.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесчисленное множество решений.

2.1.3 Если поставлена задача нахождения такой пары значений *(x; y),* которые одновременно удовлетворяют двум уравнениям, то говорят, что данные уравнения образуют систему уравнений.

Пару значений *(x;y)*, которая одновременно является решением и первого и второго уравнения системы, называют решением системы уравнений.

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или установить, что их нет.

В общем виде систему линейных уравнений с двумя неизвестными можно записать так:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Если в системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными $b_1 = b_2 = 0$, то система называется однородной, ее решение (0;0).

Если хотя бы одно из чисел b_1 или b_2 не равно нулю, то система называется неоднородной.

Система линейных уравнений имеющая одно решение называется совместной. Любая однородная система совместна.

Система линейных уравнений не имеющая ни одного решения, называется несовместной.

Известны различные способы решения систем.

Способ подстановки

Этот способ заключается в том, что из одного уравнения данной системы выражают какую-либо переменную через другую и найденное для этой переменной выражение подставляют в другое уравнение системы, в результате чего получают уравнение с одной переменной.

Пример – Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3y \\ 3\cdot(7 - 3y) + y = 5 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3y \\ 21 - 8y = 5 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3y \\ -8y = 5 - 21 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3y \\ y = 2 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: (1;2)

Способ алгебраического сложения

Этот способ состоит в том, что все члены каждого из уравнений умножают на соответственно подобранные множители так, чтобы коэффициенты при одной и той же переменной в обоих уравнениях оказались противоположными числами, а затем уравнения почленно складывают, в результате чего получают уравнение содержащее только одну переменную.

Пример – Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на минус 4, сложим получившиеся уравнения получим систему, равносильную данной

$$\begin{cases} 12x - 9y = -3 \\ -12x - 16y = -72 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} -25y = -75 \\ 12x - 9y = -3 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: (2;3)

Графический способ

Этот способ заключается в том, что в одной системе координат строят график каждого уравнения системы и находят точку пересечения этих графиков.

Если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение. Абсцисса точки пересечения, несть решение системы.

Если прямые совпадают, то система имеет бесчисленное множество решений.

Если прямые параллельны, то система не имеет решений.

2.1.4 ***Неравенство содержащее одну переменную в первой степени, называется линейным неравенством или неравенством первой степени.***

Так, например, $2(3x + 5) < 6x - 3$ есть линейное неравенство с одной переменной.

Свойства неравенств

Первое свойство. *Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.*

Второе свойство. *Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство. Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и при этом изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.*

Линейные неравенства решаются при помощи тех же операций, что и линейные уравнения, при этом учитывают сформулированные выше свойства.

Пример - Решить неравенство $4(3x - 11) > 5(x + 2) - 5$.

Решение. Раскрыв скобки, получим $12x - 44 > 5x + 10 - 5$. Отсюда, $12x - 5x > 10 - 5 + 44$, или $7x > 49$; поэтому $x > 7$.

Таким образом, решениями данного неравенства являются все действительные числа промежутка $(7, \infty)$.

2.1.5 При решении системы линейных неравенств с одной переменной находят решения каждого неравенства в отдельности, и тогда решениями системы будет пересечение множеств решений каждого неравенства.

Пример - Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2(x-3) > 3-x; \\ 7x-5 < 4x+10 \end{cases}$$

Решение. Найдем множество решений первого неравенства:

$$2(x-3) > 3 - x \Leftrightarrow 2x + x > 3 + 6 \Leftrightarrow x > 3.$$

Таким образом, для первого неравенства системы $x \in (3, \infty)$.

Найдем теперь множество решений второго неравенства системы:

$$7x - 5 < 4x + 10 \Leftrightarrow 7x - 4x < 5 + 10 \Leftrightarrow 3x < 15 \Leftrightarrow x < 5.$$

Следовательно, для второго неравенства $x \in (-\infty, 5)$.

Решением системы является пересечение двух множеств $(3; \infty) \cap (-\infty; 3) = (3; 5)$.

Ответ: (3; 5)

Пример - Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5x+4 < 2(x-1); \\ 2-x < 3x+2. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$5x + 4 < 2(x - 1) \Leftrightarrow 5x - 2x < -4 - 2 \Leftrightarrow 3x < -6 \Leftrightarrow x < -2.$$

Следовательно, для первого уравнения системы $x \in (-\infty, -2)$.

Далее,

$$2 - x < 3x + 2 \Leftrightarrow -x - 3x < 2 - 2 \Leftrightarrow -4x < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Следовательно, для второго уравнения системы $x \in (0, \infty)$.

Так как $(-\infty, -2) \cap (0, \infty) = \varnothing$, то данная система не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Контрольные вопросы

1 Какое уравнение называется линейным? Приведите пример.

2 Какое неравенство называется линейным? Приведите пример.

3 Что называется решением линейного уравнения и линейного неравенства?

4 Какие уравнения и системы уравнений называются равносильными?

5 Какие методы решения систем двух линейных уравнений вы знаете? Приведите примеры.
6 Как решить систему линейных неравенств?

Упражнения

1 Решите уравнение:

1) $4x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 57;$
2) $\frac{5(x+1)}{8} + \frac{2(x-1)}{11} - \frac{x-3}{2} = 9;$
3) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{9} = 13;$
4) $\frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3} - \frac{x-5}{2} = \frac{x-1}{8};$
5) $\frac{7+9x}{4} + \frac{2-x}{9} = 7x+1;$
6) $5(x+5)+3(x+2)-7(x+6) = x;$
7) $5(x+5)+3(x+2)-7(x+4\frac{3}{7}) = x.$
8) 5+(x+5)+3(x+2)-7(x+6)=x

2 Решите уравнение:

1) $\frac{x+2}{x-8} - \frac{x-1}{x-8} = \frac{3}{2};$
2) $\frac{4x}{x+5} - \frac{x}{x-1} = 3;$
3) $\frac{5x-2}{2x-3} - \frac{19}{4x-6} = \frac{7}{2};$
4) $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-6} + \frac{1}{x-8} = 0;$
5) $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{(x+2)(x+3)}.$

3 Решите уравнение аналитическим и графическим способами:

1) $|x| = 5;$
2) $|3x-5| = 1;$
3) $|2x-5| = x-1;$
4) $|2x-5| = 2-x.$

4 Решите неравенство:

1) $x+6 > 2-3x;$
2) $3x-6 \geq 4x-9;$
3) $\frac{7-6x}{2} + 10x < \frac{20x+1}{3} + 2;$
4) $(x-1)^2 - 5 \leq (x+4)^2;$
5) $4x-7 < 3+4x;$
6) $5x-4 > 7+5x.$
7) $3x^2-5x+2 \geq 0;$
8) $(x-1)(x-2)(x+3)^2 < 0.$

5 Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x-3y=11 \\ 5x+y=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x+y=-5 \\ x-3y=-6 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x+3y=-7 \\ x-y=4 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x-3y=8 \\ 2x-y=6 \end{cases}$.

5) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ x^2-4y=4 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+2xy+2y^2=18 \end{cases}$

6 Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3x+7>7x-9, \\ x-3>-3x+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x>4x+6, \\ 4x+3<2x+1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x-7>5x-1, \\ 3x+6>8x-4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x-3>1+x, \\ \frac{1}{2}-3x<\frac{2}{3}x-5; \end{cases}$

5); $\begin{cases} x^2-5x+4\le 0 \\ 9-4x<0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2-7x+5\ge 0 \\ 2-x>0 \end{cases}$

2.2 Лекция 3 Решение систем линейных уравнений

2.2.1 Понятие определителя II и III порядка. Правила вычисления определителей

2.2.2 Свойства определителей

2.2.3 Решение систем с помощью определителей (формулы Крамера).2.2.4 Метод Гаусса.

2.2.1 *Определителем II порядка* называется число, записанное с помощью квадратной таблицы по два элемента в каждой строке и столбце и полученное по определенному правилу (произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали).

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{21} - a_{22} \cdot a_{12}$, первая цифра – номер строки, вторая цифра – номер столбца.

Пример.

1) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2.$

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0{,}5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7.$

Определителем III порядка называется число, записанное с помощью таблицы чисел, состоящей из 3-х строк и 3-х столбцов и вычисленное по правилу: каждое слагаемое суммы есть произведение 3-х сомножителей взятых по одному и только по одному из каждого столбца и каждой строки с определенным знаком.

Для вычисления определителя третьего порядка используют правило треугольников (правило Сарруса).

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$

Пример

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1{\cdot}1{\cdot}2 + 2{\cdot}1{\cdot}1 + (-1) \cdot 1{\cdot}1 - 1{\cdot}1{\cdot}1 - 1{\cdot}1{\cdot}1 - (-1) \cdot 2{\cdot}2 = 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 4 = 5$

2.2.2 *Свойства определителей*

Первое свойство. *Если в определителе поменять строки и столбцы местами, не меняя нумерации, т.е. 1 строку на 1 столбце,*
2 строку на 2 столбец
3 строку на 3 столбец,
то определитель не изменит своего значения.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Вывод: Строки и столбцы в определителе равнозначны, следовательно, всякое свойство, сформулированное для столбцов, справедливо и для строк.

Второе свойство. *Если в определителе поменять местами два столбца или две строки, то определитель изменит свое значение на противоположное.*

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

Третье свойство. *Если в определителе элементы 2-х столбцов (строк) равны между собой, то определитель равен 0.*

Четвертое свойство. *Если в определителе все элементы некоторого столбца имеют общий множитель, то этот множитель можно вынести за знак определителя.*

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

Пятое свойство. *Если в определителе все элементы некоторого столбца равны нулю, то определитель равен нулю.*

Шестое свойство. *Если элементы 2-х столбцов пропорциональны между собой, то определитель равен нулю.*

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \text{ если, например, } \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{a_{31}}{a_{32}} = \lambda$$

Седьмое свойство. *Если элементы некоторого столбца состоят из суммы 2-х слагаемых, тогда этот определитель равен сумме 2-х определителей.*

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Восьмое свойство. *Если элементы некоторого столбца умножить на одно и то же число и прибавить к соответствующим элементам другого столбца, то значение определителя не изменится.*

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & (a_{12} + \lambda a_{11}) & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22} + \lambda a_{21}) & a_{23} \\ a_{31} & (a_{32} + \lambda a_{31}) & a_{33} \end{vmatrix}$$

Доказательство свойств проводится с использованием определения и уже доказанных свойств.

2.2.3 Система n - линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Решением системы называется такая совокупность чисел

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \\ x_2 &= r_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= r_n, \end{aligned}$$

при подстановке которых в систему, каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение и несовместной, если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Примеры

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ (10; 0) – совместная и определенная система;

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ - несовместная;

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ - совместная и неопределенная.

Две системы уравнений называются равносильными, или эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений.

Иногда полагают $x_1 = x$

$x_2 = y,$ тогда система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Рассмотрим решение систем линейных уравнений с помощью определителей.

Пусть требуется решить систему 2-х линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot\, a_{22} \\ \cdot\,(-a_{12}) \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot\,(-a_{21}) \\ \cdot\, a_{11} \end{matrix}$$

1) $$+\begin{cases} a_{11} \cdot a_{22}x + a_{12} \cdot a_{22}y = b_1 a_{22} \\ a_{21} \cdot (-a_{12})x + a_{22} \cdot (-a_{12})y = b_2 \cdot (-a_{12}) \end{cases}$$

2) $$+\begin{cases} a_{11} \cdot (-a_{21})x + a_{12} \cdot (-a_{21})y = b_1 \cdot (-a_{21}) \\ a_{21} \cdot a_{11}x + a_{22} \cdot a_{11}y = b_2 \cdot a_{11} \end{cases}$$

$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})x = b_1 \cdot a_{22} + b_2 \cdot (-a_{12})$ $(a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21})y = b_2 \cdot a_{11} - b_1 a_{21}$

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$ - главный определитель системы.

$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{22} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}$; $\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ - вспомогательные определители системы.

При введенных обозначениях система примет вид

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta x \\ \Delta \cdot y = \Delta y \end{cases}$$

1) Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} \end{cases}$; эти формулы называются формулами Крамера.

2) Если $\Delta = 0$, то $\begin{cases} 0x = \Delta x \\ 0y = \Delta y \end{cases}$

а) если хотя бы один из определителей Δx или $\Delta y \neq 0$, то система решений не имеет;

б) если $\Delta x = \Delta y = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений, т.е. неопределенная.

Пример 1 - Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7; \qquad \Delta x = 21;\ \Delta y = 7; \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = 3 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = 1 \end{cases}$$

Ответ: (3; 1).

Аналогичные формулы используются и при решении системы 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} \end{cases}$$

Пример 2 - Решите систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11. \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Найдем главный и вспомогательные определители системы.

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$$ система имеет единственное решение.

Вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

По формулам Крамера получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ: (4; 2; 1)

В конце решения системы рекомендуется сделать проверку, подставить найденные значения в уравнения системы и убедиться в том, что они обращаются в верные равенства.

Существенным недостатком решения систем по формулам Крамера является его большая трудоемкость, связанная с вычислением определителей.

2.2.4 Решение систем 3-х - линейных уравнений с 3 неизвестными методом Гаусса.

Суть метода Гаусса заключается в последовательном исключении переменных.

На I этапе нужно выбрать ведущее уравнение и ведущую переменную, которую мы исключим из остальных уравнений. В результате получим систему уравнений, в которой одно уравнение содержит 3 переменных, а два других уравнения содержат две одинаковые переменные.

На II этапе из двух уравнений с двумя переменными исключаем еще одну переменную. Получим систему, в которой одно уравнение содержит 3 переменных, другое – 2 переменных, третье – 1 переменную. Эту переменную легко найти. Затем ее подставляем во второе уравнение, находим вторую переменную. Затем их подставляем в первое уравнение, находим третью переменную.

Таким образом, метод Гаусса является способом решения системы линейных уравнений путем последовательного исключения переменных и сведения ее к треугольной системе уравнений.

Рассмотрим пример.

Пример - Решить систему $\begin{cases} x+3y+2z=3 \\ 4x-y+2z=5 \\ 2x-y+5z=-2 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot(-4)+ \\ \\ \\ \end{matrix} \right| \begin{matrix} \cdot(-2)+ \\ \\ \\ \end{matrix}$

На I этапе умножаем первое уравнение на (-4) и складываем его со вторым, затем первое уравнение умножаем на (-2) и складываем его с третьим, получим:

$$\begin{cases} x+3y+2z=3 \\ -13y-6z=-7 \\ -7y+z=-8 \end{cases} \left| \begin{matrix} \\ \\ \cdot 6+ \end{matrix} \right.$$

На II этапе третье уравнение умножаем на 6 и складываем его со вторым, получаем:

$$\begin{cases} x+3y+2z=3 \\ -7y+z=-8 \\ -55y=-55 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+3\cdot 1+2\cdot z=3 \\ y=1 \\ z=-8+7 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+3-2=3 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Ответ: (2; 1; -1)

Контрольные вопросы

1 Что называется системой n - линейных уравнений с n неизвестными ?
2 Что называется решением системы n - линейных уравнений с n неизвестными?
3 Какая система называется совместной, определенной, неопределенной?
4 Какие системы уравнений называются равносильными?
5 Что называется определителем второго порядка?
6 По какому правилу вычисляется определитель второго порядка?
7 Что называется определителем третьего порядка?
8 Сформулируйте правило, по которому вычисляется определитель третьего порядка.
9 Запишите формулы Крамера для решения систем 2-х-линейных уравнений с двумя неизвестными 3-х-линейных уравнений с тремя неизвестными.
10 В чем заключается суть метода Гаусса?

Упражнения

1 Вычислите определители:

1) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$; 4) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3{,}5 & 8 \\ 0{,}5 & -1{,}5 \end{vmatrix}$;

5) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$; 6) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$; 7) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

2 Решите уравнения:

1) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ 2) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}$; 3) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 6) $\begin{vmatrix} 4\sin & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

3 Решите неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

4 Решите систему уравнений по формулам Крамера.

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x + 5y = 14 \\ 2x - 4y = -20 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ x - 2y + 4z = 3 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3} - \dfrac{3x-2}{4} = x + y \\ 5x - 4y = -18 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} \dfrac{1-2y}{5} - \dfrac{x}{5} - 2y = 4 \\ 2\cdot(1-y) - x = 1 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 11 \\ 2x - y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 3x - 6y - 3z = 6 \\ 5x - 10y - 5z = 10 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = -3 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$.

Решите систему уравнений методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ x - 2y + 4z = 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} -2x + 5y - 6z = -8 \\ x + 7y - 5z = -9 \\ 4x + 2y - z = -12 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} -x + 2y + z = 7 \\ 3x - y + 6z = 19 \\ -4x + 3y - z = 8 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = -3 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = -11 \\ 3x + 2y - z = 7 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 4x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - 5y - 3z - 16 = 0 \\ 3x + 2y + 4z - 4 = 0 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 3x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + 3z = 21 \\ x + y - z = -5 \end{cases}$.

6 Решите систему 3-х уравнений с тремя неизвестными:

1) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x + y + z = -4 \\ -x - 2y + 2z = 14 \\ 4x + 2y + z = 7 \end{cases}$.

2.3 Лекция 4 Матрицы

2.3.1 Определение матрицы. Виды матриц.
2.3.2 Действия над матрицами.

2.3.1 ***Матрица*** **– прямоугольная таблица чисел, содержащая** $m \times n$ **элементов, расположенных в** m **– строк и** n **– столбцов.**

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots\ldots.. & \ldots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$. Если $m \neq n$, то матрица называется *прямоугольной*.

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots\ldots.. & \ldots.. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*.

$A_{mn} = \{a_{ij}\}$, где $i = 1,2,3,\ldots m$, $j = 1,2,3\ldots n$.

$A_{1n} = (a_{11}, a_{12}\ldots a_{1n})$ – *строчная матрица*

$$A_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{\text{ь}1} \end{pmatrix}$$ - *столбцовая матрица*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *ноль-матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Воображаемая прямая, которая проходит в квадратной матрице через элементы с одинаковыми индексами (a_{11}, a_{22}, $\ldots a_{nn}$), называется главной диагональю матрицы.

Если в квадратной матрице все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю, то матрица называется *диагональной*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица называется единичной, если все ее элементы по главной диагонали равны 1.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$ *единичная матрица третьего порядка*.

Две матрицы называются *равными*, если у них:

1) одинаковое число строк;
2) одинаковое число столбцов;
3) все соответствующие элементы 2-х матриц равны.

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется *определителем квадратной матрицы (детерминант матрицы)*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *неособенной*, если её детерминант отличен от нуля ($\det A \neq 0$).

Квадратная матрица называется *особенной*, если её детерминант равен нулю ($\det A = 0$).

Пример - Определить вид матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Найдем $\det A = \Delta_3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 0 + 0 + 6 - 12 = -12 \neq 0,$$ матрица неособенная.

Матрица A' называется *транспонированной* по отношению к A, если в матрице A поменять местами строки и столбцы с сохранением порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если A имеет размер $m \times n$, то A' имеет размер $n \times m$.

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A'_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{4\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad A'_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Свойства транспонирования.

1. (A')' = A;
2. (λA)' = λA';
3. (A + B)' = A' + B'.

2.3.2 Действия над матрицами.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число α, или числа α на матрицу A называется такая матрица, все элементы которой есть произведение соответствующих элементов данной матрицы на число α.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$ $\qquad 3\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц Пусть даны две матрицы, у которых число строк и число столбцов одинаково (т.е. матрицы одинакового размера).

$A_{m\times n} = \{a_{ig}\}$

$B_{m\times n} = \{b_{ig}\}$

Суммой двух матриц A и B одинакового размера m×n называется матрица C = A + B, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B, т.е. матрицы складываются поэлементно,

$$A_{mn} + B_{mn} = C_{mn} \ \{c_{ig} = a_{ig} + b_{ig}\}.$$

Например - $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\; C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

В частном случае A + 0 = A.

Умножение матриц. Две матрицы могут быть перемножены, если число столбцов I матрицы равно числу строк II матрицы.

Произведением матрицы A на матрицу B называется такая матрица C, с элементами $\{c_{ij}\}$*, где каждый элемент есть сумма произведений элементов i – строки матрицы A на j столбец матрицы B.*

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + a_{i3}\cdot b_{3j} + \ldots + a_{ip}\cdot b_{pj}$$

В матрице С строк столько, сколько их в матрице А и столбцов столько, сколько их в матрице В.

Пример. Найти произведение матрицы А на В

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = C_{2\times3}\ \{c_{ig}\}$$

Пользуясь определением произведения двух матриц найдем элементы матрицы С

$c_{11} = 2{\cdot}4 + 0{\cdot}3 + (-1)\cdot0 = 8$
$c_{12} = 2{\cdot}1 + 0{\cdot}2 + (-1)\cdot1 = 1$
$c_{13} = 2{\cdot}0 + 0{\cdot}1 + (-1)\cdot0 = 0$
$c_{21} = 0{\cdot}4 + (-2)\cdot3 + 2{\cdot}0 = -6$
$c_{22} = 0{\cdot}1 + (-2)\cdot2 + 2{\cdot}1 = -2$
$c_{23} = 0{\cdot}0 + (-2)\cdot1 + 2{\cdot}0 = -2$

$$C_{2\times3} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Свойства произведений

Первое свойство *Произведение матрицы на единичную матрицу равно данной матрице.*

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0; & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0; & 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 0; & 3\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Второе свойство *При умножении ноль-матрицы на матрицу A получится ноль-матрица*

$$0 \cdot A = 0$$

Третье свойство *Умножение матриц не подчиняется переместительному закону.*

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Четвертое свойство *Возведение в степень.*

n-ой *степенью матрицы A называется произведение* ***n*** *множителей, каждый из которых равен A.*

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}, \text{ (только для квадратных матриц).}$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

Пятое свойство. *Произведение матриц подчиняется распределительному закону (дистрибутивному)*

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Проверьте на примере.

Шестое свойство. *Умножение матриц подчиняется сочетательному закону (ассоциативному).*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Проверьте на примере.

Контрольные вопросы

1 Что называется матрицей?
2 Перечислите виды матриц.
3 Какие матрицы называются равными?
4 Что называется детерминантом матрицы?
5 Какие матрицы называются транспонированными?
6 Какими свойствами обладает операция транспонирования?
7 Что называется произведением матрицы на число?
8 Что называется суммой двух матриц?
9 Что называется произведением двух матриц?
10 Перечислите свойства произведения. Приведите примеры.

Упражнения

1 Определите вид матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -3 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$;   г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Даны матрицы А и В. Выполните указанные действия.

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

$A + B$, $A - B$, $3{,}5 \cdot A + 0{,}45 \cdot B$, $A \cdot B + B \cdot A$.

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$A \cdot B + B \cdot A$, $A^2 + B^2$.

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

$A + B$, $A - B$, $2 \cdot A + 0{,}2 \cdot B$.

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B$, $B \cdot A$.

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$-\frac{1}{4} \cdot A \cdot B$.

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B - 2 \cdot B \cdot A + 3 \cdot E$.

ж) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 + B^2 + 3A - 4B$.

з) Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & -10 & 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Вычислите det A и det A'. Сделайте вывод.

3 Элементы аналитической геометрии

3.1 Лекция 5 Векторная алгебра. Метод координат

3.1.1 Понятие вектора.
3.1.2 Линейные операции над векторами.
3.1.3 Основные свойства действий над векторами.
3.1.4 Скалярное произведение векторов.
3.1.5 Координаты вектора.
3.1.6 Простейшие задачи в координатах.

3.1.1 При изучении количественных и пространственных закономерностей окружающего нас мира важное значение приобретают скалярные и векторные величины.

Скалярная величина характеризуется своим числовым значением. Такими величинами являются, например, длина отрезка, объем тела, масса, температура.

Векторная величина характеризуется числовым значением и направлением. Такими величинами являются, например, скорость, ускорение, сила, напряженность магнитного поля.

В векторной алгебре под скаляром понимают действительное число, а под вектором – направленный отрезок.

Итак, *вектором называется направленный отрезок, т.е. отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой концом. Направление вектора отмечается стрелкой.*

Обозначение векторов: $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CД}$; $\overrightarrow{MN}$ или $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$.

Если начало вектора совпадает с его концом, то такой вектор называется нулевым. Нулевой вектор не имеет какого-либо определенного направления.

Длиной (модулем) ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка *AB*. Длина обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$

Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.

Два вектора называются сонаправленными, если они одинаково направлены, и противоположно направленными, если их направления противоположны.

Запись $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, а запись $\vec{c}$ $\uparrow\downarrow$ $\vec{d}$ - что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены.

Два вектора называются равными, если они сонаправлены и их длины равны

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM}\text{, если } \overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BM} \text{ и } |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BM}|.$$

Любой вектор можно считать равным самому себе: $\vec{a} = \vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$, т.е. равенство векторов обладает свойством транзитивности.

Построение вектора $\overrightarrow{MN}$, равного вектору $\vec{a}$ называется откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки *M*.

От любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному и притом только один.

Два ненулевых вектора называются противоположными, если их длины равны, и они противоположно направлены.

3.1.2 ***К линейным операциям над векторами относятся:***

1) сложение;

2) вычитание;

3) умножение вектора на число.

Сложение.

Для того, чтобы построить сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку и отложить от нее вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и затем от точки *B* отложить вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ является искомой суммой $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Вектор $\vec{c}$ называется ***замыкающим*** вектором, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ***составляющими*** векторами. Этот способ построения называется ***правилом треугольника.*** Правило треугольника можно сформулировать и так: если А,В, и С – произвольные точки плоскости, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Сумму двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить и иначе.

Откладывая от произвольной точки О векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, построим параллелограмм ОАСВ. Тогда вектор $\overrightarrow{OC}$ (где $|\overrightarrow{OC}|$ - диагональ параллелограмма) является искомой суммой: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Этот способ построения называется ***правилом параллелограмма***.

Сложение более чем двух векторов производится по правилу многоугольника: суммой нескольких векторов $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}, \ldots \vec{d}$, является вектор соединяющий начало первого вектора с концом последнего при условии последовательного откладывания векторов.

Вычитание.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$$

Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число α называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, причем, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $\alpha \geq 0$ и противоположно направлены при $\alpha < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор. Из определения следует, что для любого числа α и любого вектора $\vec{a}$, векторы $\vec{a}$ и $\alpha \cdot \vec{a}$ коллинеарны.

3.1.3 ***Действия над векторами подчиняются следующим законам:***

1) переместительный закон сложения:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

2) сочетательный закон сложения:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$$

3*) для любого вектора* $\vec{a}$ *справедливо равенство*:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0;$$

4) сочетательный закон умножения:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$$

5) распределительные законы умножения:

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b};$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

3.1.4 Рассмотрим два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки О векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи ОА и ОВ образуют угол АОВ. Этот угол и называют углом между векторами.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то считают, что угол между ними равен нулю.

Если угол между векторами равен 90°, то векторы называются перпендикулярными.

3.1.5 Векторы называются компланарными, если при откладывании от одной точки, они будут лежать в одной плоскости.

Признак компланарности трех векторов.

Если вектор $\vec{c}$ *можно разложить по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *т.е. представить в виде*

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *где x и y некоторые числа,*

то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *компланарны.*

Теорема. ***Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты определяются единственным образом.***

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве.

Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы оси абсцисс, оси ординат, оси аппликат.

Эти векторы называются координатными векторами. Очевидно, эти векторы не компланарны, поэтому любой вектор $\vec{a}$, можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения *x, y, z* определяются единственным образом.

Коэффициенты *x, y, z* в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат и обозначаются следующим образом: $\vec{a}\,\{x, y, z\}$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$.

Пусть точка *A* имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а точка *B* – координаты (x_2, y_2, z_2). Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Итак, каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Рассмотрим *правила, позволяющие по координатам данных векторов находить координаты суммы, разности и произведения вектора на число.*

Правило1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Если $\vec{a}$ $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}$ $\{x_2, y_2, z_2\}$ – данные векторы, то сумма векторов $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$.

Правило 2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

Если $\vec{a}$ $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}$ $\{x_2, y_2, z_2\}$ – данные векторы, то вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$.

Правило 3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Если $\vec{a}$ $\{x_1, y_1, z_1\}$ - данный вектор и α – данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha x, \alpha y, \alpha z\}$.

3.1.6 ***Основные формулы.***

3.1.6.1 *Координаты середины отрезка*

Пусть точка *A* имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а точка *B* – координаты (x_2, y_2, z_2).

Если точка М является серединой отрезка АВ, то ее координаты (x, y, z) можно выразить через координаты его концов, так:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

3.1.6.2 *Вычисление длины вектора.*

Пусть известны координаты вектора $\vec{a}\{\ x,\ y,\ z\ \}$, тогда его длина вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3.1.6.3 *Расстояние между двумя точками.*

Рассмотрим две произвольные точки M_1 (x_1, y_1, z_1) и M_2 (x_2, y_2, z_2).

Расстояние между точками M_1 и M_2 вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3.1.6.4 Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\vec{b}).$$

Если известны координаты двух векторов, то скалярное произведение этих двух векторов равно сумме произведений одноименных координат.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}$ $\{x_2, y_2, z_2\}$ выражается формулой:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}$ $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}$ $\{x_2, y_2, z_2\}$ вычисляется по формуле:

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длинны на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\vec{b}).$$

Справедливы утверждения:

1) скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$);

2) скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Основные свойства скалярного произведения.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа α справедливы равенства:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон умножения**);**
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$ (распределительный закон умножения);
3. $\alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b}$ (сочетательный закон).

Основные свойства скалярного произведения
Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа α справедливы равенства:
1. $\vec{a}^{\,2} \geq 0$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$;
4. $\alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b}$.

Контрольные вопросы

1 Что называется вектором?
2 Что такое длина вектора?
3 Что называется углом между векторами?
4 Какие операции можно выполнять над векторами? Какими свойствами они обладают?
5 Как вычисляются координаты вектора?
6 Как найти сумму, разность, произведение вектора на число, если векторы заданы координатами?
7 Запишите формулы для вычисления координат середины отрезка, длины вектора, расстояния между двумя точками.
8 Что называется скалярным произведение двух векторов?
9 Как вычисляется косинус угла между векторами?

Упражнения

1 Найдите координаты вектора АВ , если:

а) А (3;-1; 2), В (2;-1; 4); б) А (2;6; -2), В (3; -1; 0); в) А $\left(1; \frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$.

2 Даны точки: А (3; -1; 5), В (2; 3; -4), С (7; 0; -1) и D (8; -4; 8). Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны. Равны ли векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$?

3 Точка М - середина отрезка АВ. Найдите координаты:
а) точки М, если А (0; 3; -4), В (-2; 2; 0);
б) точки В, если А (14; -8; 5), М (3; -2; -7);
в) точки А, если В (0; 0; 2), М (-12; 4; 15).

4 Середина отрезка АВ лежит на оси Оx. Найдите m и n, если: А(-3; m; 5), В(2; -2; n).

5 Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
а) А (-1; 0; 2), В (1;-2; 3); б) А (-35;-17; 20), В (-34; -5; 8).

6 Даны векторы $\vec{a}$ (3; -1; 1), $\vec{b}$ (-5; 1; 0) и $\vec{c}$ (-1; -2; 1). Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

7 Даны векторы $\vec{a}$ (-1; 2; 3) и $\vec{b}$ (5; x; -1). При каком значении x выполняется условие: а) $\vec{a}\vec{b} = 3$; б) $\vec{a}\vec{b} = -1$; в) $\vec{a} \perp \vec{b}$?

8 Вычислите угол между векторами: $\vec{a}$ (2; -2; 0) и $\vec{b}$ (3; 0; -3).

9 Даны точки A(1; 3; 0), B(2; 3; -1) и C(1; 2; -1). Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

10 Найдите углы, периметр и площадь треугольника, вершинами, которого являются точки:
A (1; -1; 3), B(3; -1; 1) и C(-1; 1; 3).

3.2 Лекция 6 Линии на плоскости. Уравнения прямых

3.2.1 Линии на плоскости. Уравнение линии.
3.2.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом $к$, проходящей через точку B (0, b).
3.2.3 Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
3.2.4 Уравнение прямой, проходящей через две точки.
3.2.5 Уравнение прямой в отрезках.
3.2.6 Условия параллельности и перпендикулярности 2-х прямых.
3.2.7 Пересечение 2-х прямых.

3.2.1 Уравнение линии является важнейшим понятием аналитической геометрии. Пусть мы имеем на плоскости некоторую линию (кривую). Координаты точки, лежащей на данной линии, не могут быть произвольными, они должны быть определенным образом связаны. Такая связь аналитически записывается в виде некоторого уравнения.

Определение. *Уравнением линии на плоскости Оху называется уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты х и у каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на данной линии.*

В общем виде уравнение записывается так: $F = (x,y)$ или $y = f(x)$

Пример - Составить уравнение множества точек плоскости, равноудаленных от точек A(- 4; 2) и B (- 2; - 6)

Пусть M (x; y) – произвольная точка искомой линии, тогда AM = MB.

По формуле расстояния между двумя точками имеем:

AM = $\sqrt{(x+4)^2 + \sqrt{(y-2)^2}}$

BM = $\sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2}$, откуда $\sqrt{(x+4)^2 + \sqrt{(y-2)^2}} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат, после упрощения получим

4x – 16y – 20 = 0, откуда $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Любую линию можно выразить уравнением, но не любое уравнение определяет на плоскости некоторую линию.

Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ – определяет точку (0;0), а уравнение $x^2 + y^2 + 7 = 0$ – не определяет никакого множества точек, т.к. левая часть уравнения принимает только положительные значения.

3.2.2 Рассмотрим систему координат и прямую l в этой системе.

Пусть $\ell \cap Oy = B\ (0;\ b)$, прямая ℓ образует с осью Ox угол α. (0 < α < 90°) $M \in \ell$; x и y – координаты $M(x;\ y)$, $N\ (x;\ b)$ $\Delta\ MBN$ – прямоугольный.

$tg\ \alpha = \frac{MN}{BN} = \frac{y-b}{x}$.

Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox равен угловому коэффициенту прямой

$$\kappa = tg\ \alpha \Rightarrow \kappa = \frac{y-b}{x}; \qquad y - b = \kappa x; \qquad y = \kappa x + b \qquad (1)$$

Частные случаи.

Первый. Если $b = 0$, $y = \kappa x$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат.

Если $\kappa > 0$, то $tg\ \alpha > 0 \Rightarrow$ α – острый.

Если $\kappa < 0$, то $tg\ \alpha < 0 \Rightarrow$ α – тупой.

В частности, если α = 45°, то $y = x$ – уравнение биссектрисы I и III координатных углов.

Если α = 135°, то $y = -x$ - уравнение биссектрисы II и IV координатных углов.

Второй. Если α = 0, то $tg\ \alpha = 0$, получим уравнение прямой, параллельной оси Ox $y = b$.

В частности, $y = 0$ – ось Ox.

Третий. Если α = 90°, получим прямую параллельную оси Oy.

3.2.3 Пусть прямая проходит через точку $M_1\ (x_1;\ y_1)$ и образует с осью Ox угол α ≠ 90°. Составим уравнение этой прямой. Запишем уравнение прямой

$$y = \kappa x + b \qquad (1)$$

Т.к. точка M_1 $(x_1;\ y_1)$ принадлежит прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению. Получим $y_1 = \kappa x_1 + b$. Выполним вычитание:

$$y = \kappa x + b$$

$$\begin{array}{l} y_1 = кx_1 + b \\ \hline y - y_1 = к(x - x_1) \end{array}$$

Получим уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

$$y - y_1 = к(x - x_1), \qquad (2)$$

где x_1 и y_1 – координаты точки M_1, $к = tg\ \alpha$, x, y - координаты произвольной точки.

Если $к$ – произвольное число, то это уравнение определяет пучок прямых, проходящих через точку $M_1\ (x_1;\ y_1)$, кроме прямой параллельной прямой оси Oy.

Пример - Составить уравнение прямой проходящей через точку А (3; - 2) под углом 135°.

Найти уравнение пучка прямых.

Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox т.е. $к = tg\ 135°$. Подставим в уравнение (2) координаты точки А, получим

$$y - (-2) = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 1.$$

Уравнение пучка имеет вид:

$$y + 2 = к(x - 3).$$

3.2.4 Пусть даны две точки $M_1\ (x_1;\ y_1)$ и $M_2\ (x_2;\ y_2)$

Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_1.

$$y - y_1 = к(x - x_1),$$

т.к. точка M_2, лежит на этой прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению

$$y_2 - y_1 = к(x_2 - x_1) \Rightarrow к = \frac{y_2 - y}{x_2 - x_1};$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y}{x_2 - x_1}\ (x - x_1);$$

Разделим обе части уравнения на $y_2 - y_1 \neq 0$, получим

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad - \qquad (3)$$

- уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пример - Составить уравнение прямой, проходящей через точки А (-5; 4) и В (3; - 2).

Воспользовавшись уравнением (3) получим

$$\frac{y-4}{-2-4}=\frac{x+5}{3+5}\text{, откуда } y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}.$$

3.2.5 Пусть прямая ℓ отсекает на осях координат отрезки a и b. Прямая ℓ проходит через две точки А(а; 0) и В (0; b). Подставим их координаты в уравнений прямой, проходящей через две точки.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\text{, получим}$$

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},\quad -ay=bx-ax,\quad \frac{-y}{a}=\frac{x}{a}-1;$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (4)$$

Это уравнение называется уравнением прямой в отрезках.

Пример - Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A (2; -1)*, если эта прямая отсекает от положительной полуоси *Oy* отрезок в два раза больший чем на положительной полуоси *Ox*, запишем уравнения прямой в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1$.

Т. к. прямая проходит через заданную точку, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой. Подставим координаты точки *A* в уравнение прямой в отрезках.

$$\frac{2}{a}+\frac{-1}{2a}=1,\text{ откуда } a=1,5\text{, следовательно } \frac{x}{1,5}+\frac{y}{3}=1\Rightarrow\ y=-x+3.$$

3.2.6 Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Условие параллельности.

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны.

$y=\kappa_1 x+b_1$ *и* $y=\kappa_2 x+b_2$ *– параллельны, если* $\kappa_1=\kappa_2$

Условие перпендикулярности

Если $\ell_1\perp\ell_2$, *то* $\alpha_2=\alpha_1+90°$, где α_2 и α_1 – углы, которые образуют эти прямые с осью Оx.

$$\kappa_1=tg\,\alpha_1,\ \kappa_2=tg\,\alpha_2=tg(\alpha_1+90°)=-ctg\,\alpha_1=-\frac{1}{tg\alpha_1}=-\frac{1}{k_1}.$$

$\kappa_2=-\frac{1}{k_1}$ *- условие перпендикулярности 2-х прямых.*

Примеры

1 Дана прямая $y = -\frac{2}{3}x + 4$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А (-4; 1) параллельно данной прямой.

Уравнение любой прямой, проходящей через точку *А (-4; 1)* имеет вид:

$$y - y_1 = \kappa(x - x_1) \text{ – уравнение пучка.}$$

Подставим в это уравнение координаты точки А, получим

$$y - 1 = \kappa(x + 4).$$

Эта прямая || прямой $y = -\frac{2}{3}x + 4 \Rightarrow \quad \kappa = -\frac{2}{3}$,

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 4); \qquad y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} + 1 \Rightarrow \; y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}.$$

2 Написать уравнение прямой, проходящей через точку *В (2; -4)* и перпендикулярно прямой $2x - 5y + 10 = 0$.

Решение. Уравнение любой прямой, проходящей через точку *В (2; -4)* имеет вид

$y + 4 = \kappa(x - 2)$, κ – любое действительное число

Из данного пучка прямых выберем ту, которая перпендикулярна к прямой $2x - 5y + 10 = 0$.

Откуда находим

$-5y = -2x - 10$

$\kappa_1 = \frac{2}{5} \Rightarrow \; \kappa_2 = -\frac{5}{2}$,

тогда $y + 4 = -\frac{5}{2}(x - 2) \Rightarrow \;\; 5x + 2y - 2 = 0$ – уравнение искомой прямой.

3.2.7. Пусть даны две прямые, для нахождения координат точки пересечения, нужно решить систему уравнений.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение, т.е. прямые не параллельны (пересекаются).

Координаты точки пересечения находим как решение системы.

Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений, т.е. прямые параллельны.

Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесчисленное множество решений, т.е. прямые совпадают.

Контрольные вопросы

1 Что называется уравнением линии на плоскости?
2 Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом к, проходящей через точку *B (0; b)*.
3 Запишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
4 Запишите уравнение прямой в отрезках.
5 Запишите уравнение прямой, проходящей через две точки.
6 Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.
7 Как найти точку пересечения 2-х прямых?

Упражнения

1 Построить фигуру, ограниченную линиями $x = 0$; $y = 0$
$x = 5$; $y = 3$.
Найти площадь этой фигуры.

2 Построить фигуру, ограниченную прямыми $y = \pm x$; $x = 5$.
Найти площадь этой фигуры.

3 Построить фигуру, ограниченную линиями $y = |x|$ и $y = 5$.
Найти площадь этой фигуры.

4 Вычислите длину отрезка прямой $4x + 3y - 36 = 0$, заключенного между осями координат.

5 Преобразуйте уравнение прямой $2x + 3y - 6 = 0$ в уравнение в отрезках на осях.

6 Найдите длину отрезка прямой $\frac{x}{9} + \frac{y}{-12} = 1$, заключенного между осями координат.

7 Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $A(-2; 3)$.

8 Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (2; 3) и образующую с осью абсцисс угол 45°.

9 Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; -1)$, и $B(-2; -2)$.

10 Найдите вершины треугольника, стороны которого заданы уравнениями
$4x + 3y + 20 = 0$; $6x - 7y - 16 = 0$; $x - 5y + 5 = 0$.

11 Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (- 3; 2) параллельно прямой $5x - 3y + 21 = 0$.

12 Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых
$x + y - 4 = 0$ и $x - y = 0$ параллельно прямой $x - 4y + 4 = 0$.

13 Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; -3)$ и перпендикулярной прямой $5x - 2y + 10 = 0$.

14 Найти точку пересечения двух прямых.

а) $\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 4x - 6y + 21 = 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 4x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$.

4 Элементы математического анализа

4.1 Лекция 7 Производная и ее приложения

4.1.1 Определение производной.
4.1.2 Геометрический и физический смысл производной.
4.1.3 Правила дифференцирования.
4.1.4 Формулы дифференцирования.

4.1.5 Приложения производной.

4.1.1 ***Определение.*** Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции Δy и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$.

Итак, $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Для обозначения производной часто используют символ y'.

Отмети, что $y' = f'(x)$ – это новая функция, но, естественно, связанная с функцией $y = f(x)$, определенная во всех таких точках x, в которых существует указанный выше предел. Эту функцию называют так: **производная функции $y = f(x)$**.

Для линейной функции $y = кx + m$ справедливо равенство $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = к$.

Это означает, что $y' = к$ или, подробнее,

$$(кx + m)' = к.$$

В частности,

$$(x)' = 1.$$

Для функции $y = x^2$ справедливо равенство $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.

Это означает, что $y' = 2x$ или, подробнее,

$$(x^2)' = 2x.$$

Вообще $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

4.1.2 Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если

$s(t)$ – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t:

$$v = s'(t).$$

На практике во многих отраслях науки используется обобщение полученного равенства: если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси у, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной.

Поскольку $к = tg\,\alpha$, то верно равенство

$$f'(a) = tg\,\alpha.$$

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее называют ***дифференцируемой в точке x***. Процедуру отыскания производной функции $y = f(x)$ называют ***дифференцированием функции y = f (x)***.

Если функция дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно. Функция $y = |x|$ непрерывна везде, в частности, в точке $x = 0$, но касательной к графику функции в точке (0; 0) не существует. Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке не существует производной.

4.1.3 Введем правила нахождения производных суммы, произведения, частного функции.

Правило 1. *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то их сумма имееи производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных:*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

На практике это правило формулируют короче: *производная суммы равна сумме производных. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.*

Например, $(x^2 + x^3)' = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x$.

Правило 2. *Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция*

$y = к f(x)$ имеет производную в точке x, причем

$$(к f(x))' = к f'(x).$$

На практике это правило формулируют короче: *постоянный множитель можно вынести за знак производной.*

Например,

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x;$$

Правило 3. *Если функции y = f (x) и y = g (x) имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем*

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

На практике это правило формулируют так: *производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.*

Например,

$$((2x + 3) \cdot x^2)' = (2x + 3)' \cdot x^2 + (2x + 3) \cdot (x^2)' = 2x^2 + 4x^2 + 6x = 6x^2 + 6x$$

Правило 4 Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке, причем

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Например,

$$\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (5-4x) - x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2} = \frac{2x(5-4x) - x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x - 4x^2}{(5-4x)^2}.$$

4.1.4 При решении многих практических задач часто приходится находить производные элементарных функций. Ниже приведена таблица 4.1 производных некоторых элементарных функций.

Таблица 4.1

№ п/п	Функция	Производная
1	**2**	**3**
1	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
2	$y = kx + b$	$y' = k$
3	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
4	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$y = c$	$y' = 0$
6	$y = (kx + b)^p$	$y' = p\,k(kx + b)^{p-1}$
7	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
8	$y = e^x$	$y' = e^x$

9	$y = ln\ (kx + b)$	$y' = \frac{k}{kx + b}$
10	$y = log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
11	$y = sin\ x$	$y' = cos\ x$
12	$y = cos\ x$	$y' = -sin\ x$

4.1.5 Исследование функций с помощью производных

Возрастание и убывание функций

Определение. *Функция y= f (x) называется возрастающей на множестве I, если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.*

Определение. *Функция y= f (x) называется убывающей на множестве I , если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.*

Теорема. *Если функция f имеет положительную производную в каждой точке промежутка I, то f возрастает на этом промежутке. Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке промежутка I, то f убывает на этом промежутке.*

Алгоритм отыскания промежутков возрастания (убывания) функции

1 Найдите область определения функции.
2 Запишите производную заданной функции.
3 Найдите, при каких значениях независимой переменной значения производной положительны (отрицательны).
4 Сделайте вывод о том, на каком множестве заданная функция возрастает (убывает).

Исследование функций на максимум и минимум

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума.*

Точка максимума служит границей перехода функции от возрастания к убыванию, а точка минимума – границей перехода функции от убывания к возрастанию.

Необходимо отметить, что функция может иметь либо только один максимум (например, функция $y = -x^2$) или только один минимум (например, функция $y = x^2$), либо множество максимумов и минимумов (например, $y = \sin x$), либо не иметь ни максимума, ни минимума (например, $y = \mathrm{tg}\, x$).

Точки, в которых производная функция равна нулю, называются стационарными.

Если при переходе через стационарную точку (такую, в которой производная функция равна нулю) x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с положительного на отрицательный, т.е. слева от точки x_0 значение $f'(x) > 0$, а справа от точки x_0 значение $f'(x) < 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Если $f'(x)=0$ в некоторой точке, то это значит, что угловой коэффициент касательной к графику функции в соответствующей точке равен нулю, т.е. касательная в этой точке параллельна оси абсцисс.

Рассмотрим график функции $y = g(x)$, изображенный на рисунке 4.1

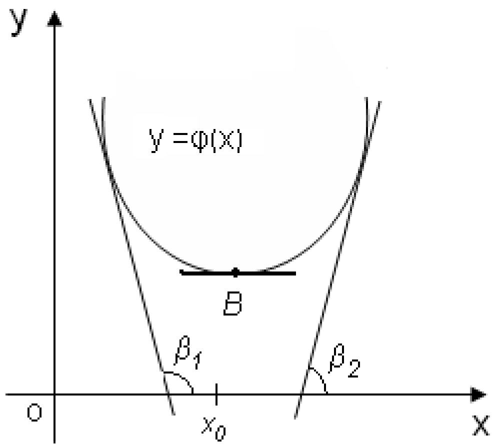

Рисунок 4.1

Здесь точка x_0 соответствует минимуму функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$. Производные в точках, лежащих правее точки B, являются положительными (углы β_2 острые, тангенсы этих углов положительны), и наоборот, производные в точках, лежащих левее точки B, являются отрицательными (углы β_1 – тупые, соответствующие тангенсы меньше нуля). Так как производная функции непрерывна, то при переходе производной от отрицательных значений к положительным она обратится в нуль при $x = x_0$.

Если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с отрицательного на положительный, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Функция может иметь экстремум в точке, в которой эта функция не имеет производной (в качестве примера можно указать функцию $y(x) = |x|$; $f'(x)$ не существует; $x = 0$ - точка минимума функции). Стационарные точки, а также такие, в которых функция не имеет производной, в совокупности называются критическими точками этой функции.

Теорема. *Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 есть точка минимума. Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума.*

Алгоритм отыскания точек максимума (минимума) функции

1 Найти производную данной функции.
2 Отыскать критические точки заданной функции.
3 «Испытать» каждую из найденных критических точек на изменение знака производной.
4 На основании теоремы сделать вывод о том, является ли критическая точка точкой максимума (минимума) или нет.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения функции на промежутке.

1 Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках.
2 Найти значения функции на концах промежутка.
3 Сравнить полученные значения. Выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример - *Н*айти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на отрезке [0;3].

Решение. Имеем: $f'(x) = 2x - 4$; $x = 2$ – критическая точка. Находим $f(2) = -1$. Вычисляем значения функции на концах промежутка: $f(0) = 3$, $f(3) = 0$. Наименьшее значения функции $f(2) = -1$ и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение $f(0) = 3$ и достигается на левом конце промежутка (см. рисунок 4.2).

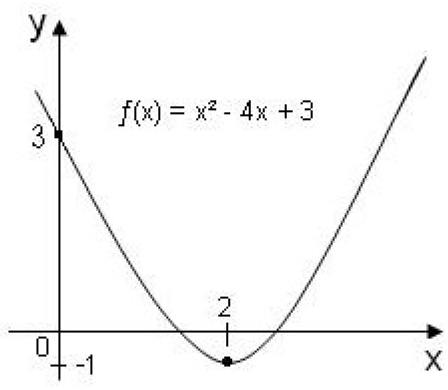

Рисунок 4.2

При построении графиков функции пользуются следующей схемой

1 Установить область определения функции.
2 Установить область значений функций.
3 Установить четность или нечетность функции, периодичность.
4 Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5 Исследовать функцию на монотонность. Найти точки максимума и минимума и значение функции в этих точках.
6 Построить график функции.

Контрольные вопросы

1 Что называется производной?
2 В чем заключается геометрический и физический смысл производной?
3 Сформулируйте правила дифференцирования.
4 Сформулируйте алгоритм исследования функции на возрастание и убывание.
5 Сформулируйте алгоритм исследования функции на максимум и минимум.
6 Сформулируйте алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции.
7 По какой схеме производится исследование функции?

Упражнения

1 Найдите производную функции у .

1) $y = 4x^3$; 2) $y = 3x^{-4}$; 3) $y = 4x^{3/4}$;

4) $y = \sqrt[3]{x^2}$; 5) $y = \sqrt[3]{8x}$; 6) $y = \dfrac{2}{x^3}$;

7) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; 8) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 9) $y = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$;

2 Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента x:.

1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - x - 1$, $x = -1$;
2) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4x - 1$, $x = -1$;
3) $f(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$, $x = 2$.
4) $f(x) = (2x^3 - 1)(x^2 + 1)$, $x = 1$;
5) $f(x) = (3 - x^2)(4 + x^2)$, $x = -2$;
6) $f(x) = (x^3 + x^2)(x^2 - 1)$, $x = -1$.

3 Вычислите производную f (x) при данном значении аргумента x:

1) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$, $x = -1$;
2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 3)^7$, $x = 1$;
3) $f(x) = (3x - 1)^4$, $x = 1$.

4 Найдите производную тригонометрической функции:

1) $y = \sin 3x$;
2) $y = \cos 2x$;

5 Вычислите производную при $x = 1$:

1) $y = x \ln x$;
2) $y = (\ln x - 1)x$;

6 Найдите промежутки возрастания и убывания функций:

1) $y = x^2 - 6x + 5$; 2) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
3) $y = -x^2 + 4x + 1$; 4) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;
5) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$; 6) $y = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 20$;

7 Исследуйте функцию на экстремум:

1) $y = x^2 - 8x + 12$; 2) $y = x^2 - 10x + 9$;
3) $y = -x^2 + 2x + 3$; 4) $y = -2x^2 + x + 1$;
5) $y = 2x^4 - x$; 6) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 8x$;
7) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$; 8) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$;
9) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$; 10) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$;

8 Найдите наибольшее и наименьшее значение функций в заданном промежутке:

1) $y = x^2 - 6x + 3$, $x \in [0;5]$;
2) $y = x^2 - 8x + 4$, $x \in [-2;2]$;
3) $y = x - \frac{1}{4}x^2$, $x \in [-2;4]$;
4) $y = x^2 - 6x + 13$, $x \in [0;6]$;
5) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, $x \in [1;3]$;
6) $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10$, $x \in [0;3]$.

9 Исследуйте функцию и постройте график.

1) $y = 2x^2 - x^2$; 2) $y = x^3 - 3x$;

3) $y = x^3 + \frac{1}{4}x^4$; 4) $y = \frac{x^2}{x-2}$.

4.2 Лекция 8 Интеграл и его приложения

4.2.1 Первообразная. Правила отыскания первообразных.
4.2.2 Неопределенный интеграл.
4.2.3 Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.
4.2.4 Приложения определенного интеграла.

4.2.1 На предыдущей лекции мы рассмотрели вопросы, связанные с нахождением производных различных функции.

Нахождение производной данной функции называется дифференцированием этой функции.

В математике приходится решать и обратную задачу: по заданной производной находить функцию. Эта операция называется интегрированием (от латинского слова integrare- восстанавливать).

Определение. *Функцию y= F(x) называют* ***первообразной для функции y=f(x)*** *на заданном промежутке X, если для всех x из X выполняется равенство* $F^{/}(x) = f(x)$.

Примеры

1 Функция $y= x^2$ является первообразной для функции $y= 2x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^2)^{/} = 2x$.

2 Функция $y= x^3$ является первообразной для функции $y= 3x^2$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^3)^{/}= 3x^2$.

3 Функция *y= sinx* является первообразной для функции y= cosx, поскольку для всех x справедливо равенство $(\sin x)^{/}= \cos x$.

Правила отыскания первообразных.

Правило 1. *Если функции y=f(x) и y=g(x) имеют на промежутке X первообразные, соответственно, y=F(x) и y=G(x), то сумма функций y= f(x) +g(x) имеет на этом промежутке первообразную y= F(x)+G(x).*

Пример - Найти первообразную для функции y= 2x+cosx.

Решение. Первообразной для функции 2x служит x^2, для cosx служит sinx. Значит, первообразной для данной функции будет функция $y=x^2+ \sin x+C$, где C-const.

Правило 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак первообразной.*

Пример - Найти первообразную для функции y=5sinx.

Решение. Первообразной для sinx служит –cosx, значит, для функции y= -5sinx первообразной будет y=- 5cosx.

Правило 3. *Если y=F(x)- первообразная для функции y=f(x), то первообразной для функции y=f(kx+m) служит функция* $y=\frac{1}{\kappa}F(kx+m)$..

Пример -Найти первообразную для *y= sin2x.*

Решение. Первообразной для *sinx* служит *–cosx,* значит, для функции y= sin2x первообразной будет функция $y=-\frac{1}{2}\cos 2x$

4.2.2 ***Теорема.*** *Если F(x)- первообразная для f(x) на некотором промежутке, то функция y= F(x)+C, где C- const, также является первообразной для f(x) на этом промежутке.*

Определение. *Множество всех первообразных для функции y=f(x) заданной на промежутке X, называют неопределенным интегралом от функции y=f(x) и обозначают* $\int f(x)dx$.

Ниже приведена таблица 4.2 основных неопределенных интегралов.

Таблица 4.2

$\int dx = x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \in N)$
$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

Правила интегрирования

Правило 1. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Правило 2. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Правило 3. *Если* $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то* $\int f(kx + m)dx = \dfrac{F(kx + m)}{k} + C.$

4.2.3 Рассмотрим фигуру, ограниченную осью *x,* прямыми *x=a, x=b* (*a*<*b*) и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке [*a;b*] функции *y=f(x).* Назовем эту фигуру криволинейной трапецией. Поставим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции.

Для решения этой задачи

1) разбивают отрезок [*a;b*] на n равных частей;
2) составляют сумму

$$S_n = f(x_0)\triangle x_0 + f(x_1)\triangle x_1 + \ldots\ldots + f(x_{n-1})\triangle x_{n-1};$$

3) находят $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Этот предел в курсе математического анализа называют определенным интегралом от функции *y=f(x)* по отрезку [*a;b*] и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)dx$

Следовательно, Sтр = $\int\limits_a^b f(x)dx$.

В математическом анализе доказано, что теорема $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Это равенство носит название формулы Ньютона-Лейбница.

Свойства определенного интеграла

Свойство 1. *Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:*

$$\int\limits_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

Свойство 2. *При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

Свойство 3. *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла:*

$$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$$

Свойство 4. *Для любого числа с Є [a;b]:* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Свойство 5. *Определенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от каждого слагаемого:* $\int_a^b (f(x) \pm \square(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \square(x)dx$

4. Определенный интеграл находит широкое применение при решении задач различного характера.

1) Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Площадь S фигуры, ограниченной прямыми x = a, x = b и графиками функций
y = f(x), y = g(x) непрерывных на отрезке [*a; b*] *и таких, что для всех x отрезка* [*a; b*] *выполняется неравенство g(x)* ¿ *f(x), вычисляется по формуле*

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \ .$$

Пример - Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5 - x$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение. Воспользовавшись формулой получим

$$S = \int_1^2 ((5 - x) - x)dx = \int_1^2 (5 - 2x)dx = (5x - x^2)|_1^2 = (5 \cdot 2 - 2^2) - (5 \cdot 1 - 1^2) = 2$$

2) Работу, производимую силой, находят по формуле:

$$A = \int_a^b F(s)ds \ ,$$

где F – сила, действующая на материальную точку, движущуюся по прямой.

3) Вычисление пути, пройденного материальной точкой производят по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \ ,$$

где $f(t)$ - скорость точки при движении ее по некоторой линии за промежуток времени $[t_1, t_2]$

4) Вычисление объемов тел.

Объем тела можно вычислить по формуле:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \; ,$$

где *S(x)*- площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной отрезку [*a;b*] .

Контрольные вопросы.

1 Что называется первообразной? Перечислите правила отыскания первообразных.
2 Что называется неопределенным интегралом?
3 Сформулируйте правила интегрирования?
4 Что называется определенным интегралом? Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
5 При решении каких задач находит применение определенный интеграл?

Упражнения.

1 Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3\,dx$;

б) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

в) $\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi} \sin x dx$;

г) $\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}} \cos x dx$

д) $\int_{\frac{-\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{2}} \cos 2x dx$

е) $\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi} 2\sin\frac{x}{3} dx$

2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y=x^2$, $y=0$, $x=4$.

б) $y=x^3+2$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

в) $y=-x^2+4x$, $y=0$.

г) $y=1-x^2$, $y=-x-1$;

д) $y=x^2-3x+2$, $y=x-1$.

Список использованных источников

1 **Дадаян, А.А.** Математика: учебник / А.А.Дадаян. – М.: ФОРУМ: МНФРА-М, 2003. – 552 с. – ISBN 5-8199-0036-7 (ФОРУМ), ISBN – 5-16-000985-X (ИНФРА-М).

2 **Богомолов, Н.В.** Математика: учеб. для ССУЗов / Н.В.Богомолов, П.И. Самойленко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2005. – 395 с. – ISBN – 5-7107-8992-5.

3 **Богомолов, Н.В.** Сборник задач по математике: учеб. пособие для ССУЗов. / Н.В. Богомолов. – 2-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2005. – 204 с. – ISBN 5-7107-9070-2.

Лицензия № ЛР020716 от 02.11.98.

Формат 60x84 1/16. Бумага писчая.
Усл.печ.листов 14,2. Тираж 100. Заказ 711.

ИПК ГОУ ОГУ
460352, г. Оренбург, ГСП, пр. Победы 13,
Государственное образовательное учреждение
«Оренбургский государственный университет»