МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

Т.М. ОТРЫВАНКИНА

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Часть 1

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2007

УДК 519.1(076.1)
ББК 22.176я7
О86

Рецензент
доктор физико-математических наук, профессор В.А. Молчанов

Отрыванкина Т.М.

О86 **Дискретная математика: сборник заданий для практических занятий. Часть 1/ Т.М. Отрыванкина. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. – 64 с.**

Сборник содержит задачи по различным разделам дискретной математики. В первой части представлены разделы: «Элементы теории множеств», «Элементы комбинаторики», «Элементы теории графов». К некоторым задачам предлагаются решения, указания или ответы. Сборник предназначен для использования в организации практических занятий по дискретной математике и для самостоятельной работы студентов в ходе освоения дисциплины.

В разработку включены варианты типовых заданий для проверки знаний студентов на самостоятельных или контрольных работах.

Сборник ориентирован на содержание государственных стандартов и рабочих программ по дискретной математике специальностей 010501 Прикладная математика и информатика, 010503 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 050202 Информатика, 230201 Информационные системы и технологии.

Î 1602120000

ББК 22.176я7

Содержание

Введение

Цель написания данного учебно-методического руководства – предоставить преподавателю задачный материал для проведения практических занятий по дискретной математике и помочь студентам овладеть навыками решения подобных задач.

Дискретная математика многогранна и включает в себя такие разделы, как теория (дискретных) множеств, комбинаторика, теория графов, теория булевых функций, теория кодирования и другие. Как правило, эту дисциплину изучают студенты, имеющие профессиональную направленность в сферу информационных технологий. Им, в первую очередь, и адресована эта методическая разработка, которая позволяет овладеть в ходе решения задач базовыми понятиями различных разделов дискретной математики и сформировать фундамент для более глубокого ее изучения.

Содержание сборника соответствует разработанным в соответствии с государственными стандартами рабочим программам по дискретной математике для математических и инженерных специальностей. В частности, к ним относятся специальности: 010501 Прикладная математика и информатика, 010503 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 050202 Информатика, 230201 Информационные системы и технологии.

Сборник разбит на несколько частей. Первая из них, составляющая данную работу, включает задачи по разделам «Элементы теории множеств», «Элементы комбинаторики», «Элементы теории графов». Все эти разделы обязательно изучаются студентами указанных выше специальностей. Согласно рабочим программам в содержание разделов входят вопросы:

1 Элементы теории множеств

Множества, операции над ними. Свойства операций. Булеан, его мощность. Булева алгебра множеств.

n-местные отношения. Бинарные отношения. Область определения, область значений, график бинарного отношения. Операции над бинарными отношениями, их свойства. Свойства бинарных отношений (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Матрица бинарного отношения. Установление свойств бинарного отношения с помощью операций над его матрицей.

Функции. Виды функций (инъекция, сюръекция, биекция). Теорема о композиции инъекций, сюръекций, биекций. Последовательность. n-местная операция. Принцип Дирихле.

Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Фактор-множество.

Отношение порядка (предпорядок, частичный порядок, линейный порядок, полный порядок). Частично (линейно, вполне) упорядоченные множества. Диаграммы Хассе.

2 Элементы комбинаторики

Правила суммы и произведения. Выборки, размещения с повторениями и без повторений, сочетания с повторениями и без повторений, перестановки. Формулы подсчета числа комбинаторных схем.

Разбиения, перестановки с повторениями. Формулы подсчета числа разбиений указанного вида.
Биномиальные коэффициенты, их свойства, биномиальная теорема, полиномиальная теорема, формула включений и исключений.

3 Элементы теории графов
Основные понятия теории графов, способы представления графов: ориентированные и неориентированные графы, матрицы смежности и инцидентности. Операции над графами.
Маршруты, пути, цепи, циклы, связность. Матрицы достижимости и связности. Алгоритм выделения компонент связности графа.
Нахождение кратчайшего пути в графе. Алгоритм фронта волны. Нагруженные графы. Алгоритмы Форда-Беллмана, Дейкстры.
Эйлеровы и гамильтоновы графы. Теорема Эйлера. Достаточные условия «гамильтоновости» графа. Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ.
Деревья и их свойства. Остовное дерево. Построение остовного дерева. Построение минимального остовного дерева в нагруженном графе.
Потоки в сетях: теорема Форда-Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе, алгоритм нахождения максимального потока.

Сборник содержит задачи, связанные с перечисленными вопросами, решения некоторых из них, указания к решениям, ответы. В разработке приводятся примеры математических диктантов и варианты типовых заданий, которые можно предлагать студентам на самостоятельных и контрольных работах.

1 Элементы теории множеств

1.1 Множества и операции над ними

1Равны ли множества $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ и $\{1, 2, 3\}$?

2Равны ли множества $\{\varnothing\}$ и $\varnothing$?

3Укажите все подмножества множества $\{a, b\}$, где $a\neq b$.

4$C=\{4, 8, 9\}$. Найти булеан $\mathcal{P}(C)$.

5Перечислите элементы следующих множеств:

а) $A=\{x|\ x\in \mathbf{Z}$ и $10\leq x\leq 17\}$; б) $B=\{x|\ x\in \mathbf{Z}$ и $x^2<24\}$; в) $C=\{x|\ x\in \mathbf{Z}$ и $6x^2+x-1=0\}$;
г) $D=\{x|\ x\in \mathbf{R}$ и $6x^2+x-1=0\}$.

6Задайте с помощью характеристического свойства множества:

а) $A=\{2, 5, 8, 11, ...\}$; б) $B=\{1, 1/3, 1/7, 1/15, \dots\}$.

7Найдите: а) $\{a, b, c\}\cap\{a, c, d, f\}$; б) $\{a, b, c\}\cup\{b, c\}$; в) $\{a, b, c, d\}\setminus\{a, f, g, k\}$.

8$X_1=\{x \mid x^2-1\leq 0\}$, $X_2=\{x \mid |x|<1\}$. Изобразите на числовой прямой объединение, пересечение и разность этих множеств.

9В качестве универсального множества зафиксируем U={м,н,у,ф,з,ю,ъ,я,ь,ы}. Пусть A={н,ю,ъ,м}, B={я,ь,н,ы,ф}, C={ф,з,ю,ы}. Найдите элементы следующих множеств:

а) $B\cap C$; б) $A\cap B\cap C$; в) $(A\cup B)\cap(A\cap C)$; г) $A\cup C$; д) $(A\cup B)'$; е) $B\setminus C$; ж) $B\Delta C$.

10Пусть M – множество всех параллелограммов плоскости, A_1 – множество всех квадратов, A_2 – множество всех прямоугольников, A_3 – множество всех ромбов. Найдите $A_i\cap A_j$, $A_i\cup A_j$, $A_i\cap A_j'$, $i, j=1, 2, 3$, $i\neq j$.

11Установите, истинны или ложны утверждения:

а) $\varnothing=\{\varnothing\}$;
б) $\varnothing\subseteq\varnothing$;
в) $\varnothing\subset\varnothing$;
г) $\varnothing\subseteq\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;
д) $\varnothing\in\varnothing$;
е) $\varnothing\in \{\varnothing\}$;
ж) $\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;
з) $\{x|\ x \in \mathbf{Z}$ и $x^3+x-1=0\}\subseteq\{-1,1,2\}$.

12Докажите тождества:

а) $(A\cap B)\cup(A\cap B')=(A\cup B) \cap (A\cup B')=A$;
б) $(A'\cup B) \cap A=A\cap B$;
в) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$;
г) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$;
д) $A\cup B=(A\cap B) \cup (A\cap B') \cup (A'\cap B)$;
е) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$;
ж) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$;
з) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

13Упростите выражения:
а) $((A'\cup B')\cap(A'\cup((A\setminus B)\cap(B\setminus A))))'$;
б) $(B\cap(A\cap C)')'\cup((B'\cup(A\cup C)')'\cap(C\cup(A\cap B)))$;
в) $(X_1\cup X_2)\setminus X_1$;
г) $(X_1\cap X_2)\setminus X_1$;
д) $(A\cap B')'\cup B$;
е) $(A'\cap(B\cup C)')'$;
ж) $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B'\cup C)\cap(A\cup C)'$;
з) $A\Delta A\Delta A$.
14Существуют ли такие множества A, B, C, что $A\cap B \neq \varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $(A\cap B)\setminus C=\varnothing$?
15Определим операцию $*$ по формуле $A*B=(A\cap B)'$. С помощью законов алгебры множеств докажите тождества:
а) $A*A=A'$;
б) $(A*A)*(B*B)=A\cup B$:
в) $(A*B)*(A*B)=A\cap B$.
16Пусть $A=\{a, b, c\}$. Рассмотрим булеан $\mathcal{P}(A)$ и множество $B=\{0, 1\}^3=\{(x, y, z)| x, y, z\in \{0, 1\}\}$. Установите соответствие между множествами $\mathcal{P}(A)$ и B.
17Какие подмножества множества $U=\{1,2,3,4\}$ представлены последовательностями 1001, 0110, 1101, 0010?
18Пусть $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ – универсальное множество. Выпишите характеристические векторы подмножеств $A=\{1,2,4,5\}$ и $B=\{3,5\}$. Найдите характеристические векторы множеств $A\cup B'$ и $A\Delta B$, после чего перечислите их элементы.
19Обоснуйте справедливость формулы $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.
20Выведите формулу для подсчета $|A\cup B\cup C|$.
21Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Если 16 из них слушают еще курс бухгалтерии, 37 – курс коммерческой деятельности и 5 изучают обе эти дисциплины, то сколько студентов вообще не посещают упомянутых дополнительных занятий?
22Известно, что из 100 студентов живописью увлекается 28, спортом – 42, музыкой – 30, живописью и спортом – 10, живописью и музыкой – 8, спортом и музыкой – 5, спортом, живописью и музыкой – 3. Определить: а) сколько студентов увлекается только спортом; б) сколько студентов ничем не увлекается.
23Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. В этом году 25 из них предпочли изучать бухгалтерию, 27 выбрали бизнес, а 12 решили заниматься туризмом. Кроме того, было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, 5 изучали бухгалтерию и туризм, а 3 – туризм и бизнес. Известно, что никто из студентов не отважился посещать сразу три дополнительных курса. Сколько студентов посещали по крайней мере один дополнительный курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?
24Пусть A, B и C – произвольные множества. Докажите, что:

а) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;
б) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

1.2 Бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Отношение порядка

1 Докажите, что число бинарных отношений на n-элементном множестве равно $2^{n\times n}$.

2 Пусть A=[0, 1], B – квадрат с вершинами в точках (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). Найдите геометрическую интерпретацию $A\times B$.

3 Пусть [0, 1], [0, 2] – отрезки числовой прямой. Дайте геометрическую интерпретацию множеств $[0, 1]\times[0, 2]$, $[0, 1]^2$, $[0, 2]^3$.

4 Даны бинарные отношения $\rho=\{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 4)\}$ и $\sigma=\{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\}$. Найдите $\rho\circ\sigma$.

5 Дано $\rho=\{(x, y)|\ x, y \in \mathbf{N}$ и $x|y\}$. Найдите D_ρ, E_ρ, ρ^{-1}, $\rho\circ\rho$, $\rho^{-1}\circ\rho$, $\rho\circ\rho^{-1}$.

6 Пусть $\rho\subseteq M^2$, $M=\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $\rho=\{(a, b)|\ a, b \in M, (a+1)|(a+b)\}$. Задайте ρ списком.

7 Выпишите упорядоченные пары, принадлежащие $P\subseteq A\times B$, если $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{2,4,6\}$, $P=\{(x,y) \mid x+y=9\}$.

8 Бинарное отношение между множествами $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{a,b,c,d\}$ задано матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Выпишите элементы этого отношения и постройте его изображение.

9 Дано $R\subseteq\{1,2,3,4\}^2$, определенное условием: $(x,y)\in R \Leftrightarrow x+2y$ – нечетное число. Задайте R множеством упорядоченных пар, графически, матрицей.

10 Пусть R – отношение «... родитель...», а S – отношение «... брат...» на множестве всех людей. Дайте краткое словесное описание отношениям: R^{-1}, S^{-1}, $R\circ S$, $S^{-1}\circ R^{-1}$, $R\circ R$.

11 Какими свойствами обладают отношения параллельности и перпендикулярности на множестве прямых плоскости?

12 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $\rho_1 \subseteq A\times B, \rho_2 \subseteq B^2$. Изобразите ρ_1, ρ_2 графически. Найдите матрицы $[\rho_1]$, $[\rho_2]$. Проверьте с помощью матрицы $[\rho_2]$, является ли отношение ρ_2 рефлексивным, симметричным, транзитивным, антисимметричным.

а) $\rho_1=\{(a,1), (a,2), (b,3), (c,2), (c,3), (c,4)\}$, $\rho_2=\{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4)\}$;

б) $\rho_1=\{(a,2), (a,3), (a,4), (b,3), (c,1), (c,4)\}$, $\rho_2=\{(1,1), (1,4), (2,3), (2,2), (2,3), (3,4), (2,4), (4,2)\}$;

в) $\rho_1=\{(a,3), (b,2), (b,1), (b,4), (c,2), (c,1), (c,4)\}$, $\rho_2=\{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,2), (3,4), (4,4)\}$;

г) $\rho_1=\{(a,1), (a,2), (b,3), (c,2), (c,3), (c,4)\}$, $\rho_2=\{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4)\}$.

13 Найдите область определения, область значений отношения P. Является ли отношение P рефлексивным, симметричным, транзитивным, антисимметричным?

а) $P\subseteq \mathbf{Z}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow 2x=3y$; б) $P\subseteq \mathbf{R}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow x^2\geq y$;

в) $P\subseteq \mathbf{R}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow x^2+y^2=4$; г) $P\subseteq \mathbf{Z}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow y\geq x-2$;

д) $P\subseteq \mathbf{Z}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow x=-y$; е) $P\subseteq \mathbf{Z}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow x-y$ четно;

ж) $P\subseteq \mathbf{R}^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow x^2+y^2<25$; з) $P\subseteq \mathbf{N}^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow (x+y)\vdots 3$;

и) $P\subseteq \mathbf{Z}^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow (x-y)\vdots 4$; к) $P\subseteq \mathbf{N}^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow (x^2+y)\vdots 2$;

л) $P\subseteq \mathbf{Z}^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow (x+y)^2\vdots 4$.

14 На множестве $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ рассматривается отношение ρ:

$$(x, y)\ \rho\ (u, v) \Leftrightarrow x+v=y+u.$$

Докажите, что ρ – отношение эквивалентности на $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

15 Приведите пример отношения, которое:

а) не рефлексивно, но симметрично и транзитивно;

б) не симметрично, но рефлексивно и транзитивно;

в) не транзитивно, но рефлексивно и симметрично.

16 Какие из следующих отношений являются однозначными, какие – обратно-однозначными:

а) $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow y$ есть отец x;

б) $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow x$ есть отец y;

в) $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow x=y^2$;

г) $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow y=x^2$.

17 Какие из приведенных ниже отношений на $\mathbf{Z}$ являются а) рефлексивными, б) симметричными, в) транзитивными?

а) $x+y$ – нечетное число; б) $x+y$ – четное число;

в) xy – нечетное число; г) $x+xy$ – четное число.

18 Дано $A=\{x \mid x\in \mathbf{Z}$ и $1\leq x\leq 12\}$, $R\subseteq A^2$, $S\subseteq A^2$. Известно, что $R=\{(x,y) \mid xy=9\}$, $S=\{(x,y) \mid 2x=3y\}$. Найдите транзитивные замыкания отношений R и S.

19 Опишите на словах транзитивные замыкания отношений:

а) «x на год старше, чем y» на множестве людей;

б) $x=2y$ на множестве **N** натуральных чисел;

в) $x<y$ на множестве **R** вещественных чисел;

г) «x является дочерью y» на множестве женщин.

20 Отношение R на множестве **Z** определяется так: $xRy \Leftrightarrow 3 \mid (x^2-y^2)$.

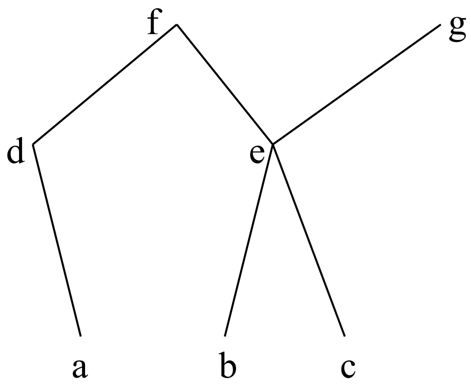
Покажите, что R является отношением эквивалентности, и опишите классы эквивалентности.

21 Постройте диаграмму Хассе для каждого из следующих частично упорядоченных множеств:

а) множество $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ с отношением «x делит y»;

б) множество всех подмножеств в $\{1,2,3\}$ с отношением «X – подмножество Y».

22 Диаграмма Хассе частичного порядка на некотором множестве имеет вид:



Перечислите элементы этого отношения, найдите минимальный и максимальный элементы.

23 Упорядочите лексикографически слова «бутылка», «банджо», «бисквит», «бивень», «банан».

24 Постройте линейный порядок на множестве комплексных чисел.

25 Можно ли построить частично упорядоченное множество с единственным минимальным элементом, но без наименьшего?

1.3 Функции. Принцип Дирихле

1 Пусть A={0, 2, 4, 6} и B={1, 3, 5, 7}. Какие из нижеперечисленных отношений между множествами A и B являются функциями, определенными на A со значениями в B:
а) {(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)}; б) {(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)};
в) {(2, 1), (4, 5), (6, 3)}; г) {(6,1), (0, 3), (4,1), (0, 7), (2, 5)}?
Какие из найденных функций инъективны, а какие сюръективны?

2 Дано f: A→A, действующее по правилу $x \mapsto x^2$. Найти образ отображения и выяснить, является ли оно инъекцией, если в качестве A выступает а) **N**; б) **Z**; в) **Q**; г) **R**; д) **C**.

3 Дано f: A→A, действующее по правилу $x \mapsto x^3$. Найти образ отображения и выяснить, является ли оно инъекцией, если в качестве A выступает а) **N**; б) **Z**; в) **Q**; г) **R**; д) **C**.

4 Являются ли инъективными, сюръективными или биективными функции $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$: а) $f_1(x)=\sqrt{x}$; б) $f_2(x)=\sin x$; в) $f_3(x)=x^2$; г) $f_4(x)=\ln x$; д) $f_5(x)=a^x$?

5 Доказать, что имеется 256 тернарных операций f на множестве {1,2}.

6 Является ли функция e^x взаимно однозначной на **R** и на **C**? Найдите в каждом случае ее образ.

7 Про каждую из следующих функций, чьи области определения и значений совпадают с **Z**, скажите, являются ли они инъекциями, сюръекциями и биекциями:
а) f(n)=2n+1;
б) $g(n)=\begin{cases} \frac{n}{2}, \text{åñëè n ÷åòíî}, \\ 2n, \text{åñëè n íå÷åòíî}; \end{cases}$

в) $h(n)=\begin{cases} n+1, \text{åñëè n ÷åòíî}, \\ n-1, \text{åñëè n íå÷åòíî}. \end{cases}$

8 Изобразите графики функций:

а) f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=x^2+1$;

б) g: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $g(x)=2^x$;

в) h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h(x)=5x-1$;

г) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x-3, \text{åñëè x} \geq 1, \\ x+1, \text{åñëè x} < 1; \end{cases}$

д) k: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $k(x)=x+|x|$;

е) g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=2x-|x|$.

Назовите их множества значений и скажите, какие из них инъективны, а какие – сюръективны.

9 Функция f: A$\to$B задана формулой $f(x)=1+2/x$, где $A=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, а $B=\mathbf{R}\setminus\{1\}$. Покажите, что f биективна, и найдите обратную к ней функцию.

10 Функции f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ заданы условием:

$f(x)=x^2$, $g(x)=\begin{cases} 2x+1, \text{åñëè x} \geq 0, \\ -x, \text{åñëè x} < 0. \end{cases}$

Выразите формулами композиции $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$.

11 Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы какое-то число на ней выпало по крайней мере дважды?

12 Известно, что в одном селе проживает 79 семей, в каждой из которых по два ребенка.

а) Покажите, что найдется по крайней мере две семьи, в которых совпадают месяцы рождения обоих детей, т.е. если в первой семье дети родились в январе и мае, то и во второй – в январе и мае.

б) Докажите, что по крайней мере у шестерых детей имена начинаются с одной и той же буквы.

13 Пусть S={1, 2, 3, …, 20}.

а) Какое наименьшее количество четных чисел необходимо взять из множества S, чтобы по крайней мере два из них в сумме давали 22?

б) Покажите, что если взять 11 элементов из множества S, то по крайней мере одно из выбранных чисел будет делить какое-то из оставшихся в выборке.

2 Элементы комбинаторики

2.1 Правила суммы и произведения. Основные комбинаторные схемы

1В розыгрыше первенства страны по футболу принимает участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

2 Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:
а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза;
б) цифры могут повторяться;
в) числа должны быть нечетными (цифры могут повторяться)?

3Сколькими способами 7 человек могут разместиться в очереди в кассу?

4 Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из шести символов. Первые два из них – строчные буквы латинского алфавита, а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и сточными буквами. Сколько можно придумать различных паролей?

5Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на пять?

6 Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения и забыл номер. Помнит только, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

7 В турнире принимали участие n шахматистов. Каждые два шахматиста встретились 1 раз. Сколько партий было сыграно в турнире?

8 Рассмотрим прямоугольную сетку размера $m \times n$. Каково число различных кратчайших путей на этой сетке, ведущих из левого нижнего угла (точки (0,0)) в правый верхний угол (точку (m, n))?

9 Сколькими способами можно разместить четырех учащихся на 25 местах?

10Жюри из 5 женщин и 7 мужчин должно быть выбрано из списка в 8 женщин и 11 мужчин. Сколько можно выбрать различных жюри?

11Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколько существует способов выделения одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

12Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если: а) все путевки различны; б) все путевки одинаковы?

13Сколькими способами из натуральных чисел от 1 до 20 можно выбрать два различных числа так, чтобы их сумма была четной?

14Сколькими способами пятеро юношей могут выбрать себе партнершу для танца из восьми девушек?

15Ресторан в своем меню предлагает пять различных главных блюд. Каждый из компании в шесть человек заказывает свое главное блюдо. Сколько разных заказов может получить официант?

16Цветочница продает розы четырех разных сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз?

17Сколькими способами из натуральных чисел от 1 до 30 можно выбрать три различных числа так, чтобы их сумма была четной?

18 Сколько существует трехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, и таких, чтобы в каждое число входила цифра 1 при условии, что каждую цифру в числе можно использовать не более одного раза?

19 Сколькими способами колоду из 36 игральных карт можно сдать четырем игрокам?

20 Сколькими способами можно посадить рядом 3 англичан, 3 французов и 3 турок так, чтобы никакие три соотечественника не сидели рядом?

21 Учащемуся необходимо сдать четыре экзамена на протяжении 8 дней. Сколько существует способов составить для него расписание, если в один день можно сдавать не более одного экзамена, а воскресенье – выходной?

22 Почему в азбуке Морзе каждый символ задается последовательностью из точек и тире длиной не более пяти? Почему нельзя передавать сообщения, используя лишь комбинации, содержащие не более 4 знаков?

23 Сколькими способами можно рассадить n вновь прибывших гостей среди m гостей, уже сидящих за круглым столом?

24 Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

25 Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии?

26 Имеется p белых и q черных шаров. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

27 Пусть $|A|=n$, $|B|=m$, $B\subset A$. Сколько найдется различных множеств C таких, что $B\subset C\subset A$?

28 Сколько упорядоченных пар чисел различной четности можно составить из элементов множества $\{1,2,3, \ldots, n\}$?

29 Вы покупаете пять рождественских открыток в магазине, который может предложить четыре разных типа приглянувшихся Вам открыток. Как много наборов из пяти открыток Вы можете купить? Сколько наборов можно составить, если ограничиться только двумя типами открыток из четырех, но купить все равно пять открыток?

2.2 Функции и размещения

1 Сколько существует отображений множества $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ в множество $B=\{b_1,b_2\}$?

2 Сколько имеется сюръекций из трехэлементного множества на двухэлементное?

3 Сколько имеется инъекций из трехэлементного множества в четырехэлементное?

2.3 Разбиения, перестановки с повторением

1 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?
2 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «комбинаторика», и таких, в которых никакие две гласные буквы не стоят рядом?
3 Сколько разных слов можно составить перестановкой букв в слове "математика"?
4 Сколькими способами можно разделить 3n различных предметов между тремя людьми так, чтобы каждый человек получил n предметов?
5 Сколько пятибуквенных слов можно составить из букв a, b, c, если известно, что буква a встречается в слове не более двух раз, буква b – не более одного раза, c – не более трех?
6 Сколько различных слов можно составить из слова «колобок», используя все содержащиеся в нем буквы?
7 Сколько разных слов можно получить из слова «абракадабра»? Сколько из них начинается с буквы «к»? В скольких из них обе буквы «б» стоят рядом?

2.4 Биномиальные коэффициенты. Бином Ньютона, полиномиальная формула

1Доказать, что:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$; в) $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^n$;

г) $\sum\limits_{i=0}^{n} (C_m^i C_n^{k-i}) = C_{m+n}^k$ (тождество Коши); д) $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$; е) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{n-k}$.

2 Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$?

3Найдите

а) коэффициент при $x^3y^2z^4$ из разложения степени $(x+y+z)^9$;

б) коэффициент при x^3y^2 из разложения степени $(x+y+3)^7$.

4 Восьмая строка треугольника Паскаля имеет вид: 1 7 21 35 35 21 7 1. Найдите девятую и десятую его строки.
5 Найдите коэффициент при a^3b^5 после раскрытия скобок в выражении $(a+b)^8$.
6 Найдите коэффициент при xy^3z^4 после раскрытия скобок в выражении $(x+y+z)^8$.
7 Найдите коэффициент при xy^2z после раскрытия скобок в выражении $(x+2y+z-1)^5$.
8 Крокодил имеет 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух с одним и тем же набором зубов.

2.5 Формула включений и исключений

1 Сколько положительных чисел от 20 до 1000 делятся ровно на одно из чисел 7, 11, 13?

2 Сколько существует элементов в n-элементном множестве A, обладающих ровно двумя свойствами из четырех, которыми они могут обладать или не обладать?

3 В кровопролитном бою не менее 70% воинов потеряли глаз, не менее 75% – ухо, не менее 80% – руку и не менее 85% – ногу. Оценить снизу число воинов, потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу.

3 Элементы теории графов

3.1 Основные понятия теории графов, способы представления графов

1 Показать, что длина простого цикла в псевдографах, мультиграфах и собственно графах равна 1, 2, 3 соответственно.

2 Каковы минимальные длины простых контуров в ориентированных псевдографах, мультиграфах и собственно графах?

3 Показать, что в любом графе количество вершин нечетной степени четно.

4 Показать, что из всякого замкнутого маршрута нечетной длины можно выделить простую цепь.

5 Показать, что ребро, входящее в цикл графа, входит в некоторый его простой цикл.

6 Показать, что любая вершина, входящая в цикл, не является висячей.

7 Построить граф с матрицей:

а) $A_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $A_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; д) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $B_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $B_G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; з) $B_G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; и) $B_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

к) $B_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8 Задайте граф G=(V, E) матрицами смежности и инцидентности, если его вершины v_1, v_2, v_3 имеют координаты (2, 2), (6, 2) и (4, -3) соответственно, $E=\{(v_2, v_1), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2)\}$. Подсчитайте степени вершин.

9 Какую информацию о графе можно получить, пользуясь матрицами смежности и инцидентности?

3.2 (Сильная) связность. Поиск компонент (сильной) связности

1 Графы G_1 и G_2, в которых $V_1=\{1,2,3,4\}$ и $V_2=\{1,2,3\}$, заданы своими матрицами смежности. Постройте граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2)$ и составьте его матрицу сильной связности.

а) $A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Определите, имеют ли контуры орграфы с матрицами смежности:

а) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Определите матрицы достижимости и сильной связности данных графов.

3 Пусть орграф G задан матрицей смежности A_G. Определите матрицу сильной связности S_G, найдите количество компонент сильной связности данного орграфа и матрицы смежности компонент. Постройте изображение G и его компонент сильной связности.

а) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.3 Поиск минимальных путей в графах

1 Найдите минимальный путь в графе из вершины v_1 в остальные вершины, если:

а) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Граф задан декартовыми координатами вершин и перечислением ребер. Найдите эксцентриситеты вершин, радиус графа, его диаметр, центральные вершины.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
а)	(1;3)	(3;5)	(6;5)	(2;2)	(3;3)	(1;0)	(3;0)	(6;2)

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_4\}$, $\{x_1, x_6\}$, $\{x_2, x_7\}$, $\{x_6, x_7\}$

б)	(4;6)	(2;4)	(4;4)	(6;4)	(2;0)	(4;1)	(6;0)	(9;2)

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_4, x_7\}$, $\{x_6, x_7\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{x_3, x_6\}$

в)	(2;3)	(2;6)	(3;7)	(3;5)	(5;6)	(5;4)	(6;6)	(4;1)

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_4, x_6\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_5, x_7\}$

г)	(1;1)	(2;2)	(2;4)	(2;5)	(3;5)	(5;5)	(3;2)	(5;2)

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_6, x_8\}$, $\{x_2, x_7\}$, $\{x_7, x_8\}$, $\{x_5, x_7\}$

д)	(1;4)	(3;5)	(5;4)	(1;2)	(5;2)	(1;0)	(5;0)	(7;1)

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_4\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_4, x_5\}$, $\{x_6, x_7\}$, $\{x_5, x_7\}$, $\{x_4, x_6\}$

е)	(1;7)	(2;7)	(6;7)	(8;5)	(6;2)	(2;2)	(6;5)	(4;5)

$\{x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_6\}$, $\{x_2, x_8\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_7\}$, $\{x_3, x_8\}$, $\{x_4, x_5\}$, $\{x_4, x_7\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{x_5, x_7\}$, $\{x_6, x_8\}$

ж)	(1;5)	(2;4)	(4;4)	(5;5)	(4;2)	(2;2)	(1;1)	(3;3)

$(x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_4, x_7\}$, $\{x_6, x_7\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{x_3, x_6\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
з)	(1;2)	(2;4)	(3;5)	(4;4)	(4;3)	(2;2)	(2;3)	(4;2)

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_4, x_5\}$, $\{x_4, x_8\}$, $\{x_5, x_7\}$, $\{x_7, x_8\}$

и)	(0;2)	(1;4)	(2;5)	(3;6)	(4;5)	(5;4)	(6;2)	(3;2)

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_6\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_1, x_8\}$, $\{x_7, x_8\}$, $\{x_3, x_7\}$, $\{x_6, x_7\}$

к)	(2;2)	(2;5)	(3;6)	(5;6)	(3;4)	(4;5)	(4;4)	(5;4)

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_3, x_6\}$, $\{x_4, x_6\}$, $\{x_4, x_8\}$, $\{x_5, x_6\}$

3 Найдите минимальный путь в графе из вершины v_1 в остальные вершины, если:

а) $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 5 & 4 & 2 & 2 & 9 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 3 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 2 & \infty & 1 & 6 \\ 1 & 5 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$;

б) $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 14 & \infty & \infty & 7 & 15 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 \\ \infty & 2 & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ 4 & 5 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 2 & \infty & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$;

в) $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$;

г) $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & 2 & 10 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix}$.

4 Определите, имеются ли в нагруженном орграфе G с заданной матрицей длин дуг D_G, простые контуры отрицательной длины? Найдите пути минимальной длины из v_1 во все остальные вершины среди путей, содержащих не более k дуг. Рассмотрите случаи:

а) $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & -1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & -3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$, k=6;

б) $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 3 & -2 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 4 \\ 2 & \infty & -5 & \infty & \infty \end{pmatrix}$, k=4.

5 Найдите минимальный гамильтонов цикл в графе, заданном матрицей весов:

а) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$;

б) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 13 & 7 & 5 & 2 & 9 \\ 8 & \infty & 4 & 7 & 5 & \infty \\ 8 & 4 & \infty & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 6 & 1 & 4 & \infty & 9 \\ 10 & 0 & 8 & 3 & 7 & \infty \end{pmatrix}$;

в) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 6 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & \infty & 3 & 3{,}5 & 4{,}5 \\ 4 & 3 & \infty & 5{,}5 & 5 \\ 5 & 3{,}5 & 5{,}5 & \infty & 2 \\ 2 & 4{,}5 & 5 & 2 & \infty \end{pmatrix}$;

г) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 3 & 18 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & \infty & 1 & 1 & 3 & \infty & 2 \\ 7 & 5 & \infty & 5 & 8 & 5 & \infty \\ 13 & 19 & 11 & \infty & 25 & 20 & 16 \\ 4 & 8 & 5 & 9 & \infty & 0 & \infty \\ 36 & 21 & 49 & 39 & 50 & \infty & 73 \\ 4 & 5 & 10 & 6 & 6 & 9 & \infty \end{pmatrix}$;

д) $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & 2 & 10 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix}$;

е) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 11 & 5 & 7 \\ 7 & \infty & 6 & 13 & 10 \\ 11 & 6 & \infty & 9 & 6 \\ 5 & 13 & 9 & \infty & 4 \\ 7 & 10 & 6 & 4 & \infty \end{pmatrix}$;

ж) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$.

3.4 Потоки в сетях

1 Найти максимальный поток в графе с заданной матрицей весов:

а) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 12 & 6 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 4 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$;

б) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 10 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 3 & 2 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$;

в) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 5 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 5 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$;

г) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 8 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$;

д) $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 2 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$.

Решения и ответы

1 Элементы теории множеств

1.1 Множества и операции над ними

11 з) Если уравнение $x^3+x-1=0$ имеет целые решения, то это 1 или -1. Если таких решений нет, то $\{x|\ x \in \mathbf{Z}$ и $x^3+x-1=0\}=$↓. И в том, и в другом случае включение справедливо.

12 г) Доказать тождество A\(B\C)=(A\B)∪(A∩C) можно, пользуясь определениями, или – на основе известных тождеств. В первом случае рассуждаем так:

$$x\in A\setminus(B\setminus C)\Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin B\setminus C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ \left[\begin{array}{l} x\notin B \\ x\in C \end{array}\right. \end{cases}$$

. С другой стороны,

$$x\in (A\setminus B)\cup (A\cap C)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in A\setminus B \\ x\in A\cap C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in A \\ x\notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x\in A \\ x\in C \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ \left[\begin{array}{l} x\notin B \\ x\in C \end{array}\right. \end{cases}$$

. Пришли к одному и тому же условию, значит, множества состоят из одних и тех же элементов, т.е. равны.

Во втором случае доказательство выглядит так:

(A\B)∪(AэC)=(AэB')((AэC)=Aэ(B'(C)=Aэ(BэC')'=A\(BэC')=A\(B\C).

13 а) A;

ж) (A∪B∪C)∩(A∪B'∪C)∩(A∪C)'=((A∪C)∪(B∩B'))∩(A∪C)'= =((A∪C)∪↓)∩(A ∪C)'=(A∪C)∩(A∪C)'=↓.

14 Предположим, что такие множества существуют. Тогда из условий A∩B ≠ ∅ и (A∩B)\C=∅ следует, что (A∩B)⊆C. Значит, A∩C≠∅, что противоречит третьему условию. Таким образом, множеств A, B, C, удовлетворяющих заданным требованиям, не существует.

17 Если U={1,2,3,4}, то набору 1001 соответствует множество {1,4}, 0110 – {2,3}, набор 1101 кодирует {1,2,4}, а 0010 – {3}.

20 |A∪B∪C| = |(A∪B)∪C| = |A∪B| + |C| - |(A∪B)эC| =
= |A| + |B| - |AэB| + |C| - |(AэC)((BэC)| =
= |A| + |B| + |C| - |AэB| - |AэC| - |BэC| + |AэBэC|.

24а)

$$(x,y)\in A\times (B\cap C)\Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ y\in B\cap C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ \begin{cases} y\in B \\ y\in C \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\in A \\ y\in B \end{cases} \\ \begin{cases} x\in A \\ y\in C \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)\in A\times B \\ (x,y)\in A\times C \end{cases} \Leftrightarrow$$

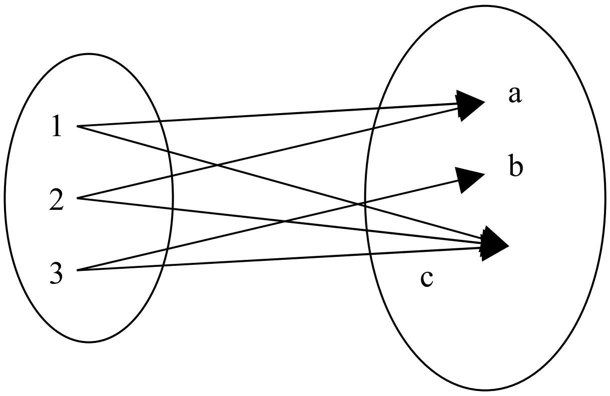
$$\Leftrightarrow (x,y)\in (A\times B)\cap (A\times C).$$

1.2 Бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Отношение порядка

8 A={1,2,3}, B={a,b,c,d}, $P \subseteq A \times B$, $[P]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда P={(1,a), (1,c), (2,a), (2,c), (3,b), (3,c)}.

График:



10 R – отношение «x – родитель y», а S – отношение «a – брат b» на множестве всех людей.

R^{-1} – отношение «y – ребенок x»,

S^{-1} – отношение «b – брат или сестра a»,

$R \circ S$={(x,y)| ∃z: (x,z)∈R и (z,y)∈S}={(x,y)| ∃z: «x – родитель z» и «z – брат y»}={(x,y)| «x – родитель y»}=R,

$S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1} = R^{-1}$,

$R \circ R$={(x,y)| ∃z: (x,z)∈R и (z,y)∈R}={(x,y)| ∃z: «x – родитель z» и «z – родитель y»}={(x,y)| «x – дедушка или бабушка y»}.

12 а) B={1,2,3,4}, $\rho_2 \subseteq B^2$, ρ_2={(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4)}. $[\rho_2]=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение рефлексивно, т.к. все элементы на главной диагонали равны 1.

Отношение не симметрично, т.к. матрица не симметрична относительно главной диагонали.

Найдем $[\rho_2]*[\rho_2]^T$, чтобы сделать вывод об антисимметричности (* – операция поэлементного умножения матриц):

$[\rho_2]*[\rho_2]^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Т.к. вне главной диагонали – нули, отношение ρ_2 является антисимметричным.

Вычислим матрицу $[\rho_2]\cdot[\rho_2]$ и сравним с $[\rho_2]$:

$[\rho_2]\cdot[\rho_2]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=[\rho_2]$. Следовательно, ρ_2 является транзитивным отношением.

13 б) $P\subseteq\mathbf{R}^2$, $(x, y)\in P \Leftrightarrow x^2\geq y$.

$D_P=\mathbf{R}$, $E_P=\mathbf{R}$; P не рефлексивно, т.к. не для любого $x\in\mathbf{R}$ $x^2\geq x$; P не симметрично, т.к. не всегда $x^2\geq y \Rightarrow y^2\geq x$; P не является антисимметричным, поскольку не выполняется соответствующее условие, и не транзитивно: в качестве контрпримера можно рассмотреть тройку (2,3,5) или (1,-6,5).

17 Бинарное отношение на $\mathbf{Z}$ задано условием $x+xy$ – четное число.

Оно рефлексивно, т.к. $x+x^2$ всегда четно ($x+x^2=x(1+x)$).

Если $x+xy$ – четное число, либо x четно, либо y нечетно ($x+xy=x(1+y)$). Тогда $y+yx=y(1+x)$ четно не всегда (пример: пара (2,3)). Таким образом, данное отношение не симметрично.

Чтобы проанализировать транзитивность, рассмотрим систему $\begin{cases} x+\ xy\ \ \text{÷åòíî}, \\ y+\ yz\ \ \text{÷åòíî}. \end{cases}$

Она равносильна следующей: $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x\ \ \text{÷åòíî}, \\ y\ \text{íå÷åòíî}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y\ \text{÷åòíî}, \\ z\ \text{íå÷åòíî}, \end{array}\right.\end{array}\right.$ из которой следует, что $x+xz$ будет четным числом. Значит, отношение транзитивно.

20 Отношение R на множестве $\mathbf{Z}$ определяется условием: $xRy \Leftrightarrow 3 \mid (x^2-y^2)$.

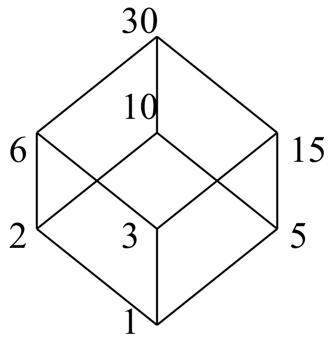
R является отношением эквивалентности, т.к. рефлексивно, симметрично и транзитивно. Действительно, $3 \mid (x^2-x^2)$ для любого целого x; $3 \mid (x^2-y^2) \Rightarrow 3 \mid (y^2-x^2)$, $\forall x,y\in\mathbf{Z}$; а $3 \mid (x^2-y^2)$ и $3 \mid (y^2-z^2)$ влекут $3 \mid (x^2-z^2)$ ($x^2=y^2+3k$, $y^2=z^2+3m \Rightarrow x^2=z^2+3(k+m)$, $k,m\in\mathbf{Z}$).

$[0]=\{x\in\mathbf{Z} \mid 3|(-x^2)\}=\{x\in\mathbf{Z} \mid 3|x\}=\{x\in\mathbf{Z} \mid x=3k,\ k\in\mathbf{Z}\}=\{0, \pm3, \pm6,\ldots\}$;

$[1]=\{x\in\mathbf{Z} \mid 3|(1-x^2)\}=\{x\in\mathbf{Z} \mid 3|(1\text{-}x)$ или $3|(1+x)\}=\{x\in\mathbf{Z} \mid x=3k+1,\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=3m+2,\ m\in\mathbf{Z}\}=\mathbf{Z}\backslash[0]$.

Таким образом, $Z/_R=\{[0],[1]\}$.

21а) Множество {1,2,3,5,6,10,15,30} с отношением «x делит y» имеет следующую диаграмму Хассе:



22 Судя по диаграмме, отношение представлено списком {(a,a), (a,d), (d,d), (d,f), (a,f), (b,b), (b,e), (e,e), (e,f), (b,f), (f,f), (e,g), (g,g), (b,g), (c,c), (c,e), (c,g), (c,f)}. Минимальными являются элементы a, b, c; максимальными – f, g.

1.3 Функции. Принцип Дирихле

1 $A=\{0, 2, 4, 6\}$, $B=\{1, 3, 5, 7\}$, $P_i \subseteq A\times B$, $i=1,\ldots,4$.

а) $P_1=\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$ – функция;

б) $P_2=\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$ – функция;

в) $P_3=\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$ – функция;

г) $P_4=\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$ – не функция в силу присутствия в списке пар (0,3) и (0, 7).

Инъективными являются б) и в), сюръективной – б).

11 а) Два месяца из двенадцати могут быть выбраны 12+132/2=78 способами. Зададим функцию $f\colon X\to Y$, ставящую в соответствие каждой семье пару названий месяцев, в которых родились дети. Т.к. $|X|=79$, $|Y|=78$, то одна из пар непременно повторится хотя бы дважды. Значит, найдется по крайней мере две семьи, в которых совпадают месяцы рождения обоих детей.

12 а) 6.

б) Указание: используйте функцию f, которая сопоставляет каждому целому числу его наибольший нечетный делитель. Например, f(12)=3.

2 Элементы комбинаторики

2.1 Правила суммы и произведения. Основные комбинаторные схемы

5 Абстрактное пятизначное число имеет вид $\overline{abcde}$, где $a\neq 0$. Значит, цифра a может быть выбрана 9 способами, после чего каждая из цифр b, c, d может быть выбрана 10 способами, а e для делимости на 5 только двумя. По правилу произведения количество пятизначных чисел, которые делятся на пять, равно $9\cdot 10^3\cdot 2=18000$.

6 Номер представляет собой последовательность трех фрагментов, два из которых по содержанию пассажиру известны. Существует 3! перестановок, в каждой их которых неизвестное число пробегает одно из 10 значений. Поэтому общее количество возможных номеров равно $6\cdot 10=60$.

8 Решение задачи доказывает тождество $C_{n+m}^{n} = C_{n+m}^{m}$.

11 $C_3^1\cdot C_{30}^3$

15 $\overline{C}_5^6$

16 455

22

$$\sum_{i=1}^{5} 2^i = 62 - \text{÷èñëî êîìáèíàöèé äëèíîé íå áîëåå } 5,$$

$$\sum_{i=1}^{4} 2^i = 30 - \text{÷èñëî êîìáèíàöèé äëèíîé íå áîëåå } 4.$$

29 $\overline{C}_4^5$.

$C_4^2 \cdot \overline{C}_2^5$ – количество, в котором неоднократно встречаются однотипные наборы из пяти абсолютно одинаковых открыток, поэтому правильный ответ
$C_4^2 \cdot (\overline{C}_2^5 - 2) + 4 = 28$.

2.3 Разбиения, перестановки с повторением

5 $\sum\limits_{\substack{n1+n2+n3=5 \\ n1\le 2 \\ n2\le 1 \\ n3\le 3}} C_5^{n1,n2,n3}$

2.4 Биномиальные коэффициенты. Бином Ньютона, полиномиальная формула

3 а) Коэффициент при $x^3y^2z^4$ из разложения степени $(x + y + z)^9$ равен 9!/(3!2!4!).
б) Коэффициент при $x^3y^2z^2$ из разложения степени $(x + y + z)^7$ равен 7!/(3!2!2!)=210. Поэтому разложение степени $(x + y + z)^7$ содержит член $210x^3y^2z^2$. Положив z = 3, мы увидим, что в разложении степени $(x + y + 3)^7$ присутствует член $1890x^3y^2$. Итак, коэффициент при x^3y^2 из разложения степени $(x + y + 3)^7$ равен 1890.

8 $\sum\limits_{i=0}^{68} C_{68}^i = 2^{68} = 16^{17}$ – количество различных наборов зубов. По принципу Дирихле действительно среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух с одним и тем же набором зубов.

2.5 Формула включений-исключений

1 Пусть X_1 – множество чисел из указанного диапазона, делящихся на 7, X_2 – делящихся на 11, X_3 – делящихся на 13. $|X_1|=\left[\frac{981}{7}\right]$=140, $|X_2|=\left[\frac{981}{11}\right]$=89, $|X_3|$=75.

Чисел, которые делятся на 7 и на 11 ($X_1 \cap X_2$), в указанном диапазоне 12; делящихся на 7 и на 13, – 10; на 11 и на 13 – 6; ни одно число не делится на 7, 11, 13 одновременно. Дальнейшие вычисления приводят к ответу 248.
3 Не менее 10%.

3 Элементы теории графов

3.3 Поиск минимальных путей в графах

1в) К примеру, найдем минимальный (v_1, v_7)-путь.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$FW_1(v_1)=\{v_5, v_6\}$, k=1

$FW_2(v_1)=\{v_2\}$, k=2

$FW_3(v_1)=\{v_3\}$, k=3

$FW_4(v_1)=\{v_4\}$, k=4

$FW_5(v_1)=\{v_7\}$, k=5

Искомый путь имеет вид $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_7$ или $v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_7$.

3г)

$$\begin{pmatrix} \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & 2 & 10 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{ccccccc} \lambda_i^{(0)} & \lambda_i^{(1)} & \lambda_i^{(2)} & \lambda_i^{(3)} & \lambda_i^{(4)} & \lambda_i^{(5)} & \lambda_i^{(6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 10 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \infty & 9 & 9 & 9 & 7 & 7 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \infty & \infty & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \infty & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \infty & 10 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$$

Найдем, к примеру, минимальный (v_1, v_2)-путь:

значение $\lambda_2^{(6)} = 6$, значит, искомый путь существует и его длина равна 6. Наименьшее значение k, при котором $\lambda_2^{(k)} = \lambda_2^{(6)}$, равно 3, значит, в минимальном пути три дуги. Восстановление вершин дает значения (в обратном порядке) v_5, v_6. Таким образом, минимальный (v_1, v_2)-путь имеет вид $v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5 \rightarrow v_2$.

5 а) (1,4,3,5,6,2,1); б) (1,5,2,4,6,2,1); в) (1,3,2,4,5,1); г) (1,5,6,2,7,4,3), d=47;

д)

$$D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & 2 & 10 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (D_G)'=$$

$$\begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 0 & 8 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(D_G)''=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 0 & 7 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & 1 & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

$H=2+1+1+1+1+2+1+1+1=11$

Рассмотрим граф G_1, получающийся из данного слиянием 1-ой и 6-ой вершин. Новую вершину обозначим x.

Его матрица D_{G1} имеет вид:

$$D_{G1}=\begin{array}{c} \\ x \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Т.к. для нее минимальные элементы в строках и столбцах равны 0, то $h_1=H=11$,

и матрица $(D_{G1})''= D_{G1}=\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$.

Рассмотрим теперь граф G_2, в котором по сравнению с G нет дуги из 1-ой вершины в 6-ую:

$$D_{G2}=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 7 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & 1 & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}.$$

Для него

$$(D_{G2})''=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & 1 & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$ и значение $h_2=H+7=18$.

Из двух подзадач выбираем ту, которой соответствует меньшая нижняя оценка длин гамильтоновых циклов. В данном случае работаем с графом, имеющем матрицу $(D_{G1})''$.

В качестве следующей вершины в цикле выберем пятую. Рассмотрим граф G_3, получающийся из G_1 слиянием вершин x и 5. Новую вершину обозначим y.

$$D_{G3}=\begin{array}{c} \\ y \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y & 2 & 3 & 4 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Повторив процедуры, аналогичные проведенным ранее, получим:

$$(D_{G3})''=\begin{array}{c} \\ y \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y & 2 & 3 & 4 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array}, \; h_1=11.$$

Для графа G_4, полученного из G_1 «запретом» движения из x в 5-ую вершину, получим:

$$D_{G4}=\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}, \; (D_{G4})''=\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix},$$

$h_2=11+3=14$.

Значит, продолжаем решать задачу (1,6,5)↓ и в качестве рабочей выбираем матрицу $(D_{G3})''=$ $\begin{array}{c|ccccc} & y & 2 & 3 & 4 & 7 \\ \hline y & \infty & 1 & \infty & 0 & \infty \\ 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 3 & 1 & 0 & \infty & \infty & 0 \\ 4 & \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \end{array}$. Анализируем подзадачи (1,6,5,4)↓ и (1,6,5){4}.

Для первой получаем:

$$D_{G5}=\begin{array}{c|cccc} & z & 2 & 3 & 7 \\ \hline z & \infty & 0 & 0 & \infty \\ 2 & 0 & \infty & \infty & 2 \\ 3 & 1 & 0 & \infty & 0 \\ 7 & \infty & 1 & 0 & \infty \end{array}=(D_{G5})'',\ h_1=11.$$

А для второй:

$$D_{G6}=\begin{array}{c|ccccc} & y & 2 & 3 & 4 & 7 \\ \hline y & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 3 & 1 & 0 & \infty & \infty & 0 \\ 4 & \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \end{array},\ (D_{G6})''=\begin{array}{c|ccccc} & y & 2 & 3 & 4 & 7 \\ \hline y & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 3 & 1 & 0 & \infty & \infty & 0 \\ 4 & \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \end{array}\ \text{и } h_2=\infty,$$

что означает невозможность построения соответствующего цикла. (Обратите внимание: эта ситуация сложилась неслучайно, в данном графе попасть в четвертую вершину можно *только* из пятой.)

Далее рабочей является матрица $(D_{G5})''$. Движение можно осуществлять как во 2-ую, так и 3-ю вершины. Выберем вторую.

$$D_{G7}=\begin{array}{c|ccc} & t & 3 & 7 \\ \hline t & \infty & \infty & 2 \\ 3 & 1 & \infty & 0 \\ 7 & \infty & 0 & \infty \end{array},\ (D_{G7})''=\begin{array}{c|ccc} & t & 3 & 7 \\ \hline t & \infty & \infty & 0 \\ 3 & 0 & \infty & 0 \\ 7 & \infty & 0 & \infty \end{array},\ h_1=11+2+1=14.$$

«Запретив» движение из v_4 в v_2, получим:

$$D_{G8}=\begin{array}{c|cccc} & z & 2 & 3 & 7 \\ \hline z & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 2 & 0 & \infty & \infty & 2 \\ 3 & 1 & 0 & \infty & 0 \\ 7 & \infty & 1 & 0 & \infty \end{array}=(D_{G8})''\ \text{и } h_2=11.$$

Выбираем последнюю матрицу в качестве рабочей и проанализируем путь, в котором после четвертой следует третья вершина:

$$D_{G9}=\begin{array}{c|ccc} & s & 2 & 7 \\ \hline s & \infty & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 2 \\ 7 & \infty & 1 & \infty \end{array},\ (D_{G9})''=\begin{array}{c|ccc} & s & 2 & 7 \\ \hline s & \infty & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 2 \\ 7 & \infty & 0 & \infty \end{array}\ \text{и } h_1=11+1=12.$$

Вторая подзадача (1,6,5,4){2,3} связана с движением из четвертой в седьмую вершину. Но это невозможно (соответствующее значение и в исходной матрице и в ее производных равно ∞).
В завершение остается рассмотреть пути (1,6,5,4,3,2,7) и (1,6,5,4,3,7,2) и соответствующие им циклы (1,6,5,4,3,2,7,1) и (1,6,5,4,3,7,2,1).
Если делать это в рамках общего подхода, то результат следующий:

$$D_{G10}= \begin{array}{c} \\ m \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 2 \\ \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array},\ (D_{G10})''= \begin{array}{c} \\ m \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 \\ \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array},\ h_1=\infty$$

$$D_{G11}= \begin{array}{c} \\ s \\ 2 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s & 2 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array} =(D_{G11})'',\ h_2=12.$$

Таким образом, в качестве ответа выбираем цикл (1,6,5,4,3,7,2,1) с длиной, равной 2+2+ 2+ 1+ 2+ 2+ 1=12.
Непосредственный анализ оставшихся возможностей показывает, что хотя путь (1,6,5,4,3,2,7) и имеет место в графе, соответствующего ему цикла нет (значение d_{71} равно ∞). Поэтому ответ будет тем же.

е) 28

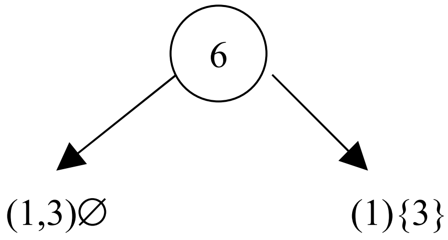
ж) Найдем нижнюю оценку длин гамильтоновых циклов в данном графе:

$$D_G = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{c} d_{i\,min} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array},\quad D'_G = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \infty & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & \infty & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & \infty \end{pmatrix},$$

$$d_{j\,min}=(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$D''_G = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \infty & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & \infty & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & \infty \end{pmatrix}.$$

Значит, $H=\sum_{i=1}^{6} d_{i\,\min} + \sum_{j=1}^{6} d_{j\,\min} =6$, т.е. длина любого гамильтонова цикла в данном графе не меньше 6.
Пусть для определенности цикл начинается в вершине 1. Разобьем задачу на две подзадачи: в первой рассмотрим гамильтоновы циклы, в которых после 1-ой вершины следует 3-я, а во второй – гамильтоновы циклы, в которых после 1-ой вершины следует любая за исключением 3-ей, и найдем соответствующие им нижние оценки.



Построим матрицы графа G_1, полученного слиянием вершин 1 и 3 графа G, и графа G_2, в котором невозможно движение из 1 в 3.

G_1: $\underbrace{1 \longrightarrow 3}_{x}$ $\qquad\qquad$ G_2: $1 \;\cancel{\longrightarrow}\; 3$

$$D_{G_1} = \begin{array}{c|ccccc} & x & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline x & \infty & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & \infty & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & \infty & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 3 & \infty & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 2 & 0 & \infty \end{array}, \qquad D_{G_2} = \begin{pmatrix} \infty & 3 & \infty & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \infty & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & \infty & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

Повторение действий, аналогичных проведенным с матрицей D_G, дает:

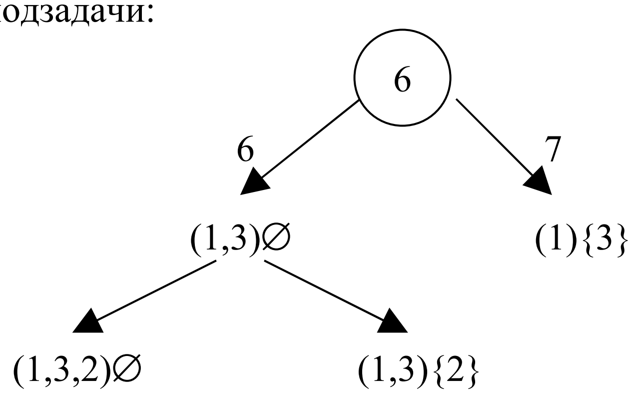
$$D_{G_1} = \begin{array}{c|ccccc} & x & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline x & \infty & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & \infty & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & \infty & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 3 & \infty & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 2 & 0 & \infty \end{array} = D''_{G_1}$$

и $h_1=0$;

$$D''_{G_2} = \begin{pmatrix} \infty & 3 & \infty & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \infty & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \infty & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \infty & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \infty & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$ и $h_2=1$.

Значит, левая подзадача имеет оценку $H_1=H+h_1=6$, а правая – $H_2=H+h_2=7$.

Для дальнейших действий выбираем задачу с меньшей оценкой и разбиваем ее на указанные подзадачи:



Убедитесь самостоятельно, что им соответствуют одинаковые оценки, равные 7.

Продолжим движение по левой крайней ветке, и рассмотрев очередные два случая (1,3,2,4)$\varnothing$ и (1,3,2)$\{4\}$, получим, что их нижние оценки 7 и 10 соответственно.

Дальнейшее решение приводит к последовательностям (1,3,2,4,6,5) и (1,3,2,4,5,6), которые описывают гамильтоновы циклы длиной 7 и 8. Таким образом, длина минимальных гамильтоновых циклов в данном графе равна 7, один из них имеет вид $1\to3\to2\to4\to6\to5\to1$ (мы не исследовали вопрос о его единственности).

3.4 Потоки в сетях

1д) 21.

Список использованных источников

1 **Биркгоф, Г.** Современная прикладная алгебра/ Г. Биркгоф, Т. Барти. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 400 с.

2 **Липский, В.** Комбинаторика для программистов/ В. Липский. – М.: Мир, 1988. –

3 **Нефедов, В.Н.** Курс дискретной математики: учеб. пособие/ В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

4 **Судоплатов, С.В.** Элементы дискретной математики: учебник/ С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 280 с.

5 **Хаггарти, Р.** Дискретная математика для программистов/ Р. Хаггарти. – М.: Техносфера, 2004. – 320 с.

Приложение А
(рекомендуемое)

Математический диктант №1а

1 Множеством называется ...
2 По определению $A \setminus B$=…
3 Допишите тождество $(A\cap B)'$=...
4 Продолжите тождество $A\cup(B\cap C)$=...
5 Бинарным отношением между множествами А и В называется ...
6 Бинарное отношение на множестве А называется антисимметричным, если ...
7 Запишите условие транзитивности бинарного отношения Р на языке матриц.
8 Разбиением множества А называется ...
9 Частичным порядком называется ...
10 Элемент a частично упорядоченного множества А называется максимальным, если ...

Математический диктант №1б

1 Множеством называется ...
2 По определению $A\cup B$=…
3 Допишите тождество $(A\cup B)'$=...
4 Продолжите тождество $A\cap(B\cup C)$=...
5 Областью определения бинарного отношения между множествами А и В называется ...
6 Бинарное отношение на множестве А называется транзитивным, если ...
7 Запишите условие антисимметричности бинарного отношения Р на языке матриц.
8 Классом эквивалентности, порожденным элементом x, называется ...
9 Линейным порядком называется ...
10 Элемент a частично упорядоченного множества А называется минимальным, если ...

Математический диктант №1в

1 Какие способы задания множеств Вам известны?
2 Равны ли множества $\{\varnothing\}$ и $\varnothing$?
3 Булеаном множества А называется ...
4 Если $|A|=8$, то $|\mathcal{P}(A)|$ = ...
5 $P\subseteq\mathbf{R}^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow x^2+y^2=25$. Найдите область значений Р.
6 Дайте определение композиции бинарных отношений.
7 Бинарное отношение $f\subseteq X\times Y$ называется функцией, если ...
8 Отношением эквивалентности на множестве А называется ...
9 Элемент a частично упорядоченного множества А называется наименьшим, если ...
10 Приведите примеры частично упорядоченных множеств.

Математический диктант №2

1 (n, r)-сочетанием без повторений называется …

2 $\overline{A}_n^r = \ldots$

3 X={1, 2, 3, 5, 6, 7}, B={2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 7} – сочетание с повторениями из элементов множества X. Составить набор из нулей и единиц, соответствующий сочетанию B.

4 $\overline{C}_n^r = \ldots$

5 Разложите в сумму $(a-b)^4$.

6 Строка треугольника Паскаля имеет вид 1 7 21 35 35 21 7 1. Напишите следующую за ней строку и укажите, какому показателю n в выражении $(a+b)^n$ соответствует написанная Вами строка.

7 Продолжите согласно формуле включений и исключений:
$|A\cup B\cup C\cup D| = \ldots$

8 Сколько существует двузначных нечетных чисел?

9 Чему равен коэффициент k в слагаемом kxy^5z^7 разложения в сумму $(x+y+z)^{13}$?

10 Если $|X|=8$ и $|Y|=3$, то сколько раз по меньшей мере повторится одно из значений функции $f: X\to Y$?

Приложение Б
(рекомендуемое)

Варианты типовых заданий

Задание 1

1 Докажите тождества, используя только определения операций над множествами.

2 Для заданного множества $A \subseteq U$ составить характеристический вектор.

3 Составьте матрицу данного бинарного отношения P.

4 Найти область определения и область значений для бинарного отношения P. Является ли P рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

5 Для бинарного отношения $P \subseteq B^2$ выяснить с помощью матрицы, является ли P рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

6 Является ли заданная функция инъективной? сюръективной? Почему? Постройте ее график.

7 Разложите в сумму выражение.

Вариант 1

1 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

2 $U = \{1,2,3,\ldots,20\}$, $A = \{x | x+3=20\}$.

3 $P \subseteq \{1,2,3,4,5\}^2$, $(x,y) \in P \Leftrightarrow (x+y)^2 > 9$

4 $P \subseteq \mathbf{Z}^2$; $(x,y) \in P \Leftrightarrow x^2 > y$

5 $B=\{1,2,3,4\}$, $P=\{(1,1), (2,3), (2,2), (3,4), (1,4), (4,2), (2,4)\}$

6 f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = -x^2 - 8$

7 $(2x+1)^5$

Вариант 2

1 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

2 $U=\{a,b,c,d,e,g,h,k\}$, $A=\{c,g,h,a\}$.

3 $P \subseteq \{1,2,3,\ldots,9\}^2$, $(x,y) \in P \Leftrightarrow x \vdots (1+y)$

4 $P \subseteq Z_+^2$; $(x,y) \in P \Leftrightarrow x^2 \neq y$

5 $B=\{1,2,3,4\}$, $P=\{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (3,2), (3,4), (1,4), (4,4), (2,4)\}$

6 f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x - 1$

7 $(3y+2)^4$

Вариант 3

1. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
2. $U=\{1,2,3,\ldots,30\}$, $A=\{x|\ 30\,\vdots\, x\}$.
3. $P\subseteq\{1,2,3,\ldots,7\}^2$, $(x,y)\in P \Leftrightarrow x^2-y^2<15$
4. $P\subseteq Z_+^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow x^2=y$
5. $B=\{1,2,3,4\}$, $P=\{(1,1), (2,2), (2,1), (3,3), (3,2), (3,4), (1,4), (4,4), (2,4), (4,3)\}$
6. f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=|x|+5$
7. $(a-3)^7$

Вариант 4

1. $A'\cup B=(A\cap B')'$, $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
2. U={А, Б, В, Г, ..., Я}, A={М, Н, Т, У, Ы}.
3. $P\subseteq\{1,2,3,\ldots,10\}^2$, $(x,y)\in P \Leftrightarrow x^2+y^2<25$
4. $P\subseteq Z_+^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow x\neq y$
5. $B=\{1,2,3,4\}$, $P=\{(1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,2), (2,4)\}$
6. f: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $f(x)=x/3$
7. $(-2+b)^6$

Вариант 5

1. $(A\cap B)'=A'\cup B'$, $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
2. $U=\{1,2,3,\ldots,20\}$, $A=\{2, 4, 6, 8, ..., 20\}$.
3. $P\subseteq\{1,2,3,\ldots,6\}^2$, $(x,y)\in P \Leftrightarrow x+y=8$
4. $P\subseteq Z_+^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow x<(y+4)^2$
5. $B=\{1,2,3,4\}$, $P=\{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4)\}$
6. f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=(x+1)^2$
7. $(y+z)^9$

Вариант 6

1. $(A\backslash B)\backslash C=A\backslash(B\cup C)$, $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
2. $U=\{a,b,c,d,e,0,1,2,3\}$, $A=\{a,e,1,2,3\}$.
3. $P\subseteq\{1,2,3,\ldots,8\}^2$, $(x,y)\in P \Leftrightarrow x<y$
4. $P\subseteq\mathbf{Z}^2$; $(x,y)\in P \Leftrightarrow x-y<0$
5. $B=\{1,2,3,4\}$, $P=\{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4), (3,2), (2,1)\}$
6. f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x|$
7. $(-2+2a)^4$

Задание 2

1. Постройте орграф, заданный своей матрицей смежности. Выясните аналитически, имеет ли контуры этот граф, и если да, то – какие. Вычислите его матрицы достижимости и сильной связности данного графа.
2. Орграф задан матрицей смежности. Найдите количество компонент сильной связности этого графа, постройте компоненты.
3. Найдите минимальный (v_i, v_j)-путь в графе, заданном матрицей смежности.
4. Найдите минимальный (v_i, v_j)-путь в графе, заданном матрицей длин дуг.
5. Вычислите максимальный поток в сети.
6. Найдите минимальный гамильтонов цикл в графе и его длину.

Вариант 1

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=1, j=7

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 14 & \infty & \infty & 7 & 15 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 \\ \infty & 2 & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ 4 & 5 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 2 & \infty & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 26 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 30 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 3 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 2

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=5

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=1, j=6

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 13 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 4 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 3

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=6

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & 12 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=1, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 4 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 21 & 13 & 16 & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 23 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 0 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 4

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=7, j=3

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & \infty & 4 & 1 & \infty \\ 2 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=3, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & 12 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 5 & 3 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 27 & \infty & 16 & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 46 & \infty & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 5

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=1, j=7

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 14 & \infty & \infty & 7 & 15 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 \\ \infty & 2 & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ 4 & 5 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 2 & \infty & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=6

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 8 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 17 & 33 & 16 & 20 & 26 \\ 5 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 1 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 4 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 6

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=1, j=6

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & 9 & 3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 2 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=7, j=4

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 7

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=1, j=4

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & 12 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 13 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 4 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & 16 & 30 & \infty \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 3 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & \infty & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 8

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=1, j=7

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & \infty & 4 & 1 & \infty \\ 2 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & -1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=6, j=3

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 4 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 5 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & \infty & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 9

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=6

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 14 & \infty & \infty & 7 & 15 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 \\ \infty & 2 & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ 4 & -5 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 2 & \infty & 4 & -3 & \infty \end{pmatrix}$, i=3, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & 21 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 13 & \infty & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 10

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=5

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & \infty & 4 & 1 & \infty \\ -2 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & -3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 0 & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=1, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & 12 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 5 & 3 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & \infty & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ \infty & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 0 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 11

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=7, j=2

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 4 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 0 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 12

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=1, j=7

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 12 & \infty & \infty & 7 & 15 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 \\ \infty & 2 & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ 4 & 5 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=5

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 12 & 10 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G = \begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & \infty & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ \infty & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 1 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант13

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=5

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 12 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & -3 & \infty & 7 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=6

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 3 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \infty & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 14

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=7, j=3

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 14 & \infty & \infty & 7 & 15 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 2 & \infty & 4 \\ \infty & 2 & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ 4 & 5 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 2 & \infty & 4 & 4 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & 12 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 5 & 3 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & 4 & 10 & 5 & 7 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 3 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 1 & 18 \\ 12 & 6 & 2 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 15

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=6

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=1, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 13 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 4 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & 16 & 3 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 0 & 25 \\ 2 & 13 & \infty & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & \infty & 8 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 16

1 $A_G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=1, j=7

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & 12 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & -2 & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=5

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & 12 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 5 & 4 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 17

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=7, j=3

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & -2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & -2 & \infty & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=4, j=1

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 4 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & 13 & 1 & 3 & 6 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 3 & 5 & 0 \\ 21 & 1 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 6 & 2 & 4 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 6 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 18

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=7, j=2

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 13 & \infty & \infty & 8 & 15 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 \\ \infty & 2 & 2 & \infty & 1 & 2 & \infty \\ 4 & 5 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 2 & \infty & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 8 & \infty & 12 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 5 & 1 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 17 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 5 & 2 & 3 & 3 & 30 \\ 2 & \infty & 1 & \infty & 11 & \infty \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 4 & 13 \\ \infty & 10 & 3 & \infty & 23 & 3 \\ 0 & 22 & 3 & 3 & \infty & 14 \\ 13 & 3 & 4 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 19

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=5

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 2 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & -3 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=3, j=5

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 13 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 4 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 5 & 2 & 3 & 3 & 30 \\ 2 & \infty & 1 & \infty & 11 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 4 & 13 \\ 3 & 10 & 3 & \infty & 23 & 3 \\ 0 & 22 & 3 & 3 & \infty & 14 \\ 13 & 3 & 4 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 20

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=7, j=2

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & 12 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 0 \\ \infty & 1 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & -2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=1, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & 12 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 5 & 3 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 21

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=1, j=7

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 14 & \infty & \infty & 7 & 15 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 \\ \infty & 2 & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ 4 & 5 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 2 & \infty & -4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=2, j=4

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & 12 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 5 & 3 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 15 & 20 & \infty & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 11 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 4 & 3 \\ 13 & 10 & 3 & \infty & 23 & 3 \\ 0 & 2 & 30 & 3 & \infty & 1 \\ 13 & \infty & 4 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 22

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=6

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}$, i=1, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 13 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 4 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 15 & 2 & 3 & \infty & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 11 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 10 & 3 & \infty & 23 & 3 \\ 0 & 2 & \infty & 3 & \infty & 12 \\ 13 & 3 & 4 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 23

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, i=2, j=5

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ -1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & -7 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=3, j=6

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 24

1 $A_G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=7, j=3

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & -8 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & -3 & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=1, j=5

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 6 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 4 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 15 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 11 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 10 & 3 & \infty & 23 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & \infty & 1 \\ 13 & 3 & 4 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$

Вариант 25

1 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 $A_G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i=7, j=2

4 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 1 & \infty \\ 2 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & -5 & 0 & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$, i=5, j=7

5 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 10 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

6 $D_G=\begin{pmatrix} \infty & 5 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & \infty & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & \infty & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$