ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Никульшина А.А.
Оренбургский государственный педагогический университет

Геометрические преобразования — одни из основных идей современной математики. Они лежат как в основе определения геометрии, так и в основе классификации её отдельных разделов. Достаточно вспомнить определение геометрии, данное Феликсом Клейном (1849—1925) в его знаменитой Эрлангенской программе [1, с.108].

В Германии долгое время существовал обычай, согласно которому кандидат на замещение профессорской должности должен был выступить перед Ученым Советом с лекцией на свободно выбранную им тему; на основании этой лекции Ученый Совет делал заключение о возможности допущения данного лица к профессуре. Такая лекция Ф. Клейном (известным немецким математиком) была прочитана в 1872 г. в г. Эрлангене (Германия) и впоследствии получила название Эрлангенской программы Клейна.

Ф. Клейном впервые были сформулированы принципы теоретико-группового построения геометрии. Геометрия — это наука, изучающая свойства фигур, инвариантные относительно некоторой группы преобразований. В самом деле, проективная геометрия — геометрия проективной группы, аффинная — аффинной, а школьная геометрия — геометрия группы движений и подобий [2].

Широки практические приложения геометрических преобразований. Теория подобия проникла в физику и стала основой физического эксперимента. Она нашла приложение и в технике. В современной науке и технике широкое применение находит обобщенное понимание геометрического подобия и моделирования явлений. Геометрические преобразования имеют и большое воспитательное значение, с ними входят в геометрию диалектика, движение [3].

Если в науке идея геометрических преобразований завоевала всеобщее признание, то вопрос о целесообразности изучения геометрических преобразований в школе оставался открытым до недавнего времени. В настоящее время уже не стоит вопрос: изучать геометрические преобразования или нет. Вопрос в другом: как изучать.

Прежде чем заняться изучением геометрических преобразований в школе, дадим некоторые общие определения. Они носят несколько абстрактный характер, так как относятся к множествам, природа элементов которых для нас пока безразлична.

Определение 1. Отображением f множества M в множество M' называется такое правило, при котором каждому элементу m множества M соответствует единственный элемент m' множества M'. Элемент m' называется образом элемента т, а элемент m называется прообразом элемента m' при отображении f.

$$f: M \to M'$$

$$f: m \to m' \quad m' = f(m)$$

Если при отображении f каждый элемент m' множества M' является образом по крайней мере одного элемента m множества M, то говорят, что множество M отображается на множество M'.

Определение 2. Отображение f множества M на множество M' называется взаимно однозначным, если разным элементам множества M соответствуют разные элементы множества M'.

Определение 3. Взаимно однозначное отображение f множества M на себя называется преобразованием множества M.

В геометрии мы также занимаемся отображением одного множества в другое, только элементами множества M являются точки плоскости или пространства и тогда говорят о геометрическом отображении одного множества в другое.

Определим геометрическое преобразование плоскости.

Определение 4. Пусть элементами множества M являются все точки плоскости. Взаимно однозначное отображение множества точек плоскости на себя называется геометрическим преобразованием плоскости.

Теперь посмотрим, как же определить геометрическое преобразование плоскости в школе. С этой целью обратим внимание на определение числовой функции, данное в курсе «Алгебра и начала анализа» по учебнику Н. Я. Виленкина [4].

Пусть X — числовое множество. Отображение, сопоставляющее каждому числу x из X некоторое число у, называют *числовой функцией,* заданной на X. Множество X называют областью определения функции f.

Тогда по аналогии естественно определить геометрическое преобразование следующим образом:

Пусть X — множество всех точек плоскости. Геометрическим преобразованием плоскости называется отображение этой плоскости, которое каждой точке плоскости ставит в соответствие некоторую точку этой же плоскости; при этом

1) различным точкам плоскости A и B соответствуют различные точки A' и B',

2) область определения и область значений совпадают с X.

Примечание. Если в школе не дано определение отображения одного множества на другое, то можно несколько упростить определение, а именно.

Пусть X — множество всех точек плоскости. Известно правило, которое каждой точке плоскости ставит в соответствие некоторую точку этой же плоскости, при этом

1) различным точкам плоскости A и B соответствуют различные точки A' и B',

2) область определения и область значений совпадают с X.

Тогда говорят, что задано геометрическое преобразование плоскости.

Сопоставляя геометрическое преобразование и числовую функцию, видим, что геометрическое преобразование и числовая функция — две модели общего понятия отображения одного множества на другое. Эти модели отличаются природой области определения и области значений, способом задания соответствия. Совершенно очевидно, что методика изучения геометрических преобразований должна быть ориентирована на подчеркивание идеи функции, которая играет здесь объединяющую роль, устраняя традиционную изолированность геометрии, поэтому преобразования в геометрии желательно изучать по тому же плану, что и функции в алгебре.

Методическая схема изучения геометрических преобразований

1. Определение.
2. Способы задания.
3. Свойства.
4. Применение к доказательству теорем и решению задач.

Список литературы

1. *Мацуо Комацу. Многообразие геометрии: Пер. с японского— М.: Знание, 1981.*
2. *И. В. Прояева, А. Д. Сафарова. Организация самостоятельной работы студентов по курсу «Преобразования плоскости и проективная геометрия», Издательство ОГПУ, Оренбург 2016.*
3. *И. В. Прояева, А. Д. Сафарова. Организация самостоятельной работы студентов по подготовке к ГИА курсу «Геометрия», Издательство ОГПУ, Оренбург 2016.*
4. *Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень 18-е изд., стер. - М.: 2014.*