

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

М.Г. ПЕТРУШАНСКИЙ

# КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальности «Проектирование и технология радиоэлектронных средств»

Оренбург 2007

УДК 530.145(075.8)

ББК 32.86я73

П 31

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент Э.К. Алиджанов

П 31      **Петрушанский М.Г.**  
**Квантовая природа излучения: учебное пособие /**  
**М.Г. Петрушанский. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007.- 107 с.**

**ISBN**

Учебное пособие включает теоретическое изложение материала, примеры решения задач, контрольные вопросы, задачи и тесты для самоподготовки.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальности 210201 при изучении дисциплин «Физика» и «Рентгеновские трубки, излучатели, моноблоки и питающие устройства».

П 1604030000

ББК 32.86я73

ISBN

© Петрушанский М.Г., 2007

© ГОУ ОГУ, 2007

# Содержание

<i>Введение.....</i>	<i>5</i>
<i>1 Тепловое излучение.....</i>	<i>6</i>
<i>1.1 Основные понятия и характеристики излучения.....</i>	<i>7</i>
<i>1.1.1 Поток и интенсивность излучения.....</i>	<i>9</i>
<i>1.1.2 Объемная плотность энергии.....</i>	<i>9</i>
<i>1.1.3 Испускательная способность.....</i>	<i>10</i>
<i>1.1.4 Энергетическая светимость.....</i>	<i>11</i>
<i>1.1.5 Поглощательная способность.....</i>	<i>11</i>
<i>1.2 Законы теплового излучения.....</i>	<i>12</i>
<i>1.2.1 Закон Кирхгофа.....</i>	<i>12</i>
<i>1.2.2 Закон Стефана-Больцмана.....</i>	<i>14</i>
<i>1.2.3 Закон Вина.....</i>	<i>15</i>
<i>1.2.4 Формула Рэлея-Джинса.....</i>	<i>17</i>
<i>1.3 Формула Планка для теплового излучения.....</i>	<i>19</i>
<i>1.4 Следствия формулы Планка.....</i>	<i>21</i>
<i>1.4.1 Закон Стефана-Больцмана.....</i>	<i>21</i>
<i>1.4.2 Закон Вина и правило смещения Вина.....</i>	<i>22</i>
<i>1.4.3 Формула Рэлея-Джинса.....</i>	<i>22</i>
<i>1.5 Контрольные вопросы.....</i>	<i>23</i>
<i>1.6 Примеры решения задач.....</i>	<i>23</i>
<i>1.7 Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>27</i>
<i>2 Квантовые свойства света.....</i>	<i>28</i>
<i>2.1 Понятие о квантах.....</i>	<i>28</i>
<i>2.2 Фотоэлектрический эффект.....</i>	<i>30</i>
<i>2.2.1 Внешний фотоэффект.....</i>	<i>30</i>
<i>2.2.2 Внутренний фотоэффект. Применение фотоэффекта.....</i>	<i>36</i>
<i>2.3 Эффект Комптона.....</i>	<i>37</i>
<i>2.4 Давление света.....</i>	<i>41</i>
<i>2.5 Коротковолновая граница тормозного рентгеновского излучения.....</i>	<i>42</i>
<i>2.6 Контрольные вопросы.....</i>	<i>45</i>
<i>2.7 Примеры решения задач.....</i>	<i>46</i>
<i>2.8 Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>51</i>
<i>3 Спектры излучения атомов. Квантовые генераторы.....</i>	<i>53</i>
<i>3.1 Сериальные формулы. Модели строения атома.....</i>	<i>54</i>

<i>3.1.1 Модель атома Томсона.....</i>	<i>55</i>
<i>3.1.2 Модель атома Резерфорда.....</i>	<i>57</i>
<i>3.2 Теория атома водорода. Постулаты Бора.....</i>	<i>60</i>
<i>3.3 Опыт Франка-Герца.....</i>	<i>67</i>
<i>3.4 Характеристическое рентгеновское излучение. Закон Мозли.....</i>	<i>69</i>
<i>3.5 Спонтанное и вынужденное излучение.....</i>	<i>72</i>
<i>3.6 Принцип работы лазера.....</i>	<i>74</i>
<i>3.7 Применение и основные типы лазеров.....</i>	<i>78</i>
<i>3.7.1 Рубиновый лазер.....</i>	<i>79</i>
<i>3.7.2 Лазер на алюмо-иттриевом гранате.....</i>	<i>81</i>
<i>3.7.3 Гелий-неоновый лазер.....</i>	<i>82</i>
<i>3.7.4 Полупроводниковые лазеры.....</i>	<i>84</i>
<i>3.8 Контрольные вопросы.....</i>	<i>85</i>
<i>3.9 Примеры решения задач.....</i>	<i>86</i>
<i>3.10 Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>92</i>
<i>4 Общие методические указания к решению задач.....</i>	<i>93</i>
<i>5 Тесты.....</i>	<i>96</i>
<i>Заключение.....</i>	<i>103</i>
<i>Список использованных источников.....</i>	<i>104</i>
<i>Приложение А.....</i>	<i>105</i>
<i>Приложение Б.....</i>	<i>106</i>
<i>Приложение В.....</i>	<i>107</i>
<i>Приложение Г.....</i>	<i>108</i>
<i>Приложение Д.....</i>	<i>109</i>
<i>Приложение Е.....</i>	<i>110</i>

## Введение

Понимание явлений физики излучения, как и всех явлений микромира, невозможно без квантовых представлений, возникших немногим более 100 лет назад. Заслуга в этом принадлежит выдающемуся немецкому физiku Максy Планку. Ему удалось объяснить и аналитически описать спектральное распределение света, излучаемого нагретыми телами, и решить проблему, перед которой классическая физика оказалась бессильной. Планк первым высказал гипотезу о квантовании энергии осциллятора, несовместимую с принципами классической физики. Именно эта гипотеза, развитая впоследствии трудами многих выдающихся ученых, дала толчок процессу пересмотра и ломки старых понятий, который завершился созданием квантовой физики.

Квантовая гипотеза, представление о фотонах и процессе излучения, как о квантовом переходе атомной системы из одного энергетического состояния в другое, позволили также объяснить закономерности фотоэффекта, эффекта Комптона и ряд других эффектов, непонятных с точки зрения классической волновой теории света. Особенно отчетливо квантовые свойства проявились в области рентгеновского и  $\gamma$ -излучения. Квантовый характер излучения и поглощения был использован Н. Бором для объяснения закономерностей, наблюдаемых в спектрах разреженных газов. Эти же представления необходимы для введения понятия индуцированного излучения и объяснения принципов работы лазеров.

Предлагаемое учебное пособие посвящено основам квантовой теории излучения и включает рассмотрение вопросов теплового излучения, взаимодействия излучения с веществом и возникновения спектров излучения атомов, а также связь этих вопросов с фундаментальными проблемами физики.

В пособии излагаются основные идеи, их физический смысл, методы исследования и результаты, полученные современной физикой. При этом обращено внимание на преемственность современной и классической физики, непреходящую ценность результатов классической теории, без усвоения которых трудно проникнуться идеями современной квантовой физики. Вопросы истории, экспериментального обоснования физических законов, применения их в технике и других науках затронуты в пособии лишь постольку, поскольку это необходимо для понимания изучаемых разделов курса.

Для более полного понимания и усвоения предлагаемого материала рекомендуется сочетать его изучение с разбором решений задач, приведенных в пособии. К каждой главе даны контрольные вопросы и задачи. В пособие включены также тесты, позволяющие оценить уровень подготовки по рассмотренным вопросам.

# 1 Тепловое излучение

Под тепловым (или температурным) излучением понимают свечение нагретых тел, при котором электромагнитное излучение, испускаемое веществом, возникает за счет внутренней энергии тела (излучающие атомы оказываются в возбужденном состоянии за счет энергии теплового движения). Испускаемое источником излучение уносит с собой энергию. Существует много различных механизмов подвода энергии к источнику излучения. В случае теплового излучения необходимая энергия сообщается нагреванием, т. е. подводом тепла. Этот вид излучения представлял для физиков конца 19 века особый интерес, так как в отличие от всех других видов люминесценции, тепловое излучение может находиться в состоянии термодинамического равновесия с нагретыми телами.

Объяснение особенностей теплового излучения сыграло огромную роль в истории физики. Дело в том, что к концу 19 века считалось, что развитие физики практически завершено. Действительно, законы классической физики (механики, молекулярной физики, электромагнетизма, теории волн и т.д.) объясняли почти все наблюдаемые на опыте явления. Существовало только несколько опытных фактов, теоретического обоснования которых не было найдено. Но многие исследователи работали над решением этих проблем и думали, что в ближайшее время, как только будут объяснены эти, казалось бы, незначительные моменты, строительство стройного здания физики будет завершено.

Тепловое излучение являлось одним из таких, не нашедших своего объяснения, явлений. Изучая закономерности теплового излучения тел, физики надеялись установить мост между термодинамикой и оптикой.

Опыты показывали, что тепловое излучение имеет сплошной спектр, положение максимума которого зависит от температуры вещества. Примерный график зависимости интенсивности излучения  $I$  от длины волны  $\lambda$  для нескольких температур излучающего тела  $T$  представлен на рисунке 1.1.

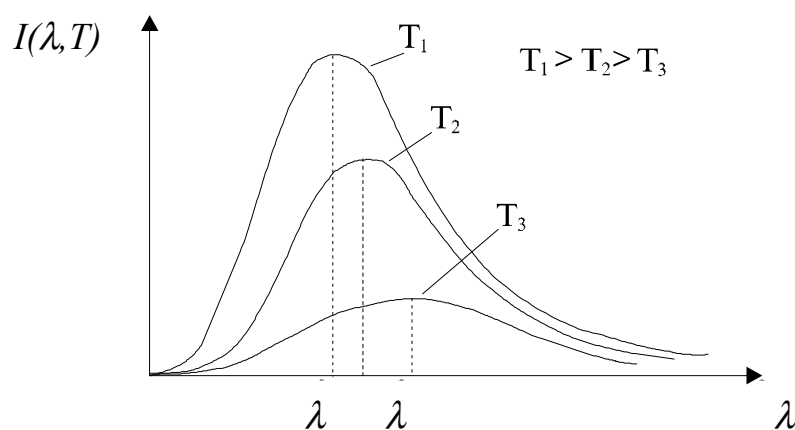


Рисунок 1.1 – Графики зависимости интенсивности излучения  $I$  от длины волны  $\lambda$  для нескольких температур излучающего тела  $T$

На протяжении многих лет ученые пытались теоретически обосновать особенности спектра теплового излучения, но, в лучшем случае, им удавалось решить только некоторые частные задачи, а иногда их безупречные с точки зрения классической физики выкладки приводили к абсурдным результатам. И только в 1900 г. Макс Планку удалось найти окончательное теоретическое решение задачи теплового излучения. Необходимо отметить, что решение это было найдено путем принципиального изменения основных положений физики – путем создания теории квантов. Эта новая теория оказалась столь важной и плодотворной, что дальнейшее развитие ее составило главное содержание теоретической физики 20 века. И в настоящее время квантовая теория является неотъемлемой частью почти всех областей современной физики.

### **1.1 Основные понятия и характеристики излучения**

Если в замкнутую полость с зеркально отражающими стенками поместить несколько тел, нагретых до различной температуры, то, как показывает опыт, такая система с течением времени приходит в состояние теплового равновесия, при котором все тела приобретают одинаковую температуру. Тела обмениваются энергией только путем испускания и поглощения лучистой энергии. В состоянии равновесия процессы испускания и поглощения энергии каждым телом в среднем компенсируют друг друга. Если за единицу времени вещество излучает и поглощает одинаковое количество лучистой энергии в любом спектральном диапазоне и в любом направлении, то говорят, что излучение находится в термодинамическом равновесии с веществом. Такое излучение называется равновесным или черным.

Для равновесного излучения можно ввести понятие температуры излучения, которая принимается равной температуре излучающего вещества. Плотность энергии равновесного излучения и его спектральный состав зависят только от установившейся температуры.

Если через малое отверстие заглянуть внутрь полости, в которой установилось термодинамическое равновесие между излучением и нагретыми телами, то глаз не различит очертаний тел и зафиксирует лишь однородное свечение всей полости в целом.

Пусть одно из тел в полости обладает свойством поглощать всю падающую на его поверхность лучистую энергию любого спектрального состава. Такое тело называют абсолютно черным. При заданной температуре собственное тепловое излучение абсолютно черного тела, находящегося в состоянии теплового равновесия с излучением, должно иметь тот же спектральный состав, что и окружающее это тело равновесное излучение. В противном случае равновесие между абсолютно черным телом и окружающим его излучением не могло бы установиться. Поэтому проблема сводится к изучению спектрального состава излучения абсолютно черного тела. Решить эту проблему классическая физика оказалась не в состоянии.

Для установления равновесия в полости необходимо, чтобы каждое тело испускало ровно столько лучистой энергии, сколько оно и поглощает. Это одна из важнейших закономерностей теплового излучения. Отсюда следует, что абсолютно черное тело при заданной температуре испускает с поверхности единичной площади в единицу времени больше лучистой энергии, чем любое другое тело.

Абсолютно черных тел в природе не бывает, но есть тела, достаточно близкие к абсолютно черным в определенном диапазоне частот. Для видимого света такими объектами являются, например, сажа и черный бархат. Высокие поглощающие свойства этих материалов отчасти объясняются их пористостью, благодаря чему свет, попавший на них, испытывает несколько отражений, прежде чем получает возможность выйти из толщи материала.

Наиболее приближающейся по своим свойствам к абсолютно черному телу моделью является замкнутая полость с небольшим отверстием (рисунок 1.2).

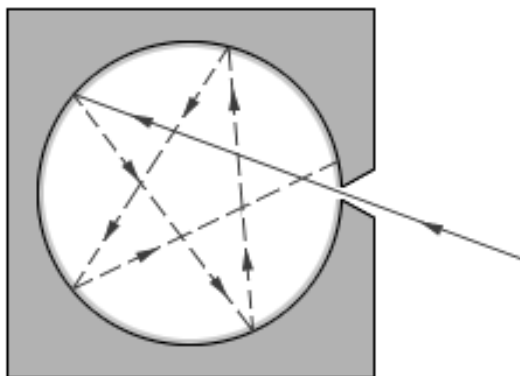


Рисунок 1.2 – Модель абсолютно черного тела

Действие устройства основано на принципе многократного отражения. Излучение, проникающее через отверстие внутрь полости, частично поглощается стенками полости, частично рассеивается или отражается и вновь попадает на стенки. Повторные поглощения на стенках приводят к тому, что практически все излучение любой частоты поглощается такой полостью. Благодаря малым размерам отверстия, луч должен претерпеть много отражений, прежде чем он сможет выйти наружу.

После многочисленных отражений излучение будет практически полностью поглощено стенками, и отверстие снаружи будет казаться совершенно черным. Но если полость нагрета до определенной температуры  $T$ , и внутри установилось тепловое равновесие, то собственное излучение полости, выходящее через отверстие, будет излучением абсолютно черного тела. С увеличением температуры внутри полости будет возрастать энергия выходящего из отверстия излучения и изменяться его спектральный состав. Именно таким образом моделируется абсолютно черное тело во всех экспериментах по исследованию теплового излучения.



### 1.1.1 Поток и интенсивность излучения

Пусть за время  $dt$  какая-либо поверхность  $dS$  излучает энергию  $dW$ . Поток излучения  $\Phi$  с поверхности  $dS$  называется

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (1.1)$$

Энергия излучения, проходящая через единичную площадку за единицу времени при условии, что площадка ориентирована перпендикулярно направлению распространения энергии, называется интенсивностью излучения  $I$ . Очевидно,

$$I = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (1.2)$$

Если дано распределение излучения в виде спектра по частоте, то интенсивность можно представить интегралом

$$I = \int_0^{\infty} I_{\omega} d\omega, \quad (1.3)$$

где  $I_{\omega}$  – интенсивность излучения частоты  $\omega$ .

### 1.1.2 Объемная плотность энергии

Обозначим через  $w$  объемную плотность энергии излучения, т.е. количество энергии излучения в единице объема пространства. Если в объеме  $dV$  содержится излучение с энергией  $dW$ , то, очевидно,

$$w = \frac{dW}{dV}. \quad (1.4)$$

Объемную плотность энергии можно разложить по частотам или длинам волн, т.е. представить в виде

$$w = \int_0^{\infty} w_{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} w_{\lambda} d\lambda. \quad (1.5)$$

Величины  $(w_{\omega}d\omega)$  и  $(w_{\lambda}d\lambda)$  имеют смысл объемной плотности лучистой энергии, приходящейся на интервал частот  $\omega \div (\omega+d\omega)$  или интервал длин волн  $\lambda \div (\lambda+d\lambda)$  соответственно. Величины  $w_{\omega}$  и  $w_{\lambda}$  называются

спектральными плотностями лучистой энергии. Если речь идет об одном и том же спектральном интервале, но представленном в различных формах, то

$$w_{\omega} d\omega = w_{\lambda} d\lambda. \quad (1.6)$$

Но длина волны  $\lambda$

$$\lambda = 2\pi c / \omega, \quad (1.7)$$

где  $c$  – скорость света. Дифференцируя это выражение, получим:

$$d\lambda = -2\pi c d\omega / \omega^2, \quad (1.8)$$

откуда

$$d\lambda / \lambda = -d\omega / \omega. \quad (1.9)$$

Знак минус означает, что с возрастанием частоты длина волны убывает. Таким образом, считая величины  $d\omega$  и  $d\lambda$  положительными, можно написать:

$$w_{\omega} = \frac{\lambda}{\omega} w_{\lambda}. \quad (1.10)$$

Можно показать, что

$$w_{\omega} = \frac{4\pi}{c} I_{\omega}, \quad (1.11)$$

и поэтому

$$w = \frac{4\pi}{c} I. \quad (1.12)$$

### 1.1.3 Испускательная способность

Распределение энергии по частоте в тепловом излучении любого тела характеризуется его спектральной испускательной способностью (или просто испускательной способностью, или излучательной способностью)  $r(\omega, T)$ , под которой понимают поток (или мощность) излучения с единицы поверхности тела в единичном интервале частот. Если  $dW(\omega, T)$  – энергия, излучаемая единицей поверхности тела, имеющего температуру  $T$ , в единицу времени в диапазоне частот от  $\omega$  до  $(\omega + d\omega)$  по всем направлениям, то испускательная способность есть

$$r(\omega, T) = \frac{dW(\omega, T)}{d\omega}. \quad (1.13)$$

Испускательная способность в сильной степени зависит от температуры излучающего тела. Ее можно также представить как функцию не частоты  $\omega$ , а длины волны  $\lambda$ . Аналогично (1.10) легко получить, что

$$r(\omega, T) = \frac{\lambda}{\omega} r(\lambda, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} r(\lambda, T). \quad (1.14)$$

Можно показать, что

$$r(\omega, T) = \frac{c}{4} w_\omega(\omega, T). \quad (1.15)$$

Произведение  $r(\omega, T)\Delta\omega$  (или  $r(\lambda, T)\Delta\lambda$ ) равно мощности излучения, испускаемого единичной площадкой поверхности по всем направлениям в интервале  $\Delta\omega$  частот ( $\Delta\lambda$  длин волн).

#### 1.1.4 Энергетическая светимость

Полный поток энергии, испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям (в пределах телесного угла  $2\pi$ ) во всем спектральном диапазоне называется энергетической светимостью или интегральной светимостью тела  $R(T)$ . Энергетическая светимость является функцией температуры. Очевидно, что

$$R(T) = \frac{d\Phi}{dS} = \int dW(\omega, T) = \int_0^\infty r(\omega, T)d\omega, \quad (1.16)$$

или

$$R(T) = \frac{d\Phi}{dS} = \int dW(\lambda, T) = \int_0^\infty r(\lambda, T)d\lambda. \quad (1.17)$$

Функцию  $r(\lambda, T)$  (или  $r(\omega, T)$ ) часто называют спектральной светимостью или спектральной плотностью энергетической светимости.

#### 1.1.5 Поглощательная способность

Любое тело может не только излучать энергию, но и поглощать падающий на него поток излучения. Однако, как правило, тело поглощает

лишь часть излучения, падающего на него, т.к. часть энергии может отражаться или рассеиваться. Если на единицу поверхности тела в единицу времени в диапазоне частот от  $\omega$  до  $(\omega+d\omega)$  падает поток энергии  $d\Phi(\omega, T)$ , и часть  $d\Phi'(\omega, T)$  этого потока поглощается, то поглощательной способностью тела называется величина

$$a(\omega, T) = \frac{d\Phi'(\omega, T)}{d\Phi(\omega, T)}. \quad (1.18)$$

Поглощательная способность абсолютно черного тела равна единице для всех частот и температур.

## 1.2 Законы теплового излучения

### 1.2.1 Закон Кирхгофа

Легко наблюдать, что при одинаковой температуре тела со слабой поглощательной способностью гораздо хуже излучают свет, чем тела с большой поглощательной способностью. Действительно, нагревая на пламени газовой горелки черный грифель карандаша и кварцевый или стеклянный стержень, можно заметить, что грифель начинает светиться ярко-белым светом, в то время как слабое красноватое свечение стеклянного стержня едва заметно.

Закон Кирхгофа дает соотношение между испускательной и поглощательной способностью тел и гласит: отношение испускательной и поглощательной способностей тела не зависит от природы тела, т.е.

$$\frac{r(\omega, T)}{a(\omega, T)} = f(\omega, T) \quad (1.19)$$

есть универсальная для всех тел функция частоты и температуры.

Применим этот закон к абсолютно черному телу. Обозначая для него испускательную способность через  $r_0(\omega, T)$  и учитывая, что поглощательная способность абсолютно черного тела  $a_0(\omega, T)=1$ , получим:

$$\frac{r(\omega, T)}{a(\omega, T)} = \frac{r_0(\omega, T)}{a_0(\omega, T)} = \frac{r_0(\omega, T)}{1} = f(\omega, T). \quad (1.20)$$

Отсюда виден смысл универсальной функции Кирхгофа:  $f(\omega, T)$  – это испускательная способность абсолютно черного тела  $r_0(\omega, T)$ .

Закон Кирхгофа несложно вывести исходя из термодинамических соображений. Покажем это.

Пусть внутри полости с идеально отражающими стенками, непрозрачными для электромагнитных волн, находятся два тела: М – абсолютно черное и N – серое (т.е. поглощательная способность его поверхности меньше единицы) (рисунок 1.3).

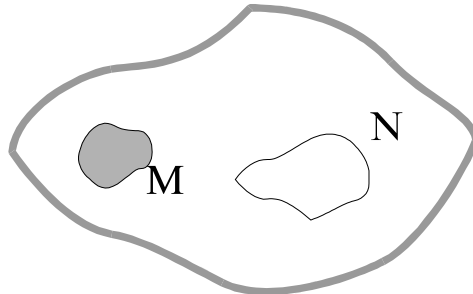


Рисунок 1.3 – К выводу закона Кирхгофа

Очевидно, с течением времени в полости установится термодинамическое равновесие, т.е. тела М и N будут иметь одну температуру  $T$ . Так как тела находятся в состоянии теплового равновесия, то количество энергии, излучаемой и поглощаемой телом М одинаково. Это же утверждение справедливо и для тела N. Пусть  $r(\omega, T)$  и  $a(\omega, T)$  – испускательная и поглощательная способность тела N,  $r_0(\omega, T)$  – испускательная способность тела М. По определению

$$a(\omega, T) = d\Phi'_{IN} / d\Phi_{IN}, \quad (1.21)$$

$$r(\omega, T) = d\Phi_{0N} / d\omega, \quad (1.22)$$

где  $d\Phi_{0N}$  – поток энергии, излучаемый единицей поверхности тела N в диапазоне частот от  $\omega$  до  $(\omega + d\omega)$ ;  $d\Phi_{IN}$  и  $d\Phi'_{IN}$  – потоки энергии, падающей на единицу поверхности тела N, и поглощаемый ею в единицу времени в диапазоне частот от  $\omega$  до  $(\omega + d\omega)$ .

Но, исходя из условия теплового равновесия, должны выполняться следующие условия:

$$d\Phi'_{IN} = d\Phi_{0N}, \quad (1.23)$$

$$d\Phi_{IN} = d\Phi_{0M}, \quad (1.24)$$

где  $d\Phi_{0M}$  – поток энергии, излучаемый единицей площади поверхности тела М в диапазоне частот от  $\omega$  до  $(\omega + d\omega)$ .

Тогда

$$\frac{r(\omega, T)}{a(\omega, T)} = \frac{d\Phi_{0N}}{d\omega} \frac{d\Phi_{1N}}{d\Phi'_{1N}}. \quad (1.25)$$

Воспользовавшись (1.23), (1.24) и преобразовав (1.25), получим закон Кирхгофа (1.19):

$$\frac{r(\omega, T)}{a(\omega, T)} = \frac{d\Phi_{0N}}{d\omega} \frac{d\Phi_{1N}}{d\Phi_{0N}} = \frac{d\Phi_{0M}}{d\omega} = r_0(\omega, T). \quad (1.26)$$

Опыты показывают, что зависимости испускательной способности абсолютно черного тела от длины волны для разных температур имеют вид, показанный на рисунке 1.1.

Закон Кирхгофа ставит в центре внимания теории теплового излучения функцию  $r_0(\omega, T) = f(\omega, T)$  – универсальную функцию Кирхгофа или испускательную способность абсолютно черного тела. Определение вида этой функции явилось основной задачей учения о тепловом излучении.

Указанное решение было получено не сразу. К концу 19 века излучение абсолютно черного тела было хорошо изучено экспериментально. Теоретически и экспериментально был установлен закон, определяющий энергетическую светимость абсолютно черного тела (закон Стефана-Больцмана), затем были определены некоторые основные характеристики искомой функции в зависимости от  $\omega$  для разных  $T$ , и, наконец, после ряда неудачных попыток (Рэлей, Джинс, Вин и др.) удалось найти окончательное теоретическое решение задачи (Макс Планк, 1900 г.). Решение это было найдено только путем принципиального изменения основных положений физики – путем создания теории квантов.

### 1.2.2 Закон Стефана-Больцмана

Закон Стефана-Больцмана устанавливает зависимость энергетической светимости от температуры.

В 1879 г. на основе анализа экспериментальных данных Йозеф Стефан пришел к заключению, что суммарная энергия, испускаемая в единицу времени с единицы площади поверхности тела, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры излучателя. Стефан сформулировал свой закон для произвольного тела, однако последующие более точные измерения показали неправильность его выводов. В 1884 г. Л. Больцман теоретически на основе термодинамических рассуждений показал, что энергетическая светимость (интегральная светимость) абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры  $T$ :

$$R(T) = \int_0^{\infty} r_0(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (1.27)$$

где  $\sigma=5,671 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана-Больцмана. Этот закон получил название закона Стефана-Больцмана.

Если излучающее тело не является абсолютно черным, то его энергетическая светимость определяется следующим выражением:

$$R'(T) = k\sigma T^4, \quad (1.28)$$

где  $k$  – коэффициент серости тела ( $k < 1$ ). Строго говоря, в природе нет серых тел, однако в пределах сравнительно узких спектральных диапазонов многие тела могут рассматриваться как серые.

### 1.2.3 Закон Вина

Закон Стефана-Больцмана определяет вид зависимости энергетической светимости от температуры, но не дает сведений о частотной зависимости энергии излучения, т.е. вид функции  $r_o(\omega, T)$  остается неизвестным.

В 90-х годах 19 века были выполнены тщательные экспериментальные измерения спектрального распределения излучения абсолютно черного тела, которые показали, что при каждом значении температуры  $T$  зависимость  $r_o(\lambda, T)$  имеет ярко выраженный максимум (рисунок 1.4). С увеличением температуры максимум смещается в область коротких длин волн.

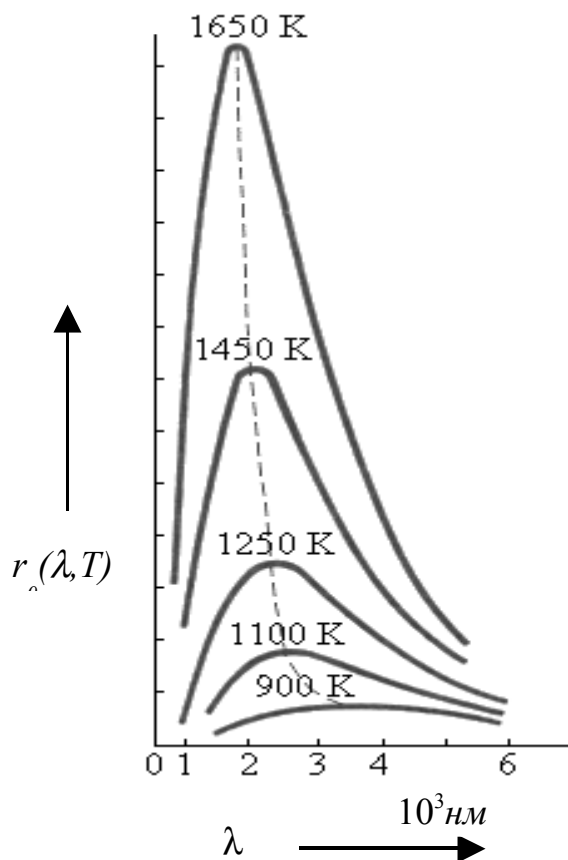


Рисунок 1.4 – Спектральное распределение  $r_o(\lambda, T)$  излучения абсолютно черного тела при различных температурах

В 1893 г. Вин, опираясь на законы термодинамики и электродинамики, определил характер зависимости испускательной способности абсолютно черного тела от частоты и температуры:

$$r_0(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (1.29)$$

где  $F$  – некоторая функция одного аргумента  $\omega/T$ , вид которой Вину определить не удалось.

Хотя функция  $F$  неизвестна, но из закона Вина (1.29) получается ряд важных следствий, наиболее известное из которых – правило смещения Вина. Оказывается, что длина волны, соответствующая максимуму испускательной способности ( $\lambda_m$  на рисунке 1.1), обратно пропорциональна температуре. Докажем это.

Воспользовавшись соотношением (1.14), закон Вина (1.29) можно переписать в виде

$$r_0(\lambda, T) = \frac{(2\pi c)^4}{\lambda^5} F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right). \quad (1.30)$$

Если функция  $r_0(\lambda, T)$  достигает для данной температуры максимума при  $\lambda = \lambda_m$ , то должно выполняться равенство

$$\frac{d}{d\lambda} r_0(\lambda, T)|_{\lambda = \lambda_m} = 0. \quad (1.31)$$

Продифференцировав выражение (1.30), с учетом (1.31) получим уравнение:

$$5F\left(\frac{2\pi c}{\lambda_m T}\right) + \frac{c}{\lambda_m T} F'\left(\frac{2\pi c}{\lambda_m T}\right) = 0. \quad (1.32)$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка вида  $af(x) + xf'(x) = 0$ . В теории дифференциальных уравнений показывается, что уравнения такого типа имеют решения только при  $x = \text{const}$ . Таким образом, получается соотношение

$$\lambda_m T = \text{const} = b, \quad (1.33)$$

где  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная Вина. Формула (1.33) выражает закон смещения Вина, который гласит: длина волны  $\lambda_m$ , на которую приходится



максимум энергии излучения абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре  $T$ .

Итак, с увеличением температуры максимум смещается в область коротких длин волн, причем произведение температуры  $T$  на длину волны  $\lambda_m$ , соответствующую максимуму, остается постоянным.

При практически достижимых в лабораторных условиях температурах максимум излучательной способности  $r_0(\lambda, T)$  лежит в инфракрасной области. Только при  $T \geq 5 \cdot 10^3 \text{ K}$  максимум попадает в видимую область спектра. Максимум энергии излучения Солнца приходится примерно на  $470 \text{ нм}$  (зеленая область спектра), что соответствует температуре наружных слоев Солнца около  $6200 \text{ K}$  (если рассматривать Солнце как абсолютно черное тело).

#### 1.2.4 Формула Рэля-Джинса

Успехи термодинамики, позволившие теоретически вывести законы Стефана-Больцмана и Вина, вселяли надежду, что из термодинамических соображений удастся получить всю кривую спектрального распределения излучения черного тела  $r_0(\lambda, T)$ . В 1900 году эту проблему пытался решить знаменитый английский физик Д. Релей, который в основу своих рассуждений положил теорему классической статистической механики о равномерном распределении энергии по степеням свободы в состоянии термодинамического равновесия. Эта теорема была применена Релеем к равновесному излучению в полости, что позволило ему получить аналитическое выражение для объемной плотности энергии равновесного излучения  $w_\omega(\omega, T)$ :

$$w_\omega(\omega, T) \sim \omega^2 kT, \quad (1.34)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Спустя пять лет Джинс развил метод, предложенный Релеем, и получил уточненное выражение для объемной плотности энергии излучения абсолютно черного тела:

$$w_\omega(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \quad (1.35)$$

Выражение (1.35) получило название формулы Рэля-Джинса для теплового излучения. Воспользовавшись (1.15), формулу Рэля-Джинса можно записать для испускательной способности абсолютно черного тела

$$r_0(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (1.36)$$

или, для зависимости излучательной способности абсолютно черного тела от длины волны  $\lambda$  и температуры  $T$ :

$$r_0(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT. \quad (1.37)$$

Эта формула хорошо согласуется с экспериментальными данными при больших длинах волн (рисунок 1.5), поэтому она с успехом используется в длинноволновой инфракрасной области спектра и в радиодиапазоне.

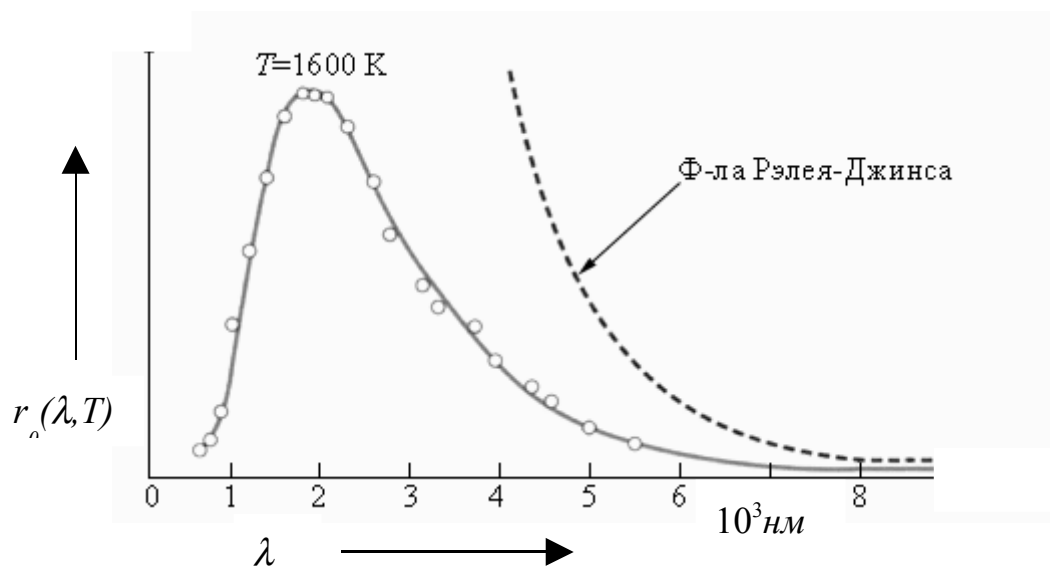


Рисунок 1.5 – Сравнение закона распределения энергии по длинам волн  $r_0(\lambda, T)$  в излучении абсолютно черного тела с формулой Рэля-Джинса при  $T=1600\text{ K}$

При коротких длинах волн (больших частотах), соответствующих ультрафиолетовой части спектра, наблюдается резкое расхождение опытных данных с формулой Рэля-Джинса. Кроме того, интегрирование выражения (1.36) по всему частотному диапазону дает бесконечно большое значение, т.е. энергетическая светимость абсолютно черного тела должна равняться бесконечности при любой температуре, отличной от абсолютного нуля, и, следовательно, равновесие между нагретым телом и излучением в замкнутой полости может установиться только при абсолютном нуле температуры. Получалось, что безупречная с точки зрения классической физики формула (1.36) приводила к абсурдному результату. Эту ситуацию П. Эренфест назвал “ультрафиолетовой катастрофой”.

Таким образом, представленный «классический» вывод приводит к формуле, которая находится в резком противоречии с опытом. Стало ясно, что решить задачу о спектральном распределении излучения абсолютно

черного тела в рамках существующих теорий невозможно. Эта задача была успешно решена М. Планком на основе новой идеи, чуждой классической физике.

### 1.3 Формула Планка для теплового излучения

Многочисленные попытки установить единый закон теплового излучения не дали общего решения задачи и приводили к заключениям, согласующимся с опытом только в ограниченном интервале частот. Причина этих неудач оказалась лежащей чрезвычайно глубоко. Дело в том, что законы классической физики имеют ограниченную область применения.

Окончательное решение задачи теплового излучения, – определение явного вида функции Кирхгофа, было найдено Максом Планком в 1900 г. На основе гипотезы о прерывистом характере процессов излучения и поглощения телами электромагнитного излучения Планк получил формулу для спектральной светимости абсолютно черного тела.

Изучая опытные данные о зависимости испускательной способности абсолютно черного тела от частоты (рисунок 1.4), Планк пришел к выводу, что функция  $r_0(\omega, T)$  должна иметь вид

$$r_0(\omega, T) = \frac{a\omega^b}{e^{c\omega} - 1}, \quad (1.38)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – некоторые постоянные при данной температуре величины.

Чтобы найти теоретическое решение поставленной задачи, Планк предложил представить каждый атом абсолютно черного тела как гармонический осциллятор частоты  $\omega$ , который может заключать в себе любое количество энергии, и, следовательно, способный излучать за единицу времени любое количество энергии. Тогда моделью абсолютно черного тела будет бесконечная совокупность таких осцилляторов, каждый из которых излучает монохроматическую волну какой-то частоты и энергии, а все вместе они дают излучение абсолютно черного тела. Пользуясь законами электродинамики и статистической физики, описывающими поведение отдельного осциллятора и всей системы в целом, можно получить закон излучения абсолютно черного тела.

Проделав такие вычисления, Планк нашел, что функция Кирхгофа определяется выражением (1.36). Таким образом, совершенно разные по своей методике подходы Рэля и Планка к решению задачи теплового излучения приводили к одинаковому результату, который соответствовал опытным данным в ограниченной области частот.

Анализируя сложившееся положение, Планк заметил, что для испускательной способности абсолютно черного тела получается выражение типа (1.38), если считать, что энергия гармонического осциллятора может принимать не произвольные, а только избранные значения, образующие

дискретный ряд:  $E_0, 2E_0, 3E_0, \dots$ , где  $E_0$  – определенная величина, зависящая только от собственной частоты  $\omega$  осциллятора.

Сделав такое допущение и оставив прежней методику вычислений, Планк получил следующее выражение для испускательной способности:

$$r_0(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{E_0}{e^{kT} - 1}. \quad (1.39)$$

Выражение для  $E_0$  Планк определил из требования, чтобы его формула удовлетворяла закону Вина (1.29). Это возможно только в том случае, если

$$E_0 = \hbar\omega, \quad (1.40)$$

где  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – так называемая постоянная Планка. Часто пользуются постоянной  $h = 2\pi\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

Используя соотношения (1.39) и (1.40), запишем формулу Планка:

$$r_0(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (1.41)$$

Часто формулу Планка записывают в переменных  $\nu, T$ :

$$r_0(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (1.42)$$

а также в переменных  $\lambda, T$ :

$$r_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \quad (1.43)$$

Формула Планка дает превосходное согласие с результатами самых тщательных экспериментальных исследований зависимости испускательной способности абсолютно черного тела от частоты и температуры, и является, таким образом, полным решением задачи об излучении абсолютно черного тела.

Как уже было упомянуто выше, свою знаменитую формулу Планк получил, предположив, что процессы излучения и поглощения нагретым телом электромагнитной энергии происходят не непрерывно, как это принимала классическая физика, а конечными порциями – квантами. Квант – это минимальная порция энергии, излучаемой или поглощаемой телом. По теории Планка, энергия кванта  $E$  прямо пропорциональна частоте излучения  $\nu$ :

$$E = h\nu . \quad (1.44)$$

#### 1.4 Следствия формулы Планка

Легко убедиться, что упоминавшиеся ранее законы теплового излучения – Стефана-Больцмана (1.27), Вина (1.29) (включая правило смещения Вина (1.33)), формула Рэлея-Джинса (1.35), получаются как следствия формулы Планка. При этом из формулы Планка получаются не только внешние формы этих законов, но и значения входящих в них констант – постоянная Стефана-Больцмана  $\sigma$  и постоянная Вина  $b$ . Все это является убедительным доказательством того, что формула Планка верна.

Решение проблемы излучения черного тела ознаменовало начало новой эры в физике. Нелегко было примириться с отказом от классических представлений, и сам Планк, совершив великое открытие, в течение нескольких лет безуспешно пытался понять квантование энергии с позиций классической физики.

##### 1.4.1 Закон Стефана-Больцмана

Согласно формуле Планка (1.42), энергетическая светимость абсолютно черного тела равна

$$R(T) = \int_0^{\infty} r_0(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \quad (1.45)$$

где  $x = h\nu/kT$  – безразмерная переменная интегрирования. Интеграл в выражении (1.45) – табличный, его значение равно  $4\pi/15$ , тогда  $R(T) = \sigma T^4$ ,

где  $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$ , т.е. постоянная  $\sigma$  выражена только через фундаментальные постоянные.

### 1.4.2 Закон Вина и правило смещения Вина

Сравнивая закон Вина (1.29) и формулу Планка (1.41), можно видеть, что они совпадают, если в качестве значения функции  $F(\omega/T)$  выбрать

$$F\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (1.46)$$

Если испускательная способность абсолютно черного тела достигает максимального значения при  $\lambda = \lambda_m$ , то производная по  $\lambda$  от испускательной способности в выражении (1.43) должна обращаться в ноль при  $\lambda = \lambda_m$ . Взяв производную по  $\lambda$  и введя обозначение  $\frac{hc}{kT\lambda_m} = x$ , получаем уравнение

$$xe^x - 5e^x + 5 = 0. \quad (1.47)$$

Единственное решение этого трансцендентного уравнения  $x = 4,965$ , поэтому

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4,965k} = b. \quad (1.48)$$

Полученное выражение полностью совпадает с формулой для правила смещения Вина (1.33).

### 1.4.3 Формула Рэлея-Джинса

Как упоминалось выше, формула Рэлея-Джинса хорошо согласуется с экспериментальными данными для случая больших температур и малых частот, т.е.  $\hbar\omega \ll kT$ . Тогда в выражении (1.41) можно записать

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}, \quad (1.49)$$

и значение испускательной способности абсолютно черного тела будет равно

$$r_0(\omega, T) \approx \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (1.50)$$

что совпадает с формулой Рэлея-Джинса (1.36).

Таким образом, Формула Планка хорошо описывает спектральное распределение излучения абсолютно черного тела при любых частотах.

### 1.5 Контрольные вопросы

- 1) Какое излучение называется тепловым?
- 2) Какое тело называется абсолютно черным?
- 3) Чем отличается серое тело от черного?
- 4) Чем объясняется непрерывный спектр теплового излучения?
- 5) Дайте определение энергетической светимости и излучательной способности. Каковы их размерности?
- 6) Сформулируйте закон Кирхгофа.
- 7) В чем заключается физический смысл универсальной функции Кирхгофа?
- 8) Как и во сколько раз изменится энергетическая светимость абсолютно черного тела, если его термодинамическая температура уменьшится вдвое?
- 9) Сформулируйте закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина.
- 10) Используя формулу Планка, найдите постоянную Стефана-Больцмана.
- 11) При каких условиях из формулы Планка получаются закон Вина и формула Рэлея-Джинса?
- 12) На фарфоровой тарелке на светлом фоне имеется темный рисунок. Почему, если ее быстро вынуть из печи, где она нагревалась до высокой температуры, и рассматривать в темноте, наблюдается светлый рисунок на темном фоне?
- 13) Нарисуйте и сопоставьте кривые  $r_0(\omega, T)$  и  $r_0(\lambda, T)$ .
- 14) Как сместится максимум спектральной плотности энергетической светимости  $r_0(\omega, T)$  абсолютно черного тела с повышением температуры?

### 1.6 Примеры решения задач

1) Какую энергетическую светимость  $R'$  имеет затвердевающий свинец? Температура затвердевания свинца  $T = 327^\circ C = 600K$ . Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры  $k = 0,6$ .

*Решение:*

В соответствии с законом Стефана-Больцмана

$$R' = k\sigma T^4,$$

где  $\sigma = 5,671 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К}^4)$  – постоянная Стефана-Больцмана.

Числовой расчет дает:  $R' = 4,4 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ .

2) Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке  $d = 0,3 \text{ мм}$ , длина спирали  $l = 5 \text{ см}$ . При включении лампочки в сеть напряжением  $U = 127 \text{ В}$  через лампочку течет ток  $I = 0,31 \text{ А}$ . Найти температуру  $T$  спирали. Считать, что по установлению равновесия все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры  $k = 0,31$ .

*Решение:*

Мощность  $P$ , выделяющаяся в нити лампочки, равна

$$P = U \cdot I.$$

Поскольку все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения, справедливо равенство:

$$P = R'S = k\sigma T^4 S,$$

где  $S = \pi dl$  – площадь поверхности вольфрамовой спирали. Приравнявая первые два выражения, получаем:

$$U \cdot I = k\sigma T^4 S,$$

откуда

$$T = \sqrt[4]{\frac{U \cdot I}{\pi k\sigma dl}}.$$

Числовой расчет дает:  $T = 2626 \text{ К}$ .

3) Какую мощность  $P$  надо подводить к зачерненному металлическому шару радиусом  $r = 2 \text{ см}$ , чтобы поддерживать его температуру на  $\Delta T = 27 \text{ К}$  выше температуры окружающей среды ( $T = 293 \text{ К}$ )? Считать, что тепло теряется только вследствие излучения.

*Решение:*

Поскольку вся мощность теряется на излучение, то

$$P = S(R_{T+\Delta T} - R_T) = S(\sigma (T + \Delta T)^4 - \sigma T^4),$$



где  $S = 4\pi r^2$  – площадь поверхности шарика. Поэтому

$$P = 4\pi r^2 \sigma \left( (T + \Delta T)^4 - T^4 \right).$$

Числовой расчет дает:  $P = 0,88 \text{ Вт}$ .

4) Принимая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело с температурой поверхности  $T_C = 6000 \text{ К}$ , оцените среднюю температуру  $T_3$  земной поверхности в предположении, что Земля также является абсолютно черным телом, а роль тепловых процессов внутри Земли пренебрежимо мала. Угловой диаметр Солнца, видимый с Земли, примите равным  $\psi_C = 0,01 \text{ рад}$ .

*Решение:*

В пренебрежении процессами, идущими в недрах Земли, тепловой баланс Земли определяется поглощением энергии солнечного излучения и собственным излучением в пространство. Полный поток энергии  $\Phi$ , излучаемой Солнцем по всем направлениям, в соответствии с законом Стефана-Больцмана равен

$$\Phi = \sigma T_C^4 \cdot 4\pi R_C^2,$$

где  $\sigma = 5,671 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{К}^4)$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $R_C$  – радиус Солнца. Часть полного потока  $\Delta\Phi$  падает на поверхность Земли и поглощается:

$$\Delta\Phi = \Phi \frac{\pi R_3^2}{4\pi r^2} = \sigma T_C^4 \cdot 4\pi R_C^2 \cdot \frac{\pi R_3^2}{4\pi r^2},$$

где  $R_3$  – радиус Земли,  $r$  – расстояние от Земли до Солнца.

Такой же поток энергии Земля должна излучать в пространство, иначе ее температура не будет оставаться постоянной. Приравнявая поток излучаемой Землей энергии

$$\Phi_3 = \sigma T_3^4 \cdot 4\pi R_3^2$$

и поглощаемый ею поток энергии  $\Delta\Phi$ , получим:

$$T_3 = \frac{1}{2} T_C \sqrt{2 \frac{R_C}{r}} = \frac{1}{2} T_C \sqrt{\psi_C}.$$

Из этого выражения видно, что для определения  $T_3$  нужно знать только температуру поверхности Солнца  $T_C$  и его угловой диаметр  $\psi_C = 2 \frac{R_C}{r}$ .

Числовой расчет дает значение  $T_3 = 300 \text{ K}$ . Этот результат весьма близок к реальному значению средней температуры поверхности Земли.

5) Измерения спектрального состава излучения далекой звезды «белого карлика» показали, что максимум излучения в ее спектре приходится на ультрафиолетовую часть спектра с длиной волны  $\lambda_m = 250 \text{ нм}$ . Оцените температуру «белого карлика» в предположении, что звезда излучает как абсолютно черное тело.

*Решение:*

Согласно закону смещения Вина,

$$T = \frac{b}{\lambda_m},$$

где  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная Вина.

Числовой расчет дает  $T = 11590 \text{ K}$ .

6) Вследствие излучения Земля теряет в среднем  $91 \text{ Дж}$  в секунду с каждого  $1 \text{ м}^2$  своей поверхности. Принимая Землю за абсолютно черное тело, определить среднюю температуру  $T$  ее поверхности и длину волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум излучаемой энергии.

*Решение:*

В соответствии с законом Стефана-Больцмана

$$R = \sigma T^4,$$

где  $R = 91 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$  – излучательная способность Земли,

$\sigma = 5,671 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{К}^4)$  – постоянная Стефана-Больцмана. Тогда

$$T = \sqrt[4]{\frac{R}{\sigma}}.$$

Числовой расчет дает  $T = 200 \text{ K} = -73^\circ \text{ C}$ .

Столь низкую среднюю температуру Земля имела бы при отсутствии атмосферы, которая предохраняет планету от чрезмерного охлаждения.

Согласно закону смещения Вина,

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T},$$

где  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная Вина. Числовой расчет дает  $\lambda_m = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 14,5 \text{ мкм}$ . Максимум испускательной способности Земли приходится на инфракрасную часть спектра.

## 1.7 Задачи для самостоятельного решения

1) Абсолютно черное тело имеет температуру  $T_1 = 500 \text{ K}$ . Какова будет температура  $T_2$  тела, если в результате нагревания поток  $\Phi$  излучения увеличится в  $n = 5$  раз?

2) Энергетическая светимость абсолютно черного тела  $R = 10 \text{ кВт/м}^2$ . Определите длину волны  $\lambda_m$ , соответствующую максимуму спектральной плотности энергетической светимости этого тела.

3) Муфельная печь потребляет мощность  $P = 1 \text{ кВт}$ . Температура  $T$  ее внутренней поверхности при открытом отверстии площадью  $S = 25 \text{ см}^2$  равна  $1,2 \text{ кК}$ . Считая, что отверстие печи излучает как абсолютно черное тело, определить, какая часть  $\eta$  мощности рассеивается стенками.

4) Абсолютно черное тело имеет температуру  $T_1 = 3 \text{ кК}$ . При остывании тела длина волны  $\lambda_m$ , соответствующая максимальной спектральной плотности энергетической светимости  $r_0(\lambda, T)_m$ , изменилась на  $\Delta\lambda = 8 \text{ мкм}$ . Определить температуру  $T_2$ , до которой тело охладилось.

5) Абсолютно черное тело нагрели от температуры  $T_1 = 600 \text{ K}$  до  $T_2 = 2400 \text{ K}$ . Определите, как изменилась длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости.

6) При увеличении температуры  $T$  абсолютно черного тела в  $n = 2$  раза длина волны  $\lambda$ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости  $r_0(\lambda, T)_m$ , уменьшилась на  $\Delta\lambda = 400 \text{ нм}$ . Определить начальную  $T_1$  и конечную  $T_2$  температуры тела.

7) Во сколько раз надо увеличить температуру  $T$  абсолютно черного тела, чтобы его энергетическая светимость  $R$  возросла в  $n = 2$  раза?

8) Определить, как и во сколько раз изменится мощность  $P$  излучения абсолютно черного тела, если длина волны  $\lambda_m$ , соответствующая максимальной спектральной плотности энергетической светимости  $r_0(\lambda, T)_m$ , сместилась с  $\lambda_1 = 720 \text{ нм}$  до  $\lambda_2 = 400 \text{ нм}$ .

9) Мощность  $P$  излучения шара радиусом  $R = 10 \text{ см}$  при некоторой постоянной температуре равна  $1 \text{ кВт}$ . Найти эту температуру  $T$ , считая шар серым телом с коэффициентом серости  $k = 0,25$ .

10) Считая никель черным телом, определите мощность, необходимую для поддержания температуры раскаленного никеля  $T = 1453 \text{ K}$  неизменной, если площадь его поверхности  $S = 0,5 \text{ см}^2$ . Потерями энергии пренебречь.

## 2 Квантовые свойства света

### 2.1 Понятие о квантах

При изучении теплового излучения была рассмотрена гипотеза Планка, согласно которой излучение света происходит порциями – квантами. Эта гипотеза легла в основу квантовой теории. Правда, при выводе своей знаменитой формулы для спектральной плотности теплового излучения, Планк приписывал свойства дискретности только процессу испускания излучения, а не самому излучению как таковому. Развивая гипотезу Планка, А. Эйнштейн сделал предположение о том, что дискретность света сохраняется также при его распространении и взаимодействии с веществом, т.е. само электромагнитное излучение состоит из отдельных квантов. Так представление о квантах излучения приобрело законченный вид. В рамках квантовой теории свет представляет собой поток дискретных частиц, позднее названных фотонами.

Согласно гипотезе Эйнштейна, энергия фотона  $E$  зависит от его частоты  $\nu$  (или  $\omega = \nu/2\pi$ ) и равна

$$E = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}, \quad (2.1)$$

где  $h$  ( $\hbar$ ) – постоянная Планка;

$c$  – скорость света;

$\lambda$  – длина волны.

Но, следуя одному из основных выводов специальной теории относительности, с энергией  $E$  неразрывно связана масса  $m$ , причем соотношение между  $E$  и  $m$  дается выражением

$$E = mc^2. \quad (2.2)$$

На этом основании фотону можно приписать некоторую массу, величина которой определяется из соотношения

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (2.3)$$

Фотон является релятивистской частицей, поскольку его скорость  $V$  равна скорости света. Если бы масса покоя фотона  $m_0$  была отлична от нуля, то его релятивистская масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (2.4)$$

была бы бесконечно большой. Поэтому надо допустить, что для фотона  $m_0=0$ .

Если фотон обладает энергией, то он должен обладать и импульсом. Фотон движется в вакууме со скоростью света  $c$ , следовательно, импульс фотона  $p$  равен:

$$p = mc = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (2.5)$$

По направлению импульс фотона совпадает с направлением распространения света.

Гипотеза Эйнштейна была подтверждена многочисленными фактами (опыт Боте, эффект Комптона, наличие коротковолновой границы у тормозного рентгеновского излучения, фотоэффект и др.) и легла в основу объяснения ряда оптических явлений, с которыми не могла справиться волновая теория света.

Одним из наиболее убедительных опытов, показывающих, что энергия электромагнитного излучения не распространяется равномерно во все стороны, как это следует из волновой теории, а излучается то в одном, то в другом направлении в виде дискретных квантов, является опыт Боте (1924 г.).

В этом опыте (рисунок 2.1) тонкая металлическая фольга  $F$  освещалась рентгеновскими лучами малой интенсивности, вызывающими в фольге слабую рентгеновскую флюоресценцию (послесвечение). Рентгеновское излучение от фольги попадало на два счетчика ионизирующего излучения  $Сч1$  и  $Сч2$  (счетчики Гейгера). Чувствительность таких счетчиков настолько велика, что они могут регистрировать отдельные рентгеновские кванты. Срабатывая, счетчики приводили в действие механизмы самописцев  $M1$  и  $M2$ , делающие отметки на движущейся ленте  $L$ . В результате было получено, что отметки на ленте от двух самописцев, связанные с моментами попадания в счетчики рентгеновских квантов, абсолютно случайны. Этот факт можно было объяснить лишь беспорядочным попаданием рентгеновских квантов, рассеиваемых фольгой то в одном, то в другом направлении, тогда как согласно волновым представлениям излучение от источника должно распространяться равномерно во все стороны.

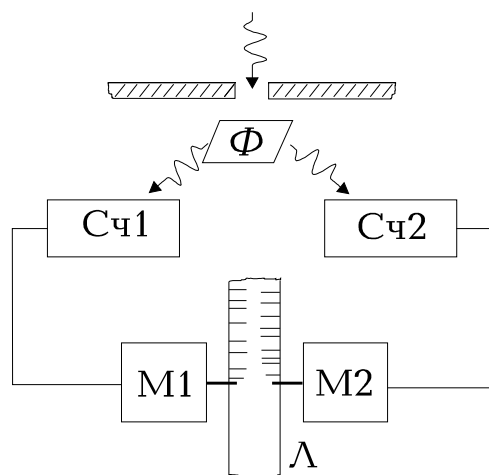


Рисунок 2.1 – Схема опыта Боте

Таким образом, учение о свете, совершив виток длительностью в два столетия, вновь возвратилось к представлениям о световых частицах – корпускулах.

Но это не был механический возврат к корпускулярной теории И. Ньютона. В начале 20 века стало ясно, что свет обладает двойственной природой. При распространении света проявляются его волновые свойства (интерференция, дифракция, поляризация), а при взаимодействии с веществом – корпускулярные (фотоэффект, эффект Комптона). Эта двойственная природа света получила название корпускулярно-волнового дуализма. Позже двойственная природа была открыта у электронов и других элементарных частиц. Классическая физика не может дать наглядной модели сочетания волновых и корпускулярных свойств у микрообъектов. Движением микрообъектов управляют не законы классической механики Ньютона, а законы квантовой механики. Теория излучения абсолютно черного тела, развитая М. Планком, и квантовая теория фотоэлектрического эффекта Эйнштейна лежат в основании этой современной науки.

## 2.2 Фотоэлектрический эффект

Среди разнообразных явлений, в которых проявляются квантовые свойства света, одно из самых важных мест занимает фотоэлектрический эффект. Различают два вида фотоэлектрического эффекта – внешний и внутренний. Внешним фотоэффектом называется испускание электронов веществом при облучении его электромагнитным излучением. При внутреннем фотоэффекте оптически возбужденные электроны остаются внутри освещаемого вещества, не нарушая его электрическую нейтральность.

### 2.2.1 Внешний фотоэффект

Явление внешнего фотоэффекта впервые обнаружил Генрих Герц в 1887 г. при изучении свойств электромагнитных волн. Он заметил, что освещение ультрафиолетовым светом одного из электродов искрового

разрядника, находящегося под напряжением, облегчает образование искры между электродами. Схема опыта показана на рисунке 2.2. Величина искрового промежутка между электродами подбирается так, чтобы искра между ними проскакивала с трудом (1-2 раза в минуту). Если же осветить электрод светом от ртутной лампы, то частота разрядов существенно повышается.

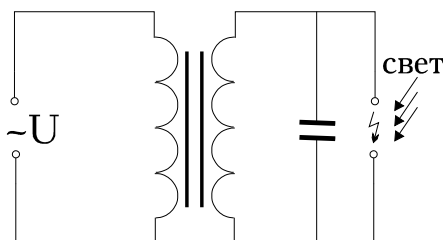


Рисунок 2.2 – Схема опыта Г. Герца

Вообще говоря, фотоэффект можно качественно попытаться объяснить с волновой точки зрения. Действительно, амплитуду вынужденных колебаний свободного электрона (масса  $m$  и заряд  $e$ ) в переменном электрическом поле с амплитудой  $E_0$  и частотой  $\omega$  можно записать в виде  $\frac{eE_0}{m\omega^2}$ . Если амплитуда колебаний электрона будет достаточно большой, он может преодолеть задерживающее поле вблизи поверхности металла и уйти за его пределы. Исходя из волновой теории, можно было ожидать наличие у фотоэффекта следующих свойств:

- электроны не должны покидать металл до тех пор, пока амплитуда их колебаний не превысит некоторого порогового значения;
- энергия выбитых электронов должна возрасти пропорционально  $E_0^2$  (энергия колебаний пропорциональна квадрату их амплитуды);
- если  $E_0 = \text{const}$ , а увеличивается частота электромагнитной волны  $\omega$ , то число испускаемых электронов должно уменьшаться.

Большой вклад в изучение фотоэффекта внес А.Г. Столетов, экспериментально исследовавший это явление в 1888-1890 годах. Наиболее полное исследование явления фотоэффекта было выполнено Ф. Ленардом в 1900 году. К этому времени уже был открыт электрон (Д. Томсон, 1897 г.), и стало ясно, что фотоэффект (или точнее – внешний фотоэффект) состоит в вырывании электронов из вещества под действием падающего на него света.

Принципиальная схема установки для изучения фотоэффекта представлена на рисунке 2.3.

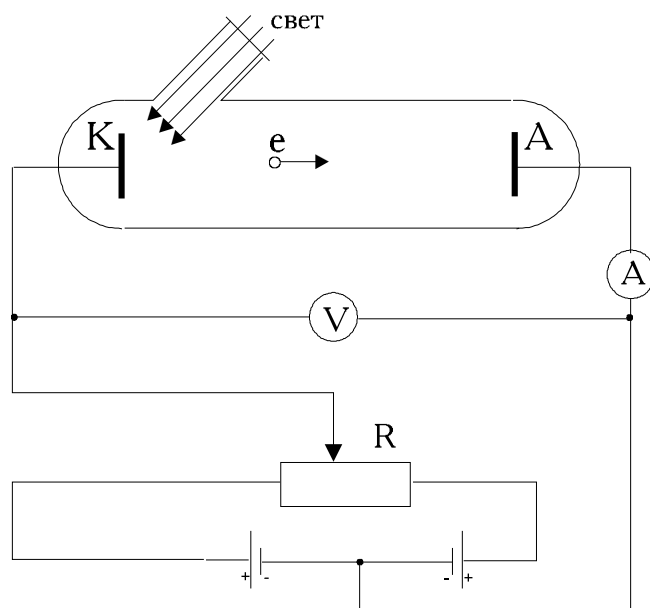


Рисунок 2.3 – Схема экспериментальной установки для изучения фотоэффекта

В экспериментах использовался стеклянный вакуумный баллон с двумя металлическими электродами (катод К из исследуемого металла и анод А), поверхность которых была тщательно очищена. Электроды подключались к батарее так, что с помощью потенциометра R можно было изменять не только значение, но и знак подаваемого на них напряжения  $U$ . Один из электродов (катод К) через кварцевое окошко освещался монохроматическим светом некоторой длины волны  $\lambda$ , и при неизменном световом потоке снималась зависимость силы фототока  $I$  от приложенного напряжения. На рисунке 2.4 изображены типичные кривые такой зависимости, полученные при двух значениях интенсивности светового потока, падающего на катод (частота света в обоих случаях одинакова).

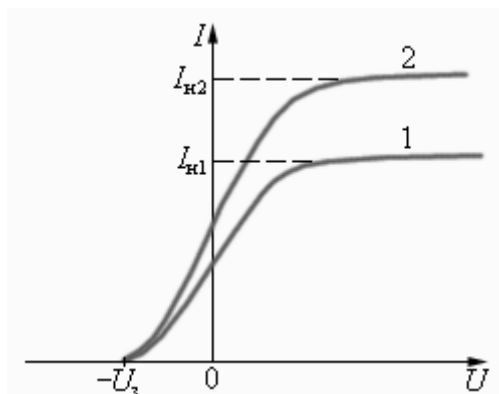


Рисунок 2.4 – Зависимость силы фототока от приложенного напряжения. Кривая 2 соответствует большей интенсивности светового потока.  $I_{н1}$  и  $I_{н2}$  – токи насыщения,  $U_3$  – запирающий потенциал



Кривые показывают, что при достаточно больших положительных напряжениях на аноде А фототок достигает насыщения (максимальное значение – фототок насыщения  $I_n$ ), так как все электроны, вырванные светом из катода, достигают анода:

$$I_n = en, \quad (2.6)$$

где  $n$  – число электронов, испускаемых катодом в единицу времени;  
 $e$  – заряд электрона.

Тщательные измерения показали, что ток насыщения  $I_n$  прямо пропорционален интенсивности падающего света. Когда напряжение на аноде отрицательно, электрическое поле между катодом и анодом тормозит электроны. Анода могут достичь только те электроны, кинетическая энергия которых превышает  $|eU|$ . При отрицательном значении напряжения, по абсолютной величине равном или меньшем  $U = -U_3$ , фототок прекращается, поскольку ни один из электронов, даже обладающий максимальной кинетической энергией  $W_{\max}$ , не может преодолеть задерживающей разности потенциалов и достигнуть анода. Величину  $U_3$  называют запирающим потенциалом. Измеряя  $U_3$ , можно определить максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов:

$$W_{\max} = \frac{mV_{\max}^2}{2} = eU_3, \quad (2.7)$$

где  $V_{\max}$  – максимальная скорость фотоэлектронов.

К удивлению ученых, величина  $U_3$  оказалась не зависящей от интенсивности падающего светового потока. Тщательные измерения показали, что запирающий потенциал линейно возрастает с увеличением частоты  $\nu$  света (рисунок 2.5).

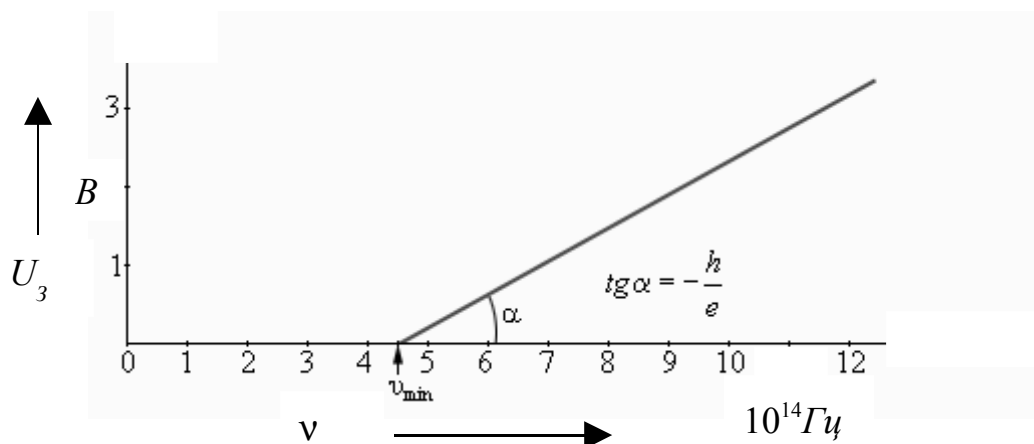


Рисунок 2.5 – Пример зависимости запирающего потенциала  $U_3$  от частоты  $\nu$  падающего света

Облучая катод монохроматическим светом различных частот, Столетов и другие экспериментаторы установили следующие основные закономерности фотоэффекта:

- максимальная кинетическая энергия электронов, покинувших металл в результате фотоэффекта (фотоэлектронов), определяется частотой света  $\nu$  (линейно возрастает с увеличением  $\nu$ ) и не зависит от его интенсивности;
- фототок насыщения, т.е. число фотоэлектронов, вырываемых светом из катода за 1 с, прямо пропорционален интенсивности света;
- для каждого вещества существует так называемая красная граница фотоэффекта – наименьшая частота падающего света  $\nu_{\min}$ , при которой еще возможен внешний фотоэффект;
- фотоэффект практически безынерционен: фототок возникает мгновенно после начала освещения катода при условии, что частота света  $\nu > \nu_{\min}$ .

Легко видеть, что закономерности фотоэффекта, полученные из опыта, в корне противоречили представлениям классической физики о взаимодействии света с веществом. Согласно волновым представлениям, электрон при взаимодействии с электромагнитной световой волной должен был бы постепенно накапливать энергию, и потребовалось бы значительное время, зависящее от интенсивности света, чтобы электрон накопил достаточно энергии для того, чтобы вылететь из катода. Как показывают расчеты, это время должно было бы исчисляться минутами или часами. Однако опыт показывает, что фотоэлектроны появляются немедленно после начала освещения катода. В этой модели невозможно было также понять существование красной границы фотоэффекта. Волновая теория света не могла объяснить независимость энергии фотоэлектронов от интенсивности светового потока, пропорциональность максимальной кинетической энергии частоте света.

Таким образом, электромагнитная теория света оказалась неспособной объяснить эти закономерности.

Теоретическое объяснение наблюдаемых закономерностей фотоэффекта было дано в 1905 году А. Эйнштейном на основе гипотезы М. Планка о том, что свет излучается и поглощается определенными порциями, причем энергия каждой такой порции определяется формулой (1.44). Эйнштейн сделал следующий шаг в развитии квантовых представлений. Он пришел к выводу, что свет частотой  $\nu$  не только испускается отдельными квантами, как это предполагал Планк, но также в виде квантов (фотонов) распространяется в пространстве и поглощается веществом, т.е. свет имеет прерывистую дискретную структуру. Электромагнитная волна состоит из отдельных порций – квантов, впоследствии названных фотонами. Фотоэффект же возникает в результате неупругого столкновения фотона с электроном в материале катода. При взаимодействии с веществом фотон поглощается, а вся его энергия  $h\nu$  целиком передается одному электрону. Часть этой энергии электрон может рассеять при столкновениях с атомами

вещества. Кроме того, часть энергии электрона затрачивается на преодоление потенциального барьера на границе металл-вакуум. Для этого электрон должен совершить работу выхода  $A$ , зависящую от свойств материала катода. Наибольшая кинетическая энергия, которую может иметь вылетевший из катода фотоэлектрон, определяется законом сохранения энергии.

Аналитическую запись закона сохранения энергии при одном акте взаимодействия фотона с электроном в материале катода называют уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + W_{\max}, \quad (2.8)$$

где  $h\nu$  – энергия падающего фотона;

$A$  – работа выхода электрона из материала катода;

$W_{\max}$  – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Если максимальная скорость фотоэлектронов  $V_{\max} \ll c$  ( $c$  – скорость света), то максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов

$$W_{\max} = \frac{mV_{\max}^2}{2}. \quad (2.9)$$

В случае релятивистских электронов ( $V_{\max} \sim c$ ) следует использовать релятивистское выражение для кинетической энергии:

$$W_{\max} = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - V_{\max}^2 / c^2}} - 1 \right). \quad (2.10)$$

Для нерелятивистских электронов уравнение Эйнштейна (2.8) можно записать в следующем виде:

$$\frac{mV_{\max}^2}{2} = eU_3 = h\nu - A. \quad (2.11)$$

Очевидно, что уравнение Эйнштейна полностью объясняет все закономерности внешнего фотоэффекта, наблюдавшиеся ранее в экспериментах. Из уравнения Эйнштейна следуют линейная зависимость максимальной кинетической энергии от частоты и независимость от интенсивности света, существование красной границы, безынерционность фотоэффекта. Общее число фотоэлектронов, покидающих за 1 с поверхность катода, должно быть пропорционально числу фотонов, падающих за то же время на поверхность. Из этого следует, что ток насыщения должен быть прямо пропорционален интенсивности светового потока.

Как следует из уравнения Эйнштейна, тангенс угла наклона прямой, выражающей зависимость запирающего потенциала  $U_3$  от частоты  $\nu$  (рисунок 2.5), равен отношению постоянной Планка  $h$  к заряду электрона  $e$ :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{e}. \quad (2.12)$$

Это позволяет экспериментально определить значение постоянной Планка. Такие измерения были выполнены Р. Милликеном в 1914 году и дали хорошее согласие с числовым значением  $h$ , найденным другими методами (по излучению черного тела и по коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра). Таким образом была доказана фундаментальность квантового подхода к явлениям излучения света и взаимодействия излучения с веществом. Эти измерения позволили также определить работу выхода  $A$ :

$$A = h \cdot \nu_{\min} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{кр}}, \quad (2.13)$$

где  $c$  – скорость света,  $\lambda_{кр}$  – длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта. У большинства металлов работа выхода  $A$  составляет несколько электрон-вольт ( $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ). В квантовой физике часто используется электрон-вольт в качестве энергетической единицы измерения. Значение постоянной Планка, выраженное в электрон-вольтах в секунду, равно  $h = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с}$ .

Среди металлов наименьшей работой выхода обладают щелочные металлы. Например, у натрия  $A = 1,9 \text{ эВ}$ , что соответствует красной границе фотоэффекта  $\lambda_{кр} \approx 680 \text{ нм}$ . Поэтому соединения щелочных металлов используют для создания катодов в фотоэлементах, предназначенных для регистрации видимого света.

В 1921 году за предложенную квантовую теорию фотоэффекта А. Эйнштейну была присуждена Нобелевская премия.

Итак, законы фотоэффекта свидетельствуют, что свет при испускании и поглощении ведет себя подобно потоку частиц, получивших название фотонов или световых квантов.

### 2.2.2 Внутренний фотоэффект. Применение фотоэффекта

Внутренний фотоэффект может происходить в полупроводниках и в диэлектриках. Под действием света часть электронов из валентной энергетической зоны переходит в зону проводимости. Концентрация носителей тока внутри вещества увеличивается, – возникает фотопроводимость, т.е. повышение электропроводности тела под воздействием света. При освещении границы двух полупроводников с

разным типом проводимости (р-n перехода) в области р-n перехода возможно возникновение фото-эдс.

Фотоэффект (как внешний, так и внутренний) используется в фотоэлектронных приборах, получивших разнообразное применение в науке и технике. Основная область применения внешнего фотоэффекта в настоящее время – фотоэлектронные умножители. Фотоэлектронные умножители – приемники светового излучения, усиливающие первоначальный фототок во много раз и позволяющие регистрировать очень слабое излучение, вплоть до отдельных квантов.

Явление внутреннего фотоэффекта очень широко используется как в различных полупроводниковых приемниках света (фоторезисторы, фотодиоды, фототранзисторы, телевизионные видиконы, ПЗС-матрицы и т.д.), так и для непосредственного преобразования световой энергии в электрическую (солнечные батареи).

### 2.3 Эффект Комптона

Концепция фотонов, предложенная А. Эйнштейном в 1905 г. для объяснения фотоэффекта, получила экспериментальное подтверждение в опытах американского физика А. Комптона (1922 г.). Комптон исследовал упругое рассеяние коротковолнового рентгеновского и гамма- излучения на свободных (или слабо связанных с атомами) электронах вещества. Открытый им эффект увеличения длины волны рассеянного излучения, названный впоследствии эффектом Комптона, не укладывается в рамки волновой теории, согласно которой длина волны излучения не должна изменяться при рассеянии. Согласно волновой теории, электрон под действием периодического поля световой волны совершает вынужденные колебания на частоте волны и поэтому излучает рассеянные волны той же частоты. Итак, эффект Комптона состоит в увеличении длины волны коротковолнового (рентгеновского и гамма-) излучения, происходящем при его рассеянии легкими атомами (вернее, электронами, входящими в состав легких атомов).

Схема экспериментальной установки Комптона показана на рис.2.6.

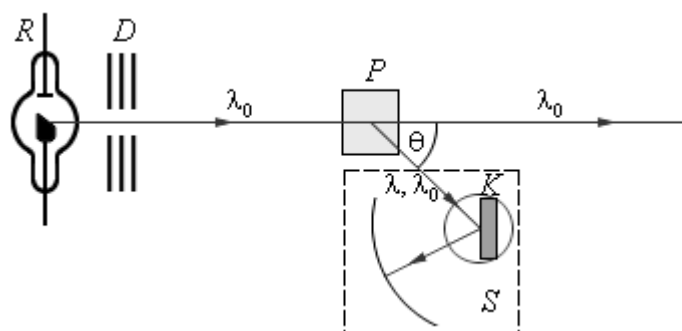


Рисунок 2.6 – Схема эксперимента Комптона

Источником рентгеновских лучей служила рентгеновская трубка R, работающая в режиме излучения характеристического спектра. Узкий пучок

монохроматического рентгеновского излучения с длиной волны  $\lambda_0$  выделялся свинцовыми диафрагмами D и направлялся на рассеивающее вещество-мишень P (графит, алюминий). Для исследования спектрального состава излучения, рассеянного под некоторым углом  $\theta$ , использовался спектрограф рентгеновских лучей S, в котором роль дифракционной решетки играл кристалл K, закрепленный на поворотном столике. Комптон исследовал рассеяние на веществах, состоящих из легких атомов (парафин, графит, бор и др.).

Оказалось, что в рассеянном излучении, наряду с исходной длиной волны  $\lambda_0$ , появляется излучение с длиной волны  $\lambda > \lambda_0$ . При этом изменение длины волны  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  для исследованных веществ не зависело от вида рассеивающего вещества и длины падающей волны  $\lambda_0$ . Это изменение оказалось пропорциональным квадрату синуса половины угла рассеяния  $\theta$ , т.е.

$$\Delta \lambda = 2 \lambda_K \sin^2(\theta / 2), \quad (2.14)$$

где  $\lambda_K = 2,43 \cdot 10^{-12}$  м – постоянная, называемая комптоновской длиной волны электрона.

На рисунке 2.7 представлены кривые распределения интенсивности в спектре излучения, рассеянного под некоторыми углами.

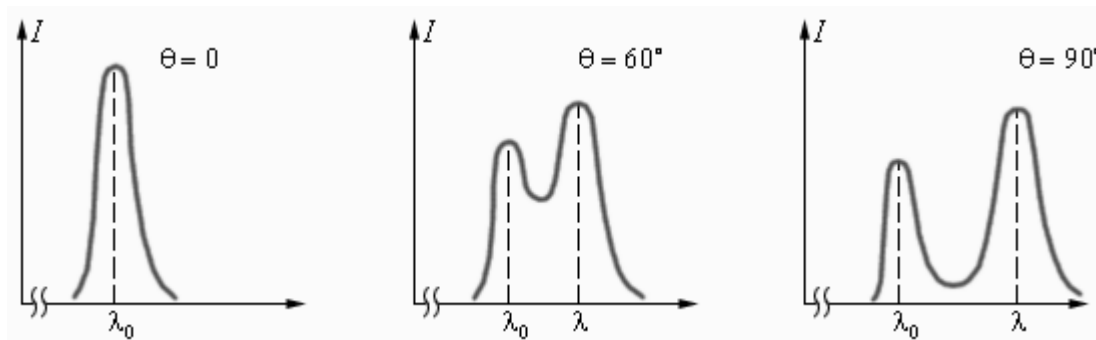


Рисунок 2.7 – Спектры рассеянного излучения

Объяснение эффекта Комптона было дано в 1923 году А. Комптоном и П. Дебаем (независимо) на основе квантовых представлений о природе излучения. Если принять, что излучение представляет собой поток фотонов, то эффект Комптона есть результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества. При этом необходимо использовать тот факт, что в опытах Комптона все легкие атомы (водород, бор, углерод, алюминий и т.д.) ведут себя одинаково. Это позволяет сделать предположение, что процесс рассеяния сводится к упругому столкновению фотона с электронами атома. У легких атомов рассеивающих веществ электроны слабо связаны с ядрами атомов, поэтому в первом приближении их можно считать свободными и рассматривать рассеяние фотонов на этих практически свободных электронах. В процессе столкновения фотон

передает электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами сохранения.

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц – налетающего фотона, обладающего энергией

$$E_0 = h\nu_0 \quad (2.15)$$

и импульсом

$$p_0 = h\nu_0 / c, \quad (2.16)$$

с покоящимся свободным электроном, энергия покоя которого равна

$$E_{e_0} = m \cdot c^2. \quad (2.17)$$

Фотон, столкнувшись с электроном, изменяет направление движения (рассеивается). Импульс фотона после рассеяния становится равным

$$p = h\nu / c, \quad (2.18)$$

а его энергия

$$E = h\nu < E_0. \quad (2.19)$$

Уменьшение энергии фотона означает увеличение длины волны. Энергия электрона после столкновения (с учетом релятивистских эффектов) становится равной

$$E_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (2.20)$$

где  $p_e$  – приобретенный импульс электрона. Закон сохранения энергии записывается в виде

$$E_0 + E_{e_0} = E + E_e \quad (2.21)$$

или

$$h\nu_0 + mc^2 = h\nu + \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.22)$$

Закон сохранения импульса

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e \quad (2.23)$$

можно переписать в скалярной форме, если воспользоваться теоремой косинусов (см. диаграмму импульсов, рисунок 2.8):

$$p_e^2 = \left( \frac{h\nu_0}{c} \right)^2 + \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 - \frac{2h^2}{c^2} \nu_0 \nu \cos \theta \quad (2.24)$$

или

$$p_e^2 c^2 = h^2 \nu_0^2 + h^2 \nu^2 - 2h^2 \nu_0 \nu \cos \theta. \quad (2.25)$$

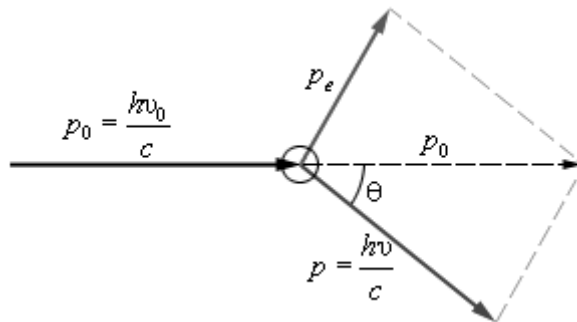


Рисунок 2.8 – Диаграмма импульсов при упругом рассеянии фотона на покоящемся электроне

Выделим в (2.22) слагаемое  $p_e^2 c^2$ :

$$p_e^2 c^2 = h^2 (\nu_0 - \nu)^2 + 2hmc^2 (\nu_0 - \nu). \quad (2.26)$$

Приравняв правые части (2.25) и (2.26), получаем

$$h^2 \nu_0^2 + h^2 \nu^2 - 2h^2 \nu_0 \nu \cos \theta = h^2 \nu_0^2 - 2h^2 \nu_0 \nu + h^2 \nu^2 + 2hmc^2 (\nu_0 - \nu). \quad (2.27)$$

После несложных преобразований получаем:

$$h\nu_0 \nu (1 - \cos \theta) = mc^2 (\nu_0 - \nu). \quad (2.28)$$

Введем в (2.28) вместо частоты  $\nu$  длину волны  $\lambda$ , воспользовавшись соотношениями  $\nu_0 = c/\lambda_0$ ,  $\nu = c/\lambda$ , и  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ , тогда

$$\frac{hc^2}{\lambda_0 \lambda} (1 - \cos \theta) = mc^3 \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0 \lambda}. \quad (2.29)$$



И окончательно

$$\Delta \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2.30)$$

Полученное выражение совпадает с экспериментальной формулой (2.14). Таким образом, теоретический расчет, выполненный на основе квантовых представлений, дал исчерпывающее объяснение эффекту Комптона и позволил выразить комптоновскую длину волны  $\lambda_K$  через фундаментальные константы  $h$ ,  $c$  и  $m$ :

$$\lambda_K = \frac{h}{mc} = 2,426 \cdot 10^{-3} \text{ нм}. \quad (2.31)$$

Расчетное значение  $\lambda_K$  с большой точностью совпадает с полученной ранее экспериментальной величиной.

Как показывает опыт, в рассеянном излучении наряду со смещенной линией с длиной волны  $\lambda$  наблюдается и несмещенная линия с первоначальной длиной волны  $\lambda_0$ . Это объясняется взаимодействием части фотонов с электронами, сильно связанными с атомами. В этом случае фотон обменивается энергией и импульсом с атомом в целом. Из-за большой массы атома по сравнению с массой электрона атому передается лишь ничтожная часть энергии фотона, поэтому длина волны  $\lambda$  рассеянного излучения практически не отличается от длины волны  $\lambda_0$  падающего излучения.

## 2.4 Давление света

Явление давления света на поглощающее или отражающее тело теоретически предсказал еще Максвелл, при этом он исходил из электромагнитной теории света. Так как свет есть поперечная электромагнитная волна, то при падении ее на плоскую поверхность, перпендикулярную направлению распространения волны, электрическая компонента электромагнитной волны (световой вектор) вызывает в веществе упорядоченные колебания заряженных частиц – электронов в направлении светового вектора, т.е. в веществе возникает слабый переменный ток. Магнитное поле световой волны действует на этот ток согласно закону Ампера так, что направление действующей на поверхность силы совпадает с направлением распространения света, т.е. в толщу вещества. Эта сила и создает результирующее давление.

Обычно давление электромагнитного излучения ничтожно мало. Так, например, давление солнечного излучения, приходящего на Землю, на абсолютно поглощающую поверхность составляет примерно  $5 \text{ мкПа}$ . Первые эксперименты по определению давления излучения на отражающие и поглощающие тела, подтвердившие вывод теории Максвелла, были

выполнены П. Н. Лебедевым (1900 г.). Измерения П.Н.Лебедева согласовывались с теорией Максвелла с точностью не хуже 20% и имели огромное значение для утверждения электромагнитной теории Максвелла.

Максвелл получил, что в случае нормального падения света на поверхность с коэффициентом отражения  $\rho$  световое давление будет равно

$$P = \frac{I}{c}(1 + \rho), \quad (2.32)$$

где  $I$  – интенсивность света;

$c$  – его скорость;

или

$$P = w(1 + \rho), \quad (2.33)$$

где  $w$  – объемная плотность энергии падающего излучения.

С точки зрения квантовой природы света его давление следует интерпретировать как результат передачи импульса фотонов поглощающей или отражающей поверхности.

Пусть интенсивность монохроматического света частоты  $\nu$ , падающего нормально на поверхность, равна  $I$ . Обозначим через  $N$  число фотонов, падающих на единицу площади поверхности в единицу времени. Очевидно, что

$$N = I / h\nu. \quad (2.34)$$

Так как импульс каждого фотона  $h\nu/c$ , то он передает поверхности импульс, равный  $h\nu/c$  при поглощении и  $2h\nu/c$  при отражении.

В общем случае если коэффициент отражения поверхности  $\rho$ , то из полного числа  $N$  фотонов  $(1-\rho)N$  фотонов поглощается и  $\rho N$  – отражается. Сообщенный ими единице площади поверхности в единицу времени импульс (а это есть давление  $P$ ) равен

$$P = (1 - \rho) N \frac{h\nu}{c} + \rho N \frac{2h\nu}{c} = N \frac{h\nu}{c} (1 + \rho) = \frac{I}{c} (1 + \rho). \quad (2.35)$$

Таким образом, давление света одинаково успешно объясняется как волновой, так и квантовой теориями.

## 2.5 Коротковолновая граница тормозного рентгеновского излучения

К рентгеновскому относится электромагнитное излучение, занимающее спектральную область между  $\gamma$ - и УФ-излучением в диапазоне длин волн  $\lambda$  от  $10^{-12}$  до  $10^{-7}$  м. Это излучение впервые было обнаружено К. Рентгеном в 1895 году.

Наиболее распространенный источник такого излучения –

рентгеновская трубка (рисунок 2.9), в которой электроны, вырывающиеся в результате термоэлектронной эмиссии из катода К, ускоряются электрическим полем и бомбардируют металлический анод А.

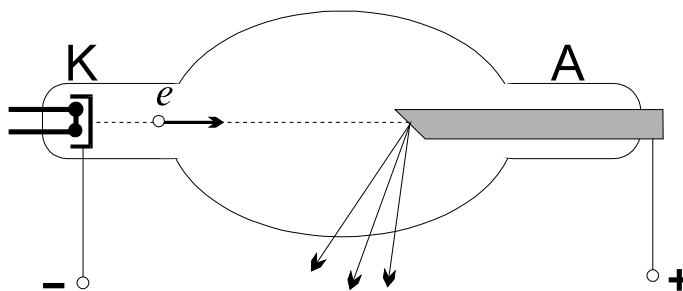


Рисунок 2.9 – Схема рентгеновской трубки

Атомы анода, возбуждаемые электронным ударом, и электроны, теряющие кинетическую энергию при торможении в веществе, испускают рентгеновское излучение. Спектр излучения электронов (тормозное излучение) сплошной. Рентгеновский спектр излучения атомов состоит из отдельных узких спектральных линий, такое излучение называется характеристическим. Характеристическое излучение на фоне тормозного появляется только при достаточно больших значениях ускоряющего напряжения. Особенности характеристического излучения будут рассмотрены позже.

Итак, тормозное рентгеновское излучение испускают электроны при их торможении в электрическом поле или при взаимодействии с атомами вещества анода рентгеновской трубки. Его свойства не зависят от вещества анода. Согласно законам классической электродинамики, тормозное излучение, как и видимый белый свет, должно иметь сплошной спектр, поэтому его иногда называют “белым излучением”. В спектре этого излучения должны присутствовать все длины волн от нуля до бесконечности.

Полученные в опытах спектральные интенсивности тормозного излучения при различных напряжениях на рентгеновской трубке  $U$  представлены кривыми на рисунке 2.10.

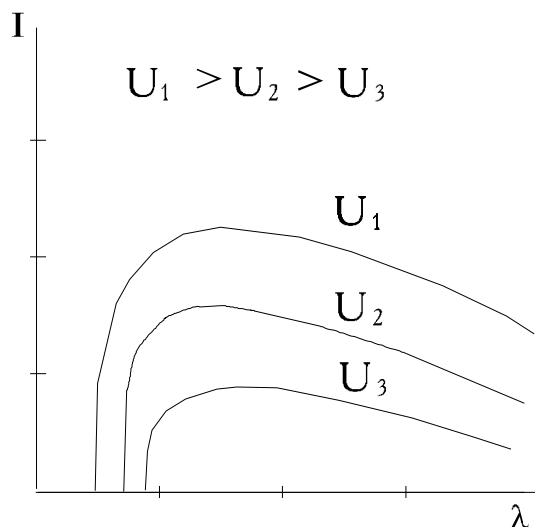


Рисунок 2.10 – Спектральные интенсивности тормозного излучения при различных напряжениях на рентгеновской трубке  $U$

В сторону длинных волн кривые интенсивности спадают полого, асимптотически приближаясь к нулю с увеличением длины волны. Со стороны коротких волн кривые интенсивности резко обрываются при некоторых значении длин волн  $\lambda_{\min}$ , называемых коротковолновой границей сплошного рентгеновского излучения. Опыты показали, что величина  $\lambda_{\min}$  обратно пропорциональна напряжению на рентгеновской трубке  $U$ . Наличие коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра никак не может быть объяснено с точки зрения классической электродинамики, но легко объясняется с точки зрения квантовых свойств излучения.

При фиксированном напряжении  $U$  на рентгеновской трубке электрон непосредственно перед анодом обладает кинетической энергией  $E_{\text{кин}}$ , полученной за счет ускорения в поле трубки, то есть

$$E_{\text{кин}} = eU. \quad (2.36)$$

При столкновении с атомами анода часть энергии электрона передается излучаемому фотону, а часть идет на нагрев анода, а также на ионизацию его атомов. Если же вся энергия, полученная электроном, передается фотону, то эта энергия рентгеновского фотона является максимально возможной, т.е.

$$h\nu_{\max} = eU, \quad (2.37)$$

и ей соответствует минимальная длина волны

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}, \quad (2.38)$$

что совпадает с опытными данными.

Тормозное рентгеновское излучение возникает при напряжении на трубке порядка  $\sim 10^4$  В. При меньших напряжениях преобладающими процессами при столкновении электрона с атомами являются процессы теплового возбуждения и ионизации, и рентгеновское излучение отсутствует. Если увеличивать напряжение выше определенного предела, зависящего от материала анода, то на сплошное рентгеновское излучение накладываются узкие спектральные линии, составляющие так называемое характеристическое излучение анода.

Таким образом, из изложенных материалов видно, что представление о свете как об электромагнитной волне позволяло решить проблемы, связанные, в основном, с распространением света. Явления же, относящиеся к взаимодействию излучения с веществом, получили должное объяснение лишь на основе квантовых представлений. Как волновые, так и корпускулярные свойства излучения проверены на большом экспериментальном материале для всей доступной изучению области частот электромагнитных волн.

Проявление светом как волновых, так и корпускулярных свойств, как уже отмечалось, называется корпускулярно-волновым дуализмом свойств электромагнитного излучения. Смысл этого понятия заключается в том, что свет одновременно обладает как волновыми, так и корпускулярными свойствами.

## 2.6 Контрольные вопросы

- 1) Что такое фотоны?
- 2) Назовите модели, с помощью которых описывается электромагнитное излучение.
- 3) Назовите области физики, в которых используются соответствующие модели электромагнитное излучение.
- 4) Сформулируйте связь между характеристиками электромагнитного излучения в волновой и квантовой моделях.
- 5) Назовите эффекты, для описания которых надо использовать и волновую и квантовую модели электромагнитного излучения. Проиллюстрируйте один из эффектов.
- 6) Напишите формулу, связывающую энергию фотона и его массу.
- 7) Напишите выражение для энергии фотона через его импульс.
- 8) Дайте формулировку явления внешнего фотоэффекта.
- 9) Опишите по шагам, что происходит со свободным электроном металла после его взаимодействия с фотоном.
- 10) Опишите, что происходит с электроном, входящим в состав атома металла, после его взаимодействия с фотоном.

- 11) Что такое работа выхода? Чья это характеристика?
- 12) Напишите формулу Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.
- 13) Дайте определение красной границы фотоэффекта.
- 14) Как из опытов по фотоэффекту определяется постоянная Планка?
- 15) Как устроен фотоэлемент?
- 16) Почему катод фотоэлемента называют фотокатодом?
- 17) Что такое запирающее напряжение для данного фотокатода.
- 18) Как движется фотоэлектрон в фотоэлементе при потенциале анода ниже потенциала фотокатода?
- 19) Как движется фотоэлектрон в фотоэлементе при потенциале анода выше потенциала фотокатода?
- 20) Как связана кинетическая энергия электрона у катода с его потенциальной энергией а анода и почему?
- 21) Как моделируется процесс взаимодействия падающего рентгеновского фотона и свободного электрона вещества?
- 22) Какие законы сохранения выполняются при взаимодействии фотона с электроном в эффекте Комптона.
- 23) Сравните поведение фотонов после взаимодействия с электронами в эффекте Комптона и фотоэффекте.
- 24) Что такое комптоновская длина волны частицы?
- 25) Почему эффект Комптона не наблюдается при рассеянии фотонов на электронах, сильно связанных с ядром атома?
- 26) Как меняется энергия фотона при его комптоновском рассеянии?
- 27) Что происходит с электроном после рассеяния на нем фотона?
- 28) Напишите формулу для эффекта Комптона.
- 29) Напишите формулу для комптоновской длины волны электрона.
- 30) Чему равно максимальное изменение длины волны рассеянного фотона и когда оно наблюдается?
- 31) Чему равно отношение давлений света на зеркальную и зачерненную поверхности?
- 32) Как объяснить происхождение коротковолновой границы спектра тормозного рентгеновского излучения?
- 33) В чем заключается диалектическое единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения?

## 2.7 Примеры решения задач

1) В опытах по фотоэффекту было найдено, что для света с длиной волны  $\lambda_1 = 300 \text{ нм}$  запирающий потенциал  $(U_3)_1 = 3,0 \text{ В}$ , для  $\lambda_2 = 400 \text{ нм}$  –  $(U_3)_2 = 2,0 \text{ В}$  и для  $\lambda_3 = 600 \text{ нм}$  –  $(U_3)_3 = 1 \text{ В}$ . Определите из этих данных работу выхода  $A$  материала фотокатода и значение постоянной Планка  $h$ .

*Решение:*

Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта, зависимость запирающего потенциала  $U_3$  от частоты света  $\nu$  должна изображаться на графике прямой линией:

$$U_3 = \frac{h}{e} \nu - \frac{A}{e}.$$

Из этого отношения видно, что наклон прямой линии (тангенс угла наклона) на графике равен отношению  $h/e$ , а отрезок, отсекаемый этой прямой на вертикальной оси ( $\nu = 0$ ), равен  $(-A/e)$ . Для построения графика  $U_3(\nu)$  нужно от значений длин волн, заданных в условии задачи, перейти к частотам  $\nu = c/\lambda$ . Это дает  $\nu_1 = 0,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$ ,  $\nu_2 = 0,75 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$  и  $\nu_3 = 1,0 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$ .

Теперь можно нанести экспериментальные точки на график (см. рисунок 2.11).

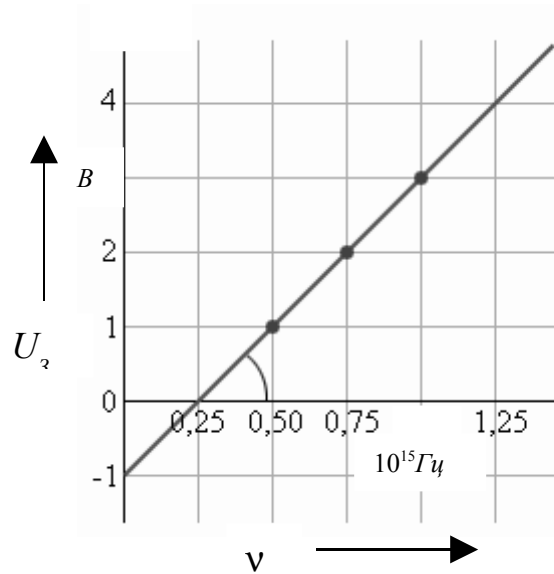


Рисунок 2.11 – К решению задачи 1

Из графика видно, что:

$$(-A/e) = 1,0 \text{ В},$$

$$A = 1,0 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{h}{e} = \frac{4,0 \text{ В}}{1,0 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}} = 4,0 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{Кл}},$$

$$h = 4,0 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{Кл}} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 6,4 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Этот экспериментальный результат отличается от современного принятого значения  $h$  приблизительно на 3%. Малая величина работы выхода заставляет предположить, что в эксперименте был использован в качестве фотокатода не чистый металл, а некоторое сложное соединение (возможно оксид цезия).

2) Рентгеновское (тормозное) излучение возникает при бомбардировке быстрыми электронами металлического анода рентгеновской трубки.

Определите длину волны коротковолновой границы спектра тормозного излучения, если скорость электронов равна  $V = 0,4 c$ .

*Решение:*

Коротковолновая граница тормозного рентгеновского спектра соответствует переходу всей кинетической энергии электрона в излучение при столкновении с атомом анода. В результате возникает квант рентгеновского излучения. Максимальная энергия кванта равна кинетической энергии электрона  $E_k$ :

$$E_k = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0},$$

где  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка,  $\lambda_0$  – длина волны коротковолновой границы рентгеновского спектра.

Так как скорость электронов сравнима со скоростью света  $c$ , необходимо использовать релятивистскую формулу для кинетической энергии:

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} - m_0 c^2 = mc^2(\gamma - 1),$$

где  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  – релятивистский параметр;  
 $m$  – масса электрона.

Подстановка числовых значений в эти формулы дает  $E_k = 7,4 \cdot 10^{-15}$  Дж =  $4,6 \cdot 10^4$  эВ.

Значение  $E_k$ , выраженное в электрон-вольтах, показывает, что между катодом и анодом рентгеновской трубки было создано напряжение 46 кВ. Теперь можно определить длину волны  $\lambda_0$ :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E_k} = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ нм}.$$

Расчет кинетической энергии по нерелятивистской формуле  $E_k = \frac{m_0 V^2}{2}$  приводит к значению  $\lambda_0 = 3,0 \cdot 10^{-11}$  м.

3) Электроны в рентгеновской трубке ускоряются разностью потенциалов  $U = 10,0$  кВ. При соударении электронов с мишенью возникают рентгеновские фотоны. Определите:

- минимальную длину волны  $\lambda_{\min}$  фотона,
- под каким углом  $\theta$  должен рассеяться фотон с  $\lambda = \lambda_{\min}$ , чтобы длина волны рассеянного фотона увеличилась на 1,0%?

*Решение:*



Фотоны, возникающие в рентгеновской трубке, обладают максимальной энергией в том случае, когда вся кинетическая энергия электрона передается одному фотону:

$$eU = h\nu = \frac{hc}{\lambda_{\min}}$$

Отсюда следует:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,124 \text{ нм}.$$

Согласно формуле Комптона, фотон, испытывающий рассеяние на свободном электроне под углом  $\theta$ , изменяет длину волны на величину  $\Delta\lambda$ , равную

$$\Delta\lambda = \lambda_k(1 - \cos\theta),$$

где  $\lambda_k = \frac{h}{mc} = 2,426 \cdot 10^{-3} \text{ нм}$  – комптоновская длина волны. По условию данной задачи  $\lambda = 0,01$ ,  $\lambda_{\min} = 1,24 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ . Поэтому

$$\cos\theta = \frac{\lambda_k - \Delta\lambda}{\lambda_k}; \theta \approx 60^\circ.$$

Более точный расчет дает значение  $\theta = 60,7^\circ$ .

4) Фотон с энергией  $E_\gamma = 2mc^2$ , где  $m$  – масса электрона, при рассеянии на свободном электроне теряет половину своей энергии. Найдите угол разлета  $\alpha$  между рассеянным фотоном и электроном отдачи.

*Решение:*

Полная энергия фотона и электрона до столкновения равна

$$E_\gamma + mc^2 = 3mc^2.$$

После столкновения электрон приобретает импульс  $p_e$ , и его полная энергия становится равной

$$\sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

По условию задачи, энергия рассеянного фотона равна

$$\frac{E_\gamma}{2} = mc^2.$$

Импульс рассеянного электрона может быть найден из закона сохранения энергии:

$$\sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} + mc^2 = 3mc^2.$$

Отсюда следует, что

$$p_e = \sqrt{3}mc.$$

Поскольку импульсы падающего и рассеянного фотонов равны соответственно

$$p_0 = \frac{E_\gamma}{c} = 2mc,$$

$$p = \frac{E_\gamma}{2c} = mc,$$

то модули импульсов падающего фотона, электрона отдачи и рассеянного фотона относятся как  $2 : \sqrt{3} : 1$  (см диаграмму импульсов на рисунке 2.12).

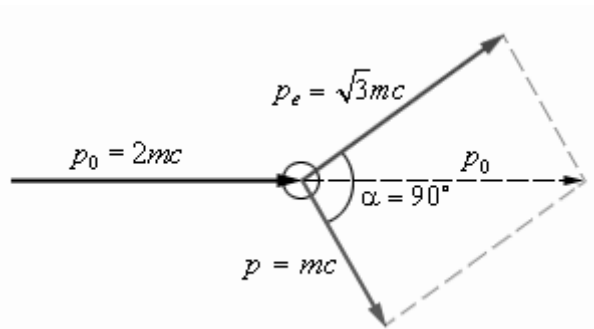


Рисунок 2.12 – К решению задачи 4

Такое соотношение импульсов  $p_0$ ,  $p_e$  и  $p$  соответствует углу разлета  $\alpha = 90$ .

5) Мощные лазеры используются в экспериментах по термоядерному синтезу для сжатия газовой плазмы под действием сил давления излучения. При высокой концентрации электронов плазма практически полностью отражает падающее на нее излучение. Предположим, что излучение лазера, генерирующего импульс с пиковой мощностью  $W = 1,5 \cdot 10^3 \text{ MBm}$ ,

сфокусировано на площадке  $1 \text{ мм}^2$  плазменного слоя. Найдите давление, действующее на плазму.

*Решение:*

Согласно теории Максвелла, давление  $P$  электромагнитного излучения, падающего на поверхность, равно

$$P = \frac{I}{c}(1 + \rho).$$

Если излучение падает на отражающую поверхность, то коэффициент отражения  $\rho = 2$ . Поэтому справедливо следующее равенство:

$$P = \frac{2I}{c}.$$

Принимая во внимание, что

$$I = W/S,$$

получим окончательно:

$$P = \frac{2W}{cS} = 1,0 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

## 2.8 Задачи для самостоятельного решения

1) На пластину падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,42 \text{ мкм}$ . Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов  $U = 0,95 \text{ В}$ . Определить работу  $A$  выхода электронов из пластины.

2) Определить, до какого потенциала  $U$  зарядится уединенный серебряный шарик при облучении его ультрафиолетовым светом длиной волны  $\lambda = 2,08 \text{ нм}$ .

3) На поверхность металла падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,1 \text{ мкм}$ . Красная граница фотоэффекта  $\lambda_0 = 0,3 \text{ мкм}$ . Какая доля  $\eta$  энергии фотона расходуется на сообщение электрону кинетической энергии?

4) Красная граница фотоэффекта для цинка  $\lambda_0 = 310 \text{ нм}$ . Определить максимальную кинетическую энергию  $T_{\text{max}}$  фотоэлектронов (в электрон-вольтах), если на цинк падает свет с длиной волны  $\lambda = 200 \text{ нм}$ .

5) Фотон с длиной волны  $\lambda = 1 \text{ нм}$  рассеялся на свободном электроне под углом  $\theta = 90^\circ$ . Какую долю  $\eta$  своей энергии фотон передал электрону?

6) Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. Оказалось, что длины волн  $\lambda'_1$  и  $\lambda'_2$  рассеянного под углами  $\theta_1 = 60^\circ$  и  $\theta_2 = 120^\circ$  излучения отличаются в  $n = 1,5$  раза.

Определить длину волны  $\lambda$  падающего излучения, предполагая, что рассеяние происходит на свободных электронах.

7) Фотон при эффекте Комптона на свободном электроном был рассеян под углом  $\theta = 90^\circ$ . Угол  $\varphi$  отдачи электрона составляет  $30^\circ$ . Определить энергию  $\varepsilon$  падающего фотона.

8) На расстоянии  $r = 5 \text{ м}$  от точечного монохроматического изотропного источника с длиной волны  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$  перпендикулярно падающим пучкам расположена площадка площадью  $S = 8 \text{ мм}^2$ . Определить число  $N$  фотонов, падающих за время  $t = 1 \text{ с}$  на эту площадку. Мощность излучения  $P=100 \text{ Вт}$ .

9) Определить давление  $p$  света на стенки электрической лампочки мощностью  $P = 150 \text{ Вт}$  с коэффициентом отражения  $\rho = 0,15$ . Лампочку считать сферическим сосудом радиусом  $R = 4 \text{ см}$ .

10) Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 0,663 \text{ мкм}$  падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление  $p=0,3 \text{ мкПа}$ . Определить концентрацию  $n$  фотонов в световом пучке.

### 3 Спектры излучения атомов. Квантовые генераторы

К середине 19 века в химии и физике существовало представление об атоме – были четко разграничены понятия атома и молекулы, открыт периодический закон Менделеева, развита молекулярная физика, начало развиваться учение о внутреннем строении кристаллов. Однако общей теоретической основы строения вещества на атомарном уровне не существовало.

Представление об атомах как неделимых мельчайших частицах вещества возникло еще в античные времена, но только в 18 веке трудами А. Лавуазье, М.В. Ломоносова и других ученых была доказана реальность существования атомов. Но вопрос об их внутреннем устройстве даже не возникал, и атомы по-прежнему представлялись неделимыми частицами. Считалось, что все явления окружающего мира объясняются соударениями и взаимодействиями атомов и молекул, и что не существует явлений, которые могли бы раскрыть строение атома.

В 19 веке изучение атомистического строения вещества существенно продвинулось вперед. В 1833 году при исследовании явления электролиза М. Фарадей установил, что ток в растворе электролита – это упорядоченное движение заряженных частиц – ионов. Фарадей определил минимальный заряд иона, который был назван элементарным электрическим зарядом. Приближенное значение элементарного электрического заряда оказалось равным  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл. На основании исследований Фарадея можно было сделать вывод о существовании внутри атомов электрических зарядов.

Большую роль в развитии атомистической теории сыграл выдающийся русский химик Д.И. Менделеев, разработавший в 1869 году периодическую систему элементов, в которой впервые был поставлен вопрос о единой природе атомов.

Важным свидетельством сложной структуры атомов явились спектроскопические исследования, которые привели к открытию линейчатых спектров атомов. В начале 19 века были открыты дискретные спектральные линии в излучении атомов водорода в видимой части спектра, и впоследствии были установлены математические закономерности, связывающие длины волн этих линий (И. Бальмер, 1885 г.).

В 1896 году А. Беккерель обнаружил явление испускания атомами невидимых проникающих излучений, названное радиоактивностью. В последующие годы явление радиоактивности изучалось многими учеными (М. Склодовская-Кюри, П. Кюри, Э. Резерфорд и др.). Было обнаружено, что атомы радиоактивных веществ испускают три вида излучений различной физической природы (альфа-, бета- и гамма-лучи). Альфа-лучи оказались потоком ионов гелия, бета-лучи – потоком электронов, а гамма-лучи – потоком квантов жесткого рентгеновского излучения.

В 1897 году Дж. Томсон открыл электрон и измерил отношение  $e / m$  заряда электрона к массе. Опыты Томсона подтвердили вывод о том, что электроны входят в состав атомов.

Открытия электрона и явления радиоактивности дали начало возникновению современной атомной физики и создали основу для построения моделей атома как системы взаимодействующих электрически заряженных частиц.

Таким образом, на основании всех известных к началу 20 века экспериментальных фактов можно было сделать вывод о том, что атомы вещества имеют сложное внутреннее строение. Они представляют собой электронейтральные системы, причем носителями отрицательного заряда атомов являются легкие электроны, масса которых составляет лишь малую долю массы атомов. Основная часть массы атомов связана с положительным зарядом. Было доказано, что существует сходство в строении атомов, т.к. можно атом одного элемента превращать в атом другого элемента. Кроме того, было известно, что силы взаимодействия атомов и молекул имеют электрическое происхождение.

Но неразрешимые трудности возникли при попытке объяснить с позиций классической физики линейчатые спектры излучения разреженных газов.

### 3.1 Сериальные формулы. Модели строения атома

Еще в начале 19 века было замечено, что спектры излучения разреженных газов имеют линейчатый характер (так называемый линейчатый спектр), причем для каждого газа эти линии строго индивидуальны. Это открытие, даже без понимания физической сути наблюдаемого явления, привело к созданию спектрального анализа.

Изучая линейчатый спектр излучения атомарного водорода, швейцарский физик Бальмер в 1885 г. установил, что длины волн известных в то время девяти линий спектра удовлетворяют формуле

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad (n=3,4,5,\dots) \quad (3.1)$$

или для частот

$$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (3.2)$$

Константа  $R=3,29 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$  была определена Ридбергом и называется постоянной Ридберга.

Совокупность спектральных линий атома водорода в видимой части спектра, отличающихся разным значением  $n$ , образуют группу линий или

серию, названную серией Бальмера. Позже аналогичные серии спектральных линий были обнаружены в ультрафиолетовой и инфракрасной частях спектра. В 1890 году И. Ридберг получил аналогичную (3.2) эмпирическую формулу для частот спектральных линий:

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n > m. \quad (3.3)$$

Эта формула была названа обобщенной формулой Бальмера. Для серии Бальмера  $m = 2, n = 3, 4, 5, \dots$ . Для ультрафиолетовой серии (серия Лаймана)  $m = 1, n = 2, 3, 4, \dots$ . До появления теории Н. Бора механизм возникновения линейчатых спектров и смысл целых чисел, входящих в формулы спектральных линий водорода (и ряда других атомов), оставались непонятными.

Спектральная линия, имеющая максимальную длину волны в каждой серии, называется головной линией серии. Она обозначается индексом  $\alpha$ . Частота, ей соответствующая, вычисляется по формуле (3.3) при  $n = m + 1$ . При возрастании  $n$  длина волны каждой линии стремится к минимальному значению  $\lambda_{\min}$ , называемому границей серии. Частота, соответствующая границе серии, вычисляется по формуле (3.3) при  $n \rightarrow \infty$ .

Основные параметры и названия серий спектральных линий атома водорода приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Серии спектральных линий атома водорода

Название серии	$m$	$n$	$\lambda_{\min}, \text{нм}$	$\lambda_{\alpha}, \text{нм}$	Область спектра
Лаймана	1	2,3,...	91	121	УФ
Бальмера	2	3,4,...	364	644	Видимый свет, УФ
Пашена	3	4,5,...	818	1870	ИК
Брэкета	4	5,6,...	2273	4040	ИК
Пфунда	5	6,7,...	3272	7438	ИК

Исследования показали, что для водородоподобных атомов, т.е. атомов, лишенных всех своих электронов кроме одного (например,  $\text{He}^*$ ,  $\text{Li}^{**}$  и т.д.), также справедлива формула (3.2), только постоянная Ридберга имеет другое значение  $R^* = 4R, 9R, 16R$  и т.д.

### 3.1.1 Модель атома Томсона

Вообще говоря, наличие у атомов линейчатых спектров можно объяснить в рамках классической теории. В 1903 г. Дж. Томсоном была

предложена одна из первых моделей атома. Атом, согласно Томсону, представляет собой электронейтральную систему в виде равномерно заполненной положительным зарядом сферы радиусом примерно равным  $10^{-10}$  м, внутри которой находятся электроны (рисунок 3.1).

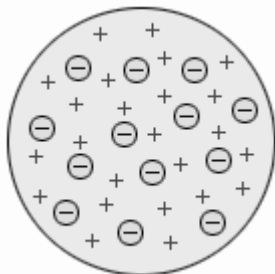


Рисунок 3.1 – Модель атома Дж. Томсона

Электроны совершают гармонические колебания около положений равновесия и излучают свет. Частоту колебаний электрона  $\omega$ , а, следовательно, и частоту излучаемого света в зависимости от радиуса атома  $R_a$  можно найти из следующих соотношений.

Напряженность электрического поля внутри однородно заряженного шара радиуса  $R_a$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{e}{R_a^3} r. \quad (3.4)$$

На электрон действует сила

$$F = (-e)E = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{R_a^3} r = -kr. \quad (3.5)$$

Закон движения электрона в атоме

$$mr'' + kr = 0, \quad (3.6)$$

– это уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m R_a^3}}. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что спектр атома должен содержать некоторую минимальную частоту  $\omega$  и ее гармоники  $2\omega$ ,  $3\omega$ , и т.д. Но в реальности наблюдается совсем другая картина, хотя следует отметить, что значение радиуса атома водорода, рассчитанное с использованием формулы (3.7),



совпадает с данными, полученными из молекулярно-кинетической теории. Через несколько лет в опытах великого английского физика Э. Резерфорда было доказано, что модель Томсона неверна.

### 3.1.2 Модель атома Резерфорда

Первые прямые эксперименты по исследованию внутренней структуры атомов были выполнены Э. Резерфордом и его сотрудниками Э. Марсденом и Х. Гейгером в 1909–1911 годах. Резерфорд предложил применить зондирование атома с помощью  $\alpha$ -частиц, которые возникают при радиоактивном распаде радия и некоторых других элементов. Масса  $\alpha$ -частиц приблизительно в 7300 раз больше массы электрона, а положительный заряд равен удвоенному элементарному заряду. В своих опытах Резерфорд использовал  $\alpha$ -частицы с кинетической энергией около 5 МэВ (скорость таких частиц очень велика – порядка  $10^7$  м/с, но она все же значительно меньше скорости света).  $\alpha$ -частицы – это полностью ионизированные атомы гелия. Они были открыты Резерфордом в 1899 году при изучении явления радиоактивности. Этими частицами Резерфорд бомбардировал атомы тяжелых элементов (золото, серебро, медь и др.). Электроны, входящие в состав атомов, вследствие малой массы не могут заметно изменить траекторию  $\alpha$ -частицы. Рассеяние, то есть изменение направления движения  $\alpha$ -частиц, может вызвать только тяжелая положительно заряженная часть атома. Схема опыта Резерфорда представлена на рисунке 3.2.

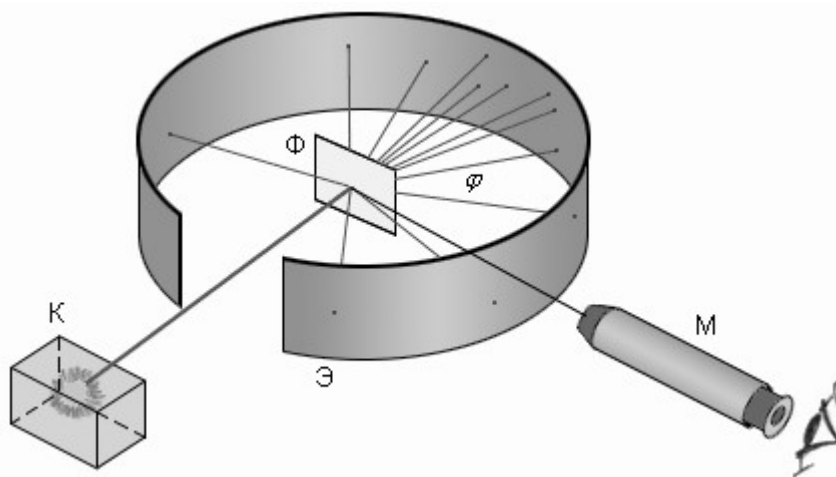


Рисунок 3.2 – Схема опыта Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц. К – свинцовый контейнер с радиоактивным веществом, Э – экран, покрытый сернистым цинком, Ф – золотая фольга, М – микроскоп

От радиоактивного источника, заключенного в свинцовый контейнер К,  $\alpha$ -частицы направлялись на тонкую металлическую фольгу Ф. Рассеянные частицы попадали на экран Э, покрытый слоем кристаллов сульфида цинка, способных светиться под ударами быстрых заряженных частиц. Сцинтилляции (вспышки) на экране наблюдались глазом с помощью

микроскопа М. Наблюдения рассеянных  $\alpha$ -частиц в опыте Резерфорда можно было проводить под различными углами  $\varphi$  к первоначальному направлению пучка.

В результате опытов было обнаружено, что большинство  $\alpha$ -частиц проходит через тонкий слой металла, практически не испытывая отклонения. Однако небольшая часть  $\alpha$ -частиц (примерно 0,1%) отклоняется на значительные углы, превышающие  $90^\circ$ . Очень редкие  $\alpha$ -частицы (приблизительно одна на десять тысяч) испытывали отклонение на углы, близкие к  $180^\circ$ , т.е. отскакивали от фольги назад.

Этот результат был совершенно неожиданным даже для Резерфорда. Он находился в резком противоречии с моделью атома Томсона, согласно которой положительный заряд распределен по всему объему атома. При таком распределении положительный заряд не может создать сильное электрическое поле, способное отбросить  $\alpha$ -частицы назад. Электрическое поле однородного заряженного шара максимально на его поверхности и убывает до нуля по мере приближения к центру шара. Если бы радиус шара, в котором сосредоточен весь положительный заряд атома, уменьшился в  $n$  раз, то максимальная сила отталкивания, действующая на  $\alpha$ -частицу по закону Кулона, возросла бы в  $n^2$  раз. Следовательно, при достаточно большом значении  $n$   $\alpha$ -частицы могли бы испытать рассеяние на большие углы вплоть до  $180^\circ$ . Эти соображения привели Резерфорда к выводу, что атом почти пустой, и весь его положительный заряд сосредоточен в объеме, пренебрежимо малом по сравнению с объемом всего атома. Эту часть атома Резерфорд назвал атомным ядром. Положительный заряд ядра экранируется отрицательно заряженными электронами, расположенными вокруг него. Так возникла ядерная модель атома. Рисунок 3.3 иллюстрирует рассеяние  $\alpha$ -частицы в атоме Томсона и в атоме Резерфорда.

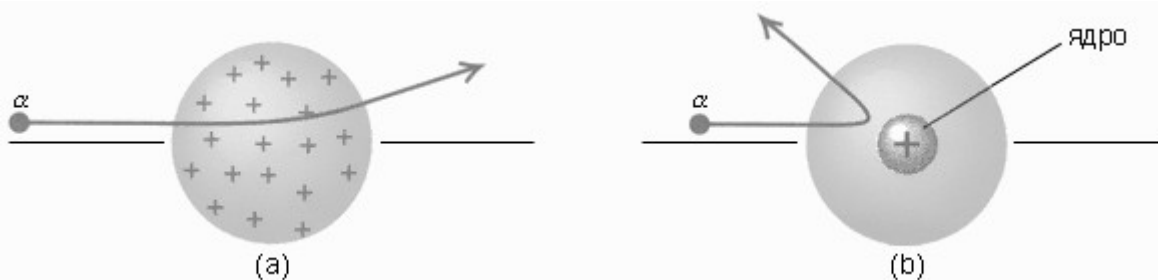


Рисунок 3.3 – Рассеяние  $\alpha$ -частицы в атоме Томсона (a) и в атоме Резерфорда (b)

Таким образом, опыты Резерфорда и его сотрудников привели к выводу, что в центре атома находится плотное положительно заряженное ядро, диаметр которого не превышает  $10^{-14}$ – $10^{-15}$  м. Это ядро занимает только  $10^{-12}$  часть полного объема атома, но содержит весь положительный заряд и не менее 99,95 % его массы. Веществу, составляющему ядро атома, следовало приписать колоссальную плотность – порядка  $\rho \approx 10^{15}$  г/см<sup>3</sup>. Заряд ядра должен быть равен суммарному заряду всех электронов, входящих в

состав атома. Впоследствии удалось установить, что если заряд электрона принять за единицу, то заряд ядра  $Q$  в точности равен номеру  $Z$  данного элемента в таблице Менделеева:

$$Q = Ze. \quad (3.8)$$

Радикальные выводы о строении атома, следовавшие из опытов Резерфорда, заставляли многих ученых сомневаться в их справедливости. Не исключением был и сам Резерфорд, опубликовавший результаты своих исследований только через два года (в 1911 г.) после выполнения первых экспериментов. Опираясь на классические представления о движении микрочастиц, Резерфорд предложил планетарную модель атома (рисунок 3.4).

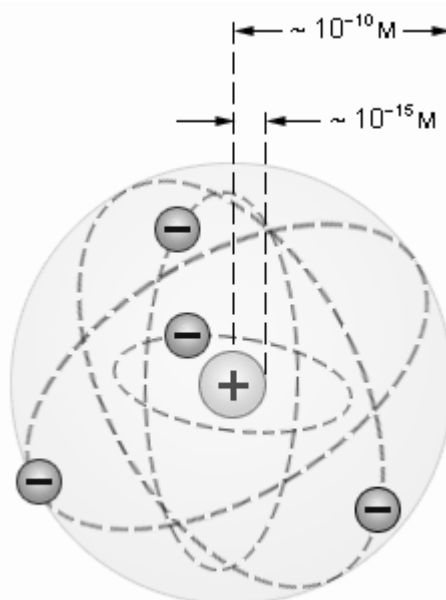
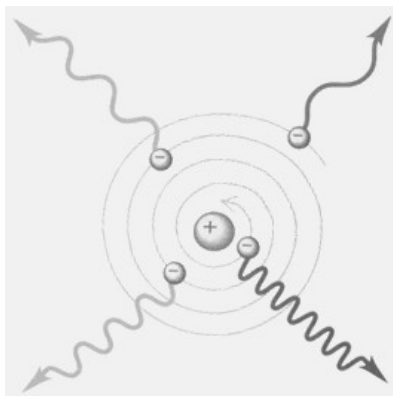


Рисунок 3.4 – Планетарная модель атома Резерфорда. Показаны круговые орбиты четырех электронов

Согласно этой модели, в центре атома располагается положительно заряженное ядро, в котором сосредоточена почти вся масса атома. Атом в целом нейтрален. Вокруг ядра, подобно планетам, движутся электроны. Находиться в состоянии покоя электроны не могут, так как они упали бы на ядро под действием кулоновских сил притяжения.

Планетарная модель атома, предложенная Резерфордом, несомненно явилась крупным шагом в развитии знаний о строении атома. Она была совершенно необходимой для объяснения опытов по рассеянию  $\alpha$ -частиц. Однако она оказалась неспособной объяснить сам факт длительного существования атома, т. е. его устойчивость. По законам классической электродинамики, движущийся с ускорением заряд должен излучать электромагнитные волны, уносящие энергию. За короткое время (порядка  $10^{-8}$  с) все электроны в атоме Резерфорда должны растратить всю свою



энергию и упасть на ядро (рисунок 3.5).

Рисунок 3.5 – Неустойчивость классического атома

Расчеты, выполненные согласно законам классической физики, показывают, что частота вращения электрона вокруг ядра при этом должна изменяться, поэтому спектр излучаемых электромагнитных волн должен быть сплошным. Опыт же показывает, что большинство атомов исключительно стабильны, и спектры излучения атомов – линейчатые. По этому поводу Н. Бор сказал: “Устойчивость атомов нельзя объяснить на основе классической физики, и квантовый постулат – это единственный выход из этой дилеммы”.

### 3.2 Теория атома водорода. Постулаты Бора

Следующий шаг в развитии представлений об устройстве атома сделал выдающийся датский физик Нильс Бор, создавший в 1913 году первую неклассическую теорию атома. В её основе лежит идея связать в единое целое три известных тогда результата:

- эмпирические закономерности линейчатого спектра атома водорода, выраженные в формуле Бальмера (3.3);
- ядерная модель атома Резерфорда;
- квантовый характер испускания и поглощения света.

Проанализировав всю совокупность опытных фактов, Бор пришел к выводу, что при описании поведения атомных систем следует отказаться от многих представлений классической физики. Однако теория Бора не отвергла полностью законы классической физики при описании поведения атомных систем. В своей теории Бор использовал представления об орбитальном движении электронов в кулоновском поле ядра, но для достижения поставленной цели ему пришлось классическое описание дополнить некоторыми ограничениями, накладываемыми на возможные состояния электрона в атоме. Эти ограничения он сформулировал в виде двух постулатов, которым должна удовлетворять новая теория о строении атомов.

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний) гласит: атомная система может находиться только в особых стационарных или квантовых состояниях, каждому из которых соответствует определенная

энергия  $E_n$ . В стационарных состояниях атом не излучает энергию. Для таких состояний электрон в атоме, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованные значения момента импульса  $L_n$ , удовлетворяющие условию

$$L_n = m_e V r = n \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.9)$$

где  $m_e$  – масса электрона;

$V$  – скорость его движения на орбите радиуса  $r$ ;

$\hbar$  – постоянная Планка.

Второй постулат Бора (правило частот) формулируется следующим образом: при переходе атома из одного стационарного состояния с номером  $n$  и энергией  $E_n$  в другое стационарное состояние с номером  $m$  и энергией  $E_m$  излучается или поглощается квант, энергия которого равна разности энергий стационарных состояний:

$$\hbar \omega_{nm} = E_n - E_m \quad (3.10)$$

или

$$h \nu_{nm} = E_n - E_m, \quad (3.11)$$

где  $E_n$  и  $E_m$  – энергия электрона на соответствующих орбитах. Отсюда можно выразить частоту излучения:

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h}. \quad (3.12)$$

Первый постулат находится в явном противоречии с классической механикой, согласно которой энергия движущегося электрона может быть любой. Он находится в противоречии и с электродинамикой, так как допускает возможность ускоренного движения электронов без излучения электромагнитных волн. Согласно первому постулату Бора, атом характеризуется системой энергетических уровней, каждый из которых соответствует определенному стационарному состоянию (рисунок 3.6).

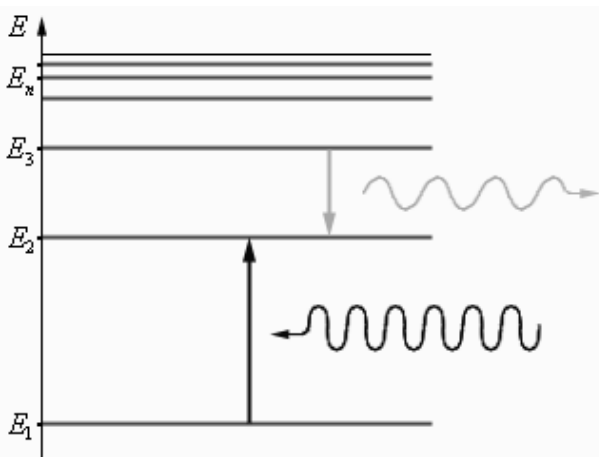


Рисунок 3.6 – Энергетические уровни атома и условное изображение процессов поглощения и испускания фотонов

Механическая энергия электрона, движущегося по замкнутой траектории вокруг положительно заряженного ядра, отрицательна. Поэтому всем стационарным состояниям соответствуют значения энергии  $E_n < 0$ . При  $E_n \geq 0$  электрон удаляется от ядра (ионизация). Величина  $|E_1|$  называется энергией ионизации. Состояние с энергией  $E_1$  называется основным состоянием атома.

Второй постулат Бора также противоречит электродинамике Максвелла, так как, согласно постулату, частота излучения определяется только изменением энергии атома и никак не зависит от характера движения электрона.

Постулаты Бора определили направление развития новой науки – квантовой физики атома. Но они не содержали рецепта определения стационарных состояний (орбит) и соответствующих им значений энергии  $E_n$ .

Своеобразным тест-объектом для теории Бора явился простейший из атомов – атом водорода. Ко времени создания теории Бора атом водорода был хорошо изучен экспериментально. Он содержит единственный электрон. Ядром атома является протон – положительно заряженная частица, заряд которой равен по модулю заряду электрона, а масса в 1836 раз превышает массу электрона.

Правило квантования, приводящее к правильным, согласующимся с опытом значениям энергий стационарных состояний атома водорода, было угадано Бором. Бор предположил, что момент импульса электрона, вращающегося вокруг ядра, может принимать только дискретные значения, кратные постоянной Планка. Для круговых орбит правило квантования Бора (3.9) можно переписать в следующем виде:

$$m_e V r_n = n \frac{h}{2\pi}. \quad (3.13)$$

Правило квантования Бора позволяет вычислить радиусы стационарных орбит электрона в атоме водорода и определить значения энергий.

Рассмотрим электрон, движущийся в кулоновском поле атомного ядра с зарядом  $Ze$ . При  $Z=1$  такая система соответствует атому водорода, при иных значениях  $Z$  – водородоподобному иону. Уравнение движения электрона имеет вид

$$\frac{m_e V^2}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}, \quad (3.14)$$

где  $e$  – элементарный заряд;  
 $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

Совместное решение уравнений (3.13) и (3.14) позволяет определить скорости электронов на допустимых орбитах

$$V_n = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n} \quad (3.15)$$

и радиусы допустимых стационарных орбит

$$r_n = \varepsilon_0 \frac{h^2}{\pi m_e e^2 Z} \cdot n^2. \quad (3.16)$$

Самой близкой к ядру орбите соответствует значение  $n = 1$ . Радиус первой орбиты называется боровским радиусом и его значение равно

$$r_1 = a_0 = \varepsilon_0 \frac{h^2}{\pi m_e e^2} \approx 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (3.17)$$

Радиусы последующих орбит возрастают пропорционально  $n^2$ .

Полная механическая энергия  $E_n$  системы из атомного ядра и электрона, обращающегося по стационарной круговой орбите радиусом  $r_n$ , складывается из кинетической энергии электрона (при неподвижном ядре) и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром

$$E_n = E_{кин} + E_{пот} = \frac{m_e V^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi \varepsilon_0 r}. \quad (3.18)$$

Следует отметить, что  $E_{пот} < 0$ , так как между электроном и ядром действуют силы притяжения. Подставляя в (3.18) значения скорости электрона и радиуса орбиты из (3.15) и (3.16), получим:

$$E_n = - \frac{m_e e^4 Z^2}{8h^2 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (3.19)$$

Целое число  $n = 1, 2, 3, \dots$  в (3.19) определяет квантовое значение энергии атома и называется главным квантовым числом. Энергетическое состояние с наименьшей энергией, соответствующее  $n=1$ , называется основным или невозбужденным состоянием. Все состояния с  $n>1$  являются возбужденными. Абсолютное значение  $E_n$  – энергия связи электрона в атоме, находящемся в состоянии  $n$ . При  $n \rightarrow \infty$  уровни энергии сгущаются и

стремятся к предельному значению  $E_\infty = 0$ . Переход из состояния с номером  $n$  в состояние с  $n \rightarrow \infty$  соответствует ионизации атома, т.е. отрыву электрона. Очевидно, что энергия ионизации из основного состояния

$$E_{\text{ион}} = |E_1| = e\varphi_{\text{ион}}, \quad (3.20)$$

где  $\varphi_{\text{ион}}$  – потенциал ионизации. Поэтому

$$\varphi_{\text{ион}} = \frac{|E_1|}{e}. \quad (3.21)$$

Согласно второму постулату Бора (3.11), при переходе электрона с одной стационарной орбиты с энергией  $E_n$  на другую стационарную орбиту с энергией  $E_m < E_n$  атом испускает квант света, частота  $\nu$  которого равна  $\Delta E_{nm}/h$ :

$$\nu = \frac{\Delta E_{nm}}{h} = \frac{m_e e^4 Z^2}{8h^3 \varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (3.22)$$

Эта формула в точности совпадает с эмпирической формулой Ридберга (3.3) для спектральных серий атома водорода, если положить постоянную  $R$  равной

$$R = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2}. \quad (3.23)$$

Подстановка числовых значений  $m_e$ ,  $e$ ,  $\varepsilon_0$  и  $h$  в эту формулу дает результат  $R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$ , который очень хорошо согласуется с эмпирическим значением  $R$ .

Рисунок 3.7 иллюстрирует образование спектральных серий в излучении атома водорода при переходе электрона с высоких стационарных орбит на более низкие.



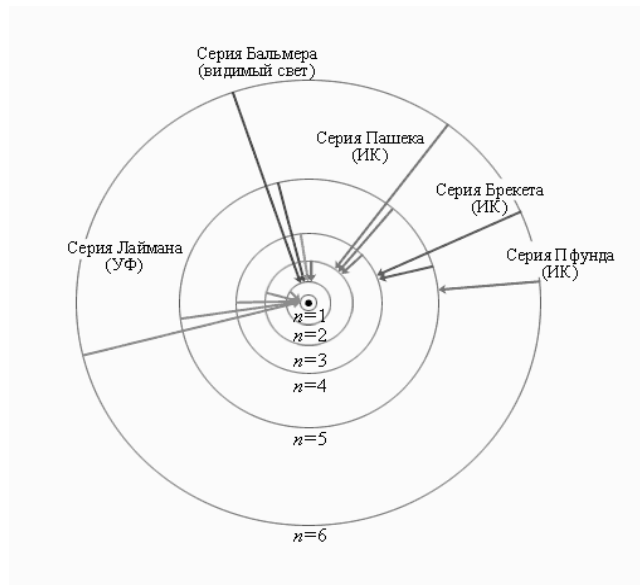


Рисунок 3.7 – Стационарные орбиты атома водорода и образование спектральных серий

Зависимость энергии электрона от номера орбиты принято изображать в виде схемы или диаграммы, в которой по вертикальной оси отложены значения энергии. На рисунке 3.8. изображена диаграмма энергетических уровней атома водорода и указаны переходы, соответствующие различным спектральным сериям.



Рисунок 3.8 – Диаграмма энергетических уровней атома водорода. Показаны переходы, соответствующие различным спектральным сериям. Для первых пяти линий серии Бальмера в видимой части спектра указаны длины волн

Таким образом, теория Бора объясняла как спектры излучения, так и

спектры поглощения атомов. Она точно предсказывала размеры атома водорода и энергию ионизации. Прекрасное согласие боровской теории атома водорода с экспериментом служило веским аргументом в пользу ее справедливости.

В то же время успех теории Бора был достигнут за счет нарушения логической цельности теории. С одной стороны, использовалась механика Ньютона, с другой – привлекались не укладывающиеся в рамки классической физики правила квантования. Полуклассическая теория Бора не могла объяснить, как движется электрон при переходе с одного энергетического уровня на другой. Бор не смог дать физическую интерпретацию правилу квантования. Детальные исследования спектров излучения показали, что спектральные линии имеют различную яркость и состоят из двух или большего числа очень близких линий (тонкая структура). Эти явления теория Бора также не объясняла. Кроме того, теория Бора оказалась не в состоянии описать движение электронов в сложных атомах (даже в атоме гелия) и спектры излучения сложных атомов.

Тем не менее, теория Бора явилась крупным шагом в развитии теории атома. И одним из доказательств ее справедливости стал опыт Франка и Герца (1914 г.).

### 3.3 Опыт Франка-Герца

Первоначальная цель опытов Джеймса Франка и Густава Герца состояла в измерении потенциала ионизации атомов. Но эти опыты принесли экспериментальное подтверждение теории Бора, т.е. решили гораздо более важную задачу. Схема опыта изображена на рисунке 3.3.

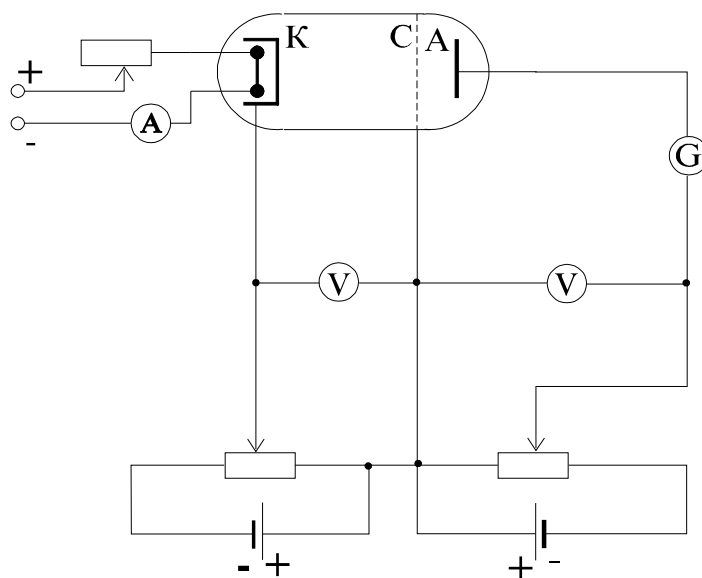


Рисунок 3.3 – Схема опытов Франка и Герца

Электронная лампа с тремя электродами – катодом К, сеткой С и анодом А, заполнялась парами ртути. Ускоряющая разность потенциалов  $U$  прикладывалась между накаливаемым катодом К и сеткой С. Эту разность

потенциалов можно плавно менять с помощью потенциометра. Между сеткой и анодом прикладывается небольшой задерживающий потенциал  $U_3$ . Вылетевшие из катода вследствие термоэлектронной эмиссии электроны ускоряются и перемещаются к сетке. Если их кинетическая энергия достаточно велика, то после прохождения через сетку они могут преодолеть задерживающий потенциал  $U_3 \approx 0,5 \text{ В}$  и попасть на анод. В противном случае электроны на анод не попадают. Анодный ток измеряется гальванометром  $G$ .

Если бы в лампе поддерживался вакуум, то примерная зависимость анодного тока  $I$  от ускоряющего напряжения  $U$  представлялась бы кривой, приведенной на рисунке 3.4а.

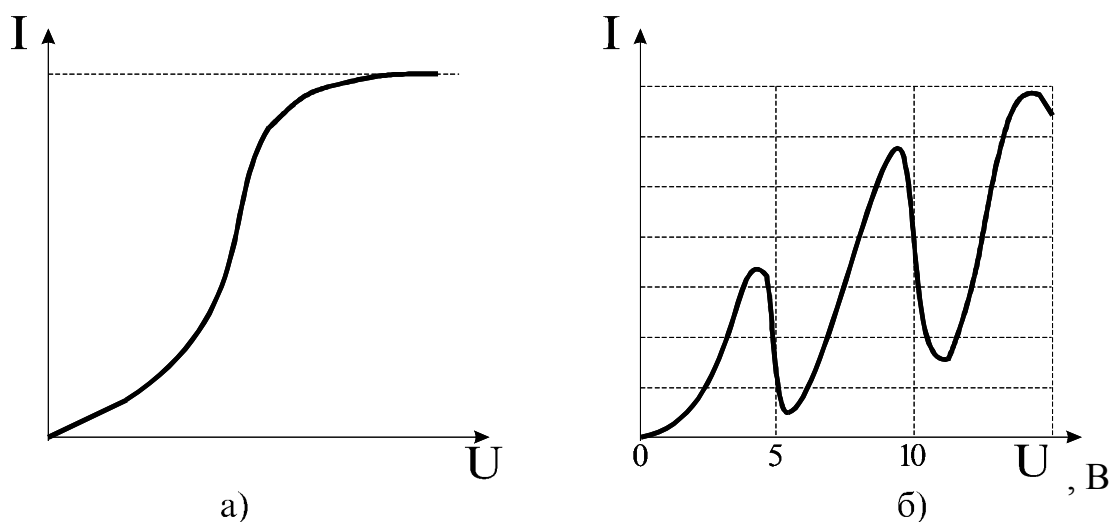


Рисунок 3.4 – Примерные зависимости анодного тока  $I$  от ускоряющего напряжения  $U$  для вакуумной (а) и ртутной (б) ламп

При малых напряжениях эта кривая должна следовать закону трех вторых, при больших напряжениях получался бы ток насыщения, не зависящий от  $U$ . Опыт показал, что при наличии в лампе паров ртути кривая  $I=I(U)$  имеет качественно совсем другой вид. На ней появляются отчетливые максимумы и минимумы с периодом в  $4,9 \text{ В}$  (рисунок 3.4б). Наличие таких максимумов и минимумов свидетельствует о дискретном характере энергетических уровней атома, причем для атома ртути разность между двумя нижними уровнями должна равняться  $4,9 \text{ эВ}$ .

При  $U \approx 4,9 \text{ В}$  энергии электронов, находящихся вблизи сетки, оказывается достаточно для возбуждения атомов ртути, столкновения при этом становятся неупругими. Это приводит к почти полной потере энергии электронами, вследствие чего они уже не могут преодолеть задерживающий потенциал между сеткой и анодом, и анодный ток уменьшается почти до нуля. Дальнейшее увеличение потенциала  $U$  вновь приводит к увеличению анодного тока, до тех пор, пока при  $U \approx 9,8 \text{ В}$  электроны, оставшиеся в ускоряющем поле после упругого столкновения, не наберут энергию, достаточную для возбуждения первого энергетического уровня атома ртути. При этом снова наблюдается уменьшение анодного тока. Таким образом, опыт Франка-Герца показал, что атомы могут поглощать энергию только

определёнными порциями. Для атомов ртути эта порция равна  $4,9 \text{ эВ}$  и соответствует первому потенциалу возбуждения ртути.

Опыт Франка-Герца подтвердил также и второй постулат Бора (правило частот). Оказывается, что при ускоряющем напряжении меньше  $4,9 \text{ В}$  пары ртути не светятся, т.к. в этом случае нет возбужденных атомов ртути, а следовательно, и их переходов в невозбужденное состояние. При  $U = 4,9 \text{ В}$  появляются первые возбужденные атомы и при их переходе в основное состояние должно появиться свечение. И действительно, в этом случае, а также при  $U$ , кратных  $4,9 \text{ В}$ , наблюдается свечение, состоящее из одной резонансной линии ртути  $\lambda = 253,7 \text{ нм}$ .

### 3.4 Характеристическое рентгеновское излучение. Закон Мозли

Характеристическое рентгеновское излучение имеет линейчатый спектр, т.е. состоит из закономерно расположенных достаточно узких спектральных линий. Их длины волн зависят исключительно от материала анода рентгеновской трубки. Характеристическое излучение напоминает линейчатый спектр газов в оптической области.

Прежде чем перейти к рассмотрению характеристического рентгеновского излучения, вспомним строение сложных атомов. Для этого необходимо обратиться к периодической системе элементов Менделеева, которая была объяснена Бором в 1922 году на основе созданной им теории строения атома. Оказалось, что в основе систематики химических элементов лежит заряд ядра атома  $Z$  (в единицах элементарного заряда  $e$ ). Число  $Z$  определяет номер химического элемента в периодической системе. Заряд ядра численно равен числу электронов в электронной оболочке, окружающей ядро нейтрального атома.

Согласно существующей ныне теории, электронная оболочка сложного атома состоит из ряда электронных слоев, которые обозначаются прописными буквами латинского алфавита К, L, M, N, O и т.д. Энергии электронов, принадлежащих одному слою, отличаются незначительно, поэтому при простейшем рассмотрении этим отличием пренебрегают и считают, что каждому слою соответствует определенное значение энергии электрона. Химические свойства элемента определяются тем, сколько электронов находится на внешнем электронном слое данного атома. При увеличении порядкового номера элемента в таблице Менделеева происходит постепенное заполнение электронных слоев, начиная со слоя К.

В квантовой механике показывается, что число электронов, находящихся на данном слое, не может превышать определенной величины. Так на К-слое может находиться не более 2 электронов, на L- и M-слоях – не более 8 электронов, на N- и O-слоях – не более 18 электронов. Этим и объясняется то, что в первом периоде таблицы Менделеева находится два элемента, во втором и третьем периодах – по 8 элементов, в четвертом и пятом периодах – по 18 элементов и т.д.

Характеристическое излучение возникает при переходе электрона с одного внутреннего слоя на другой. Однако все внутренние слои сложных атомов полностью заполнены. Следовательно, для возникновения характеристического излучения необходимо, чтобы на каком-либо внутреннем слое отсутствовал электрон. Такая вакансия может образоваться за счет выбивания электрона с какого-либо внутреннего слоя (например, К-) электроном, ускоренным в рентгеновской трубке. Доказывается, что состояние атома с вакансией на внутреннем слое неустойчиво. Электрон одного из внешних слоев (например, L-) может заполнить эту вакансию, и атом при этом перейдет в конечное состояние с меньшей энергией, испуская избыток энергии в виде фотона характеристического излучения. Но в этом случае вакантным для электрона окажется состояние на L-слое. Следовательно, в это состояние перейдет электрон со слоя М и т.д. Поэтому характеристическое излучение всегда содержит набор спектральных линий. Все возможные переходы электрона с вышележащих слоев на К-слой образуют К-серии, на L-слой – L-серии и т.д. Спектральные линии в каждой серии, имеющие минимальную длину волны, обозначаются индексом  $\alpha$ , следующие за ними – индексом  $\beta$  и т.д.

На рисунке 3.5 представлена упрощенная схема энергетических уровней сложного атома и показаны некоторые переходы электронов, соответствующие К- и L-сериям.

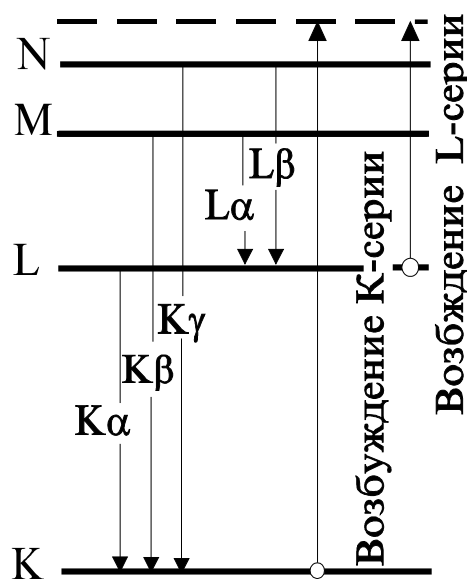


Рисунок 3.5 – Схема энергетических уровней сложного атома и переходы электронов, соответствующие К- и L-сериям

На рисунке 3.6 представлен спектр рентгеновского излучения для вольфрамового анода, в котором на фоне сплошного спектра тормозного излучения видны линии характеристического излучения.

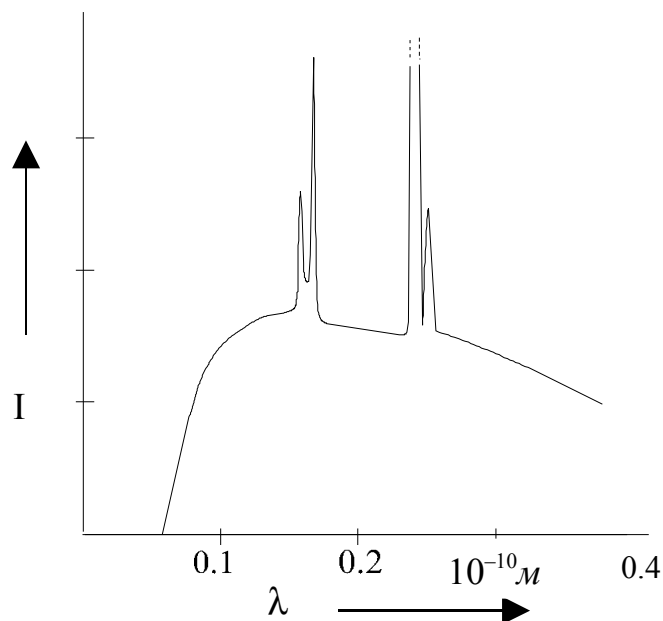


Рисунок 3.6 – Спектр рентгеновского излучения для вольфрамового анода рентгеновской трубки

Частота  $\omega$  рентгеновского фотона определяется по формуле, аналогичной обобщенной формуле Бальмера для видимого света, в которую включены некоторые поправки:

$$\omega = R(Z - \sigma)^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (3.24)$$

где  $\sigma$  – постоянная, учитывающая влияние на отдельный электрон всех остальных электронов атома. Для каждой серии значение  $\sigma$  имеет определенное значение, так для К-серии  $\sigma=1$ , для L-серии  $\sigma=7,5$ .

Очевидно, что при фиксированных значениях квантовых чисел  $m$  и  $n$  для разных химических элементов, из которых изготовлен анод рентгеновской трубки, частота рентгеновского фотона пропорциональна  $(Z - \sigma)^2$ . Такая зависимость носит название закона Мозли (по имени ученого, экспериментально установившего этот закон в 1913 г.).

Закон Мозли принято записывать в виде

$$\sqrt{\omega} = a(Z - \sigma), \quad (3.25)$$

где коэффициент  $a$  постоянен для данной линии ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ) данной серии (К, L, M, ...). Закон Мозли позволяет идентифицировать химические элементы, входящие в состав того или иного вещества.

### 3.5 Спонтанное и вынужденное излучение

Атом может находиться в различных энергетических состояниях с энергиями  $E_1$ ,  $E_2$  и т. д. В теории Бора эти состояния называются стабильными. На самом деле стабильным состоянием, в котором атом может находиться бесконечно долго в отсутствие внешних возмущений, является только состояние с наименьшей энергией. Это состояние называют основным. Все другие состояния нестабильны. Возбужденный атом может пребывать в этих состояниях лишь очень короткое время, порядка  $10^{-8}$  с, после этого он переходит в одно из низших состояний, испуская квант света, частоту которого можно определить из второго постулата Бора. На некоторых энергетических уровнях атом может пребывать значительно большее время, порядка  $10^{-3}$  с. Такие уровни называются метастабильными.

Процесс излучения электромагнитной волны возбужденным атомом может быть двух типов: спонтанным и вынужденным. При спонтанном излучении атом переходит с верхнего энергетического уровня на нижний самопроизвольно, без внешних воздействий на атом. Спонтанное излучение атома обусловлено только неустойчивостью его верхнего (возбужденного) состояния, вследствие которой атом рано или поздно освобождается от энергии возбуждения путем излучения фотона. Различные атомы излучают спонтанно, т.е. независимо друг от друга, и генерируют фотоны, которые распространяются в различных направлениях, имеют различные фазы и направления поляризации. Следовательно, спонтанное излучение является некогерентным. Схематическое изображение спонтанного перехода представлено на рисунке 5.1а.

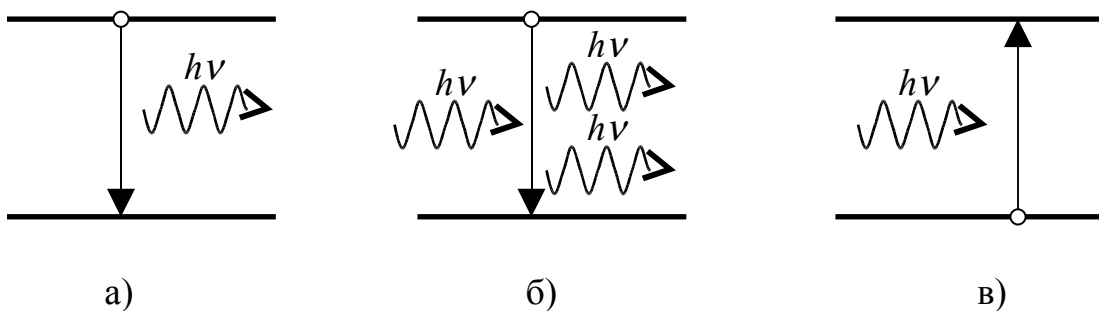


Рисунок 5.1 – Схематическое изображение процессов спонтанного испускания (а), вынужденного испускания (б) и поглощения (в) кванта

В 1916 году А. Эйнштейн предсказал, что излучение может возникать также под влиянием на возбужденный атом внешнего электромагнитного поля, частота  $\nu$  которого равна собственной частоте перехода, т. е. удовлетворяет соотношению

$$h\nu = E_m - E_n, \quad (3.26)$$

где  $E_m$ , и  $E_n$  – энергии квантовых состояний атома. Такая частота называется резонансной. Возникающее при этом излучение является вынужденным (или индуцированным). В каждом акте вынужденного излучения участвуют два фотона. Один из них, распространяясь от внешнего источника (внешним источником для рассматриваемого атома может являться и соседний атом), воздействует на атом, в результате чего испускается второй фотон. Оба фотона имеют одинаковое направление распространения и поляризации, а также одинаковые частоты и фазы. То есть вынужденное излучение всегда когерентно с вынуждающим. В результате вынужденного испускания фотонов амплитуда волны, распространяющейся в среде, возрастает. С точки зрения квантовой теории, в результате взаимодействия возбужденного атома с фотоном, частота которого равна частоте перехода, появляются два совершенно одинаковых фотона-близнеца. Схематическое изображение процесса вынужденного излучения приведено на рисунке 5.1б.

Атомы не только испускают, но и поглощают фотоны с резонансными частотами. При поглощении фотона атомы возбуждаются, т. е. переходят в более высокое энергетическое состояние. Поглощение фотона всегда является вынужденным процессом, происходящим под действием внешней электромагнитной волны. В каждом акте поглощается один фотон, а участвующий в этом процессе атом переходит в состояние с большей энергией. Схематическое изображение процесса поглощения приведено на рисунке 5.1в.

Переходы между энергетическими уровнями атома не обязательно связаны с поглощением или испусканием фотонов. Атом может приобрести или отдать часть своей энергии и перейти в другое квантовое состояние в результате взаимодействия с другими атомами или столкновений с электронами. Такие переходы называются безизлучательными.

В процессах испускания и поглощения фотонов, как правило, участвует огромное число атомов, поэтому эти процессы описываются статистически с помощью теории вероятностей.

Вероятностью испускания (поглощения) называется среднее число фотонов, испускаемых (поглощаемых) одним атомом в единицу времени.

Вероятность перехода атома с уровня  $m$  на уровень  $n$  будем обозначать через  $W_{mn}$ . Вероятность спонтанного перехода постоянна для данной пары уровней и равна

$$W_{mn} = A_{mn}. \quad (3.27)$$

Вероятность вынужденного перехода пропорциональна спектральной объемной плотности энергии  $w_\nu$  вынуждающего излучения с частотой  $\nu = (E_m - E_n)/h$ :

$$W_{mn}^e = B_{mn} w_\nu. \quad (3.28)$$



Коэффициенты  $A_{mn}$  и  $B_{mn}$  называются коэффициентами Эйнштейна. Они не зависят от направления процесса, и определяются только начальным и конечным состояниями атома:  $A_{mn} = A_{nm}$  и  $B_{mn} = B_{nm}$ .

### 3.6 Принцип работы лазера

Изучению свойств и созданию новых квантовых усилителей и генераторов, а также их применению посвящена квантовая электроника – раздел физики, изучающий методы усиления и генерации электромагнитных волн, основанные на использовании вынужденного излучения. Упомянутые усилители и генераторы называются квантовыми потому, что в них используются электроны, входящие в состав атомов и молекул вещества (в отличие от свободных электронов в приборах обычной электроники). Движение таких электронов подчиняется законам квантовой механики.

Основные приборы квантовой электроники – оптические квантовые генераторы или лазеры (аббревиатура от *light amplification by stimulated emission of radiation*). Для излучения лазеров характерны высокая монохроматичность и когерентность, возможно также получение лазерного излучения очень большой мощности. Все это обуславливает его уникальные свойства и чрезвычайно широкие области применения.

Рассмотрим основные принципы работы лазеров.

При прохождении света через среду осуществляется обмен квантами между пучком света и атомами среды посредством поглощения и испускания фотонов, как спонтанно, так и вынужденно.

Пусть излучение резонансной частоты перехода  $\nu = \Delta E/h$  распространяется вдоль оси  $Z$  через слой прозрачного вещества, атомы которого могут находиться в состояниях с энергиями  $E_1$  и  $E_2 > E_1$ , а концентрации атомов на верхнем и нижнем уровнях равны соответственно  $N_1$  и  $N_0$ . Тогда интенсивность пучка определяется законом Бугера:

$$I(z) = I_0 e^{\alpha z}, \quad (3.29)$$

где  $\alpha = h\nu B_{10}(N_1 - N_0)/V$ ;

$B_{10}$  – коэффициент Эйнштейна;

$V$  – скорость света в среде;

$I_0 = I(0)$ .

В состоянии термодинамического равновесия концентрация атомов, обладающих энергией  $E_i$ , описывается распределением Больцмана. Согласно этому распределению, населенность уровня с более высокой энергией должна быть меньше, чем с низкой. Поскольку  $E_1 > E_0$ , то в этом случае  $N_1 < N_0$ , т.е.  $\alpha < 0$  и плотность потока по мере прохождения света уменьшается. Случай  $\alpha < 0$  соответствует поглощению света средой.

Если искусственно привести систему атомов в неравновесное состояние, когда  $N_1 > N_0$ , то выполнится условие  $\alpha > 0$ , и среда будет не

поглощать, а усиливать излучение. Состояние среды, при котором  $N_1 > N_0$ , называется состоянием с инверсной населенностью уровней. Такая среда является термодинамически неравновесной. Идея использования неравновесных сред для получения оптического усиления впервые была высказана В.А. Фабрикантом в 1940 году.

Привести систему в неравновесное состояние можно при помощи внешних воздействий, например светового пучка, вызывающего вынужденные переходы. Однако, если среда имеет только два уровня, то возможно только выравнивание населенностей, поскольку чем больше становится населенность верхнего уровня (за счет поглощения), тем больше совершается переходов на нижний уровень (с излучением). Инверсная населенность таким образом достигнута быть не может.

Рассмотрим среду, имеющую три энергетических уровня (трехуровневая схема – рисунок 5.3):  $E_0, E_1, E_2$ .

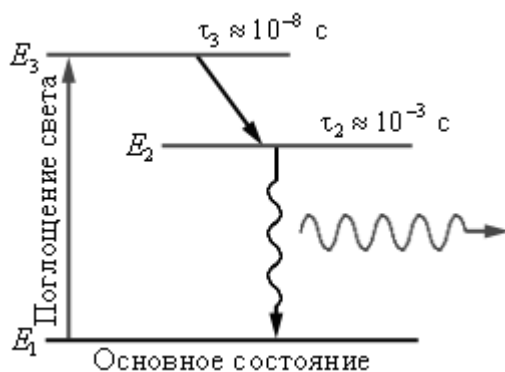


Рисунок 5.3 – Трехуровневая схема оптической накачки. Указаны «времена жизни» уровней  $E_2$  и  $E_3$ . Уровень  $E_2$  – метастабильный. Переход между уровнями  $E_3$  и  $E_2$  безызлучательный. Лазерный переход осуществляется между уровнями  $E_2$  и  $E_1$

При воздействии на систему излучения большой мощности с частотой  $\nu_{13} = (E_3 - E_1)/h$  населенности уровней  $E_3$  и  $E_1$  могут выровняться. Пусть время жизни атомов на уровне  $E_3$  гораздо меньше времени жизни на уровне  $E_2$  (согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга ширина уровня  $E_3$  должна быть гораздо больше ширины уровня  $E_2$ ). Тогда в процессе спонтанных переходов атомов с уровня  $E_3$  на  $E_2$  будет происходить накопление атомов на уровне  $E_2$ , а при вынужденных переходах атомов с уровня  $E_1$  на уровень  $E_3$  происходит уменьшение населенности уровня  $E_1$ . В результате этого между уровнями  $E_1$  и  $E_2$  создастся инверсия населенности, которая может использоваться для усиления света.

В 1954 году русские физики Н.Г. Басов и А.М. Прохоров и независимо от них американский ученый Ч. Таунс использовали явление индуцированного испускания для создания микроволнового генератора радиоволн с длиной волны  $\lambda = 1,27$  см. За разработку нового принципа

усиления и генерации радиоволн в 1964 году все трое были удостоены Нобелевской премии.

Среда, в которой создана инверсная населенность уровней, называется активной. Она может служить резонансным усилителем светового сигнала. Для того, чтобы возникла генерация света, необходимо использовать обратную связь. Для этого активную среду нужно расположить между двумя высококачественными зеркалами (оптический резонатор), отражающими свет строго назад, чтобы он многократно прошел через активную среду, вызывая лавинообразный процесс индуцированной эмиссии когерентных фотонов. При этом в среде должна поддерживаться инверсная населенность уровней. Этот процесс в лазерной физике принято называть накачкой.

Накачка, т.е. получение среды с инверсной населенностью уровней, может осуществляться различными способами: вспомогательным оптическим излучением, электрическим разрядом, энергией химической реакции и др.

Начало лавинообразному процессу в такой системе при определенных условиях может положить случайный спонтанный акт, при котором возникает излучение, направленное вдоль оси системы (рисунок 5.4).

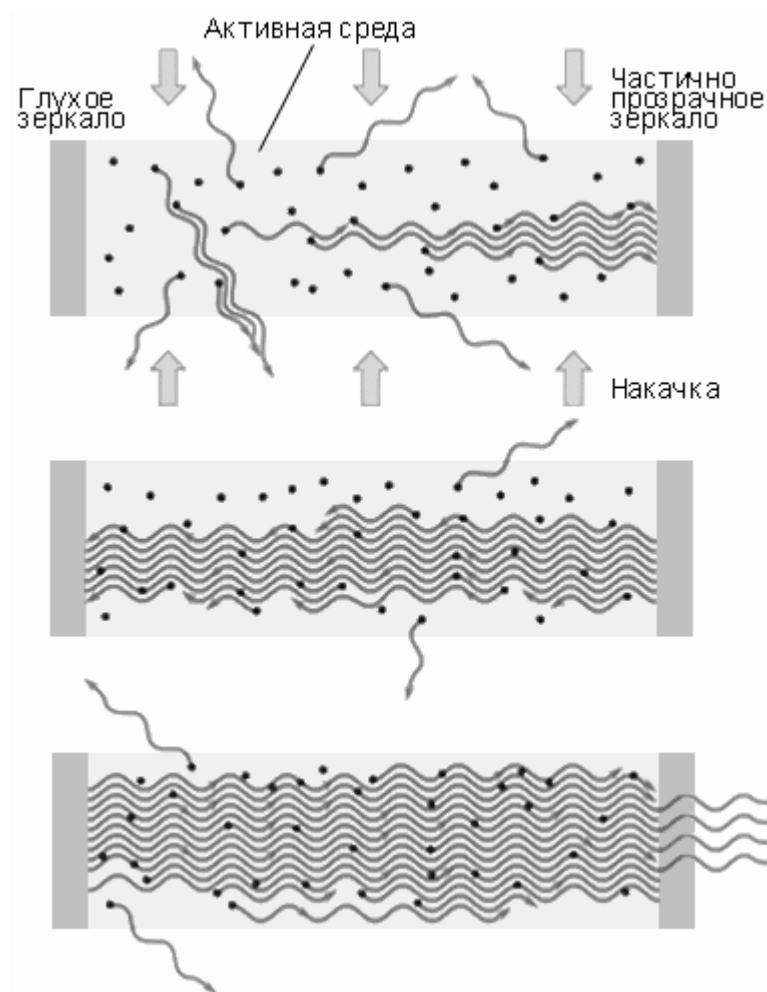


Рисунок 5.4 – Развитие лавинообразного процесса генерации в лазере

Возникшие фотоны по мере распространения могут вновь взаимодействовать с атомами активной среды. В процессе индуцированного излучения каждый фотон вызывает излучение еще одного фотона, поэтому число фотонов по мере распространения света все время удваивается, образуя лавину. Через некоторое время в такой системе возникает стационарный режим генерации, при котором будет достигнуто равновесие между излучением и поглощением. Это и есть лазер.

Одно из зеркал резонатора имеет коэффициент отражения близкий к единице, второе является частично прозрачным. Наличие частично прозрачного зеркала позволяет определенной доли лазерного излучения выходить из резонатора. Другая часть излучения вновь отражается и проходит через активную среду. Этот процесс повторяется многократно. При этом приобретаемая световым потоком в активной среде за цикл энергия должна превышать полную потерю энергии в резонаторе. Потери энергии в резонаторе складываются из энергии, поглощаемой активной средой, энергии, выходящей из резонатора (лазерного излучения) и энергии, теряемой за счет дифракционной расходимости при многократных проходах световой волны вдоль резонатора. Потерю энергии в резонаторе принято характеризовать добротностью  $Q$ , равной отношению запасенной в системе энергии к потерям энергии за одно колебание. Как следует из теории колебаний, добротность определяет ширину резонансной кривой (для лазера это спектральная ширина его излучения  $\Delta\nu_{\text{спек}}$ ).

Лазеры имеют целый ряд преимуществ по сравнению с нелазерными источниками света. Излучение лазера когерентно, то есть фотоны, излучаемые лазером, идентичны по фазе, амплитуде, направлению распространения. Поэтому оно монохроматично, может иметь очень высокую интенсивность и узкую направленность.

### 3.7 Применение и основные типы лазеров

Лазеры или оптические квантовые генераторы – это современные когерентные источники излучения, обладающие целым рядом уникальных свойств. Создание лазеров явилось одним из самых замечательных достижений физики второй половины 20 века, которое привело к революционным изменениям во многих областях науки и техники. К настоящему времени создано большое количество лазеров с различными характеристиками – газовых, твердотельных, жидкостных, полупроводниковых, излучающих свет в различных оптических диапазонах. Лазеры могут работать в импульсном и непрерывном режимах. Мощность излучения лазеров может изменяться в пределах от долей милливатта до  $10^{12}$ – $10^{13}$  Вт (в импульсном режиме).

Хотя первый лазер был построен сравнительно недавно (1960 г.), современную жизнь уже невозможно представить без лазеров. Лазеры находят широкое применение в военной технике, в технологии обработки материалов, в медицине, в оптических системах навигации, связи и локации,

в прецизионных интерференционных экспериментах, в химии, просто в быту и т. д.

Одним из важнейших свойств лазерного излучения является чрезвычайно высокая степень его монохроматичности, недостижимая в излучении нелазерных источников. Это и все другие уникальные свойства лазерного излучения возникают в результате согласованного, кооперативного испускания световых квантов многими атомами рабочего вещества. В физике используются высокая спектральная мощность лазеров, высокая степень монохроматичности (для диагностических целей – спектроскопии вещества). Благодаря особенностям лазерного излучения был создан новый раздел химии – фотохимия, которая занимается изучением химических реакций, стимулированных лазерным излучением; наиболее интересными являются реакции по разделению изотопов. Благодаря высокой интенсивности, достигаемой в фокальном пятне лазерного пучка, лазеры нашли многочисленные применения в технологии, например при сварке, резке, сверлении, поверхностной обработке и легировании. Все шире используется лазерное излучение для обработки и записи информации и для связи. При этом оно заменяет излучение радиодиапазона, а в качестве носителей излучения используются оптические волноводы. Лазеры используются в медицине (акупунктура, хирургия, диагностика) и биологии (для создания необратимых изменений на клеточном уровне).

В качестве примеров рассмотрим твердотельные лазеры на кристалле рубина и алюмо-иттриевом гранате (YAG-лазер), полупроводниковый лазер, а также газовый гелий-неоновый лазер. Рубиновый лазер интересен тем, что именно на рубине был в 1960 году создан первый лазер (американский физик Т. Майман). YAG-лазер – широко используемый в настоящее время твердотельный лазер. Гелий-неоновый лазер был первым газовым лазером (1961 г.) и в настоящее время он вместе с полупроводниковым является одним из самых распространенных типов лазеров.

### 3.7.1 Рубиновый лазер

Лазер на рубине работает в импульсном режиме на длине волны 694,3 нм (темно-вишневый свет), мощность излучения может достигать в импульсе  $10^6$ – $10^9$  Вт. В качестве источника накачки используется мощная лампа-вспышка с широким спектром излучения. Активная среда – рубин, представляет собой окись алюминия  $Al_2O_3$  (корунд) с небольшой добавкой ионов хрома  $Cr^{3+}$  (около 0,05%), замещающих в решетке корунда ионы алюминия. Ионы хрома находятся в сильном внутрискристаллическом электрическом поле, которое, вследствие так называемого эффекта Штарка, приводит к существенному уширению их энергетических уровней. В кристалле рубина уровни  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  и  $E_4$  принадлежат примесным атомам хрома (рисунок 5.5).

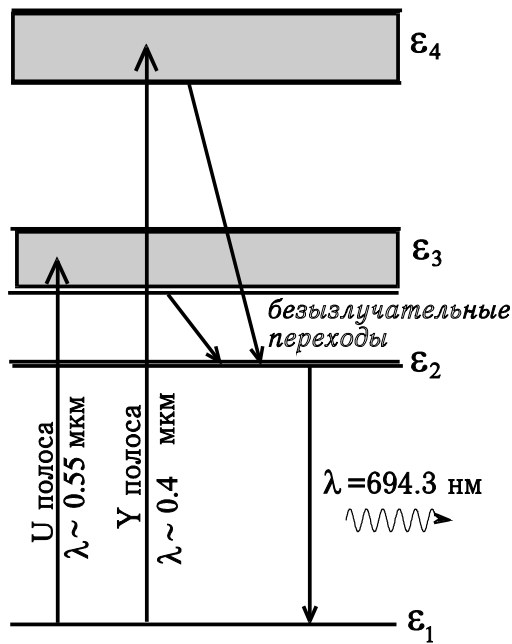


Рисунок 5.5 – Механизм накачки рубинового лазера

Некоторые уровни оказываются при этом настолько уширенными, что их называют полосами (например, полосы  $E_3$  и  $E_4$ ). Эти полосы соответствуют зеленой и голубой полосам в спектре поглощения рубина, поэтому их иногда называют зеленой и голубой полосами. Время жизни атомов на этих уровнях порядка  $10^{-8} \text{ с}$ .

Кроме этого, в энергетическом спектре имеется узкий энергетический уровень  $E_2$ , при переходе с которого в основное состояние атомы излучают свет с длиной волны  $694,3 \text{ нм}$ . Время жизни атомов на этом уровне порядка  $10^{-3} \text{ с}$ , что соответствует ширине спектральной линии  $0,4 \text{ нм}$ .

Излучение лампы-вспышки поглощается ионами хрома, переходящими в результате этого на энергетические уровни  $E_3$  и  $E_4$  в области полос поглощения. Однако с этих уровней они очень быстро безизлучательно переходят на уровни  $E_2$ . При этом излишек энергии передается кристаллической решетке. Поскольку время жизни уровня  $E_2$  достаточно велико, на нем накапливаются возбужденные атомы, создавая значительную инверсную населенность относительно уровня  $E_1$ .

### 3.7.2 Лазер на алюмо-иттриевом гранате

Лазеры на алюмо-иттриевом гранате являются самыми популярными из твердотельных лазеров. Активной средой этих лазеров является кристалл  $Y_3Al_5O_{12}$ , в котором часть ионов  $Y_3^+$  замещена ионами  $Nd_3^+$ . Такой лазер работает по четырехуровневой схеме (рисунок 5.6).

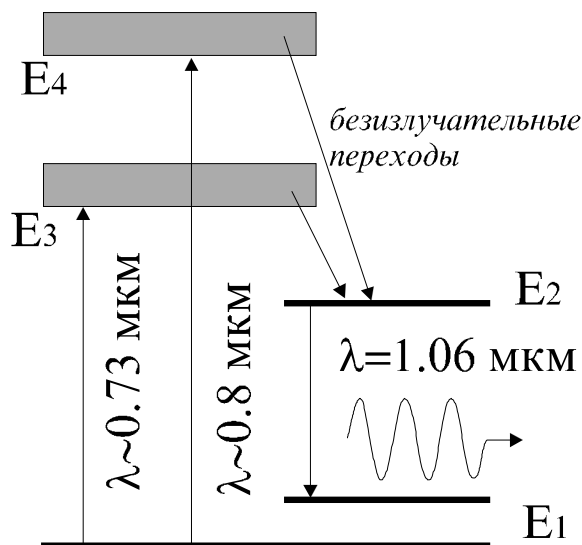


Рисунок 5.6 – Механизм накачки лазера на алюмо-иттриевом гранате

Наиболее широко используемой является лазерная линия с длиной волны 1,06 мкм. Две основные полосы накачки расположены на длинах волн 0,73 и 0,8 мкм. С этих полос ионы безизлучательно релаксируют на верхний долгоживущий лазерный уровень (уровень  $E_2$  на рисунке 5.6, время жизни атома на этом уровне  $\tau \sim 0,23$  мс), а нижний короткоживущий лазерный уровень (уровень  $E_1$  на рисунке 5.6) релаксирует также безизлучательно в основное состояние.

В качестве накачки в лазере на алюмо-иттриевом гранате используется излучение газоразрядных ламп (например, ксеноновая), работающих также в импульсном режиме, а в последние годы – излучение полупроводниковых лазеров, что позволяет существенным образом увеличить коэффициент полезного действия YAG-лазеров.

Типичные параметры лазера на алюмо-иттриевом гранате: длительность импульса – 0,1÷40 нс, средняя мощность 10÷1000 Вт, импульсная мощность 10 кВт÷10 МВт.

Очень часто в YAG-лазере используется режим модуляции добротности. Модуляция добротности используется для задержки начала генерации светового импульса с целью увеличения числа атомов, участвующих почти одновременно в усилении светового потока. Для этого увеличивается порог генерации лазера и уменьшается его добротность. Этого можно добиться, помещая в резонатор лазера ячейку Керра совместно с

поляризатором. Поляризатор обеспечивает генерацию излучения лишь определенной поляризации, а ячейка Керра ориентирована так, что при поданном на нее напряжении она не пропускает свет с этой поляризацией. При этом второе зеркало резонатора как бы отсутствует и его добротность равна нулю. В этом случае, даже если накачка создает инверсию населенности, генерация начаться не может.

Если в момент работы накачки отключить напряжение с ячейки Керра, зеркало откроется, добротность резонатора резко возрастет и все ионы, накопившиеся в возбужденном состоянии, одновременно перейдут в основное с излучением гигантского светового импульса.

Такой режим работы лазера называется режимом модулированной добротности. Он позволяет получать короткие световые импульсы с большой энергией в одном импульсе. Существуют и другие способы модуляции добротности резонатора.

### 3.7.3 Гелий-неоновый лазер

Одним из самых распространенных лазеров в настоящее время является газовый лазер на смеси гелия и неона. Общее давление в смеси составляет порядка  $10^2 \text{ Па}$  при соотношении компонент He и Ne примерно 10:1. Активным газом, на котором возникает генерация на длине волны  $632,8 \text{ нм}$  (ярко-красный свет) в непрерывном режиме, является неон. Гелий является буферным газом, он участвует в механизме создания инверсной населенности одного из верхних уровней неона. Излучение He-Ne лазера обладает исключительной, непревзойденной монохроматичностью. Расчеты показывают, что спектральная ширина линии генерации He-Ne лазера составляет примерно  $\Delta\nu \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$ . Это фантастически малая величина. Время когерентности такого излучения оказывается порядка  $\tau \approx (\Delta\nu)^{-1} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ с}$ , а длина когерентности  $c\tau \approx 6 \cdot 10^{11} \text{ м}$ , т. е. больше диаметра земной орбиты!

На практике многие технические причины мешают реализовать столь узкую спектральную линию He-Ne лазера. Путем тщательной стабилизации всех параметров лазерной установки удается достичь относительной ширины  $\Delta\nu/\nu$  порядка  $10^{-14}$ – $10^{-15}$ , что примерно на 3–4 порядка хуже теоретического предела. Но и реально достигнутая монохроматичность излучения He-Ne лазера делает этот прибор совершенно незаменимым при решении многих научных и технических задач. На рисунке 5.7 представлена упрощенная схема уровней гелия и неона и механизм создания инверсной населенности лазерного перехода.



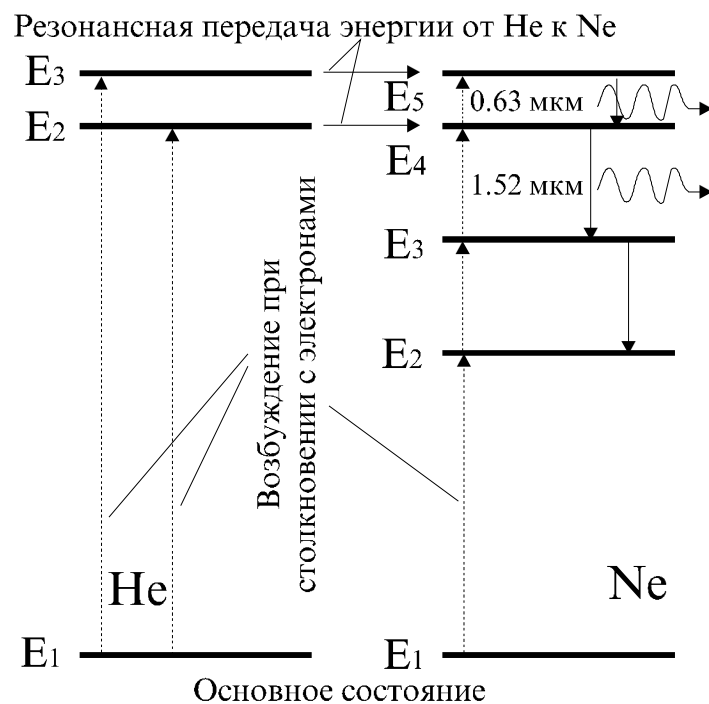


Рисунок 5.7 – Механизм накачки гелий-неонового лазера

Инверсия населенности в гелий-неоновом лазере достигается при помощи высоковольтного газового разряда. В газовом разряде электроны ускоряются электрическим полем, сталкиваются с атомами и ионизуют их, вызывая появление вторичных электронов, которые в свою очередь также ускоряются, и т. д. Часть атомов при столкновениях не ионизуется, а возбуждается. При определенных условиях (давлении газа, напряжении на трубке) доля возбужденных атомов может оказаться столь велика, что возникнет инверсия населенности.

В гелий-неоновом лазере рабочим веществом являются нейтральные атомы Ne. Они могут быть возбуждены непосредственно в газовом разряде. Однако времена жизни уровней неона таково, что инверсная населенность, создаваемая таким образом, невелика. Поэтому дополнительно используется резонансная передача возбуждения атомами гелия, которые присутствуют в разряде в качестве примеси. При этом используется тот факт, что энергии уровней  $E_2$  и  $E_3$  гелия весьма близки к энергиям уровней  $E_4$  и  $E_5$  неона. Возбужденные атомы гелия неупруго сталкиваются с атомами неона, находящимися в основном состоянии, и передают им свою энергию. Для того, чтобы процесс передачи энергии эффективно шел от He к Ne, а не наоборот, отношение парциальных давлений He и Ne должно быть приблизительно 10:1.

При достаточно высоком уровне накачки в смеси гелия и неона начинается лавинообразный процесс размножения идентичных когерентных фотонов. Если кювета со смесью газов помещена между высокоотражающими зеркалами, то возникает лазерная генерация. Рабочими переходами Ne являются переходы  $E_5 \rightarrow E_3$  и  $E_4 \rightarrow E_3$ , при этом длины волн

лазерного излучения равны  $\lambda_{53}=0,63$  мкм и  $\lambda_{43}=1,15$  мкм. Выбор длины волны излучения He-Ne лазера осуществляется выбором типа зеркал. Энергетический уровень  $E_3$  опустошается за счет безизлучательных переходов на уровень  $E_2$ . Опустошение энергетического уровня  $E_2$  атомов неона происходит, в основном, в процессе столкновения атомов со стенками газоразрядной трубки. Это накладывает ограничения на диаметр газоразрядной трубки, а следовательно, и на объем рабочей среды, что является принципиальным ограничением мощности гелий-неоновых лазеров.

На рисунке 5.8 изображена схема гелий-неонового лазера.

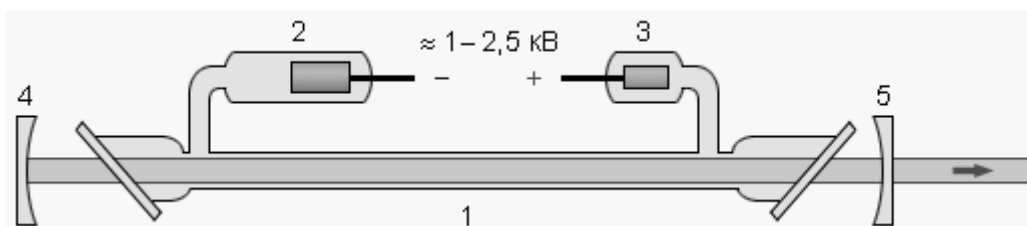


Рисунок 5.8 – Схема гелий-неонового лазера: 1 – стеклянная кювета со смесью гелия и неона, в которой создается высоковольтный разряд; 2 – катод; 3 – анод; 4 – глухое сферическое зеркало с пропусканием менее 0,1 %; 5 – сферическое зеркало с пропусканием 1–2 %

Современные высокостабильные гелий-неоновые лазеры производятся в моноблочном исполнении. Для этого используется стеклообразное вещество – ситалл, обладающий практически нулевым температурным коэффициентом расширения. В куске ситалла в форме прямоугольного параллелепипеда просверливается канал, к торцам которого на оптическом контакте приклеиваются лазерные зеркала. Канал заполняется смесью гелия и неона. Катод и анод вводятся через дополнительные боковые каналы. Такая моноблочная конструкция обеспечивает высокую механическую и тепловую стабильность.

### 3.7.4 Полупроводниковые лазеры

Для создания инверсной населенности в полупроводниковых лазерах используется р-п переход – контакт полупроводников двух типов, один из которых обладает электронной проводимостью, другой – дырочной, при этом инверсия населенности создается именно в области р-п перехода при подаче на переход прямого напряжения. В лазере может использоваться один переход, например, переход, возникающий при контакте n-GaAs/p-GaAs (фактически это обыкновенный полупроводниковый диод), или несколько переходов, например n-GaAs/p-GaAs/p-AlGaAs (лазер на гетероструктуре).

В качестве зеркал в полупроводниковых лазерах часто используются просто полированные торцевые поверхности самого диода (гетероструктуры). В качестве накачки используется поданное на диод напряжение. Эти два фактора делают полупроводниковый лазер крайне

простым при изготовлении и экономичным при использовании. Коэффициент полезного действия полупроводникового лазера, то есть доля поданной энергии, которая переходит в энергию лазерного излучения, может составлять 50%. В то же время расходимость излучения довольно велика и может доходить до  $45^\circ$ . Полупроводниковые лазеры могут быть очень миниатюрными (типичный размер  $0,1 \times 0,1 \times 0,3 \text{ мм}^3$ ), а типичная выходная мощность составляет  $50 \text{ мВт}$ .

### 3.8 Контрольные вопросы

- 1) Как с помощью постулатов Бора объясняется линейчатый спектр атома?
- 2) Какие основные выводы можно сделать на основании опытов Франка и Герца?
- 3) Что характеризует главное квантовое число?
- 4) Что такое спектр электромагнитного излучения?
- 5) Что такое линейчатый спектр электромагнитного излучения?
- 6) Что является источником линейчатого спектра электромагнитного излучения?
- 7) Что такое полосатый спектр электромагнитного излучения и что является его источником?
- 8) При каких условиях излучается сплошной спектр электромагнитного излучения?
- 9) Опишите планетарную модель атома.
- 10) При каких условиях электроны в атоме излучают или поглощают электромагнитное излучение?
- 11) Как связаны друг с другом характеристики фотона и электрона, который излучает данный фотон?
- 12) Расшифруйте краткую запись состояния электрона в атоме ( $2s^2$ ,  $2p^3$ ).
- 13) Что такое спектральная серия?
- 14) Назовите названия спектральных серий излучения атомарного водорода. Запишите условия для их возникновения.
- 15) Назовите основные причины несостоятельности планетарной модели атома Резерфорда.
- 16) Сформулируйте первый постулат Бора.
- 17) Сформулируйте второй постулат Бора.
- 18) В чём заключается смысл квантования орбит Бора?
- 19) Что такое первый боровский радиус?
- 20) Что такое энергия ионизации, потенциал ионизации?
- 21) Запишите аналитическое выражение правила частот Бора.
- 22) Запишите аналитическое выражение правила квантования орбит Бора.
- 23) Почему тормозное рентгеновское излучение имеет сплошной спектр, а характеристическое – линейчатый?

- 24) Поясните механизмы спонтанного и индуцированного переходов.
- 25) Перечислите свойства спонтанного и вынужденного излучений.
- 26) Назовите способы достижения инверсной населенности уровней.
- 27) На чем основано действие усилителя света?
- 28) Перечислите преимущества лазеров.
- 29) Укажите сферы применения лазеров.
- 30) Выполнение какого условия необходимо для возникновения вынужденного излучения в веществе?
- 31) Перечислите виды лазеров.
- 32) Расскажите об устройстве рубинового лазера.

### 3.9 Примеры решения задач

1) В опытах Резерфорда поток  $\alpha$ -частиц, несущих заряд  $2e$  ( $e$  – элементарный заряд), направлялся на золотую фольгу. Ядро атома золота содержит 79 протонов. Найдите минимальное значение первоначальной кинетической энергии  $\alpha$ -частиц, при котором они могут приблизиться к центру неподвижного ядра золота на расстояние  $r = 4,0 \cdot 10^{-14}$  м. Предполагается, что радиус ядра меньше этого расстояния.

*Решение:*

Альфа-частица приближается к неподвижному ядру золота на минимальное расстояние при лобовом соударении, т. е. при рассеянии на угол  $180^\circ$ . Найдём потенциальную энергию  $U$  системы, когда  $\alpha$ -частица находится на расстоянии  $r = 4,0 \cdot 10^{-14}$  м от центра ядра:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(79e)}{r} = 0,91 \cdot 10^{-12} \text{ Дж} = 5,7 \text{ МэВ}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что первоначальная кинетическая энергия  $\alpha$ -частицы должна быть по крайней мере равна  $5,7 \text{ МэВ}$ , чтобы частица могла приблизиться к ядру золота на расстояние  $4,0 \cdot 10^{-14}$  м.

Альфа-частицы, испускаемые радиоактивными элементами, имеют энергию в диапазоне от 4 до 6 МэВ. В частности, изотоп радия  $^{226}\text{Ra}$  испускает  $\alpha$ -частицы с энергией  $4,78 \text{ МэВ}$ .

2) В модели атома водорода по Томсону положительный заряд, равный элементарному заряду  $e$ , однородно распределен внутри шара радиусом  $R = 10^{-8}$  см. Точечный электрон, несущий заряд  $-e$ , находится в центре шара. Определите энергию ионизации атома водорода в модели Томпсона.

*Решение:*

Электрическое поле снаружи атома, создаваемое положительным зарядом, ( $r \geq R$ ) совпадает с кулоновским полем точечного заряда  $e$ , расположенного в центре шара.

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{e}{r^2}, \quad (r \geq R).$$

Поле внутри шара может быть найдено с помощью теоремы Гаусса:

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{er^3}{R^3}, \quad (r \leq R),$$

где  $er^3 / R^3$  – заряд внутри шара радиусом  $r \leq R$ . Таким образом,

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{er}{R^3}, \quad (r \leq R).$$

Внутри однородного заряженного шара напряженность электрического поля линейно возрастает с увеличением расстояния  $r$  от центра. Для определения потенциала ионизации томпсоновского атома водорода нужно знать потенциал в центре шара, создаваемый однородным положительным зарядом шара:

$$\varphi_0 = \int_0^R \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{er}{R^3} dr + \int_R^\infty \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{e}{r^2} dr = \frac{3}{8\pi \varepsilon_0} \frac{e}{R}.$$

Если в центре положительно заряженного шара радиусом  $R$  помещен точечный заряд  $-e$ , то потенциальная энергия такой системы равна

$$U = (-e)\varphi_0 = \frac{3}{8\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{R}.$$

По определению, энергия ионизации  $E_{\text{ион}}$  равна работе внешних сил по удалению электрона из атома на бесконечность, следовательно, она равна потенциальной энергии  $U$  электрона в электрическом поле положительного заряда атома, взятой со знаком минус:

$$E_{\text{ион}} = -U = \frac{3}{8\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{R}.$$

Подстановка числовых значений в это выражение дает:  
 $E_{\text{ион}} = 0,345 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} = 21,6 \text{ эВ}.$

Реальное значение энергии ионизации атома водорода, находящегося в основном состоянии, равно  $E_{\text{ион}} = 13,55 \text{ эВ}.$

3) Атом водорода в основном состоянии имеет энергию  $E_1 = -13,6 \text{ эВ}.$  Определите радиус  $r_1$  первой боруновской орбиты электрона.

*Решение:*

Энергия атома водорода складывается из потенциальной энергии  $E_p$  электрона в поле ядра

$$E_p = - \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{r_1}$$

и кинетической энергии  $E_k$  электрона, движущегося по круговой орбите радиуса  $r_1$ . Из условия

$$\frac{m_e V^2}{r_1} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{r_1^2}$$

найдем

$$E_k = \frac{m_e V^2}{2} = \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{r_1}.$$

Таким образом, полная энергия атома водорода в основном состоянии равна

$$E_1 = - \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{r_1}.$$

Отсюда для радиуса  $r_1$  первой боровской орбиты получим

$$r_1 = - \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{E_1}.$$

Подстановка числовых значений дает:  $r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ .

4) Однократно ионизированный ион гелия  $\text{He}^+$  очень похож на атом водорода. Он содержит единственный электрон. Отличие состоит в том, что ядро иона  $\text{He}^+$  несет заряд  $2e$ . Согласно теории Бора, значение энергий стационарных состояний водородоподобных атомов относятся как квадраты зарядов их ядер:

$$(E_n)_{\text{He}^+} = 4(E_n)_H.$$

Известно, что при переходе со стационарного энергетического уровня 3 на уровень 2 атом водорода испускает фотон с длиной волны  $(\lambda_{32})_H = 656,28 \text{ нм}$ . Определите длину волны фотона, испускаемого ионом  $\text{He}^+$  при переходе с третьей стационарной орбиты на вторую.

*Решение:*

Согласно второму постулату Бора,

$$v_{nm} = \frac{c}{\lambda_{nm}} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{\Delta E_{nm}}{h}$$

или

$$\lambda_{nm} = \frac{hc}{\Delta E_{nm}}.$$

Принимая во внимание, что

$$(\Delta E_{nm})_{He^+} = 4(\Delta E_{nm})_H,$$

получим

$$(\lambda_{32})_{He^+} = \frac{1}{4}(\lambda_{32})_H = 164,07 \text{ нм}.$$

Таким образом, красная линия с длиной волны 656,21 нм в спектре атома водорода соответствует ультрафиолетовой линии с длиной волны 164,07 нм в спектре иона  $He^+$ .

5) Используя правило квантования Бора, найдите радиус  $r_2$  второй боровской орбиты электрона в однократно ионизированном атоме гелия  $He^+$ , ядро которого содержит два протона. Сравните с радиусом второй боровской орбиты в атоме водорода.

*Решение:*

Из второго закона Ньютона следует, что скорость электрона, вращающегося по круговой орбите некоторого радиуса  $r$  в кулоновском поле неподвижного ядра, несущего заряд  $2e$ , определяется соотношением

$$V^2 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2e^2}{m_e r^2},$$

где  $e$  – элементарный заряд;

$m_e$  – масса электрона;

$\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

Согласно теории Бора, момент импульса электрона, вращающегося вокруг ядра, может принимать только дискретные значения, кратные постоянной Планка  $h$ :

$$m_e V r_n = n \frac{h}{2\pi}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Исключая из этих соотношений скорость электрона  $V$ , получим для  $n = 2$ :

$$r_2 = \frac{2\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 2a_0 = 1,058 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

где  $a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$  – радиус первой боровской орбиты в атоме водорода. Радиусы последующих орбит в атоме водорода изменяются прямо пропорционально  $n^2$ . Следовательно,  $(r_2)_H = 3a_0$ .

$$\frac{(r_2)_H}{(r_2)_{He^+}} = 2.$$

Это соотношение справедливо для всех орбит одинакового номера атомов водорода H и иона H<sup>+</sup>.

б) Какую минимальную длину волны имеет фотон, способный ионизировать атом водорода, находящийся в основном состоянии ( $n = 1$ )?

*Решение:*

В полуклассической теории Бора полная энергия электрона на  $n$ -й стационарной орбите выражается формулой

$$E_n = E_{кин} + E_{пот} = - \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

где  $e$  и  $m_e$  – заряд и масса электрона соответственно;

$\epsilon_0$  – электрическая постоянная;

$h$  – постоянная Планка.

Согласно второму постулату Бора, при переходе ( $n \rightarrow m$ ) поглощается или испускается квант света, частота которого  $\nu_{nm}$  равна

$$\nu_{nm} = \frac{\Delta E_{nm}}{h} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Величина

$$R = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} = 3,292 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$$



называется постоянной Ридберга.

По условию данной задачи, атом переходит из основного состояния, в котором электрон находится на первой боровской орбите ( $n = 1$ ), в состояние с  $m = \infty$  (ионизация). При этом атом поглощает квант света с частотой  $\nu_{1\infty} = R$ . Длина волны  $\lambda$  поглощенного фотона равна

$$\lambda = \frac{c}{\nu_{1\infty}} = \frac{c}{R} = 0,911 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 9,11 \text{ нм}.$$

Полученное значение  $\lambda$  равно максимальной длине волны фотона, способного вызвать ионизацию атома водорода, находящегося в состоянии с  $n = 1$ . Более коротковолновые фотоны также способны вызвать ионизацию атома водорода, при этом часть энергии фотона перейдет в кинетическую энергию освобожденного электрона.

7) В лазере на рубине, работающем в импульсном режиме на длине волны  $\lambda = 694 \text{ нм}$  (темно-красный свет), используется оптическая накачка. Предположим, что рубиновый стержень лазера получил при накачке энергию  $W = 20 \text{ Дж}$ . Длительность лазерного импульса  $\tau = 10^{-3} \text{ с}$ . Какую мощность  $P$  в импульсе развивает лазер? Какую плотность  $I$  светового потока можно получить при фокусировке когерентного лазерного излучения на площадке  $S = 10^{-2} \text{ мм}^2$ ?

*Решение:*

Мощность  $P$  равна отношению энергии  $W$ , излученной в импульсе, к длительности импульса  $\tau$ :

$$P = W / \tau = 2 \cdot 10^4 \text{ Вт} = 20 \text{ кВт}.$$

Плотность  $I$  светового потока лазера при фокусировке излучения в пятно площадью  $S$  равна

$$I = \frac{P}{S} = 2 \cdot 10^{12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Следует отметить, что когерентное излучение может быть сфокусировано в пятно диаметром порядка длины волны  $\lambda$ . В этом случае плотность светового потока в фокусе достигла бы значения порядка  $4 \cdot 10^{16} \text{ Вт/м}^2$ .

8) Гелий-неоновый лазер, работающий в непрерывном режиме на длине волны  $\lambda = 632,8 \text{ нм}$  (красный свет), имеет выходящую мощность  $P = 4 \text{ мВт}$ . Сколько фотонов испускает лазер за  $\tau = 1 \text{ с}$ ?

*Решение:*

Энергия  $E$  фотона с длиной волны  $\lambda$  есть

$$E = h\nu = hc / \lambda.$$

Число фотонов, испускаемых лазером за 1 с, равно

$$N = \frac{P}{E} = \frac{P\lambda}{hc}.$$

Подстановка числовых значений дает:  $N = 1,27 \cdot 10^{16}$  фотонов/с.

### 3.10 Задачи для самостоятельного решения

1) Определить по теории Бора радиус  $r_3$  третьей стационарной орбиты и скорость  $V_3$  электрона на этой орбите для атома водорода.

2) Вычислить по теории Бора период  $T$  вращения и частоту  $f$  обращения электрона в атоме водорода, находящегося в возбужденном состоянии, определяемом главным квантовым числом  $n = 3$ .

3) Электрон в атоме водорода находится на третьем энергетическом уровне. Определить кинетическую  $T$ , потенциальную  $П$  и полную  $E$  энергию электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах.

4) Найти энергию  $E_i$  ионизации и потенциал  $U$  ионизации атома водорода.

5) Определить первый потенциал  $U_1$  возбуждения атома водорода.

6) Найти наибольшую  $\lambda_{\max}$  и наименьшую  $\lambda_{\min}$  длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена).

7) Фотон с энергией  $\varepsilon = 16,5$  эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость  $V$  будет иметь электрон вдали от ядра атома?

8) Невозбужденный атом водорода поглощает квант излучения с длиной волны  $\lambda = 102,5$  нм. Вычислить радиус  $r$  электронной орбиты возбужденного атома водорода.

9) На дифракционную решетку с периодом  $d = 5$  мкм нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом  $\varphi = 41^\circ$ .

10) Фотон с энергией  $E = 12,12$  эВ, поглощенный атомом водорода, находящимся в основном состоянии, переводит атом в возбужденное состояние. Определить главное квантовое число  $n$  этого состояния.

## 4 Общие методические указания к решению задач

Систематическое решение задач – один из лучших методов прочного усвоения, проверки и закрепления теоретического материала и необходимое условие успешного изучения курса физики. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти формулы, прививает навыки практического применения теоретических знаний. Прежде чем приступить к решению той или иной задачи, необходимо хорошо понять ее содержание и поставленные в ней вопросы. При решении задач необходимо выполнять следующие указания:

1) Сначала ознакомьтесь с таблицами приложения, так как решение многих задач без них невозможно. Кроме того, содержащийся в этих таблицах справочный материал значительно облегчит Вашу работу и сэкономит время.

2) Хорошо вникнув в условие задачи, ее смысл и постановку вопроса, сделайте краткую запись условия.

3) Установите, все ли данные, необходимые для решения задачи, приведены. Константы физических величин и другие недостающие справочные данные, где это необходимо, можно найти в соответствующих таблицах приложения или в справочниках.

4) Запишите основные законы и формулы, на которых базируется решение задачи, дайте словесную формулировку этих законов и разъясните буквенные обозначения, употребляемые при написании формул. Если при решении задач применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физической закон или не являющаяся определением какой-либо физической величины, то ее следует вывести.

5) Выполните рисунок, начертите схему или сделайте чертеж, поясняющие содержание задачи (если позволяет характер задачи) – это во многих случаях значительно облегчает как поиск решения, так и само решение. Выполнять их надо аккуратно при помощи чертежных принадлежностей.

6) Решение задач сопровождайте краткими, но исчерпывающими пояснениями.

7) При решении задачи необходимо обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если Вы видите несколько путей решения, то должны сравнить их и выбрать из них самый лучший и рациональный.

8) Решите задачу в общем виде, т. е. выразите искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи и взятых из таблиц. Решение в общем виде придает окончательному результату особую ценность, так как позволяет установить определенную закономерность, показывающую, как зависит искомая величина от заданных величин. Кроме того, ответ, полученный в общем виде, позволяет судить в значительной степени о правильности самого решения. При таком способе решения не

производятся вычисления промежуточных величин (числовые значения подставляются только в окончательную расчетную формулу, выражающую искомую величину).

В тех случаях, когда в процессе нахождения искомых величин приходится решать систему нескольких громоздких уравнений, целесообразно сначала подставить в эти уравнения числовые значения коэффициентов и лишь затем определять значения искомых физических величин.

9) После получения расчетной формулы, для проверки ее правильности, следует подставить в правую часть этой формулы вместо символов величин размерности (или сокращенные обозначения) единиц измерения этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом размерность соответствует размерности искомой величины. Если в формулу входит показательная функция, то размерность показателя должна быть равна единице. Неверная размерность служит явным признаком ошибочности решения.

10) Если возможно, исследуйте поведение решения в предельных частных случаях.

11) Выразите все физические величины, входящие в расчетную формулу, в единицах Международной системы единиц СИ. При решении задач следует, как правило, пользоваться этой системой единиц (СИ) или единицами одной системы.

12) Подставьте в окончательную расчетную формулу, полученную в результате решения задачи в общем виде, заданные числовые значения величин, выраженные в единицах одной системы. Несоблюдение этого правила приводит к неверному результату. В виде исключения из этого правила допускается выражать в любых, но только одинаковых единицах, числовые значения лишь тех однородных величин, которые входят в виде сомножителей в числитель и знаменатель формулы и имеют одинаковые показатели степени.

13) При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения физических величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти.

Например, вместо 4560 надо записывать  $4,56 \cdot 10^3$ , а вместо 0,00789 записать  $7,89 \cdot 10^{-3}$  и т. п.

14) Подставив в формулу числовые значения, прежде чем начать вычисления, проверьте, нельзя ли воспользоваться формулами для приближенных вычислений, приведенными в приложении к настоящему пособию.

15) Произведите вычисление величин, подставленных в окончательную расчетную формулу, руководствуясь правилами приближенных вычислений.

16) В конце каждой решенной задачи необходимо записать ответ. Числовое значение ответа и сокращенное наименование единицы измерения

искомой величины привести в той системе, в которой производились вычисления.

17) Точность расчета определяется числом значащих цифр исходных данных. Как правило, окончательный ответ следует записывать не более чем с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением микрокалькулятора.

18) Оцените, где это целесообразно, реальность и правдоподобность полученного численного ответа. В ряде случаев такая оценка поможет обнаружить ошибочность полученного результата.

Например, скорость тела не может быть больше скорости света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; масса атома  $m$  не может быть порядка 1 мг; электрический заряд  $q$  не может быть меньше элементарного заряда  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл и т. д.

19) Полезно, если это возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения достаточно твердых навыков в их решении.

Умение решать задачи приобретается длительными и систематическими упражнениями. Чтобы научиться решать задачи, следует после изучения очередного раздела учебного пособия внимательно разобрать, а затем решить достаточное количество задач из числа приведенных в данном пособии и в различных задачниках по физике (см. список литературы).

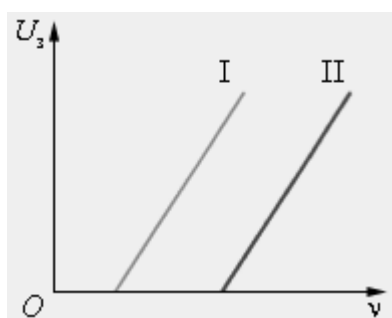
## 5 Тесты

1. Закон  $R(T)=\sigma T^4$  открыт:
  - а) Стефаном и Больцманом;
  - б) Вином;
  - в) Релеем и Джинсом;
  - г) Планком;
  - д) нет правильного ответа.
2. Закон  $\lambda_m = b / T$  открыт:
  - а) Стефаном и Больцманом;
  - б) Вином;
  - в) Релеем и Джинсом;
  - г) Планком;
  - д) нет правильного ответа.
3. Формула для спектральной светимости абсолютно черного тела была открыта:
  - а) Стефаном и Больцманом;
  - б) Вином;
  - в) Релеем и Джинсом;
  - г) Планком;
  - д) нет правильного ответа.
4. Температура абсолютно черного тела уменьшилась от  $2000\text{ K}$  до  $1000\text{ K}$ . Длина волны, на которую приходится максимум излучения:
  - а) увеличилась в 2 раза;
  - б) уменьшилась в 2 раза;
  - в) увеличилась в 16 раз;
  - г) уменьшилась в 16 раз;
  - д) нет правильного ответа.
5. Мощность абсолютно черного тела с единицы поверхности голубой звезды с температурой  $3 \cdot 10^4\text{ K}$  больше аналогичной величины для желтой звезды с температурой  $6 \cdot 10^3\text{ K}$ :
  - а) в 5 раз;
  - б) в 25 раз;
  - в) в 125 раз;
  - г) в 625 раз;
  - д) нет правильного ответа.
6. Как изменится частота «красной» границы фотоэффекта, если шарик радиусом  $R$  сообщить положительный заряд?
  - а) Не изменится;
  - б) Увеличится;
  - в) Уменьшится;
  - г) Ответ неоднозначный;
  - д) Нет правильного ответа.

7. Как изменится кинетическая энергия электронов при фотоэффекте, если увеличить частоту облучающего света, не изменяя общую мощность излучения?

- а) Не изменится;
- б) Увеличится;
- в) Уменьшится;
- г) Ответ неоднозначный;
- д) Нет правильного ответа.

8. На рисунке приведены графики зависимости запирающего напряжения фотоэлемента от частоты облучающего света. В каком случае материал катода фотоэлемента имеет большую работу выхода?



- а) I;
- б) II;
- в) Работа выхода материалов одинакова;
- г) Ответ неоднозначен;
- д) Нет правильного ответа;

9. При освещении катода вакуумного фотоэлемента потоком монохроматического света происходит освобождение фотоэлектронов. Как изменится максимальная энергия фотоэлектронов при увеличении частоты в 2 раза?

- а) Не изменится;
- б) Увеличится в 2 раза;
- в) Увеличится менее чем в 2 раза;
- г) Увеличится более чем в 2 раза;
- д) Нет правильного ответа.

10. В эксперименте обнаружено, что при очень высокой интенсивности облучения фотоэлектрический эффект происходит и при частотах фотонов ниже красной границы фотоэффекта. Как Вы думаете, чем можно объяснить этот эффект?

- а) Это следствие соотношения неопределенностей;
- б) Атомы могут поглощать одновременно два или более фотонов;
- в) Возможен туннельный эффект;
- г) При высоких интенсивностях облучения возможно нарушение закона сохранения энергии;
- д) Нет правильного ответа.

11. Может ли свободный электрон, находящийся в проводнике, полностью поглотить фотон?

- а) Да;
- б) Нет;
- в) Да, если проводник находится в вакууме;
- г) Ответ неоднозначен;
- д) Нет правильного ответа.

12. При каком угле комптоновского рассеяния фотона происходит наименьшее изменение длины волны?

- а)  $0^\circ$ ;
- б)  $45^\circ$ ;
- в)  $90^\circ$ ;
- г)  $135^\circ$ ;
- д)  $180^\circ$ .

13. При взаимодействии быстрых электронов с фотонами наблюдается обратный эффект Комптона. Как при этом изменяется кинетическая энергия  $E_k$  электрона и длина волны  $\lambda$  соответствующего фотона?

- а)  $E_k$  и  $\lambda$  увеличиваются;
- б)  $E_k$  и  $\lambda$  уменьшаются;
- в)  $E_k$  уменьшается,  $\lambda$  увеличиваются;
- г)  $E_k$  увеличивается,  $\lambda$  уменьшается;
- д)  $E_k$  и  $\lambda$  не изменяются.

14. При каком угле комптоновского рассеяния фотона происходит наибольшее изменение длины волны?

- а)  $0^\circ$ ;
- б)  $45^\circ$ ;
- в)  $90^\circ$ ;
- г)  $135^\circ$ ;
- д)  $180^\circ$ .

15. При взаимодействии быстрых электронов с фотонами наблюдается обратный эффект Комптона. Как при этом изменяется скорость электрона  $V$  и длина волны  $\lambda$  соответствующего фотона?

- а)  $V$  и  $\lambda$  увеличиваются;
- б)  $V$  и  $\lambda$  уменьшаются;
- в)  $V$  уменьшается,  $\lambda$  увеличиваются;
- г)  $V$  увеличивается,  $\lambda$  уменьшается;
- д)  $V$  и  $\lambda$  не изменяются.

16. Какое из приведенных ниже выражений соответствует энергии фотона?

- а)  $\frac{h \cdot c}{\lambda}$ ;
- б)  $\frac{h}{\lambda}$ ;
- в)  $\frac{h \cdot \nu}{c}$ ;



г)  $\frac{h \cdot \nu}{c^2}$ ;

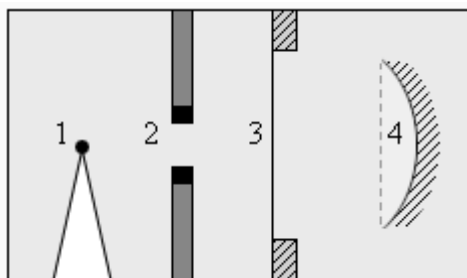
д) Нет правильного ответа.

17. Какие из перечисленных ниже физических явлений доказывают квантовые (корпускулярные) свойства света?

1. Интерференция.
2. Дифракция.
3. Фотоэффект.
4. Поляризация.
5. Комpton-эффект (рассеяние света свободными электронами).

- а) 1, 3;
- б) 1, 2, 4;
- в) 2, 3, 4;
- г) 3, 5;
- д) 1, 2, 3.

18. На рисунке представлена схема экспериментальной установки Резерфорда для изучения рассеяния  $\alpha$ -частиц. Какой цифрой на рисунке отмечена золотая фольга, в которой происходило рассеяние  $\alpha$ -частиц?



- а) 1;
- б) 2;
- в) 3;
- г) 4;
- д) 2 и 3.

19. Какова природа сил, отклоняющих  $\alpha$ -частицы от прямолинейной траекторий в опыте Резерфорда?

- а) Гравитационная;
- б) Кулоновская;
- в) Магнитная;
- г) Ядерная;
- д) Нет правильного ответа.

20. Почему в опыте Резерфорда большая часть  $\alpha$ -частиц свободно проходит сквозь фольгу, испытывая малые отклонения от прямолинейных траекторий?

- а) Электроны имеют малую (по сравнению с  $\alpha$ -частицей) массу;
- б) Ядро атома имеет положительный заряд;
- в) Ядро атома имеет малые (по сравнению с атомом) размеры;
- г)  $\alpha$ -частицы имеют большую (по сравнению с ядрами атомов) массу;

д) Нет правильного ответа.

21. Траектория  $\alpha$ -частицы в опыте Резерфорда представляет собой

а) прямую линию;

б) эллипс;

в) параболу;

г) гиперболу;

д) нет правильного ответа.

22. Чему равна частота фотона, излучаемого при переходе из возбужденного состояния  $E_1$  в основное состояние  $E_0$ ?

а)  $\frac{E_1}{h}$ ;

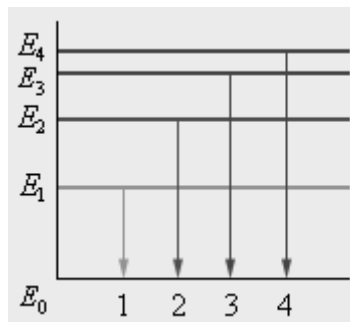
б)  $\frac{E_1}{h}$ ;

в)  $\frac{E_1 - E_0}{h}$ ;

г)  $\frac{E_1 + E_0}{h}$ ;

д) Нет правильного ответа.

23. На рисунке представлена диаграмма энергетических уровней атома. Какой цифрой обозначен переход с излучением фотона максимальной частоты?



а) 1;

б) 2;

в) 3;

г) 4;

д) При всех переходах излучаются фотоны с одинаковой частотой.

24. Какое из приведенных ниже высказываний правильно описывает способность атомов к излучению и поглощению энергии при переходе между двумя различными стационарными состояниями?

а) Атом может излучать и поглощать фотоны любой энергии;

б) Атом может излучать фотоны любой энергии, а поглощать лишь с некоторыми значениями энергии;

в) Атом может поглощать фотоны любой энергии, а излучать лишь с некоторыми значениями энергии;

г) Атом может излучать и поглощать фотоны лишь с некоторыми значениями энергии;

д) Нет правильного ответа.

25. Энергия ионизации атома водорода равна  $E_0$ . Какую минимальную энергию нужно затратить, чтобы электрон перешел из основного в первое возбужденное состояние?

а)  $\frac{E_0}{4}$ ;

б)  $\frac{E_0}{2}$ ;

в)  $\frac{3E_0}{4}$ ;

г)  $\frac{7E_0}{8}$ ;

д) Нет правильного ответа.

26. Какая связь, в соответствии с атомной теорией Бора, существует между скоростью электрона в атоме  $V$  и радиусом его орбиты  $r$ ?

а)  $V \sim r$ ;

б)  $V \sim \frac{1}{r}$ ;

в)  $V \sim r^2$ ;

г)  $V \sim \frac{1}{r^2}$ ;

д) Нет правильного ответа.

27. При сообщении атомам какого-либо вида энергии они переходят в возбужденное состояние. После этого атомы излучают фотоны при переходе в основное состояние. Каково по порядку величины время жизни атомов в возбужденном состоянии?

а)  $1 \text{ с}$ ;

б)  $10^{-3} \text{ с}$ ;

в)  $10^{-8} \text{ с}$ ;

г)  $10^{-12} \text{ с}$ ;

д) Нет правильного ответа.

28. Возбужденные атомы разреженного газа, слабо взаимодействующие друг с другом, дают в основном

а) линейчатый спектр;

б) полосатый спектр;

в) сплошной спектр;

г) непрерывный спектр;

д) нет правильного ответа.

29. Для исследования спектров используются:

1. спектры поглощения,

2. спектры излучения?

а) 1;

б) 2;

- в) 1 и 2;
- г) Ни 1, ни 2;
- д) Нет правильного ответа.

30. Для исследования рентгеновских спектров используется явление

- 1. дисперсии,
- 2. дифракции?
  - а) 1;
  - б) 2;
  - в) 1 и 2;
  - г) Ни 1, ни 2;
  - д) Нет правильного ответа.

## **Заключение**

В данном пособии рассматривается квантовая природа возникновения, распространения излучения и его взаимодействия с веществом.

Пособие содержит экспериментальные факты, аналитические выкладки, их сравнение и анализ, а также достаточное количество примеров решения задач и материалов для самостоятельной работы.

Учебное пособие призвано помочь обучающимся связать процессы возникновения, распространения и взаимодействия излучения с веществом в единую теорию и применять полученные знания при изучении последующих дисциплин образовательной программы высшего профессионального образования по специальности 210201 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств».

## Список использованных источников

1. Астахов А.В. Курс физики. Т. 3 [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.В. Астахов, Ю.М. Широков. – М. Наука, 1983 – 240 с.
2. Геворкян Р.Г. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для вузов / Р.Г. Геворкян. – М.: Высш. школа, 1979 – 656 с.
3. Грабовский Р.И. Курс физики [Текст]: учебник для вузов / Р.И. Грабовский. – СПб.: Лань, 2005 – 608 с.
4. Детлаф А.А. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 1989 – 608 с.
5. Задачи и упражнения с ответами и решениями. Фейнмановские лекции по физике [Текст] / Под ред. А.П. Леванюка. – М.: Мир, 1969 – 624 с.
6. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т. 3 [Текст]: учеб. пособие для вузов / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. – М.: Наука, 1972 – 496 с.
7. Иродов И.Е. Задачи по квантовой физике [Текст]: учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001 – 216 с.
8. Иродов И.Е. Задачи по общей физике [Текст]: учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов.. – М.: Наука, 2001 – 432 с.
9. Иродов И.Е. Квантовая физика. Основные законы [Текст]: учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001 – 272 с.
10. Матвеев А.Н. Атомная физика [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / А.Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1989 – 385 с.
11. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 5 [Текст]: учеб. пособие / И.В. Савельев. – М.: Наука, 2002 – 368 с.
12. Савельев И.В. Курс физики. Т. 3 [Текст]: учеб. пособие / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989 – 320 с.
13. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т 5 [Текст]: учеб. пособие / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 2002 – 784 с.
14. Трофимова Т.И. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. школа, 1990 – 478 с.
15. Фейнман Р. И др. Фейнмановские лекции по физике. Ч. 3-4 [Текст] / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1976 – 496 с.

**Приложение А**  
*(справочное)*

**Карта ответов на тесты**

Номер вопроса	Ответ	Номер вопроса	Ответ	Номер вопроса	Ответ
1	а	11	а	21	г
2	б	12	а	22	в
3	г	13	б	23	г
4	а	14	д	24	г
5	г	15	б	25	в
6	б	16	а	26	б
7	б	17	г	27	в
8	б	18	в	28	а
9	г	19	б	29	в
10	б	20	в	30	б

## Приложение Б

(справочное)

### Основные физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Числовое значение
Нормальное ускорение свободного падения	$g$	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$\gamma$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Число Лошмидта	$n_0$	$2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$
Молярная газовая постоянная	$R$	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Стандартный объем газа	$V_m$	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Скорость света в вакууме	$c$	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Элементарный заряд	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Масса покоя электрона	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Удельный заряд электрона	$e/m_e$	$1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Масса покоя протона	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Удельный заряд протона	$e/m_p$	$9,59 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг}$
Постоянная Фарадея	$F$	$96,5 \text{ кКл/моль}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная Вина в законе смещения	$b$	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Планка	$h$	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar$	$1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	$R$	$1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
	$R$	$3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$
Первый боровский радиус	$a_0$	$5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$
Энергия ионизации атома водорода	$E_i$	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} (13,6 \text{ эВ})$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_{ке}$	$2,436 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Комптоновская длина волны протона	$\lambda_{кп}$	$1,321 \cdot 10^{-15} \text{ м}$
Комптоновская длина волны нейтрона	$\lambda_{кн}$	$1,319 \cdot 10^{-15} \text{ м}$
Атомная единица массы	а. е. м.	$1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Энергия, соответствующая 1 а. е. м.		$931,42 \text{ МэВ}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Магнетон Бора	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл}$
Ядерный магнетон	$\mu_N$	$5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}$



## Приложение В

(справочное)

### Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	Э	$10^{18}$	деци	д	$10^{-1}$
пета	П	$10^{15}$	санти	с	$10^{-2}$
тера	Т	$10^{12}$	милли	м	$10^{-3}$
гига	Г	$10^9$	микро	мк	$10^{-6}$
мега	М	$10^6$	нано	н	$10^{-9}$
кило	к	$10^3$	пико	п	$10^{-12}$
гекто	г	$10^2$	фемто	ф	$10^{-15}$
дека	да	$10^1$	атто	а	$10^{-18}$

## Приложение Г

(справочное)

### Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пи
Ε, ε	эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ, ς	дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	эта	Τ, τ	тау
Θ, θ	тэта	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	йота	Φ, φ	фи
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	мю	Ω, ω	омега

## Приложение Д

(справочное)

### Соотношение между некоторыми внесистемными единицами и единицами СИ

Длина	1 <i>ангстрем</i> (Å) = $10^{-10}$ м
Время	1 <i>год</i> = 365,25 <i>сут</i> = $3,156 \cdot 10^7$ с
Плоский угол	1° = $\pi/180$ рад = $1,75 \cdot 10^{-2}$ рад
	1' = $2,9 \cdot 10^{-4}$ рад
	1" = $4,85 \cdot 10^{-6}$ рад
	1 <i>град</i> = $\pi/200$ рад = $1,57 \cdot 10^{-2}$ рад
Работа, энергия	1 <i>Вт·ч</i> = $3,6 \cdot 10^3$ Дж
	1 <i>эВ</i> = $1,60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Мощность	1 <i>л. с.</i> = 735,5 Вт
Давление	1 <i>мм рт. ст.</i> = 133,3 Па
	1 <i>бар</i> = $10^5$ Па
	1 <i>атм</i> = 760 <i>мм рт. ст.</i> = $1,013 \cdot 10^5$ Па
Количество теплоты	1 <i>кал</i> = 4,19 Дж

## Приложение Е

(справочное)

### Некоторые формулы для приближенных вычислений

1. Если  $a \ll 1$  (меньше 0,05), то в первом приближении можно принять:

$$\frac{1}{1 \pm a} \approx 1 \mp a$$

$$(1 \pm a)^2 \approx 1 \pm 2a$$

$$\sqrt{1 \pm a} \approx 1 \pm \frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm a}} \approx 1 \mp \frac{1}{2}a$$

$$\sqrt{1 \pm a^2} \approx 1 \pm \frac{1}{2}a^2$$

$$e^{\pm a} \approx 1 \pm a$$

$$\ln \frac{1+a}{1-a} \approx 2a$$

$$\frac{1}{1 \mp a} \approx 1 \pm a$$

$$(1 \mp a)^3 \approx 1 \mp 3a$$

$$\sqrt[3]{1 \pm a} \approx 1 \pm \frac{1}{3}a$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1 \pm a}} \approx 1 \mp \frac{1}{3}a$$

$$\sqrt{1 \pm a^3} \approx 1 \pm \frac{1}{3}a^3$$

$$\ln(1 \pm a) \approx \pm a$$

$$\ln \frac{1-a}{1+a} \approx -2a$$

2. Если  $a$ ,  $b$  и  $c$  много меньше единицы (меньше 0,05), то

$$(1 \pm a)(1 \pm b)(1 \pm c) \approx 1 \pm a \pm b \pm c.$$

3. Если  $a$  и  $b$  мало отличаются друг от друга, то в первом приближении можно принять:

$$\sqrt{ab} \approx \frac{a+b}{2}$$

4. Если угол  $\alpha$  мал ( $\alpha < 5^\circ$  или  $\alpha < 0,1$  рад) и выражен в радианах, то в первом приближении можно принять:  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ ;  $\cos \alpha \approx 1$ .