МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Кафедра математического обеспечения информационных систем

М.Ю. НЕСТЕРЕНКО, И.В. ГОЛУБЕНКО

КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
"Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2008

УДК 519.83:33(075.8)
ББК 22.18+65я73
Н 55

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко

Нестеренко М.Ю
Н 55 Кооперативные игры: методические указания к лабораторной и самостоятельной работе студентов /М.Ю. Нестеренко, И.В. Голубенко. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. - 24 с.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы по курсу теория игр и могут быть использованы в самостоятельной работе студентов специальности 010503 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем при изучении курсов теория принятия решений и управления риском, теория риска и моделирование рисковых ситуаций, математические методы и модели в экономике.

ББК 22.18+65я73

Содержание

Введение

На протяжении всей истории человечества в области экономических взаимодействий между собой борются два мотива – стремление отдельного человека к достижению личных благ и неизбежное его стремление к объединению и сотрудничеству с другими людьми. Стремление к улучшению индивидуального “выигрыша”, связанное обычно с обменом информацией между игроками, а также определенными обязательствами, является причиной возникновения кооперативной игры.

В кооперативном варианте игры игроки могут заключать соглашения, то есть образовывать коалиции из компаньонов.

Образование коалиции формирует множество ее стратегий, что отражается на выигрыше игроков коалиции.

Целью настоящей лабораторной работы является освоение методов принятия решений на основе кооперативных игр.

1 Описание лабораторной работы №3

Лабораторная работа включает:

- постановку задачи;
- ознакомление с порядком выполнения работы в среде Mathcad на примере предложенной игровой ситуации;
- построение игровой модели и проведение расчетов для индивидуальных задач (Приложение А);
- подготовку письменного отчета;
- защиту лабораторной работы.

2 Постановка задачи

Для предложенной ситуации (Приложение А по вариантам) построить ее игровую модель и найти оптимальные коалиции и оптимальное распределение выигрыша внутри коалиции.

Для решения поставленной задачи необходимо выполнить следующие этапы:

- представить кооперативную игру в виде совокупности биматричных игр;
- построить характеристическую функцию кооперативной игры;
- проверить, является ли игра существенной;
- найти оптимальные коалиции и оптимальное распределение выигрыша внутри коалиции на основе подхода Шепли;
- найти оптимальные коалиции и оптимальное распределение выигрыша внутри коалиции на основе стратегии угроз;
- дать смысловую интерпретацию полученного решения.

3 Порядок выполнения работы

Рассмотрим задачу:

В небольшом городке есть три ночных клуба, один из них находится в центре города, второй – в южной части, а третий – в восточной. Каждый клуб вмещает 300, 450 и 500 человек соответственно. Для достижения наибольшей прибыли каждый из клубов может применить одну из трех возможных стратегий: первая стратегия - устроить танцевальное шоу, для чего потребуется заплатить танцевальной группе сумму, равную 10 тыс.руб., вторая – пригласить в клуб популярного ди-джея, что обойдется руководству клуба в 25 тыс.руб. и третья стратегия - снизить цену на входной билет на 100 руб. Среди любителей ночных клубов 480 человек предпочитают танц-шоу, 380 – ди-джея, остальные 390 не прочь сэкономить на входе. Любителей танцев в центре – 100 человек, в южном – 150, в восточном - 230; любителей послушать модную клубную музыку в центре - 90, в южном - 130, в восточном -160 человек. Немало в городе и экономных людей: в центре их 70, в южном – 180, в восточном - 140 человек. Обычно входной билет стоит 250 руб. При составлении матриц биматричной игры мы считаем, что третий (игрок) клуб находится далеко от первых двух и жители рассматриваемых районов не поедут в третий район ни при каком случае (независимо от того, какую стратегию он выбирает).

1 Представление кооперативной игры в виде совокупности биматричных игр:

Для того чтобы найти оптимальные коалиции и оптимальное распределение выигрыша внутри коалиции в кооперативной игре требуется представление этой игры в виде совокупности биматричных игр. Задаем начальные матрицы.

Число игроков в рассматриваемой игре:

n:=3

Число стратегий:

k:=3

Построим матрицы выигрышей для каждой из пар игроков.

Элементы матрицы *A12* - матрицы выигрышей игрока 1 у игрока 2, вычисляем следующим образом:

Для примера рассмотрим ситуацию, когда и первый, и второй игрок выбирают первую стратегию поведения, то есть решают устроить танцевальное шоу. Тогда любители такого мероприятия в центре останутся в своем районе, а любители подобного мероприятия в южном – в своем, так как им не будет смысла ехать так далеко.

При этом каждый элемент матрицы можно посчитать по следующей формуле:

$a_{ij}=m_{ij}*p_i-c_i$, где

p_i – стоимость входного билета,

c_i – затраты на организацию мероприятия,

m_{ij} – количество людей, которое равно числу любителей в рассматриваемом районе, если клубы устраивают одинаковые мероприятия (игроки выбирают одинаковые стратегии), или равняется сумме любителей в обоих рассматриваемых районах (районах обоих игроков), если клубы устраивают разные мероприятия (игроки выбирают разные стратегии).

Значит, в рассматриваемый в данном случае клуб в центре пойдут 100 человек из центрального района, где цена за входной билет 250 рублей, а затраты на проведение шоу обойдутся руководству клуба в 10000 рублей. Значит, элемент матрицы a_{11} будет иметь вид:

a_{11}=100*250-10000=15000

В случае, когда первый клуб решает выбрать первую стратегию – танц-шоу, а второй – вторую – пригласить популярного ди-джея, посетители распределятся следующим образом: любители танцев из центрального района, соответственно останутся в своем районе, а вот любителям танцев из второго района придется изменить своему клубу и отправиться в центр, так как только клуб южного района устраивает шоу, не приходящееся им по вкусу. Тогда элементы матрицы a_{12} будут иметь вид:

a_{12}=(100+150)*250-10000=52500

Аналогичным образом строятся остальные элементы матриц:

a_{13}=(100+150)*250-10000=52500
a_{21}=(90+130)*250-25000=30000
a_{22}=90*250-25000=-2500
a_{23}=(90+130)*250-25000=30000

В случае, когда каким-либо клубом выбрана третья стратегия, ситуация немного меняется: у клуба нет непосредственных затрат на организацию шоу, но цена на вход в данном случае снижена на 100 рублей:

a_{31}=(100+150)*150=37500
a_{32}=(100+150)*150=37500
a_{33}=70*150=10500

Получаем следующие матрицы выигрышей для каждой из пар игроков:

$$A12 := \begin{pmatrix} 15 & 52.5 & 52.5 \\ 30 & -2.5 & 30 \\ 37.5 & 37.5 & 10.5 \end{pmatrix} \qquad A13 := \begin{pmatrix} 15 & 72.5 & 72.5 \\ 37.5 & -2.5 & 37.5 \\ 31.5 & 31.5 & 10.5 \end{pmatrix}$$

$$A21 := \begin{pmatrix} 27.5 & 52.5 & 52.5 \\ 30 & 7.5 & 30 \\ 37.5 & 37.5 & 27 \end{pmatrix} \qquad A23 := \begin{pmatrix} 27.5 & 85 & 85 \\ 47.5 & 7.5 & 47.5 \\ 48 & 48 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A31 := \begin{pmatrix} 47.5 & 72.5 & 72.5 \\ 37.5 & 15 & 37.5 \\ 31.5 & 31.5 & 21 \end{pmatrix} \qquad A32 := \begin{pmatrix} 47.5 & 85 & 85 \\ 47.5 & 15 & 47.5 \\ 48 & 48 & 21 \end{pmatrix}$$

2 Характеристическая функция кооперативной игры:

Характеристическая функция кооперативной игры – это функция, ставящая в соответствие каждой коалиции максимальный уверенно получаемый выигрыш этой коалицией.

В кооперативной игре из 3-х игроков возможны следующие семь коалиций: $\{I\},\{II\},\{III\},\{I,II\},\{I,III\},\{II,III\},\{I,II,III\}$. Для построения матриц выигрышей коалиций будем исходить из принципа:

Стратегии одноэлементной коалиции стратегиями игрока – единственного участника коалиции. Например, у коалиции {I} будет 3 стратегии, у коалиции {II,III} будет 9 стратегий. Обозначим их парой (*i2,i3*).

Для автоматизации построения матриц зададим порядки перебора матрицами *order1, order2, order3*:

$$order1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$order2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$order3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицы выигрышей для всевозможных коалиций.
Найдем матрицу *A*(I / {II,III}) выигрышей коалиции, состоящей из игрока I с коалицией игроков {II,III}.

$$A1 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..k^{n-1}-1 \\ \quad\quad a_{i,j} \leftarrow A12_{i,order_{0,j}} + A13_{i,order_{1,j}} \\ a \end{array} \right.$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 30 & 87.5 & 87.5 & 67.5 & 125 & 125 & 67.5 & 125 & 125 \\ 67.5 & 27.5 & 67.5 & 35 & -5 & 35 & 67.5 & 27.5 & 67.5 \\ 69 & 69 & 48 & 69 & 69 & 48 & 42 & 42 & 21 \end{pmatrix}$$

где k^{n-1} – количество пар возможных стратегий второго и третьего игроков, или число размещений с повторениями из n-1 (число игроков) по k (стратегий у каждого игрока).

В полученной матрице A(I/{II,III}) номер строки обозначает стратегию первого игрока, а по столбцам расположены возможные пары стратегий двух других игроков (первое число соответствует в данном случае стратегии второго игрока, а второе число - стратегии третьего игрока).

$$A1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 & 31 & 32 & 33 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 87.5 & 87.5 & 67.5 & 125 & 125 & 67.5 & 125 & 125 \\ 67.5 & 27.5 & 67.5 & 35 & -5 & 35 & 67.5 & 27.5 & 67.5 \\ 69 & 69 & 48 & 69 & 69 & 48 & 42 & 42 & 21 \end{pmatrix} \end{array}$$

Аналогично находим A({II,III}/I)

$$A2 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..k^{n-1}-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..k-1 \\ \quad\quad a_{i,j} \leftarrow A21_{order_{0,i},j} + A31_{order_{1,i},j} + A23_{order_{0,i},order_{1,i}} + A32_{order_{1,i},order_{0,i}} \\ a \end{array} \right.$$

$$A2 = \begin{pmatrix} 150 & 200 & 200 \\ 197.5 & 200 & 222.5 \\ 192 & 217 & 206.5 \\ 210 & 212.5 & 235 \\ 90 & 45 & 90 \\ 157 & 134.5 & 146.5 \\ 218 & 243 & 232.5 \\ 170.5 & 148 & 160 \\ 117 & 117 & 96 \end{pmatrix}$$

В полученной матрице $A(\{II,III\}/I)$ по строкам расположены возможные пары стратегий игроков коалиции (первое число соответствует в данном случае стратегии второго игрока, а второе число - стратегии третьего игрока), а номер столбца обозначает стратегию первого игрока.

$$A2 = \begin{array}{c} \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 31 \\ 32 \\ 33 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 200 & 200 \\ 197.5 & 200 & 222.5 \\ 192 & 217 & 206.5 \\ 210 & 212.5 & 235 \\ 90 & 45 & 90 \\ 157 & 134.5 & 146.5 \\ 218 & 243 & 232.5 \\ 170.5 & 148 & 160 \\ 117 & 117 & 96 \end{pmatrix} \end{array}$$

находим A (II/{I,III})

$$A3 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..k^{n-1}-1 \\ \quad\quad a_{i,j} \leftarrow A21_{i,\,order_{0,j}} + A23_{i,\,order_{1,j}} \\ a \end{array} \right.$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 55 & 112.5 & 112.5 & 80 & 137.5 & 137.5 & 80 & 137.5 & 137.5 \\ 77.5 & 37.5 & 77.5 & 55 & 15 & 55 & 77.5 & 37.5 & 77.5 \\ 85.5 & 85.5 & 64.5 & 85.5 & 85.5 & 64.5 & 75 & 75 & 54 \end{pmatrix}$$

находим A({I,III}/II)

$$A4 := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 0..k^{n-1}-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..k-1 \\ \quad\quad a_{i,j} \leftarrow A12_{order_{0,i},j} + A32_{order_{1,i},j} + A13_{order_{0,i},order_{1,i}} + A31_{order_{1,i},order_{0,i}} \\ a \end{array}\right.$$

$$A4 = \begin{pmatrix} 125 & 200 & 200 \\ 172.5 & 177.5 & 210 \\ 167 & 204.5 & 177.5 \\ 187.5 & 192.5 & 225 \\ 90 & 25 & 90 \\ 147 & 114.5 & 120 \\ 189 & 226.5 & 199.5 \\ 154 & 121.5 & 127 \\ 117 & 117 & 63 \end{pmatrix}$$

находим A(III/{I,II})

$$A5 := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..k^{n-1}-1 \\ \quad\quad a_{i,j} \leftarrow A31_{i,order_{0,j}} + A32_{i,order_{1,j}} \\ a \end{array}\right.$$

$$A5 = \begin{pmatrix} 95 & 132.5 & 132.5 & 120 & 157.5 & 157.5 & 120 & 157.5 & 157.5 \\ 85 & 52.5 & 85 & 62.5 & 30 & 62.5 & 85 & 52.5 & 85 \\ 79.5 & 79.5 & 52.5 & 79.5 & 79.5 & 52.5 & 69 & 69 & 42 \end{pmatrix}$$

находим A({I,II}/III)

$$A6 := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 0..k^{n-1}-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..k-1 \\ \quad\quad a_{i,j} \leftarrow A13_{order_{0,i},j} + A23_{order_{1,i},j} + A12_{order_{0,i},order_{1,i}} + A21_{order_{1,i},order_{0,i}} \\ a \end{array}\right.$$

$$A6 = \begin{pmatrix} 85 & 200 & 200 \\ 145 & 162.5 & 202.5 \\ 153 & 210.5 & 189.5 \\ 147.5 & 165 & 205 \\ 90 & 10 & 90 \\ 153 & 113 & 132 \\ 149 & 206.5 & 185.5 \\ 146.5 & 106.5 & 125.5 \\ 117 & 117 & 75 \end{pmatrix}$$

находим $A(\{I,II,III\})$

$$\begin{array}{l|l} A7 := & \text{for } i \in 0..k^{n}-1 \\ & \quad a_{i,0} \leftarrow A12_{order2_{0,i},\, order2_{1,i}} + A13_{order2_{0,i},\, order2_{2,i}} + A21_{order2_{1,i},\, order2_{0,i}} \\ & \quad\quad + A23_{order2_{1,i},\, order2_{2,i}} + A32_{order2_{2,i},\, order2_{1,i}} + A31_{order2_{2,i},\, order2_{0,i}} \\ & a \end{array}$$

$A7^{T} =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
0	180	285	79.5	77.5	215	282	85.5	95.5	242	67.5	27.5	84.5	47.5	40	69.5	10.5	75.5	84.5	269	91.5	54.5	304	159	94.5	74.5	202	117

Вычислим значение характеристической функции, для этого составим дополнительные функции:

- функция *maxmin* находит максимум из минимумов по строкам.

```
maxmin(A) := | for  i ∈ 0.. rows(A) − 1
             |   | min_i ← A[i, 0]
             |   | for  j ∈ 0.. cols(A) − 1
             |   |   min_i ← A[i, j]  if  A[i, j] < min_i
             |   | m ← min_i  if  i = 0
             |   | m ← min_i  if  min_i > m  otherwise
             | m
```

- функция *minmax* находит минимум из максимумов по столбцам

```
minmax(A) := | for  j ∈ 0.. cols(A) − 1
             |    | max_j ← A[0,j]
             |    | for  i ∈ 0.. rows(A) − 1
             |    |   max_j ← A[i,j]  if  A[i,j] > max_j
             |    | m ← max_j  if  j ■ 0
             |    | m ← max_j  if  max_j < m  otherwise
             | m
```

- функция $v(A)$ проверяет существование решения в чистых стратегиях, т.е. наличие седловой точки. Если такое решение есть, то функция возвращает цену игры.

Вычислим значение характеристической функции для первой коалиции.

Применяя описанную выше функцию v к матрице выигрышей $A1$ получим, что верхняя и нижняя цены игры не совпадают и для того, чтобы вычислить цену игры требуется ее сведение к задаче линейного программирования.

v1 := v(A1) v1 = "Svodit' k ZLP"

Как известно из раздела стратегических игр, игра, задаваемая матрицей $A1$, сводится к задаче линейного программирования с ограничениями, заданными системой:

$$\begin{gathered}
30t_1+67.5t_2+69t_3\geq 1\\
87.5t_1+27.5t_2+69t_3\geq 1\\
87.5t_1+67.5t_2+48t_3\geq 1\\
67.5t_1+35t_2+69t_3\geq 1\\
125t_1-5t_2+69t_3\geq 1\\
125t_1+35t_2+48t_3\geq 1\\
67.5t_1+67.5t_2+42t_3\geq 1\\
125t_1+27.5t_2+42t_3\geq 1\\
125t_1+67.5t_2+21t_3\geq 1
\end{gathered}$$

{}{}{}{}{}{}{}{}{}

и целевой функцией f:

$$f=t_1+t_2+t_3\rightarrow \min\ .$$

Для решения задачи линейного программирования в среде MathCAD, опишем целевую функцию *f* следующим образом:

$$f1(x) := \begin{vmatrix} f \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..\,\mathrm{cols}\left(A1^T\right) - 1 \\ \quad f \leftarrow f + x_i \\ f \end{vmatrix}$$

.

Параметр функции x – вектор, элементами которого являются значения переменных t_1, t_2 и t_3. Размерность вектора x – число строк в матрице выигрышей (которое равно числу стратегий игрока) или число столбцов в транспонированной матрице выигрышей.

Далее необходимо указать начальное значение параметра, относительно которого будет решаться задача минимизации. Это значение должно попадать в допустимую область, заданную системой ограничений.

$$t1_{\mathrm{cols}\left(A1^T\right)-1} := 1$$

Система ограничений в матричном виде запишется следующим образом: $A1^T \cdot t1 \geq 1$, в таком виде и будем ее использовать для решения ЗЛП.

Для решения оптимизационных задач (к которым относится и задача линейного программирования) в программном комплексе MathCAD имеются встроенные функции *Maximize* и *Minimize* для вычисления точек максимума и минимума соответственно. Для того, чтобы задать ограничения на допустимую область значений параметров оптимизации, их нужно поместить в блок решения *Given* до вызова функций *Maximize* или *Minimize*.

Given

$$A1^T \cdot t1 \geq 1$$

$$t := \mathrm{Minimize}(f1, t1) \qquad t = \begin{pmatrix} 4.909 \times 10^{-3} \\ 5.664 \times 10^{-3} \\ 6.818 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Таким образом, получим решение *t*, зная которое найдем цену игры:

$$v1 := \frac{1}{f1(t)} \qquad v1 = 57.503$$

Подробнее о сведении игры к задаче линейного программирования в [3]. Узнать больше о решении задач оптимизации в MathCAD можно из встроенной справочной системы или из любого справочного или учебного пособия по MathCAD.

Применяя функцию *v* ко второй матрице выигрышей получим, что верхняя и нижняя цены игры совпадают и сведение к задаче линейного программирования не требуется. Функция *v* в данном случае возвращает цену игры.

$$v2 := v(A2) \qquad v2 = 218$$

Третья матрица требует построение задачи линейного программирования:

$$v3 := v(A3) \qquad v3 = \text{"Svodit' k ZLP"}$$

Для этого, как и ранее, опишем целевую функцию, укажем допустимое начальное значение параметра минимизации, запишем систему ограничений для данной задачи в матричном виде и решим задачу минимизации с помощью функции *Minimize*, указав в блоке *Given* систему ограничений в матричном виде:

$$f3(x) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..\,\mathrm{cols}\left(A3^T\right) - 1 \\ \quad f \leftarrow f + x_i \\ f \end{array} \right.$$

$$t3_{\mathrm{cols}\left(A3^T\right)-1} := 1$$

Given

$$A3^T \cdot t3 \geq 1$$

$$t := \mathrm{Minimize}(f3, t3) \qquad t = \begin{pmatrix} 2.901 \times 10^{-3} \\ 3.224 \times 10^{-3} \\ 6.908 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Далее найдем цену игры. Она будет значением характеристической функции для третьей коалиции.

$$v3 := \frac{1}{f3(t)} \qquad v3 = 76.731$$

Для оставшихся коалиций верхняя и нижняя цены игры совпадают, поэтому значения характеристической функции для каждой коалиций могут быть вычислены с помощью функции *v*:

```
v4 := v(A4)      v4 = 189

v5 := v(A5)      v5 = 95

v6 := v(A6)      v6 = 153

v7 := v(A7)      v7 = 310.5
```

На основе вычислений сделаем вывод, что наибольший выигрыш дает коалиция {I, II, III} – он равен 310500.

3 Проверка существенности игры

Кооперативные игры называются существенными, если для любых коалиций *K* и *L* выполняется неравенство:

$$v(K) + v(L) < v(K \cup L).$$

В существенной игре игрокам выгодно объединяться, так как в коалиции вследствие формирования множества стратегий выигрыш ее *k*-го игрока возрастает сравнительно с его индивидуальным выигрышем в некооперативной игре.

Проверка существенности данной кооперативной игры имеет вид:

$v(\{I\}) + v(\{II\}) < v(\{I, II\})$
$v(\{I\}) + v(\{III\}) < v(\{I, III\})$
$v(\{II\}) + v(\{II\}) < v(\{II, II\})$
$v(\{I\}) + v(\{II\}) + v(\{III\}) < v(\{I, II, III\})$

Если все неравенства справедливы, то игра существенна:

```
isEssential := | return "Game is not essential"  if  v1 + v3 ≥ v6
               | return "Game is not essential"  if  v1 + v5 ≥ v4
               | return "Game is not essential"  if  v3 + v5 ≥ v2
               | return "Game is not essential"  if  v1 + v3 + v5 ≥ v7
               | return "Game is essential"  otherwise

isEssential = "Game is essential"
```

4 Оптимальные коалиции и оптимальное распределение выигрыша внутри коалиции на основе подхода Шепли

Вектор Шепли - это распределение выигрыша между игроками в задачах теории кооперативных игр. Строится с учетом среднего вклада в выигрыш коалиции каждого игрока – участника коалиции.

Общий вид компонентов вектора Шепли имеет вид**:**

$$\sum_{\substack{i \in T \\ T \subset N}}$$

где n - количество игроков, T – любая коалиция, содержащая i-го игрока, t - количество участников коалиции, $v(T)$ - характеристическая функция игры.

Рассчитаем элементы вектора Шепли.

Первый игрок, входя в коалиции {I}, {I,II}, {I,III}, {I,II,III} увеличивает общий выигрыш этих коалиций, поэтому

$$fi1 := \left(\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}\right)\cdot(v1-0) + \left(\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\right)\cdot(v6-v3) + \left(\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\right)\cdot(v4-v5) + \left(\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}\right)\cdot(v7-v2)$$

$$fi1 = 78.379$$

Для второго и третьего игроков соответственно

$$fi2 := \left(\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}\right)\cdot(v3-0) + \left(\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\right)\cdot(v2-v5) + \left(\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\right)\cdot(v6-v1) + \left(\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}\right)\cdot(v7-v4)$$

$$fi2 = 102.493$$

$$fi3 := \left(\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}\right)\cdot(v5-0) + \left(\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\right)\cdot(v2-v3) + \left(\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\right)\cdot(v4-v1) + \left(\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}\right)\cdot(v7-v6)$$

$$fi3 = 129.628$$

Таким образом, получаем вектор

$$fi = (78.379 \quad 102.493 \quad 129.628)$$

Получаем, что выигрыш следует разделить между игроками следующим образом:
первый игрок получит 78379, второй игрок – 102493, третий – 129628.

5 Оптимальные коалиции и оптимальное распределение выигрыша внутри коалиции на основе стратегии угроз

Для начала рассмотрим двух игроков: 1 и 2. Найдем максимальную общую полезность для двух данных игроков:

$$A12 + A21 = \begin{pmatrix} 42.5 & 105 & 105 \\ 60 & 5 & 60 \\ 75 & 75 & 37.5 \end{pmatrix} \qquad k := \max(A12 + A21) \qquad k = 105$$

где k -максимальная общая полезность.

Можем рассмотреть игру $A12$-$A21$

$$A12 - A21 = \begin{pmatrix} -12.5 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -16.5 \end{pmatrix} \qquad v1 := v(A12 - A21) \qquad v1 = \text{"Svodit' k ZLP"}$$

Решая ЗЛП получим:

$v1 := 0$

$$A21 - A12 = \begin{pmatrix} 12.5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 16.5 \end{pmatrix} \qquad v2 := v(A21 - A12) \qquad v2 = \text{"Svodit' k ZLP"}$$

Решая ЗЛП получим:

$v2 := 4.156$

Рассчитаем арбитражные значения u и w, в результате чего получим

$$u := \frac{v1 + k}{2} \qquad u = 52.5 \qquad w := \frac{v2 + k}{2} \qquad w = 54.578$$

Следовательно, возможность угрозы со стороны второго игрока наиболее сильная.

Рассматривая 1 и 3 игроков, найдем максимальную общую полезность для двух данных игроков:

$$A13 + A31 = \begin{pmatrix} 62.5 & 145 & 145 \\ 75 & 12.5 & 75 \\ 63 & 63 & 31.5 \end{pmatrix} \qquad k := \max(A13 + A31) \qquad k = 145$$

Можем рассмотреть игру $A13$-$A31$

$$A13 - A31 = \begin{pmatrix} -32.5 & 0 & 0 \\ 0 & -17.5 & 0 \\ 0 & 0 & -10.5 \end{pmatrix} \qquad v1 := v(A13 - A31) \qquad v1 = \text{"Svodit' k ZLP"}$$

Решая ЗЛП получим:

$v1 := 0$

$$A31 - A13 = \begin{pmatrix} 32.5 & 0 & 0 \\ 0 & 17.5 & 0 \\ 0 & 0 & 10.5 \end{pmatrix}$$

$v2 := v(A31 - A13)$

$v2 =$ "Svodit' k ZLP"

Решая ЗЛП получим:

$v2 := 5.46$

Рассчитаем арбитражные значения u и w, в результате чего получим

$u := \frac{v1 + k}{2}$ $\quad u = 72.5$ $\quad w := \frac{v2 + k}{2}$ $\quad w = 75.23$

Следовательно, возможность угрозы со стороны второго игрока наиболее сильные.

Рассматривая 2 и 3 игроков, найдем максимальную общую полезность для двух данных игроков:

$$A23 + A32 = \begin{pmatrix} 75 & 170 & 170 \\ 95 & 22.5 & 95 \\ 96 & 96 & 48 \end{pmatrix}$$

$k := \max(A23 + A32)$

$k = 170$

Далее можем рассмотреть игру *A*23-*A*32

$$A23 - A32 = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -7.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$v1 := v(A23 - A32)$

$v1 = 0$

$$A32 - A23 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 7.5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$v2 := v(A31 - A13)$

$v2 =$ "Svodit' k ZLP'

Решая ЗЛП получим:

$v2 := 0$

Рассчитаем арбитражные значения *u* и *w*, в результате чего получим

$u := \frac{v1 + k}{2}$ $\quad u = 85$ $\quad v := \frac{v2 + k}{2}$ $\quad v = 85$

Следовательно, возможность угрозы со стороны обоих игроков равновероятны.

4 Содержание письменного отчета

1. Постановка задачи.
2. Краткое изложение теоретического материала по теме "Кооперативные игры".
3. Результаты моделирования в виде кооперативной игры.
4. Решение игры с помощью MathCad.
5. Анализ полученных результатов и выводы.

5 Вопросы к защите лабораторной работы

1. Каковы цели кооперативной игры?
2. Что такое коалиция в кооперативной игре?
3. По какой формуле считается всевозможное число коалиций?
4. Дайте определение характеристической функции кооперативной игры.
5. Перечислите и охарактеризуйте свойства характеристической функции.
6. Что означает стратегически эквивалентная игра?
7. Что такое 0 — 1 редуцированная форма кооперативной игры?
8. Какие кооперативные игры считаются существенными и несущественными?
9. Дайте определение дележа и что такое доминирование дележей в кооперативных играх?
10. Перечислите основные аксиомы Шепли.

Список использованных источников

1 Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: учеб. пособие для вузов / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев, Т.П. Барановская; под ред. Б.А. Лагоши.-2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2003. - 224 с.

2 Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций: учеб. пособие / И.Д. Протасов. - М.: Гелиос АРВ, 2003. – 368 с.

3 Крушевский А.В. Теория игр. – Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1997. - 216 с.

4 Г. Оуэн. Теория игр: перевод с английского И. Н. Врублевской, Г. Н. Дюбина и А. Н. Ляпунова; под редакцией А. А. Корбута с вступительной статьей Н. Н. Воробьева. – М.: Издательство «Мир», 1971. – 468 с.

Приложение А
(обязательное)

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

280 год, ведется война против Сарумяна, войско Эльфов находится вблизи Мордора и ждет подкрепления Хоббитов и Гномов, которые спешат им на помощь.

Численность войска эльфов – 10 тыс., хоббитов – 7 тыс, гномов – 8 тыс.

У каждого войска есть 3 стратегии: отправиться за помощью, начать войну или оккупировать крепость. При боевых действиях на обмундирование (постоянные издержки) войско эльфов потратит 100 тысяч золотых и 3 золотых на боевые припасы из расчета на каждого воина (переменные издержки), На обмундирование хоббитов уйдет 61 тысяча золотых и на боевые припасы – 4, для гномов соответственно понадобиться 76 тысяч и 2 золотых.

При оккупировании предполагается, что боевые припасы не нужны. Если же войско выберет идти к Гендольфу, то затраты на боеприпасы уменьшаются в 2 раза (для каждого войска).

Известно, что каждый участник битвы может принести доход в размере 14 золотых, при оккупировании доход составляет 10 золотых и если войско решит отправиться к Гендольфу, то прибыль составит 12 золотых.

Определить, как действовать каждому войску, чтобы прибыль была максимальной.

Задача 2

Сеть ресторанов в новогоднюю ночь планирует новогоднюю шоу-программу. Вместимость первого ресторана – 50 человек, второго 60, третьего – 70.

Есть 3 программы:

«Здравствуй, Новый год!»

«В гостях у сказки»

«Дед Мороз и Снегурочка».

Постоянные издержки (новогодние костюмы) первой программы составляют – 2 тысяч, второй – 3 тысяч и третей – 2,5 тысячи.

Переменные издержки (призы, подарки) соответственно 20 рублей, 10 рублей и 15 рублей. Прибыль с первой программы 100 рублей, со второй 200 и с третьей 150 рублей.

Определить какая кооперация будет наиболее выгодна для игроков.

Задача 3

В городе N есть три спортивных клуба. Каждый из клубов на 18:00 вечера планирует проводить занятия либо по шейпингу, либо по аэробике. Стоимость абонемента одинакова – 1500. Вместимость групп в клубах 50, 60, 40 человек соответственно. Вместо желающих заниматься шейпингом 60 человек, аэробикой – 80 человек. Если клуб проводит занятия по шейпингу, то траты на необходимое оборудование - 15400, если по аэробике- 12000.

Задача 4

3 крупных компании предложили разработать проект, для реализации которого необходимо как минимум 50 % ресурсов, предоставляемых этими компаниями. Первая компания готова предоставить 25 % ресурсов, вторая 27 %, третья компания 32 %. Известно также, что первая компания может продать перекупщикам свои 23% за 10 тыс. руб., вторая за 13 тыс.руб, третья – за 20 тыс. Если же они скооперируются, то тогда прибыль от проекта может составить {1,2} – 30 тыс.руб.,{1,3} – 35 тыс.руб.,{2,3} – 37 тыс.руб.,{1,2,3} - 40 тыс.руб. Как лучше всего объединиться компаниями для достижения наибольшей прибыли.

Задача 5

В далеком-далеком северном городе N было три магазина, которые занимались продажей бананов. Цена за 1 кг бананов одинакова – 100.

Постоянные затраты (плата за аренду, затраты на зарплату продавцам и пр.) первого магазина составляют 2000, второго – 2500, а третьего – 3600.

Переменные затраты (упаковка, фасовка бананов и пр.) на 1 кг бананов первого магазина составляют 25, второго – 10, третьего – 15.

В городе живет 600 человек, из них 300 – в центре, 100 – на окраине, а 200 – между центром и окраиной города N. Те люди, что живут в центре, ходят в магазины, расположенные в центре, люди с окраины покупают бананы в магазинах окраины, а люди, живущие между центром и окраиной, – в соответствующих «промежуточных» магазинах. Если же несколько магазинов расположены одновременно в центре (на окраине, в «промежуточной» части города N), то им приходится «делить» покупателей между собой поровну. Именно в выборе расположения (в выборе одной из возможных комбинаций расположения) магазинов и заключается кооперация.

Нужно определить, какая кооперация будет наиболее выгодна для игроков (т.е. магазинов).

Задача 6

В некотором городе существуют три кинотеатра, вмещающих 200, 300 и 250 человек соответственно, которые в выходные показывают какие-нибудь премьеры. На выбор у каждого из них есть три стратегии: потратить 95 тыс. на закупку лицензионной версии какого-нибудь захватывающего боевика с хорошими спецэффектами или потратить 85 тыс. на закупку лицензионной версии какой-нибудь комедии, чтобы народ весело провел время или потратить 55 тыс. на закупку лицензионной версии какого-нибудь фильма ужасов. Так как премьеры показывают только в выходные, то число билетов ограничено. В городе проживают 300 счастливчиков, которые попадут на показ боевика, 300 счастливчиков, которые попадут на показ комедии, 300 счастливчиков, которые попадут на показ фильма ужасов. С одного посетителя кинотеатр получает 1,5 тыс. Все кинотеатры проводят показ фильмов в одно время, поэтому, если два кинотеатра проводят показ одного и того же фильма, то половина людей идет в один кинотеатр, а другая – во второй кинотеатр.

Задача 7

В некотором городе N есть три туристических агентства, которые продают путевки. Количество путевок ограничено 200, 300 и 100 путевок соответственно. В путевку может входить только одна из услуг: экскурсии по городу (затраты 60 ед.), абонемент на водные лыжи (затраты 70 ед.). Стоимость путевки составляет 2 ед. Желающих пойти на экскурсию по городу составляет 300 человек. Все путевки продаются на период с 1-20 июля и 2-20 июля.

Задача 8

В районе есть три тира, вмещающих a1, a2 и a3 человек соответственно. У каждого тира имеется по три стратегии: купить пульки для винтовки и потратить b1 р., купить пульки для пистолета и потратить b2 р. или купить стрелы для лука и при этом потратить b3 р. В районе c1 любителей винтовок, c2 любителей пистолетов и c3 любителей луков. Если два тира предлагают одновременно одинаковые типы оружия, половина людей идет в один тир, другая же половина в другой тир. Получить матрицы выигрышей для каждого из игроков.

Вариант	a1	a2	a3	b1	b2	b3	c1	c2	c3
1	20	17	23	60	40	30	20	25	15
2	45	30	25	80	50	65	35	20	25
3	34	23	14	50	28	70	24	14	33
4	20	15	36	82	73	36	11	30	30
5	10	15	34	83	56	66	19	25	15
6	25	39	15	73	86	35	29	20	30
7	16	27	27	85	75	83	28	25	17
8	27	18	39	75	65	73	19	38	27
9	26	38	38	80	90	55	28	44	30
10	36	13	26	30	89	60	33	29	19
11	18	41	26	49	87	90	27	33	25
12	28	35	13	47	37	88	33	16	27
13	27	13	11	56	76	54	11	29	11
14	18	25	10	99	56	64	11	17	25
15	26	12	24	30	45	80	22	14	26

Задача 9

В некотором городе существуют три концертных зала, вмещающих 100, 150 и 200 человек соответственно, которые по воскресеньям дают концерты инструментальной музыки. На выбор у каждого из них есть три стратегии: потратить 80 тыс. на закупку скрипок и дать скрипичный концерт, потратить 70 тыс. на закупку флейт и дать флейтовый концерт или же потратить 60 тыс. на закупку медных духовых и дать концерт с их участием. В городе живут 300 любителей скрипок, 200 любителей флейт и 100 любителей медных духовых. С одного посетителя зал получает 2 тыс. Все концерты даются одновременно, поэтому, если несколько залов дают концерты одного и того же типа, люди поровну делятся между всеми залами.

Концертные залы могут попробовать договориться между собой по поводу времени проведения концертов, так что люди получат возможность посещать несколько концертов по воскресеньям, а сами залы – получать большую прибыль в связи с дачей двух концертов разных типов подряд.

Задача 10

Рассмотрим работу трех видов транспорта: государственные автобусы, пазики, газели.

Производственная функция:

$P(V) = T + C*V$,

где

T – постоянные затраты

C – переменные затраты

V – объем (количество пассажиров)

$P_1(V) = 1560 + 3V$

$P_2(V) = 860 + 2V$

$P_3(V) = 300 + V$

Функция потребления:

$V(P) = S - k*P$

$V_1 = 200 - 9P + 3P_2 + 7P_3$

$V_2 = 100 - 2P + 17P_1 + 11P_3$

$V_3 = 50 - P + 4P_1 + 3P_2$

Элементы матриц формируются с помощью формулы:

$D = \text{Tarif}*V - P(V)$

Определить, какая кооперация наиболее выгодна.