МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Г.А. СИКОРСКАЯ

МАТЕМАТИКА
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Рекомендовано Ученым Советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для поступающих в вузы.

Оренбург 2007

УДК 22.1я7

ББК 51(07)
С 34

Рецензенты
кандидат физико-математических наук Герасименко С.А.
кандидат педагогических наук Липилина В.В.

С 35

Сикорская Г.А.
Математика. Задачи с параметром: учебное пособие для поступающих в вузы /Г.А.Сикорская. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007.– 104с.

Данное учебное пособие адресовано учащимся-старшеклассникам, готовящимся к поступлению в ВУЗ. Пособие поможет старшекласснику определиться с понятием параметр, с тем, что значит решить задачу с параметром и как ее решить. В пособии предлагается классификация основных типов задач с параметром, методов их решения; демонстрируются решения одной задачи различными методами, а также подробное решение задач с параметрами, предлагаемыми на вступительных экзаменах в ВУЗ.

Задачи для самостоятельного решения подобраны аналогично разобранным и снабжены ответами.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике (не только единому, но и традиционному письменному), а учащимися-старшеклассниками и абитуриентами – для самоподготовки и самоконтроля.

С $\frac{1602010000}{}$ ББК 51(07)

Содержание

Введение

В последние годы на вступительных экзаменах по математике в высшие учебные заведения (в частности ЕГЭ) предлагаются задачи с параметрами. Возрастающая популярность этих задач объясняется тем, что они позволяют более эффективно, по сравнению с задачами других типов, определить уровень логической подготовки абитуриента.

Логическая подготовка существенно отличается от подготовки технической. Как показывает анализ экзаменационных работ, техническая подготовка, состоящая в овладении стандартными приемами алгоритмического характера, у многих абитуриентов является относительно неплохой. Что же касается логической подготовки, предполагающей умение проводить правильные, то есть логические математические рассуждения, то она, к сожалению, у большей части абитуриентов является недостаточной.

Решение уравнений и неравенств с параметрами можно считать деятельностью, близкой по своему характеру к исследовательской, ведь выбор метода решения, процесс решения, запись ответа предполагает определенный уровень сформированности умений наблюдать, сравнивать, анализировать, выдвигать и проверять гипотезу, обобщать полученные результаты. Поэтому задачи с параметрами являются одним из самых трудных разделов школьного курса математики.

1 О задачах с параметром

Поскольку в школьных учебниках нет определения параметра, возьмем за основу следующий его простейший вариант.

Параметром называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Определимся с тем, что означает *решить задачу с параметром*. Естественно, это зависит от вопроса, поставленного задачей. Если, например, требуется решить уравнение, неравенство, их систему или совокупность, то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству.

Если же требуется найти значение параметра, при которых множество решений уравнения, неравенства и т.д. удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи сводится к поиску указанных значений параметра.

Основные типы задач с параметрами.

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных типов.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значений параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значение параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;
2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т.д.

Многообразие задач с параметром охватывает весь курс школьной математики (и алгебры, и геометрии), но подавляющая часть из них на выпускных и вступительных экзаменах относится к одному из четырех перечисленных типов, которые по этой причине названы *основными*.

Наиболее массовый класс задач с параметром – задачи с одной неизвестной и одним параметром.

Основные способы (методы) решения задач с параметром.

Способ 1 (*аналитический*). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Аналитический способ решения задач с параметром является самым трудным способом, требующим высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ 2 (*графический*)**.** В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x; y), или в координатной плоскости (x; a).

Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает решающего задачу с параметром, что он зачастую игнорирует другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом (не обязательно графическим) и с колоссальными трудностями остальными способами.

Способ 3 (*решение относительно параметра*). При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаются к исходному смыслу переменных x и a и заканчивают решение.

Метод решения относительно параметра удобно применять, когда

1) выражение имеет высокую степень, как многочлен относительно переменной x и одновременно является линейным или квадратным выражением относительно параметра;

2) если формулировка задачи подсказывает, что переменную по смыслу задачи удобно считать параметром, а параметр – считать переменной;

3) если геометрическое место точек, определяемое заданным в условии неравенством удается изобразить на координатной плоскости «переменная-параметр».

Рассмотрим задачу с параметром и ее решение различными методами.

Задача 1 При каких значениях параметра a уравнение $|x+2| = ax$ не имеет решений?

Решение 1. Используем аналитический метод решения предложенной задачи, т.е. для каждого значения параметра a решим данное уравнение, после чего отберем те значения параметра, при которых уравнение решений не имеет.

На основании определения модуля заключаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+2 = ax, \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -(x+2) = ax, \\ x+2 < 0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} (a-1)x = 2, \\ x \geq -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a+1)x = -2, \\ x < -2. \end{cases}$$

Первая система имеет ровно одно решение $x = \dfrac{2}{a-1}$ при $\dfrac{2}{a-1} \geq -2$, т.е. при $a \leq 0$ или $a > 1$ и не имеет решений при остальных значениях параметра. Вторая система имеет одно решение $x = -\dfrac{2}{a+1}$, если $-\dfrac{2}{a+1} < -2$, т.е. при $-1 < a < 0$ и не имеет решений при остальных значениях параметра.

Объединяя решения систем, имеем: данное уравнение имеет

одно решение $x = \dfrac{2}{a-1}$ при $a \leq -1,\ a = 0,\ a > 1$;

два решения $x = -\dfrac{2}{a+1}$ и $x = -\dfrac{2}{a+1}$ при $-1 < a < 0$.

Анализируя полученный результат, определяем, что при значении параметра $0 < a \leq 1$, уравнение решений не имеет.

Ответ: $a \in (0, 1]$.

Решение 2. Решим задачу графическим методом.

Как известно, число решений уравнения $f(x) = g(x)$ совпадает с количеством точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, построенных в одной системе координат. Рассмотрим графики функций $y = |x+2|$ и $y = ax$.

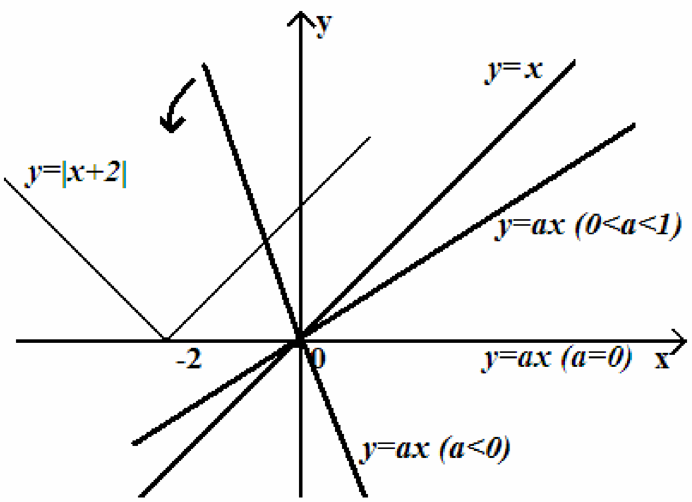


График функции $y = |x+2|$ не зависит от параметра *a*; график функции $y = ax$ принадлежит семейству прямых, проходящих через начало координат, т.е. является «подвижным» графиком. Поэтому искомые значения параметра *a* соответствуют тем прямым из указанного семейства, которые не пересекают график функции $y = |x+2|$.

При изменении параметра *a* от -∞ до +∞ прямая $y = ax$ поворачивается, начиная от «вертикального» положения «слева» от оси координат, против часовой стрелки вокруг начала координат. Очевидно, что при $a \le 0$ прямая $y = ax$ пересекает по крайней мере один раз «неподвижный» график $y = |x+2|$; при дальнейшем возрастании параметра *a* до момента *a* = 1 (включительно) прямая не имеет общих точек с «неподвижным» графиком; при $a > 1$ у графиков появляется одна общая точка. Поэтому исходное уравнение не имеет решений при $0 < a \le 1$.

Ответ: $a \in (0, 1]$.

Рассмотрим еще одну задачу с параметром, решенную уже тремя способами.

Задача 2 Найти все значения параметра *a*, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = ax - 4 \end{cases}$ (1)

имеет более одного решения.

Решение 1: Решим вначале эту задачу графическим способом. Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом 2. Второе уравнение – уравнение пучка прямых, проходящих через точку А (0; -4) (рисунок 1).

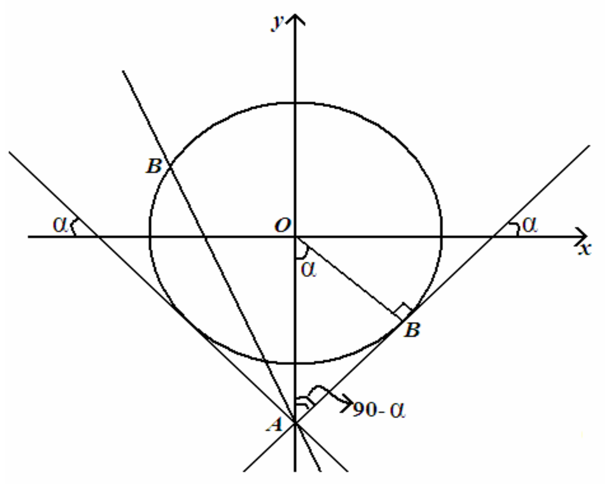


Рисунок 1

Единственное решение система уравнений (1) будет иметь при $a = \pm tg\alpha^\circ$, когда прямая $y = ax - 4$ касается окружности $x^2 + y^2 = 4$. Поскольку $a = tg\alpha^\circ$, то из прямоугольного треугольника ОВА находим: $tg\alpha = \dfrac{AB}{OB}$; но ОВ=2, $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2}$; $AB = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$, и потому $tg\alpha^\circ = \sqrt{3}$.

Очевидно, что при $a < -\sqrt{3}$ и $a > \sqrt{3}$ система (1) будет иметь два решения (прямая АВ будет пересекать окружность в двух точках).

Ответ: $a \in \left(-\infty; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Решение 2. Значения параметра $(\pm tg\alpha^\circ)$, при которых прямая $y = ax - 4$ является касательной к окружности, находим из условия касания графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$: $\begin{cases} y_1(x) = y_2(x), \\ y_1'(x) = y_2'(x), \end{cases}$ где $y_1 = -\sqrt{4 - x^2}$; $y_2(x) = ax - 4$.

Имеем $\begin{cases} -\sqrt{4 - x^2} = ax - 4, \\ \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = a. \end{cases}$ (2)

Заменяя в первом уравнении a на $\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, получаем $-\sqrt{4 - x^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} - 4$. Решая это уравнение, находим $x = \pm\sqrt{3}$ и из второго уравнения системы (2) - $a = \pm\sqrt{3}$. Таким образом, значения параметра a, при которых система уравнений (1) имеет более одного решения - $a \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Решение 3. Значения параметра a, при которых система уравнений (1) имеет единственное решение, могут быть найдены из условия единственности решения уравнения $x^2 + (ax - 4)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2\left(1 + a^2\right) - 8ax + 12 = 0$.

Поскольку это уравнение квадратное относительно переменной x с коэффициентом $1 + a^2 \neq 0$ при x^2, то единственное решение это уравнение будет иметь тогда и только тогда, когда $D_x = 0 \Leftrightarrow 64a^2 - 48\left(1 + a^2\right) = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$. Таким образом, более одного решения это уравнение имеет при $a \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Понятно, что любую задачу с параметром можно решить различными методами. Далее, Вашему вниманию предлагаются экзаменационные задачи, решенные наиболее рациональным, на взгляд автора, способом. Однако, возможно Вы, изучив данное решение, найдете свое, быть может, более удачное. Что ж, не будем спорить, какое из решений «благополучнее» другого. Одно хорошо, если получается решить предложенную задачу другим методом, значит Вы научились решать задачи с параметром. Так держать!

Итак, приступаем к решению задач с параметром. Задачи, предложенные Вашему вниманию, расположены в порядке возрастания как сложности исходных условий, так и сложности решения; поэтому давайте разберем задачу за задачей, а потом закрепим изученное, используя задания для самостоятельного решения. Успеха!

2 Рациональные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств с параметрами

Учиться решать задачи с параметром начнем с наиболее простых, т.е. линейных уравнений и неравенств, а также их систем.

Задача 3 Решить относительно x уравнение $(a-2)x+3=a+1$.

Решение: Данное уравнение равносильно уравнению $(a-2)x=a-2$.

Возможны два случая:

1) если $a-2\neq 0$, то $x=\dfrac{a-2}{a-2}=1$;

2) если $a-2=0$, то есть если $a=2$, то уравнение имеет вид: $0\cdot x=0 \iff x\in R$.

Ответ: если $a=2$, то $x\in R$; если $a\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$, то $x=1$.

Задача 4 При каких значениях параметра *a* уравнение $a\sqrt{4+x^2}-3a=8-\sqrt{4+x^2}$ не имеет решений?

Решение: Пусть $\sqrt{4+x^2}=t$, тогда исходное уравнение приводится к виду $at-3a=8-t$

$t=\dfrac{8+3a}{a+1}$ при $a\neq -1$.

При $a=-1$ решений нет. По условию $t=\sqrt{4+x^2}$. Наименьшее возможное значение $\sqrt{4+x^2}$ равно 2, т.к. $x^2\geq 0$, а $4+x^2\geq 4$ при любом *x*. Следовательно, чтобы уравнение не имело решений, необходимо, чтобы

$$\frac{8+3a}{a+1}<2;$$

$$\frac{8+3a}{a+1}-2<0;$$

$$\frac{a+6}{a+1}<0.$$

Решая последнее неравенство, получим $a\in(-6;-1)$. Необходимо также учесть, что *a* = -1 удовлетворяет условию.

Ответ: $(-6;-1]$.

Задача 5 Решить неравенство $3x-a>2-ax$.

Решение: Это неравенство линейное относительно x (a - параметр).

$3x-a>2-ax \Leftrightarrow (3+a)x>2+a$.

Если $a+3>0$, то есть $a>-3$, то исходное неравенство равносильно неравенству $x>\frac{2+a}{3+a}$.

Если $a+3<0$, то есть $a<-3$, то исходное неравенство равносильно неравенству $x<\frac{2+a}{3+a}$.

Если $a+3=0$, то есть $a=-3$, то исходное неравенство приобретает вид $0\cdot x>2+(-3)$, то есть $0\cdot x>-1$, которое верно при любом $x\in R$.

Оформим решение:

$$(a+3)x>a+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>-3 \\ x>\frac{2+a}{3+a} \end{cases} \\ \begin{cases} a<-3 \\ x<\frac{2+a}{3+a} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3 \\ 0\cdot x>-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>-3 \\ x\in\left(\frac{a+2}{a+3};+\infty\right) \end{cases} \\ \begin{cases} a<-3 \\ x\in\left(-\infty;\frac{a+2}{a+3}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3 \\ x\in R. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{a+2}{a+3};+\infty\right)$ при $a\in(-3;+\infty)$;
R при $a=-3$;
$\left(-\infty;\frac{a+2}{a+3}\right)$ при $a\in(-\infty;-3)$.

Задача 6 Для всех $a\geq 0$ решить неравенство

$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geq 0.$$

Решение. При а = 0 данное неравенство принимает вид $-x+3\geq 0$, откуда следует, что множество его решений есть промежуток $x\leq 3$.

Пусть *а* – фиксированное положительное число. Преобразуем левую часть данного неравенства следующим образом:

$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3=a(a^2x^4+6ax^2+9)-x+3=$$
$$=a(ax^2+3)^2-x+3=a((ax^2+3)^2-x^2)+ax^2-x+3=$$
$$=a(ax^2+3-x)(ax^2+3+x)+\left(ax^2-x+3\right)=(ax^2-x+3)(a^2x^2+ax+3a+1).$$

Найдем дискриминант квадратного трехчлена $a^2x^2+ax+\left(3a+1\right)$. $D=a^2-4a^2(3a+1)=-a^2(-1+12a+4)=-a^2(12a+3)$, т.е. дискриминант является отрицательным числом (напомним, $a>0$). Следовательно, квадратный трехчлен $a^2x^2+ax+3a+1$ положителен для любого значения x; поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$ax^2-x+3\ge 0. \qquad (3)$$

Находим дискриминант квадратного трехчлена ax^2-x+3: $D=1-4\cdot 3\cdot a=1-12a$; следовательно, при $a\ge 1/12$ он не положителен. Поэтому при $a\ge 1/12$ множество решений неравенства (3), а значит, и исходного неравенства есть вся числовая прямая.

При $0<a<1/12$ множество решений неравенства (3) состоит из двух промежутков $-\infty<x\le\dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ и $\dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}\le x<+\infty$.

Ответ: $-\infty<x\le 3$ при $a=0$;

$-\infty<x\le\dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ и $\dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}\le x<+\infty$ при $0<a<1/12$;

$-\infty<x<+\infty$ при $a\ge 1/12$.

Задача 7 Определить, при каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=a^2 \end{cases}$$

1) не имеет решений;
2) имеет множество решений;
3) имеет единственное решение.

Решение 1): Для того чтобы система двух линейных уравнений с двумя неизвестными не имела решений, необходимо чтобы коэффициенты при неизвестных в уравнениях были пропорциональны между собой, но не пропорциональны свободным членам, то есть

$$\frac{a}{1}=\frac{1}{a}\ne\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{1}=\dfrac{1}{a}\\ \dfrac{1}{a^2}\ne\dfrac{a}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\ a^3\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-1\end{array}\right.\\ a\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow a=-1.$$

Ответ: -1.

Решение 2): Для того чтобы система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имела бесконечное множество решений, необходимо чтобы коэффициенты при неизвестных и свободные члены в уравнениях были пропорциональными.

То есть $\dfrac{a}{1}=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\ a^3=1\end{cases}\Leftrightarrow a=1.$

Ответ: 1.

Решение 3): Для того чтобы система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имела одно решение, необходимо чтобы коэффициенты при неизвестных не были пропорциональны.

То есть $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 \neq 1 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Задача 8 При каких a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a; \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение: Данная система равносильна системе $\begin{cases} x^2 + (a - x)^2 = 1, \\ y = a - x; \end{cases}$ которая имеет единственное решение, если уравнение $x^2 + (a - x)^2 = 1$ имеет единственное решение. Перепишем уравнение в виде $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ - квадратное, относительно *x*. Тогда для того, чтобы оно имело единственное решение необходимо выполнение условия $D = 4a^2 - 8(a^2 - 1) = 0$, то есть $a^2 = 2 \Leftrightarrow a \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

Ответ: $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

Задача 9 Числа a и b таковы, что система $\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$ имеет единственное решение $x = y = 1$. Найти числа a и b.

Решение: Подставляя $x = y = 1$ в исходную систему, имеем:

$$\begin{cases} a^2 - a = 1 - a, \\ b + (3 - 2b) = 3 + a. \end{cases}$$

Полученная система имеет две пары решений: $a = 1,\ b = -1$ и $a = -1,\ b = 1$. Подставив первую из этих пар в исходную систему, получим систему $\begin{cases} x - y = 0, \\ -x + 5y = 4, \end{cases}$ которая имеет единственное решение. Если мы подставим вторую пару значений a и b в исходную систему, то получим систему $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2, \end{cases}$ которая имеет бесконечно много решений. Поэтому условию задачи удовлетворяет только первая пара чисел.

Ответ: $a = 1,\ b = -1$.

Задача 10 Найти все значения a, при которых множеством всех решений системы $\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2 \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}>-3 \end{cases}$ является вся числовая прямая.

Решение: Данная система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-(a+2)x+4}{x^2-x+1}>0 \\ \dfrac{4x^2+(a-3)x+1}{x^2-x+1}>0. \end{cases}$$

Поскольку $x^2-x+1>0$ при любом x, то эта система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} x^2-(a+2)x+4>0 \\ 4x^2+(a-3)x+1>0 \end{cases}$$

Поскольку коэффициенты при старших степенях неизвестного обоих неравенств системы больше нуля (1 и 4), то выполнение условий системы (>0) возможно только тогда, когда дискриминанты трехчленов обоих неравенств отрицательны, т. е.

$$\begin{cases} (a+2)^2-16<0 \\ (a-3)^2-16<0 \end{cases} \qquad (*)$$

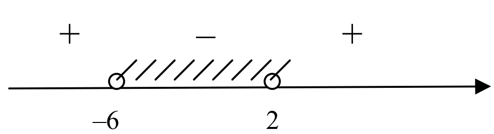
Решаем эту систему $\begin{cases} a^2+4a+4-16<0 \\ a^2-6a+9-16<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+-12<0 \\ a^2-6a-7<0 \end{cases}$

1) $a^2+4a-12=0$

$D=16+48=64$

$a_{1,2}=\dfrac{-4\pm 8}{2}$

$a_1=2,\ \ a_2=-6$

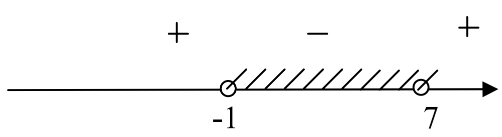


2) $a^2-6a-7=0$

$D=36+28=64$

$a_{1,2}=\dfrac{6\pm 8}{2}$

$a_1=7,\ \ a_2=-1$



Таким образом, решением системы является (–1;2). Итак, при любом *a* из интервала (–1;2) множество всех действительных чисел является решением исходной системы.

Ответ: (–1;2).

Задача 11 Найти все *a*, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2+4x+3 \le a, \\ x^2-2x \le 3-6a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение: Рассмотрим графики функций $f_1(x)=x^2+4x+3-a$ и $f_2=x^2-2x-3+6a$. Эти графики представляют собой параболы, ветви которых направлены вверх, причем вершина первой параболы перемещается по прямой $x=-2$, а вершина второй – по прямой $x=1$.

Если каждая из парабол пересекает ось *Ox* в двух различных точках, то решением первого неравенства является отрезок, симметричный относительно точки $x_1=-2$, а решением второго – отрезок, симметричный относительно точки $x_2=1$. Для того, чтобы система имела единственное решение, достаточно, чтобы правый конец первого отрезка совпадал бы с левым концом второго отрезка. Найдем точку пересечения двух парабол: $x^2+4x+3-a=x^2-2x-3+6a$, откуда $x_0=\frac{7}{6}a-1$. Эта точка должна лежать на оси *Ox* (рисунок 2). Значит, $f_1(x_0)=0$, т.е. $\left(\frac{7}{6}a-1\right)^2+4\left(\frac{7}{6}a-1\right)+3-a=0$, откуда $a=0$ или $a=-\frac{48}{49}$.

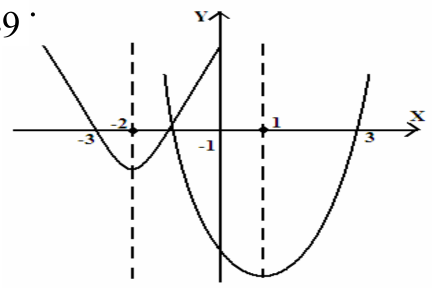


Рисунок 2

Если *a* = 0, то $x_0=-1$, если $a=-\frac{48}{49}$, то $x_0=-\frac{15}{7}\notin[-2,1]$, т.е. $a=-\frac{48}{49}$ не удовлетворяет условию задачи.

Если первая парабола касается оси *Ox*, то $x=-2$ является единственным решением первого неравенства. Этот случай имеет место, если $\frac{D_1}{4}=4-3+a=1+a=0$, т.е. $a=-1$. При этом значении *a* второе неравенство примет следующий вид: $x^2-2x-9\le 0$. Легко проверить, что $x=-2$ является решением этого неравенства, значит, $x=-1$ удовлетворяет условию задачи. Аналогично, второе неравенство имеет единственное решение $x=1$ при $a=\frac{2}{3}$, первое неравенство при этом *a* принимает вид $x^2+4x+\frac{7}{3}\le 0$ и не выполняется при $x=1$. Значит, $a=\frac{2}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a=0,\ a=-1$.

Задача 12 Найти все значения *a*, при которых неравенство $\frac{x-2a-4}{x+3a-2}\le 0$ выполняется для всех *x* из промежутка $1\le x\le 3$.

Решение: Используя тот факт, что корнем числителя является $x=2a+4$, а корень знаменателя есть $x=2-3a$, рассмотрим три случая.

1) Если $2a+4<2-3a$, то есть $a<-\frac{2}{5}$, то решением неравенства будет промежуток $x\in[2a+4,\ 2-3a)$. Тогда условие задачи равносильно следующей системе неравенств (рисунок 3):

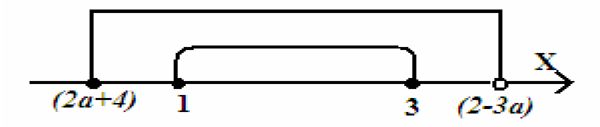


Рисунок 3

$$\begin{cases} a<-\frac{2}{5}, \\ 2a+4\le 1, \\ 2-3a>3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-\frac{2}{5}, \\ a\le -\frac{3}{2}, \\ a<-\frac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow a\le -\frac{3}{2}.$$

2) Если $2a+4=2-3a$, то есть $a=-\frac{2}{5}$, то неравенство решений не имеет.

3) Если $2a+4>2-3a$, то есть $a>-\frac{2}{5}$, то решением неравенства будет промежуток $x\in(2-3a,\ 2a+4]$. В этом случае условие задачи примет следующий вид (рисунок 4):

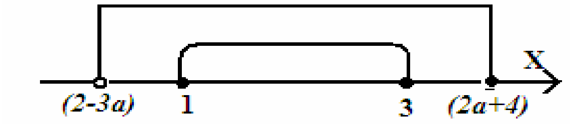


Рисунок 4

$$\begin{cases} a > -\dfrac{2}{5}, \\ 2 - 3a < 1, \\ 2a + 4 \ge 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\dfrac{2}{5}, \\ a > \dfrac{1}{3}, \\ a \ge -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{3}.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют все a из промежутков $a \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

Задача 13 Решить систему неравенств $\begin{cases} a(x-2) \ge x-3, \\ 8(ax+x) > 8ax+9 \end{cases}$.

Решение: $\begin{cases} a(x-2) \ge x-3, \\ 8(ax+x) > 8ax+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - x \ge 2a-3, \\ 8ax + 8x - 8ax > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a-1) \ge 2a-3, \\ x > \dfrac{9}{8}. \end{cases}$

а) $\begin{cases} a - 1 > 0, \\ x \ge \dfrac{2a-3}{a-1}, \\ x > \dfrac{9}{8}. \end{cases}$

Возможны три случая:

1) $\dfrac{2a-3}{a-1} > \dfrac{9}{8}$; $\quad \dfrac{7a-15}{a-1} > 0$; при $a > \dfrac{15}{7}$; $\quad x \ge \dfrac{2a-3}{a-1}$.

2) $\dfrac{2a-3}{a-1} < \dfrac{9}{8}$; $\quad$ при $a \in \left(1; \dfrac{15}{7}\right)$; $\quad x > \dfrac{9}{8}$.

3) $x > \dfrac{9}{8}$; $\quad \dfrac{2a-3}{a-1} = \dfrac{9}{8}$; $16a - 24 = 9a - 9$; $a = \dfrac{15}{7}$; при $a \in \left(1; \dfrac{15}{7}\right]$; $x > \dfrac{9}{8}$.

б) $a - 1 = 0,\ a = 1$ $\begin{cases} 0 \cdot x \ge -1, \\ x > \dfrac{9}{8} \end{cases}$ $\quad x > \dfrac{9}{8}$ при $a = 1$.

в) $\begin{cases} a<1, \\ x \le \dfrac{2a-3}{a-1}, \\ x > \dfrac{9}{8}. \end{cases}$

Возможны три случая: 1) $\dfrac{2a-3}{a-1} > \dfrac{9}{8}$; $\dfrac{7a-15}{a-1} > 0$; при $a<1$ $x \in \left(\dfrac{9}{8}; \dfrac{2a-3}{a-1}\right]$.

2) $\dfrac{2a-3}{a-1} \le \dfrac{9}{8}$; $\varnothing$.

3) $a<1$ $x \in \left(\dfrac{9}{8}; \dfrac{2a-3}{a-1}\right]$.

Ответ: при $1 \le a \le \dfrac{15}{7}$, решение $x \in \left(\dfrac{9}{8}; +\infty\right]$;

при $a > \dfrac{15}{7}$, решение $x \in \left[\dfrac{2a-3}{a-1}; +\infty\right)$.

2.1 Задачи для самостоятельного решения

1 Решите уравнение $\dfrac{x^2-5x+6}{x-a} = 0$.

Ответ: если $a = 2$, то решение $x = 3$ единственно;
если $a = 3$, то решение $x = 2$ единственно;
если $a \ne 2; a \ne 3$, то уравнение имеет два решения $x_1 = 2;\ x_2 = 3$.

2 Указать, при каких значениях параметра a уравнение $6(ax-1) - a = 2(a+x) - 7$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

3 Указать, при каких значениях параметра a уравнение $0{,}5(5x-1) = 4{,}5 - 2a(x-2)$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: -1,25.

4 При каких значениях a уравнение $2(a-2x) = ax + 3$ не имеет решения?

Ответ: -4.

5 При каких значениях параметра a уравнение $a\sqrt{16+x^2} - 3a = 22 - 5\sqrt{x^2+16}$ имеет корни?

Ответ: $(-5; 2]$.

6 При каких значениях параметра *a*, уравнение $a\sqrt{9+x^2}-2a=10-2\sqrt{9+x^2}$ не имеет решения?

Ответ: $a \in (-5;\ 2]$.

7 Решить неравенство $3x-a>2-ax$ при $a=-3$.

Ответ: $\left(\dfrac{a+2}{a-3};+\infty\right)$.

8 Решить неравенство $3x-a>2-ax$ при $a \in (-\infty;-3)$.

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{a+2}{a+3}\right)$.

9 При каком значении *a* неравенство $2x-a<3+ax$ имеет бесконечное множество решений.

Ответ: *a*=2.

10 При каком значении *a* неравенство $3x+a<2-ax$ имеет бесконечное множество решения.

Ответ: $a=-3$.

11 При каком значении a неравенство $5x-3a \geq ax+2$ не имеет решения.

Ответ: $a=5$.

12 При каком значении *a* неравенство $a+3x \leq 4a-ax$ не имеет решения.

Ответ: *a* = -3.

13 Указать решение неравенства $5a+3x \geq ax-2a$, при $a \in (-\infty;\ 3)$.

Ответ: $x \geq \dfrac{3a}{3-a}$.

14 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}(a+1)x-3y-4=0\\ 2x-ay-3=0\end{cases}$ не имеет решения?

Ответ: (-3; 2).

15 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}(a+1)x+8y=4a\\ ax+(a+3)y=3a-1\end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Ответ: 1.

16 При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}3x-y=1-a\\ x+y=2a+1\end{cases}$ имеет решение $(x;y)$, такое что $x \geq 1$, $y \leq 4$?

Ответ: 2.

17 При каких значениях параметра *a* система $\begin{cases} ax+3y=5, \\ 4x+ay=6 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a \neq \pm 2\sqrt{3},\ a \neq 0$.

18 При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} 2ax-y=-1 \\ (a-6)x^2=y+2 \end{cases}$ имеет решение?

Ответ: $(-\infty; 6] \cup [3; +\infty)$.

19 При каких значениях параметра a система $\begin{cases} a(x^2+y^2)+x+y=b \\ y-x=b \end{cases}$ имеет решения при любом b?

Ответ: 0.

20 При каких *a* система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ 2xy=a-1 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

Ответ: 1.

21 При каких значениях параметра *a* система $\begin{cases} x+y=a, \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$ не имеет решений?

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\sqrt[3]{32}; +\infty)$.

22 При каких значениях параметра *a* система неравенств $\begin{cases} 3-6x<2x-13, \\ 3+2x<a+x \end{cases}$ не имеет решений?

Ответ: $a \leq 5$.

23 При каких значениях параметра *a* система неравенств $\begin{cases} -2(a+4x)<-3+x, \\ 5-3x>2+4(x-a) \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $a > \dfrac{3}{25}$.

24 При каких значениях параметра *a* система $\begin{cases} (2a-3)x-ay=3a-2, \\ 5x-(2a+3)y=5 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a \neq \dfrac{9}{4},\ a \neq -1$.

25 При каких значениях параметра *a* система $\begin{cases}(a+2)x+y=4,\\ 2x-(a-1)y=8\end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a=0$.

26 При каких значениях параметра *a* система $\begin{cases}(a-2)x+27y=4{,}5,\\ 2x+(a+1)y=-1\end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Ответ: $a=-7$.

27 При каких значениях параметра *a* система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ |x|+y=a\end{cases}$ имеет три решения?

Ответ: $a = 0$.

28 При каком *a* система неравенств $\begin{cases}x^2+y^2\le 2\\ x+y\ge a\end{cases}$ определяет единственную точку $(x;y)$?

Ответ: $a = 2$.

29 Для каких значений *a* система неравенств $\begin{cases}-x^2+15x+a\ge 0\\ x\le 5\end{cases}$ выполняется хотя бы при одном значении *x*? В ответ записать наименьшее значение *a.*

Ответ: $a = -50$.

30 При каком значении *a* из неравенства $(a+2)x^2-x-1-a<0$ следует неравенство $0<x<1$? В ответ записать наименьшее целое *a,* удовлетворяющее этому условию.

Ответ: $a = 10$.

3 Задачи с параметром на «квадратный трехчлен»

Поскольку в задачах с параметром очень часто встречается квадратный трехчлен, целесообразно уделить этому особое внимание.

Задача 14 Решить уравнение $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение: При $a = 0$ получаем линейное уравнение $2x + 1 = 0$, которое имеет единственное решение $x = -\frac{1}{2}$.

При $a \neq 0$ уравнение является квадратным и его дискриминант $D = 4 - 4a$. При $a > 1$ дискриминант $D < 0$, поэтому данное уравнение действительных корней не имеет. При $a = 1$ дискриминант $D = 0$; поэтому данное уравнение имеет два совпадающих корня: $x_1 = x_2 = \frac{-2}{2} = -1$.

При $a < 1$, $a \neq 0$ дискриминант $D > 0$, и, следовательно, данное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{1-a}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a},$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{1-a}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}$ при $a < 1$, $a \neq 0$;

$x = -\frac{1}{2}$ при $a = 0$;

$x_1 = x_2 = -1$ при $a = 1$;

уравнение не имеет решения при $a > 1$.

Довольно часто задачи с параметром сводятся к исследованию квадратного трехчлена, в частности, к исследованию расположения его корней. Эти задачи сводятся к следующим случаям:

1) Оба корня квадратного трехчлена $F(x)$ больше некоторого числа m.
2) Оба корня $F(x)$ меньше некоторого числа m.
3) Оба корня лежат на заданном промежутке.
4) Только меньший корень принадлежит заданному промежутку.
5) Только больший корень принадлежит заданному промежутку.
6) Оба корня лежат вне заданного промежутка.
7) Данное число лежит между корнями.

Рассмотрим первый случай. Пусть $m < x_1 \leq x_2$ и $a > 0$. Ветви параболы направлены вверх. Абсцисса вершины параболы x_0 больше m, значит $F(m) > 0$. Корни есть, значит $D \geq 0$.

Если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз, абсцисса вершины параболы $x_0>m,\ F(m)<0$. Трехчлен имеет корни, значит $D\geq 0$. Объединяя полученные данные, имеем систему: $\begin{cases} a\cdot F(m)>0, \\ D\geq 0, \\ x_0>m. \end{cases}$

Аналогично находятся соответствующие условия для остальных случаев.

2) Если $x_1\leq x_2<m$, то $\begin{cases} a\cdot F(m)>0, \\ D\geq 0, \\ x_0<m. \end{cases}$

3) Если $m<x_1\leq n<x_2$, то $\begin{cases} a\cdot F(m)>0, \\ a\cdot F(n)>0, \\ D\geq 0, \\ m<x_0<n. \end{cases}$

4) Если $m<x_1<n<x_2$, то $\begin{cases} a\cdot F(m)>0, \\ a\cdot F(n)>0. \end{cases}$

5) Если $x_1<m<x_2<n$, то $\begin{cases} a\cdot F(m)<0, \\ a\cdot F(n)>0. \end{cases}$

6) Если $x_1<m<n<x_2$, то $\begin{cases} a\cdot F(m)<0, \\ a\cdot F(n)<0. \end{cases}$

7) Если $x_1<m<x_2$, то $\{aF(m)<0$.

Задача 15 При каком значении k один из корней уравнения $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втрое меньше другого?

Решение: Т.к. для существования корней необходимо, чтобы дискриминант $D=(3k+2)^2-16(k^2-1)$ был ≥ 0, то получаем $7k^2-12k-20\leq 0$. Это неравенство выполняется для любых $k\in\left[\dfrac{12-8\sqrt{11}}{14},\ \dfrac{12+8\sqrt{11}}{14}\right]$.

Из формул Виета для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ следует $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{3k+2}{4}$; $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{k^2-1}{4}$.

Пусть, для определенности, x_1 втрое меньше x_2, то есть $x_2 = 3x_1$.

Тогда $\begin{cases} x_1 + 3x_1 = \dfrac{3k+2}{4} \\ x_1 \cdot 3x_1 = \dfrac{k^2-1}{4} \end{cases}$

Перепишем полученную систему в виде

$$\begin{cases} 4x_1 = \dfrac{3k+2}{4} \\ 3x_1^2 = \dfrac{k^2-1}{4}. \end{cases}$$

Выражая x_1 из первого уравнения системы и, подставляя полученное выражение во второе, имеем

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3k+2}{16} \\ 3\left(\dfrac{3k+2}{16}\right)^2 = \dfrac{k^2-1}{4}. \end{cases}$$

Решая второе уравнение полученной системы, имеем

$$\frac{3}{16^2}\left(9k^2 + 12k + 4\right) = \frac{k^2-1}{4};$$

$$27k^2 + 36k + 12 = 4 \cdot 16(k^2 - 1);$$

$$37k^2 - 36k - 76 = 0,\ D = 36^2 + 4 \cdot 76 \cdot 37 = 112^2;$$

$$k_1 = \frac{36+112}{74} = 2,\ k_2 = \frac{36-112}{74} = -\frac{38}{37}.$$

Очевидно, оба корня $k_1, k_2 \in \left[\dfrac{12-8\sqrt{11}}{14},\ \dfrac{12+8\sqrt{11}}{14}\right]$

Ответ: $k_1 = 2,\ k_2 = -\dfrac{38}{37}$.

Задача 16 Уравнение $(a-1)x^2 - (2a+1)x + 2 + 5a = 0$ имеет два корня. Найти все значения параметра *a*, при которых оба корня больше 1.

Решение: Так как по условию задачи данное уравнение имеет два корня, заключаем, что оно квадратное, то есть $a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$. Далее используем теорему о том, что для того, чтобы действительные корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, были бы больше числа λ, необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} 2\lambda + p < 0; \\ \lambda^2 + p\lambda + q > 0. \end{cases}$

Преобразуем данное уравнение к приведенному виду: $x^2 - \frac{2a+1}{a-1}x + \frac{2+5a}{a-1} = 0 \ \left(p = -\frac{2a+1}{a-1};\ q = \frac{2+5a}{a-1} \right)$.

Пусть x_1, x_2 – корни уравнения, тогда

$$\begin{cases} x_1 > 1; \\ x_2 > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = (2a+1)^2 - 4(a-1)(2+5a) \geq 0; \\ 2 \cdot 1 - \frac{2a+1}{a-1} < 0; \\ 1^2 - \frac{2a+1}{a-1} \cdot 1 + \frac{2+5a}{a-1} > 0. \end{cases}$$

Решим каждое из неравенств системы отдельно и найдем пересечение их решений, имеем:

1) $4a^2 + 2a + 1 - 20a^2 + 12a + 8 \geq 0,$

$16a^2 - 16a - 9 \leq 0,$

$\frac{8-\sqrt{208}}{16} \leq a \leq \frac{8+\sqrt{208}}{16},$

$\frac{2-\sqrt{13}}{4} \leq a \leq \frac{2+\sqrt{13}}{4}.$

2) $2 - \frac{2a+1}{a-1} < 0,$

$\frac{2a-2-2a-1}{a-1} < 0,$

$\frac{-3}{a-1} < 0 \Rightarrow a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1.$

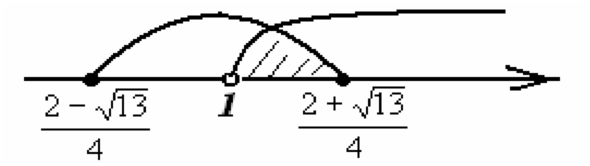
3) $1 - \frac{2a+1}{a-1} + \frac{2+5a}{a-1} > 0,$

$\frac{a-1-2a-1+2+5a}{a-1} > 0,$

$\frac{4a}{a-1} > 0.$

Итак, получаем:

$$\begin{cases} \frac{2-\sqrt{13}}{4} \leq a \leq \frac{2+\sqrt{13}}{4}; \\ a > 1; \\ \frac{4a}{a-1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-\sqrt{13}}{4} \leq a \leq \frac{2+\sqrt{13}}{4}; \\ a > 1. \end{cases}$$



Ответ: $a \in \left(1; \dfrac{2+\sqrt{13}}{4}\right]$.

Задача 17 Найти все значения *p*, при каждом из которых множество решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2)<0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$.

Решение: Изобразим на координатной плоскости *Oxp* решения данного неравенства. Для этого начертим параболу $p = x^2$ и прямую $p = 2 - x$, которые пересекаются в точках $A(-2, 4)$ и $B(1, 1)$. Так как

$$(p-x^2)(p+x-2)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p > x^2, \\ p < 2-x, \end{cases} \\ \begin{cases} p < x^2, \\ p > 2-x, \end{cases} \end{array}\right.$$

то решение неравенства представляет собой множество точек вне параболы над прямой. Из рисунка видно, что данное множество не содержит ни одной точки $x \in [-1, 1]$, если $p \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ (рисунок 5).

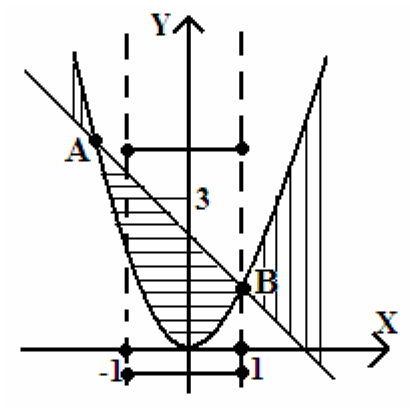


Рисунок 5

Ответ: $p \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$.

Задача 18 Известно, что уравнение $(2p+3)x^2 + (p+3)x + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра *p*, при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\dfrac{2x+1}{21-p} = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

Решение: 1) Рассмотрим первое уравнение, и его решение в зависимости от параметра p.

Если $2p+3=0$, p = -1,5, то уравнение – линейное: $1,5x+1=0$. У него один корень $x=-\frac{2}{3}$.

Если $2p+3\neq 0$, то первое уравнение – квадратное. Найдем его дискриминант:

$$D=(p+3)^2-4(2p+3)=p^2-2p-3=(p-3)(p+1).$$

Уравнение имеет корни только, если $D\geq 0$, т.е. $(p-3)(p+1)\geq 0$, т.е. при $p\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Причем, при p = -1 и p =3 – корень один, а при $p\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ - два корня.

2) Рассмотрим второе уравнение. Выполним замену переменной. Пусть $t=\sqrt{x-3},\ x=t^2+3$. Тогда при $p\neq 21$ второе уравнение примет вид $(t+3)(2(t^2+3)+1)=21-p,\ 2t^3+6t^2+7t+p=0$. Исследуем функцию $y(t)=2t^3+6t^2+7t+p$. Найдем производную $y'=6t^2+12t+7$.

Так как $y'=6(t+1)^2+1>0$, то $y=y(t)$ возрастает на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$. Поэтому уравнение $y(t)=0$ или не имеет корней, или имеет только один корень. Первый случай невозможен по условию задачи. Значит или p = -1, или p = 3, или p = -1,5.

Если p=3, то получаем уравнение $2t^3+6t^2+7t+3=0$. По условию $t=\sqrt{x-3}=0$, и так как $y=y(t)$ возрастает, то $y(t)=y(0)=3$. Значит, неотрицательных корней у уравнения $2t^3+6t^2+7t+3=0$ нет.

Если p = -1, то получаем уравнение $2t^3+6t^2+7t-1=0$. Так как $y(0)=-1<0$, $y(1)=14>0$ и функция $y=2t^3+6t^2+7t-1$ непрерывна, то уравнение $2t^3+6t^2+7t-1=0$ имеет корень на промежутке (0; 1).

Если p = -1,5, то получаем уравнение $2t^3+6t^2+7t-1{,}5=0$, которое так же, как и в случае p = -1 меет корень на промежутке (0; 1).

Ответ: -1,5; -1.

Задача 19 При каждом значении a решить уравнение $25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0$ и указать, при каких a оно имеет единственное решение.

Решение: Обозначим $5^x=y>0$, тогда заданное уравнение принимает вид: $y^2-(a-1)\cdot y+2a+3=0$. (4)

Для того, чтобы исходное уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (4) имело хотя бы один положительный корень.

Изобразим случаи расположения параболы, при которых имеется два или ровно один положительный корень.

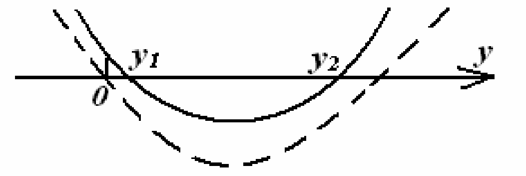


Рисунок 6

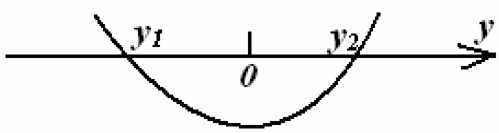


Рисунок 7

Запишем аналитические условия, соответствующие рисунку6 и рисунку 7

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D \ge 0;\\ y_1 \ge 0; - \text{соответсвует рис.6}\\ y_2 > 0;\end{cases}\\ y_1 < 0 < y_2; -\text{соответствует рис.7}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}D = (a-1)^2 - 8a - 12 \ge 0;\\ 2\cdot 0 - (a-1) < 0;\\ 0^2 - (a-1)\cdot 0 + 2a + 3 \ge 0;\end{cases}\\ 0^2 - (a-1)\cdot 0 + 2a + 3 \ge 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a \le -1;\ a \ge 11;\\ a > 1;\\ a \ge -\dfrac{3}{2};\end{cases}\\ a < -\dfrac{3}{2};\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a \ge 11;\\ a < -\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

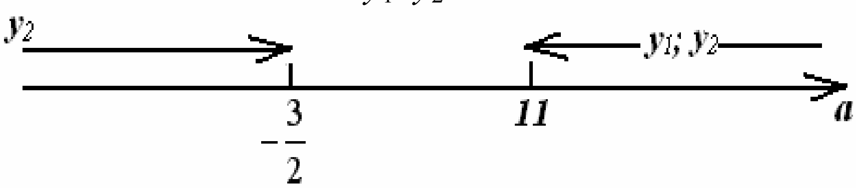
Обеспечив существование решения задачи, произведем теперь отбор нужных значений y.

Если a=11, то y_1=y_2=5>0.

Если a>11, то $\left[\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{a-1-\sqrt{a^2-10a-11}}{2} > 0;\\ y_2 = \dfrac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2} > 0.\end{array}\right.$

Если $a < -\dfrac{3}{2}$, то $y_1 < 0$, а $y_2 = \dfrac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2} > 0$.

y_1=y_2=5



Решая затем соответствующие простейшие показательные уравнения $5^x = y$, получаем, что при $a < -\dfrac{3}{2}$, $x = \log_5 \dfrac{(a-1)+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при

$-\frac{3}{2} \le a < 11$ решений нет; при a=11, x=1; при a>11, $x_{1,2} = \log_5 \frac{(a-1) \pm \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}$

Таким образом, уравнение имеет единственное решение при $a < -\frac{3}{2}$ и при a=11.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2} \right) \cup \{11\}$.

Задача 20 Найти все значения *a*, при которых неравенство

$$9^x < 20 \cdot 3^x + a \qquad (5)$$

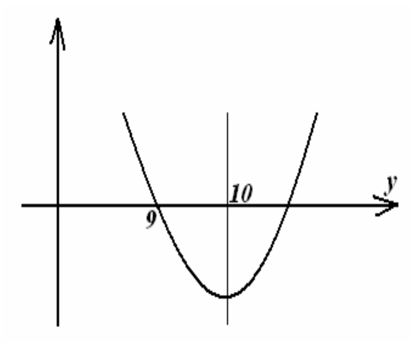
не имеет ни одного целочисленного решения.

Решение: Обозначив $3^x = y > 0$, приходим к неравенству:

$$y^2 - 20y - a < 0 \Leftrightarrow (y-10)^2 - 100 - a < 0 \Leftrightarrow (y-10)^2 < 100 + a. \qquad (6)$$

а) если $100 + a \le 0$, то неравенство (5) не имеет решений, а, значит, не имеет и целочисленных решений.

б) если $100 + a > 0$, то решением неравенства (6) является интервал $10 - \sqrt{100+a} < y < 10 + \sqrt{100+a}$ симметричный относительно точки y=10.



Ближайшим к y=10 числом, отвечающему целочисленному x является число $y = 3^2 = 9$.

По условию задачи число 9 не должно являться решением неравенства (6), что соответствует условию: $(9-10)^2 \ge 100 + a \Leftrightarrow a \le -99$.

Ответ: $a \le -99$.

Задача 21 При каких значениях параметра *a* сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

Решение: Существование корней данного уравнения равносильно выполнению неравенства $D \ge 0$. Имеем: $\frac{D}{4} = a^2 - 2a^2 - 4a - 3 = -a^2 - 4a - 3 \ge 0$, откуда $a \in [-3, -1]$. Выразив при этом сумму и произведение, получим: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (\text{по теореме Виета}) = (-2a)^2 - 2(2a^2 + 4a + 3) = -8a - 6$.

Ясно, что $\max\limits_{-3 \le a \le 1} (-8a - 6) = -8 \cdot (-3) - 6 = 18$.

Ответ: При $a = -3$ эта сумма равна 18.

Задача 22 Найдите все такие значения величины x, при которых неравенство $(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$ выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$.

Решение: Сразу обратим внимание, что сама формулировка задачи предполагает считать переменную x параметром задачи, и параметр a – новой переменной.

Поэтому перепишем неравенство в виде $k(x)\cdot a+b(x)>0$, где $k(x)=-2x^2+13x-13$ и $b(x)=4x^2-27x+33$.

При фиксированном значении переменной x функция $f(a)=k(x)\cdot a+b(x)$ является линейной по a функцией.

Множеством значений такой функции на интервале $a\in(1;3)$ является интервал $(f(1);f(3))$, если $k(x)>0$; интервал $(f(3);f(1))$, если $k(x)<0$; число $f(1)=b(x)$, если $k(x)=0$.

Можно избежать перебора различных случаев, потребовав, чтобы выполнялась совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(1)\ge 0;\\ f(3)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}f(1)>0;\\ f(3)\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-14x+20\ge 0;\\ -2x^2+12x-6>0;\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-14x+20>0;\\ -2x^2=12x-6\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2;\ x\ge 5\\ 3-\sqrt{6}<x<3+\sqrt{6};\end{cases}\\ \begin{cases}x<2;\ x>5;\\ 3-\sqrt{6}\le x\le 3+\sqrt{6}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left[3-\sqrt{6};\,2\right]\cup\left[5;\,3+\sqrt{6}\right]$.

Задача 23 Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+(a^2+4a-5)>0$ хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку [-2; 1].

Решение: Перепишем неравенство по степеням параметра a:

$a^2+(x^3-2x^2+4)a+(2x^3-x^2-6x-5)>0$.

Переформулируем задачу: найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых квадратный трехчлен $f(a)=a^2+pa+q$ положителен хотя бы в одной точке отрезка [-2; 1]. Ясно, что для этого достаточно выполнения совокупности условий:

$$\left[\begin{array}{l}f(-2)>0;\\ f(1)>0.\end{array}\right. \qquad (7)$$

Если же $\begin{cases}f(-2)\le 0;\\ f(1)\le 0\end{cases}$, то $f(a)\le 0;$ для всех $a\in[-2;1]$, поэтому условия (7) являются и необходимыми.

$$\left[\begin{array}{l} f(-2)=3x^2-6x-9>0; \\ f(1)=3x^3-3x^2-6x>0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1;\ x>3; \\ x\cdot(x+1)(x-2)>0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1;\ x>3; \\ -1<x<0;\ x>2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Задача 24 При каких значениях *a* система $\begin{cases} 2x+y=a-1, \\ 2xy=a^2-3a+1, \\ 4x^2+y^2\le -a^2+5a-4 \end{cases}$ имеет решение?

Решение: Согласно условиям 1 и 2, по теореме, обратной теореме Виета, числа $2x$ и y являются корнями квадратного уравнения $t^2+(1-a)t+a^2-3a+1=0$.

Значит, для того чтобы система имела решение, необходимо выполнение условия $D=(1-a)^2-4\left(a^2-3a+1\right)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le a\le 3$.

С другой стороны, $4x^2+y^2=(2x+y)^2-4xy$. Согласно этому равенству, получаем второе условие существования решений: $4x^2+y^2=(a-1)^2-2\left(a^2-3a+1\right)\le -a^2+5a-4$, откуда $a\ge 3$. Следовательно, система имеет решение только при $a=3$.

Ответ: $a=3$.

3.1 Задачи для самостоятельного решения

1 Решите уравнение $a^2(x-2)-3a=x+1$, если *a* – параметр.

Ответ: при $a=1$ уравнение не имеет решений;

при $a=-1$ уравнение имеет бесконечное множество решений;

при $a\ne\pm1$ уравнение имеет единственное решение $x=\frac{2a+1}{a-1}$.

2 Решите уравнение $a^2x=a(x+2)-2$.

Ответ: при $a=0$ решений нет;

при $a=1$ бесконечное множество решений;

при $a\ne 0;\ a\ne 1$ единственное решение $x=\frac{2}{a}$.

3 Решите уравнение $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$.

Ответ: при $a\in(-\infty;-1)$ уравнение не имеет корней;

при $a=1$ уравнение имеет один корень $x=-1$;

при $a\in(1;2)$ уравнение имеет два корня $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{(1-a)(a-6)}}{a-2}$;

при $a = 2$ уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{4}$;

при $a \in (2;\ 6)$ уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{(1-a)(a-6)}}{a-2}$;

при $a = 6$ уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3}{2}$;

при $a \in (6;\ +\infty)$ уравнение не имеет корней.

4 При каком значении параметра a решением уравнения $a^2x - a + 1 = 6x - 5ax$ является пустое множество?

Ответ:-6.

5 При каком значении параметра m решением уравнения $m^2x - m + 1 = 6x - 5mx$ является любое действительное число?

Ответ: 1.

6 Определить, при каком значении параметра a уравнение $2ax^2 - 12x - 7 = 0$ имеет одним из корней 3,5.

Ответ: 2.

7 При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ имеет более одного корня?

Ответ: $a \in (-4;\ 0) \cup (0;\ 1)$.

8 При каких значениях параметра a уравнение $a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0$ имеет более одного корня?

Ответ: $a \in \{-3\} \cup \left(\frac{1}{3};0\right) \cup (0;\ +\infty)$.

9 При каком значении параметра a уравнение $(a-2)x^2 + (4-2a)x + 3 = 0$ имеет единственный корень?

Ответ: $a = 5$.

10 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + (a^2 + a - 2)x + a = 0$ имеет корни, сумма которых равна 0?

Ответ: $a = -2$.

11 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 2(a-1)x + a + 5 = 0$ имеет хотя бы один положительный корень?

Ответ: $a \in (-\infty;\ -1]$.

12 При каких значениях параметра a квадратное уравнение $(a-1)x^2 + (2a+3)x + a + 2 = 0$ имеет корни одного знака?

Ответ: $a \in \left[-2\frac{1}{8};\ -2\right) \cup (1;\ +\infty)$.

13 При каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ имеет два корня, один из которых меньше 2, а другой больше 3?
Ответ: $a\in(2;5)$.

14 При каком наименьшем значении a один из корней уравнения $4x^2-15x+4a^3=0$ будет квадратом другого?
Ответ: -2,5.

15 При каком значении k корни уравнения $2x^2+3(k-5)x+8=0$ будут противоположными числами?
Ответ: таких k не существует.

16 В уравнении $(k-2)x^2+(k-5)x-5=0$ определить значение k так, чтобы выполнялось $x_1+x_2=3$.
Ответ: 2,75.

17 Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ больше a.
Ответ: $a\in(-\infty;-2)$.

18 Найти все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $(a-1)x^2-(a+1)x+2a-1=0$ будут меньше 1.
Ответ: $a\in\left[\dfrac{7-\sqrt{28}}{7};1\right)$.

19 При каких значениях a уравнение $(a-1)3^{2x}-(2a-1)3^x-1=0$ имеет два различных корня?
Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

20 Найти все значения a, при которых уравнение $4^x+(a^2+5)\cdot 2^x+9-a^2=0$ не имеет решений.
Ответ: $a\in[-3;3]$.

21 Указать, при каких a уравнение $9^x+(a+1)\cdot 3^x+\dfrac{a}{2}+3=0$ имеет единственное решение.
Ответ: при $a\in(-\infty;-6]$, $x=\log_3\dfrac{-(a+2)+\sqrt{a^2+2a-8}}{2}$; при $a\in(-6;-4)$, $x=\log_3\dfrac{-(a+2)\pm\sqrt{a^2+2a-8}}{2}$, при a=-4 x=0. Единственное решение при $a\in(-\infty;-6]\cup\{-4\}$.

22 Найти все значения b, при которых уравнение $9^x+(b^2+6)\cdot 3^x-b^2+16=0$ не имеет решений.
Ответ: $b\in[-4;4]$.

23 Найти все значения a, при которых неравенство $16x < 30 \cdot 4^x - a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

Ответ: $a \in [224; +\infty)$.

24 Найти все значения α, при которых неравенство $4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \le 0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\alpha \ge 2$.

25 Найти все значения α, при которых неравенство $\alpha \cdot 9^x + 4(\alpha - 1) \cdot 3^x + \alpha > 1$ справедливо для всех x.

Ответ: $\alpha \ge 1$.

26 Найти все значения m, при которых всякое решение неравенства $1 \le x \le 2$ является решением неравенства $x^2 - mx + 1 \le 0$.

Ответ: $[2{,}5; +\infty)$.

27 Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(a-3)x^2 - 6x + 2a - 9 > 0$ выполняется при всех значениях x.

Ответ: $(6; +\infty)$.

28 Найдите все значения величины x, при которых неравенство $(2c-6)x^2 + (32-10c)x - (8+c) < 0$ выполняется для всех c, удовлетворяющих условию $2<c<4$.

Ответ: $x \in \left[2-\sqrt{10}; 1\right] \cup \left[5; 2+\sqrt{10}\right]$.)

29 Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $(2-a)x^2 + (1-2a)x - 6x + \left(5 + 4a - a^2\right) < 0$ хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку [-1; 2].

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

30 Решить уравнение $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0$.

Ответ: если $a = 1$, то $x = -\frac{4}{6}$;

если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$;

если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет;

если $a > -\frac{4}{5}$ (но $a \ne 1$), то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

4 Задачи, содержащие модуль

Задача 25 Найдите все значения *p*, при которых уравнение $\left|x^2 + x\right| = p - 2$ имеет четыре решения.

Решение: Используем графический метод решения поставленной задачи, а именно построим графики функций $y = \left|x^2 + x\right|$ и $y = p - 2$ и определим при каком расположении второго графика (т.е. при каком *p*) графики будут иметь четыре общие точки.

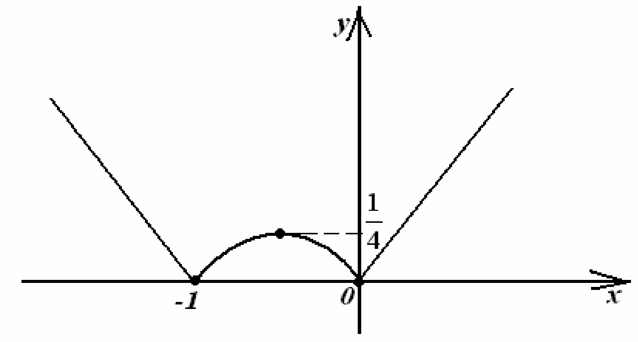
1) $y = \left|x^2 + x\right|$

$x^2 + x = 0;$

$x(x+1) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = -1 \end{array}\right.$ - точки пересечения графика с осью *OX*.

Так как выражение $x^2 + x$ взято по модулю, то, часть функции, расположенная ниже оси *OX* симметрично отобразится относительно оси *OX*, имеем



вершина: $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left|\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{4}$.

График функции $y = p - 2$ - прямая, параллельная оси *OX*.

Таким образом, для того чтобы графики $y = \left|x^2 + x\right|$ и $y = p - 2$ пересекались ровно в четырех точках, необходимо выполнение условий:

$0 < p - 2 < \dfrac{1}{4};$

$2 < p < \dfrac{9}{4}.$

Итак, при $p \in \left(2; \frac{9}{4}\right)$ уравнение $\left|x^2 + x\right| = p - 2$ имеет четыре решения.

Ответ: $\left(2; \frac{9}{4}\right)$.

Задача 26 При всех *a* решить уравнение $|x+3| - a|x-1| = 4$ и определить, при каких *a* оно имеет ровно два решения.

Решение: Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -3, \\ -(x+3) - a(1-x) = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} -3 < x \le 1, \\ (x+3) - a(1-x) = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ (x+3) - a(x-1) = 4, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -3, \\ (a-1)x = a+7, \end{cases} \\ \begin{cases} -3 < x \le 1, \\ (a+1)x = a+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ (a-1)x = a-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим первую систему. Если $a = 1$, то эта система решений не имеет, если $a \ne 1$, то уравнение имеет решение $x = \frac{a+7}{a-1}$. Выясним, при каких *a* данное *x* будет удовлетворять первому неравенству системы: $\frac{a+7}{a-1} \le -3 \Leftrightarrow \frac{a+1}{a-1} \le 0 \Leftrightarrow a \in [-1, 1)$.

Значит, при этих значениях *a* первая система будет иметь решение $x = \frac{a+7}{a-1}$, а при остальных значениях *a* эта система решений иметь не будет.

Во второй системе при $a = -1$ решением уравнения будет любое число *x*, поэтому при данном значении *a* решением системы будут все *x* из интервала $(-3, 1]$. При $a \ne 1$ уравнение будет иметь единственное решение $x = 1$, которое является также решением этой системы.

В третьей системе при $a = 1$ решением уравнения будет любое *x*, поэтому при данном *a* решением системы будут все $x > 1$. При $a \ne 1$ уравнение будет иметь единственное решение $x = 1$, которое не является решением этой системы, поэтому система решений иметь не будет.

Рассмотрим, какие решения имеет исходная совокупность при различных значениях *a*. При $a = 1$ первая система совокупности решений не имеет, вторая система имеет решение $x = 1$, третья - $x > 1$. Поэтому совокупность будет иметь решением $x \in [1, +\infty)$. При $a = -1$ первая система имеет решение $x = -3$, вторая - $x \in [-3,1]$, третья система совокупности решений не имеет. Значит, решением совокупности будет отрезок $x \in [-3, 1]$. При $|a| > 1$ первая и третья система решений не имеют, значит, решением совокупности будет решение второй системы $x = 1$. При $|a| < 1$ первая система имеет решение $x = \frac{a+7}{a-1}$, вторая -

$x=1$, третья система решений не имеет. Значит, решение совокупности будет состоять из двух чисел: $x=1$ и $x=\dfrac{a+7}{a-1}$.

Ответ: Если $a=1$, то $x\in[1,+\infty)$; если $a=-1$, то $x\in[-3,1]$; если $|a|>1$, то $x=1$; если $|a|<1$, то $x=1$ и $x=\dfrac{a+7}{a-1}$. При $|a|<1$ имеются ровно два решения.

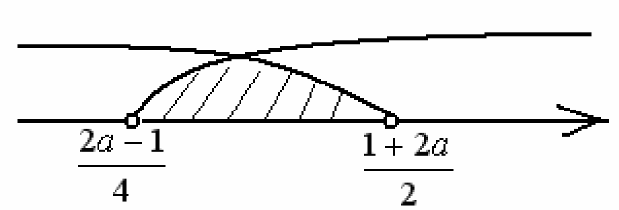
Задача 27 Найти все a, при которых неравенство $|3x-2a|<x+1$ имеет хотя бы одно отрицательное решение. Среди таких a указать наименьшее целое.

Решение: Преобразуем исходное неравенство:

$$|3x-2a|<x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2a<x+1; \\ 3x-2a>-x-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<1+2a; \\ 4x>2a-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{1+2a}{2}; \\ x>\dfrac{2a-1}{4}. \end{cases}$$

Изобразим решения системы на координатной оси.

Если $\dfrac{2a-1}{4}\ge\dfrac{1+2a}{2}$, т.е. если $a>-\dfrac{3}{2}$, то система имеет решения. $x\in\left(\dfrac{2a-1}{4};\dfrac{1+2a}{2}\right)$:



Для того чтобы ответить на вопрос при каких *a* исходное уравнение имеет хотя бы одно отрицательное решение, необходимо чтобы хотя бы левый конец промежутка решений был левее нуля.

$\dfrac{2a-1}{4}<0$, при том что $a>-\dfrac{3}{2}$, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{2a-1}{4}<0; \\ a>-\dfrac{3}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-1<0; \\ a>-\dfrac{3}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a<1; \\ a>-\dfrac{3}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<\dfrac{1}{2}; \\ a>-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Т.е. при всех $a\in\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ исходное неравенство будет иметь хотя бы одно отрицательное решение, при этом наименьшее целое $a=-1$.

Ответ: $a=-1$.

Задача 28 Найдите все значения параметра *a*, при которых множество решений неравенства $x(x-2) \le (a+1)(|x-1|-1)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7.

Решение: Соберем все члены неравенства в левую часть и раскроем скобки.

$x^2 - 2x - (a+1)|x-1| + a + 1 \le 0;$

$x^2 - 2x + 1 - (a+1)|x-1| + a \le 0;$

$|x-1|^2 - (a+1)|x-1| + a \le 0.$

Пусть $|x-1| = t$, тогда находим корни квадратного уравнения $t^2 - (a+1)t + a = 0$. $D = (a-1)^2 - 4 \cdot a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$.

$t_{1,2} = \dfrac{a+1 \pm (a-1)}{2} = \left| \begin{matrix} a \\ 1 \end{matrix} \right.$ и записываем уравнение в виде $(t-1)(t-a) = 0$.

Относительно переменной $t = |x-1|$ получили квадратный трехчлен $(t-1)(t-a)$ с корнями, равными 1 и *a*, и ветвями, направленными вверх.

По условию, *x*=1,7 решение неравенства, т.е. $1{,}7 \cdot (-0{,}3) \le (a+1) \cdot 0{,}3$.

Значит, $1{,}7 \ge a+1$ или $a \le 0{,}7$. Поэтому неравенство $(|x-1|-1)(|x-1|-a) \le 0$ равносильно неравенству $a \le |x-1| \le 1$.

Если $a \le 0$, то неравенство $a \le |x-1|$ верно всегда. Неравенство $|x-1| \le 1$ означает, что число *x* удалено от 1 не более чем на 1, т.е. [0; 2] содержит все члены любой геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7 и знаменателем $q \in (0; 1)$. Значит, такие *a* удовлетворяют условию.

Если $0 < a \le 0{,}7$, то множество решений неравенства $a \le |x-1| \le 1$ равно $[0; 1-a] \cup [1+a; 2]$. Так как $1 + a \le 1{,}7$, то отрезок $[1+a; 2]$ содержит число 1,7, т.е. первый член прогрессии. Знаменатель *q*>0 прогрессии всегда можно выбрать так, чтобы $1{,}7q \le 1-a$. Например, *q* = 0,1. Тогда все члены такой бесконечно убывающей прогрессии, начиная со второго, будут лежать в отрезке [0; 1-*a*]. Значит, такие *a* удовлетворяют условию.

Ответ: $(-\infty; 0{,}7]$.

Задача 29 При каких значениях *a* все решения уравнения $2|x-a| + a - 4 + x = 0$ удовлетворяют неравенству $0 \le x \le 4$?

Решение: Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge a,\\ 2(x-a)+a-4+x=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x < a,\\ 2(a-x)+a-4+x=0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge a,\\ x=\dfrac{a+3}{4},\end{cases}\\ \begin{cases}x < a,\\ x=3a-4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Значение $x=\dfrac{a+4}{3}$ является одним из решений исходного уравнения, если выполняется условие $\dfrac{a+4}{3} \ge a \Leftrightarrow a \le 2$. Аналогично, $x=3a-4$ - решение, если $3a-4<a \Leftrightarrow a<2$. Таким образом, при $a=2$ уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{a+4}{3}$, при $a<2$ - два решения: $x=\dfrac{a+4}{3}$ и $x=3a-4$.

Условие задачи выполнено в следующих случаях:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2,\\ 0 \le \dfrac{a+4}{3} \le 4,\end{cases}\\ \begin{cases}a<2,\\ 0 \le \dfrac{a+4}{3} \le 4,\\ 0 \le 3a-4 \le 4,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2,\\ \begin{cases}a<2,\\ -4 \le a \le 8,\\ \dfrac{4}{3} \le a \le \dfrac{8}{3},\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2,\\ \dfrac{4}{3} \le a < 2,\end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left[\dfrac{4}{3},\, 2\right].$$

Ответ: $a \in \left[\dfrac{4}{3},\, 2\right]$.

Задача 30 Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2+5(x+1)+3|x-p|+p \le 0$, максимально.

Решение: Изобразим на координатной плоскости *OXP* геометрическое место точек, удовлетворяющих заданному неравенству.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<p;\\ x^2+2x+5+4p \le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x \ge p;\\ x^2+8x+5-2p \le 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x<p;\\ p \le \dfrac{-\left(x^2+2x+5\right)}{4};\end{cases} & (8)\\ \begin{cases}x \ge p;\\ p \ge \dfrac{x^2+8x+5}{2}.\end{cases} & (9)\end{array}\right.$$

Изобразим отдельно геометрические места точек, отвечающих системе (8) на рисунке 8 и системе (9) на рисунке 9, а затем объединим их на рисунке 10.

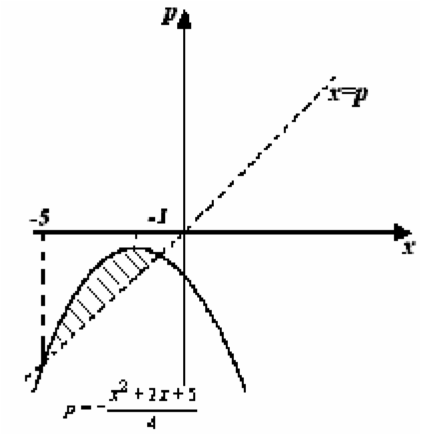


Рисунок 8

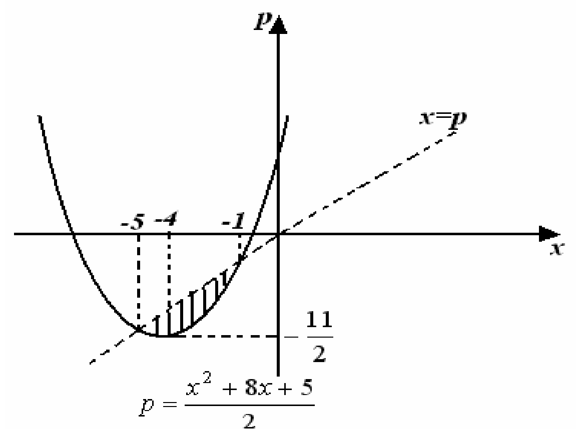


Рисунок 9

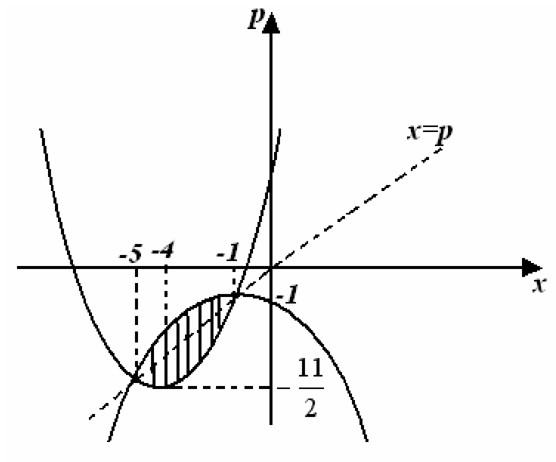


Рисунок 10

Из рисунка 9 следует, что целочисленными решениями неравенства являются числа x = -5; x = -4; x = -3; x = -2; x = -1 и только они. Определим для каждого из этих чисел соответствующие им значения параметра p. Для этого проведем прямые $x=i$, где i= -5, -4, -3, -2, -1 и вычислим координаты p точек пересечения этих прямых с найденной областью.

x = -5, p = -5

$x=-4,\ p\in\left[-\frac{11}{2};-\frac{13}{4}\right]$

$x=-3,\ p\in\left[-5;-2\right]$

$x=-2,\ p\in\left[-\frac{7}{2};-\frac{5}{4}\right]$

x = -1, p = -1

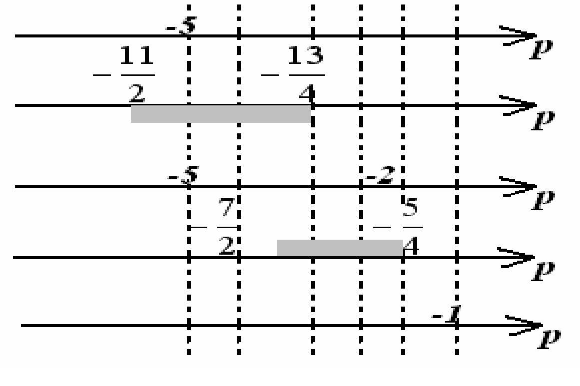


Рисунок 11

Из рисунка 11 следует, что максимальное число целочисленных решений неравенства (три) возникает при p= -5 и $p \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{13}{4}\right]$.

Ответ: $p \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{13}{4}\right] \cup \{-5\}$.

4.1 Задачи для самостоятельного решения

1 Найдите все значения p, при которых уравнение $|\sin x| = p^3$ не имеет корней.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

2 Найдите все значения p, при которых уравнение $e^{x^2 - 2x} = p$ имеет единственное решение.

Ответ: $p = e^{-1}$.

3 Найдите все значения p, при которых уравнение $\sqrt{x} = |x + p|$ имеет единственное решение.

Ответ: $p = 0{,}25$.

4 Найдите значения параметра a, при которых уравнение $\left|x^2 - 7x + 12\right| = ax$ имеет три решения.

Ответ: $7 - 4\sqrt{3}$.

5 При каких a уравнение $\left||3x| - 6\right| = x - a$ имеет ровно три корня?

Ответ: $\{-6; -2\}$.

6 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(a + 1 - |x + 2|\right)\left(a + x^2 + 2x\right) = 0$ имеет ровно три корня.

Ответ: ± 1.

7 Найдите значения a, при которых уравнение $x^3 - 2x - 2|x - a| + a = 0$ имеет ровно два различных корня?

Ответ: $\frac{8}{3}$.

8 Для каждого значения a решите уравнение $|x - a + 1| + |x - 2a| = x$.

Ответ: $a < 1$ то $x \in \varnothing$; $a = 1$, то $x = 2$; $a > 1$, то $x \in \{a + 1; 3a - 1\}$.

9 Решите уравнение $|a(x - b)| + |x - 1| = 0$.

Ответ: при $a \neq 0$ и $b \neq 1$ - нет решений;

в остальных случаях (т.е. при a = 0 или b=1) уравнение имеет единственное решение x=1.

10 Решить неравенство $|1+x| \le ax$, при $a<1$.

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{1}{a-1}\right]$.

11 Найти сумму всех целочисленных значений a, при которых существует хотя бы одно положительное значение x, удовлетворяющее неравенству $|2x+a|<2-x$.

Ответ: -5.

12 Найти все a, при которых неравенство $|a+2x|<1-3x$ имеет хотя бы одно положительное решение. Указать среди таких a целое.

Ответ: 0.

13 Найдите все значения параметра *a*, при которых множество решений неравенства $x(x-4) \ge (a+2)(|x-2|-2)$ включает все члены некоторой арифметической прогрессии, содержащей как отрицательные, так и положительные члены, а разность этой прогрессии равна 0,5.

Ответ: [1,5; 2,5].

14 Найти все значения параметра *q*, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2-5(x-1)+3|x-q|-q \le 0$, максимально.

Ответ: $q \in \left[\dfrac{13}{4}; \dfrac{7}{2}\right] \cup \{\ 5\ \}$.

15 Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $|x-a| = \dfrac{1}{x-3}$ имеет единственное решение.

Ответ: $x = \dfrac{a+3+\sqrt{a^2-6a=13}}{2}$, при $a<5$.

16 Сколько решений имеет уравнение $|x^2-4x| = a+2x$ в зависимости от параметра *a*.

Ответ: $a<-8$ - нет решений;

$a=-8$ - одно решение;

$-8<a<0;\ a>1$ - два решения;

$a=0;\ a=1$ - три решения;

$0<a<1$ - четыре решения.

17 Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$ имеет ровно два различных решения и найти эти решения.

Ответ: $a < -\frac{7}{3}:\ x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-(a+1)}$;

$-2 < a < -1:\ x_2\ -1 + \sqrt{-(a+1)};\ \ x_3 = -3 - \sqrt{7+3a}$;

$a > -1:\ x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{7+3a}$.

18 Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $a|x+1| - x - a^2|x| = 0$ имеет три различных решения.

Ответ: $1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

19 Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых существует решение неравенства $\left|x - \frac{25}{4}a^2\right| < 3 - |5a - 4 - x|$.

Ответ: $\varnothing$.

20 При каких значениях параметра *a* уравнение $x - a = 2\left|2|x| - a^2\right|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

Ответ: $a = -2:\ x_1 = -2;\ x_2 = \frac{6}{5};\ x_3 = \frac{10}{3}$;

$a = -\frac{1}{2}:\ x_1 = -\frac{1}{5};\ x_2 = 0;\ x_3 = \frac{1}{3}$.

5 Иррациональные уравнения и неравенства с параметром

Задача 31 Решить уравнение $\sqrt{x-a}=2a-x$.

Решение: Сначала будем действовать по стандартной схеме – возведем обе части заданного иррационального уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение:

$$\left(\sqrt{x-a}\right)^2=(2a-x)^2,$$

$$x-a=4a^2-4ax+x^2,$$

$$x^2-(4a+1)x+4a^2+a=0.$$

Найдем дискриминант: $D=(4a+1)^2-4\left(4a^2+a\right)=4a+1$. Значит, $x_{1,2}=\dfrac{4a+1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$.

Теперь надо выполнить проверку, подставляя поочередно каждый из найденных корней в исходное уравнение. Эта проверка, как нетрудно догадаться, будет весьма и весьма сложной. Мы выберем другой путь – графический: построим графики функций $y=\sqrt{x-a}$ и $y=2a-x$ и найдем точки их пересечения. При этом целесообразно рассмотреть три случая: $a=0,\ a<0,\ a>0$.

В первом случае (при a = 0) заданное уравнение принимает вид $\sqrt{x}=-x$. Построив графики функций $y=\sqrt{x},\ y=-x$ (рисунок 12), убеждаемся, что они имеют одну общую точку (0; 0), а потому уравнение имеет только один корень x = 0.

Во втором случае (при $a<0$) графики функций $y=2a-x$ и $y=\sqrt{x-a}$ не пересекаются (рисунок 13); значит, заданное уравнение не имеет корней.

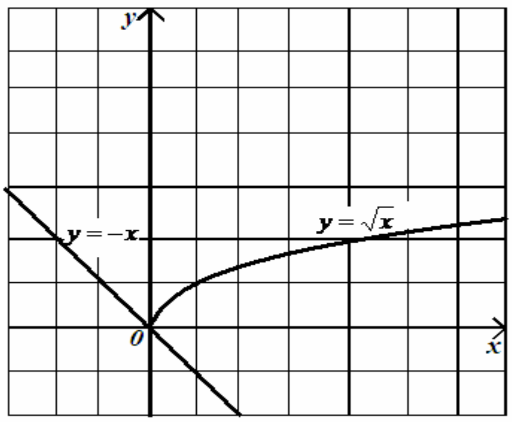


Рисунок 12

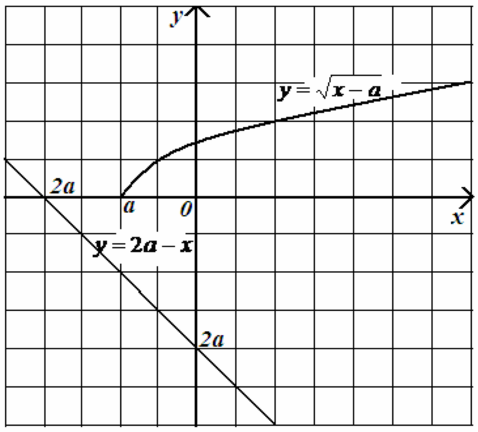


Рисунок 13

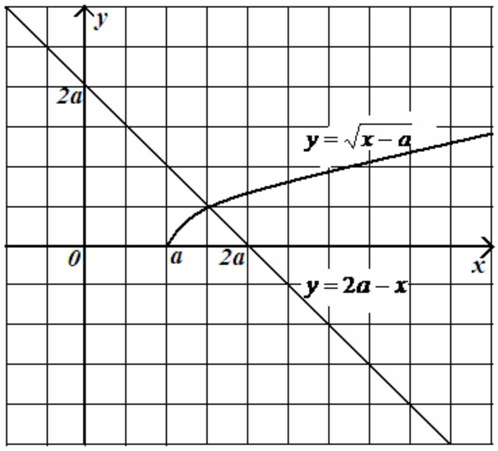


Рисунок 14

В третьем случае (при $a>0$) графики функций $y=2a-x$ и $y=\sqrt{x-a}$ пересекаются в одной точке (рисунок 14); значит, заданное уравнение имеет один корень. Следовательно, из двух полученных выше корней один является посторонним. Какой? Ответ можно почерпнуть из графической иллюстрации, представленной на рис.14. Абсцисса точки пересечения графиков меньше, чем $2a$ ($2a$ – абсцисса точки пересечения прямой $y=2a-x$ с осью x). Из двух найденных корней $x_1=\dfrac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$ и $x_2=\dfrac{4a+1+\sqrt{4a+1}}{2}$ второй явно больше, чем $2a$; чтобы в этом убедиться, достаточно переписать второй корень в виде $x_2=2a+\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$. Значит, x_2 - посторонний корень.

Итак, если $a>0$, то заданное уравнение имеет один корень $x=\dfrac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

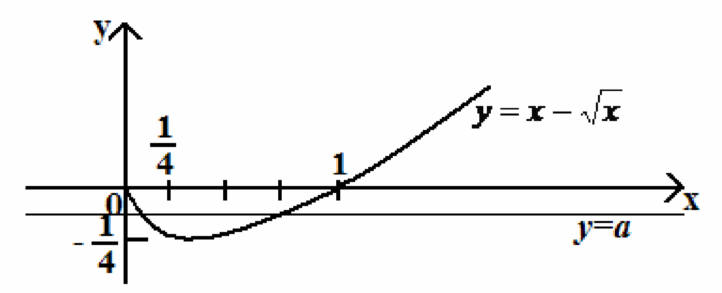
Ответ: если $a<0$, то корней нет;
если $a=0$, то $x=0$;
если $a>0$, то $x=\dfrac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

Замечание. В только что решенном примере ответ можно записать компактнее. Дело в том, что записанная при $a>0$ формула корня уравнения пригодна и для случая $a=0$: если $a=0$, то по указанной формуле получаем $x=0$. Поэтому ответ можно было записать так: если $a<0$, то корней нет; если $a\ge 0$, то $x=\dfrac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

Задача 32 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{\sqrt{x}+a}=x-a$ имеет два различных корня.

Решение: Перепишем уравнение в следующем виде $\sqrt{\sqrt{x}+a}+a=x$. Так как функция $f(x)=\sqrt{x}+a$ возрастает на всей своей области определения $D(f)=[0;\infty)$, а уравнение имеет вид $f(f(x))=x$, то на основании того, что если функция $f(x)$ возрастает на промежутке *I*, то уравнение $f(f(x))=x$ равносильно на промежутке I уравнению $f(x)=x$, заключаем, что оно равносильно уравнению $\sqrt{x}+a=x$. Все значения параметра *a*, при которых уравнение $x-\sqrt{x}=a$ имеет два различных корня, найдем из графических соображений. Для этого выясним, при каких значениях параметра *a* прямая $y=a$ имеет две общие точки с графиком функции $y=x-\sqrt{x}$.

По графику видим, что условию удовлетворяют $a\in\left(-\frac{1}{4};\,0\right]$.



Ответ: $\left(-\frac{1}{4};\,0\right]$.

Задача 33 Решите неравенство $\sqrt{x+9a}-\sqrt{10a}\le a-x$.

Решение: Перепишем данное неравенство в виде:

$$\sqrt{x+9a}+x\le\sqrt{10a}+a. \qquad (10)$$

Так как функция $f(t)=\sqrt{t+9a}+t$ возрастает на всей своей области определения $D(f)=[-9a;+\infty)$, то неравенство (10) равносильно системе $\begin{cases}x\le a,\\ x\ge -9a.\end{cases}$

Из условия следует, что при $a<0$ неравенство не имеет решений. При a = 0 система принимает вид $\begin{cases}x\le 0,\\ x\ge 0\end{cases}$ и ее решением является x =0. при $a>0$ решением системы является отрезок $[-9a;\,a]$.

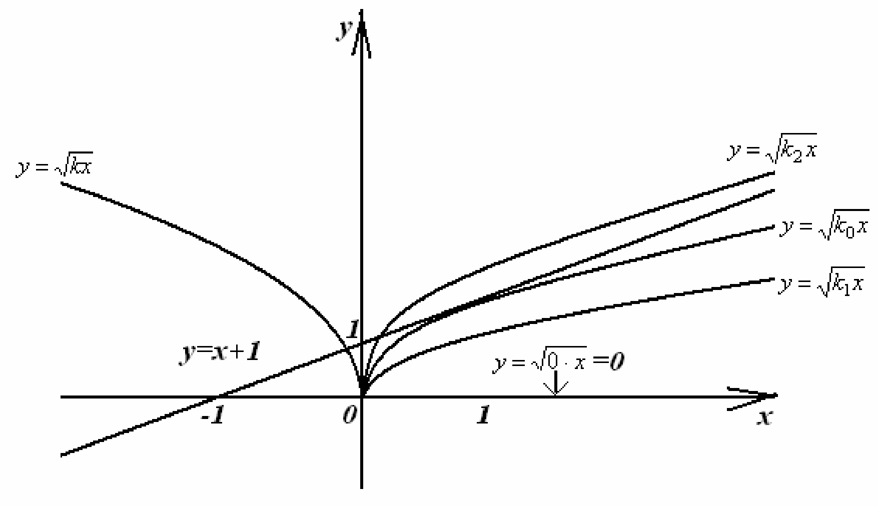
Ответ: при $a<0$ решений нет;

при $a=0$ $x=0$;

при $a>0$ $x\in[-9a;\,a]$.

Задача 34 Найти все значения параметра *k*, при которых уравнение $\sqrt{kx}=x+1$ имеет решения.

Решения: Построим в одной системе координат *XOY* графики функций $y=x+1$, $y=\sqrt{kx}$ при различных значениях *k*.



$k<0,\ k_2>k_0>k_1>0$

Из графиков этих функций видно, что при $k\le 0$ решение всегда существует (графики всегда пересекаются). Найдем значение $k_0>0$ при котором графики функций $y=x+1,\ y=\sqrt{k_0 x}$ касаются. При этом значении $k_0>0$ уравнение $\sqrt{k_0 x}=x+1$ имеет единственное решение.

Геометрически очевидно, что это требование равносильно требованию единственности решения квадратного уравнения $(x+1)^2=k_0 x \Leftrightarrow x^2-(k_0-2)x+1=0$, то есть

$$\begin{cases} D=(k_0-2)^2-4=0; \\ k_0>0; \end{cases} \Leftrightarrow k_0=4.$$

Следовательно, при $k\ge 4$ графики левой и правой частей вновь пересекаются.

Ответ: $k\le 0;\ k\ge 4$.

Задача 35 При каких значениях a неравенство $\sqrt{x^2-10x+26}\ge \dfrac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8}$ выполняется для всех значениях x?

Решение: Произведем замену $b=\dfrac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8}$ и рассмотрим неравенство

$\sqrt{x^2-10x+26}\ge b$.

Найдем его область определения. Из определения арифметического квадратного корня имеем $x^2-10x+26\ge 0$. Дискриминант квадратного трехчлена меньше нуля, следовательно, трехчлен положителен при любых значениях x. Таким образом, областью определения неравенства $\sqrt{x^2-10x+26}\ge b$ является все множество действительных чисел.

Рассмотрим, при каких b это неравенство выполняется для всех x.

Если $b<0$, то неравенство верно для любых x.

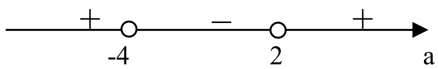
Пусть $b \geq 0$. Возведем обе части неравенства в квадрат:
$x^2 - 10x + 26 \geq b^2$,
$x^2 - 10x + 26 - b^2 \geq 0$.

Трехчлен, стоящий в левой части, неотрицателен для любых x, если его дискриминант не больше нуля. $100 - 4(26 - b^2) \leq 0$, $b^2 \leq 1$, $-1 \leq b \leq 1$.

Поскольку мы рассматриваем случай $b \geq 0$, то $0 \leq b \leq 1$.

Итак, если $b \leq 1$, то неравенство справедливо для любых x.

Вернемся к параметру a.
$\frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 2a - 8} \leq 1$, $\frac{a^2 + 2a - 3 - a^2 - 2a + 8}{a^2 + 2a - 8} \leq 0$, $\frac{5}{(a+4)(a-2)} \leq 0$. Используя метод интервалов, получаем $-4 < a < 2$.



Ответ: $-4 < a < 2$.

Задача 36 При каких значениях параметра a все числа из отрезка $-1 \leq x \leq 3$ удовлетворяют неравенству $2ax + 2\sqrt{2x+3} - 2x + 3a - 5 < 0$?

Решение: Преобразуем данное неравенство следующим образом: $(a-1)(2x+3) + 2\sqrt{2x+3} - 2 < 0$.

Пусть $y = \sqrt{2x+3}$, тогда, так как $x \in [-1, 3]$, то $y \in [1, 3]$. Переформулируем задачу следующим образом: при каких значениях параметра a все числа из отрезка $1 \leq x \leq 3$ удовлетворяют неравенству $(a-1)y^2 + 2y - 2 < 0$?

Пусть $f(y) = (a-1)y^2 + 2y - 2$. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $a - 1 > 0$, т.е. $a > 1$. Тогда условие задачи равносильно требованию, чтобы отрезок $[1, 3]$ находился целиком между корнями данного квадратного трехчлена. Имеем (рисунок 15):

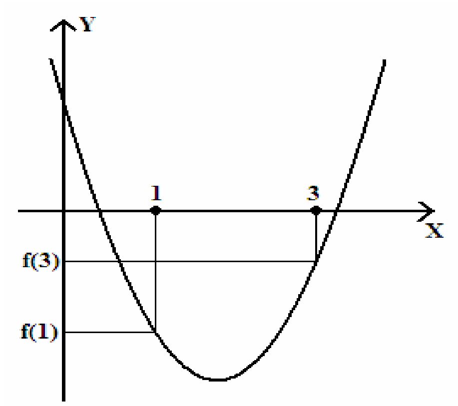


Рисунок 15

$$\begin{cases} f(1) < 0, \\ f(3) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1) + 2 - 2 < 0, \\ 9(a-1) + 6 - 2 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a < \frac{5}{9}, \end{cases} \Leftrightarrow a < \frac{5}{9}.$$

С учетом условия $a>1$ получаем, что первый случай не реализуется ни при каком a.

2) Пусть $a-1=0$, т.е. $a=1$. В этом случае неравенство принимает вид $2y-2<0 \Leftrightarrow y<1$, и условие задачи не выполняется.

3) Пусть $a-1<0$, т.е. $a<1$. Разделим обе части неравенства на (-1): $(1-a)y^2-2y+2>0$.

Пусть $g(y)=(1-a)y^2-2y+2$. Условие задачи реализуется в двух случаях:

а) Если дискриминант квадратного трехчлена меньше нуля, то неравенство имеет своим решением всю числовую ось, и условие задачи естественным образом выполняется. Имеем: $\frac{D}{4}=1-2(1-a)<0 \Leftrightarrow a<\frac{1}{2}$.

б) Оба корня квадратного трехчлена либо больше 3, либо оба меньше 1. Что в свою очередь равносильно следующей системе (рисунок 16):

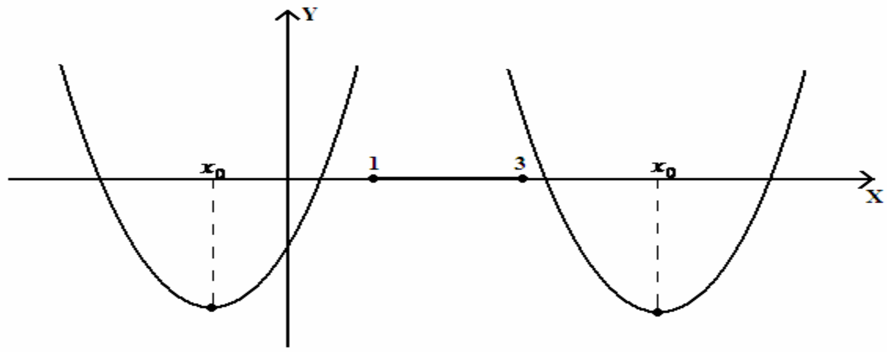


Рисунок 16

$$\begin{cases} g(1) > 0, \\ g(3) > 0, \\ x_0 \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a) - 2 + 2 > 0, \\ 9(1-a) - 6 + 2 > 0, \\ \left[\begin{aligned} &\frac{1}{1-a} < 1, \\ &\frac{1}{1-a} > 3, \end{aligned}\right. \end{cases} \overset{(\text{т.к. } 1-a>0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a < 1, \\ a > \frac{5}{9}, \\ \left[\begin{aligned} &1 < 1-a, \\ &1 > 3-3a, \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a < \frac{5}{9}, \\ \left[\begin{aligned} &a < 0, \\ &a > \frac{2}{3}, \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a < 0.$$

Объединением промежутков $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и $(-\infty, 0)$ является $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Задача 37 Для всех значений *a* решить неравенство $a - 2 < (a-1)\sqrt{x+1}$.
Решение: Рассмотрим три случая:

1) Если $a < 1$, делим обе части неравенства на $(a-1)$, при этом изменив знак неравенства: $\sqrt{x+1} < \frac{a-2}{a-1}$.

Так как число, стоящее в правой части неравенства, при всех указанных *a* положительно, данное неравенство равносильно неравенству $0 \le x + 1 < \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 \Leftrightarrow -1 \le x < \frac{3-2a}{a^2 - 2a + 1}$.

2) Если $1 \le a < 2$, в левой части исходного неравенства стоит отрицательное число, а в правой при всех допустимых *x* – неотрицательное. Следовательно, неравенство выполнено для всех $x \ge -1$.
3) Если $a \ge 2$, делим обе части неравенства на $(a-1)$, при этом меняя знак неравенства: $\sqrt{x+1} > \frac{a-2}{a-1}$.

Так как число, стоящее в правой части неравенства, при всех указанных a неотрицательно, данное неравенство равносильно неравенству $x+1>\left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2 \Leftrightarrow x>\dfrac{3-2a}{a^2-2a+1}$.

Ответ: Если $a<1$, то $x\in\left[-1,\ \dfrac{3-2a}{a^2-2a+1}\right)$; если $1\le a<2$, то $x\in[1,+\infty)$; если $a\ge 2$, то $x\in\left(\dfrac{3-2a}{a^2-2a+1},+\infty\right)$.

Задача 38 При каждом значении параметра a найти все решения неравенства $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}>0$.

Решение: Приведем неравенство к виду:

$$2\sqrt{3ax+a^2}<x+2a \Leftrightarrow \begin{cases}3ax+a^2\ge 0;\\ x+2a\ge 0;\\ 4(3ax+a^2)<(x+2a)^2;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0;\\ x\ge -\dfrac{a}{3};\\ x\ge -2a;\\ x^2-8ax>0;\end{cases}\\ \begin{cases}a=0;\\ x\ge 0;\\ x^2\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}a<0;\\ x\le -\dfrac{a}{3};\\ x\ge -2a;\\ 4(3ax+a^2)<(x+2a)^2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0;\\ x\ge -\dfrac{a}{3};\\ x<0;\ x>8a;\end{cases}\\ \begin{cases}a=0;\\ x>0;\end{cases}\\ \begin{cases}a<0;\\ \textit{нет}\quad \textit{решений}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: При a<0 нет решений; при a=0, x>0; при a>0, $-\dfrac{a}{3}\le x<0;\ x>8a$.

Задача 39 Определить, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a}\ge x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

Решение: Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

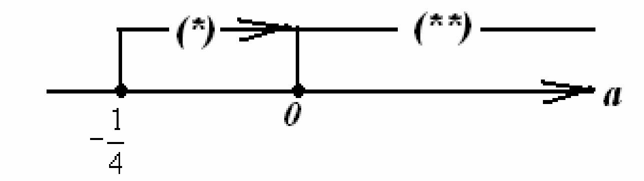
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 0; \\ x + a \geq x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x + a \geq 0; \\ x < 0; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} x \geq 0; \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}; \\ a \geq -\dfrac{1}{4}; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} a < -\dfrac{1}{4}; \\ \text{нет решение}; \end{cases} \\ 3)\begin{cases} x \geq -a; \\ x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$1)\quad \begin{cases} x \geq 0; \\ a \geq -\dfrac{1}{4}; \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0; \\ a \geq -\dfrac{1}{4}; \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0; \\ a \geq 0; \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

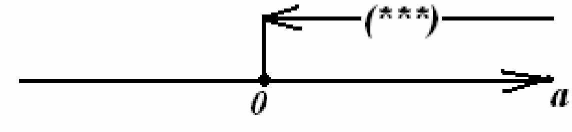
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} -\dfrac{1}{4} \leq a < 0; \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}; \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} a \geq 0; \\ 0 \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}; \end{cases} & (**) \end{array}\right.$$

$$3)\ \begin{cases} x \geq -a; \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0; \\ -a \leq x < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq 0; \\ \text{нет решений.} \end{cases} \end{array}\right. \quad (***)$$

Объединим полученные в системах 1), 2), 3) решения представляя их графически:



$\rightarrow$ системе 1



$\rightarrow$ системе 3

Выпишем для всех a решение неравенства: при $a<-\frac{1}{4}$, нет решений; при $-\frac{1}{4}\le a<0$, $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; при a=0, $0\le x\le 1$; при $a>0$, $-a\le x\le\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Решим поставленную задачу:

1) Если $-\frac{1}{4}\le a<0$, то $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}-\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}=-2a \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{4}\le a<0;\\ \sqrt{1+4a}=-2a;\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{4}\le a<0;\\ 1+4a=4a^2;\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{4}\le a<0;\\ a=\frac{1-\sqrt{2}}{2};\ a=\frac{1+\sqrt{2}}{2};\end{cases} \Leftrightarrow\ a=\frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

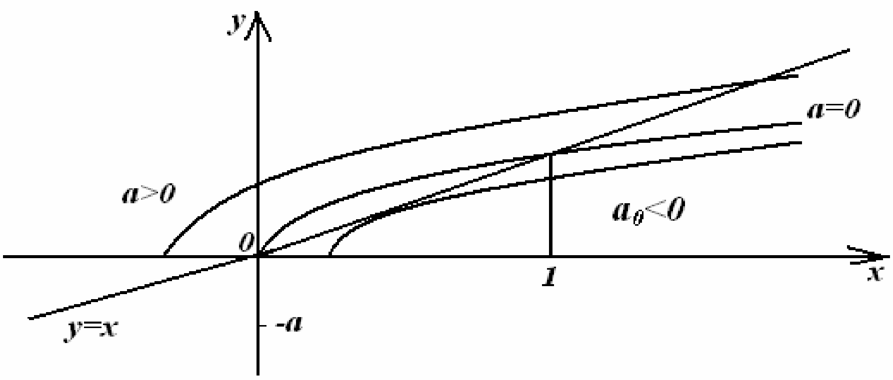
2) Если $a\ge 0$, то $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}+a=2a \Leftrightarrow\sqrt{1+4a}=2a-1\Leftrightarrow$

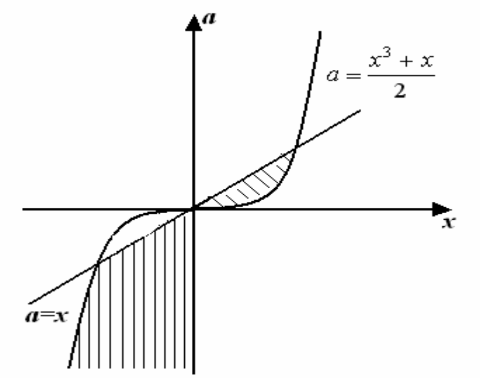
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0;\\ 2a-1\ge 0;\\ 1+4a=4a^2-4a+1;\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}a\ge\frac{1}{2};\\ a=0;\ a=2;\end{cases} \Leftrightarrow a=2.$$

Ответ: $a=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$; $a=2$.

Замечание: Предложенную задачу можно было бы решить графическим способом.

Если построить графики функций $y=x$ и $y=\sqrt{x+a}$ при различных a в одной системе координат.





Видно, что решение $x \in [0;\, 1]$ будет только при $a_0 \le a \le 0$, где значение a=0 соответствует графику $y = \sqrt{x}$, пересекающему прямую y=x в точках (0; 0) и (1; 1), а значение a_0 соответствует касанию парабол $y = \sqrt{x + a_0}$ и прямой y=x.

Задача 40 Найти все значения a, при каждом из которых среди решений неравенства $\sqrt{\left(a - x^2\right)\left(x^2 + a\right)} + a > x$ есть ровно два различных целочисленных решения.

Решение: Согласно схеме решения иррациональных неравенств, данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - a \ge 0; \\ \left(a - x^2\right)\left(x^2 + a\right) > \left(x^2 - 2ax + a^2\right); \end{cases} \\ \begin{cases} x - a < 0; \\ a^2 - x^4 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \ge a; \\ x\left(a - \dfrac{x^3 + x}{2}\right) > 0; \end{cases} & (11) \\ \begin{cases} x < a; \\ |a| \ge x^2. \end{cases} & (12) \end{array}\right.$$

Изобразим на координатной плоскости Oxa геометрические место точек, удовлетворяющих системе (11) на рисунке 17, системе (12) на рисунке 18 и их объединение на рисунке 19.

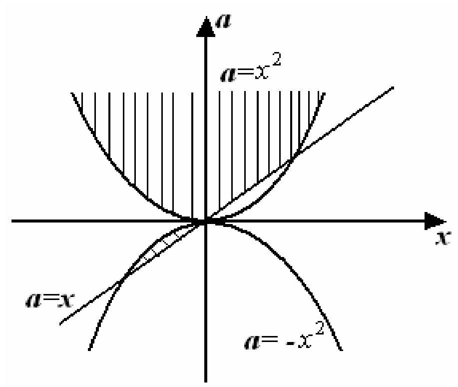


Рисунок 17 Рисунок 18

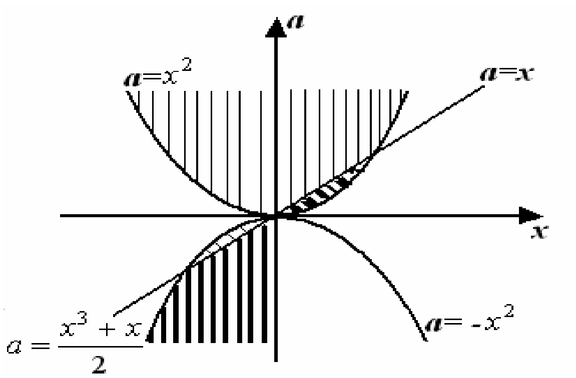


Рисунок 19

Чтобы найти множество решений неравенства, соответствующее значению параметра a_0, нужно провести прямую $a=a_0$ и спроектировать на ось OX ту часть этой прямой, которая попала в заштрихованную область.

Теперь ясно, что

если $0 < a \le 1$, то x_0 – единственное целочисленное решение;
если a=1, то x= - 1; x=0 – два целочисленных решения;
если a>0, то x= -1; x=0; x =1 – как минимум три целочисленных решения;
если a=0, то решений нет;
если $-1 \le a < 0$, то нет целочисленного решения;
если $\frac{(-2)^3 - 2}{2} = -5 \le a < -1$, то x = -1 – единственно целочисленное решение;
если $\frac{(-3)^3 - 3}{2} = -15 \le a < -5$, то x = -2 и x = -1 – два целочисленных решения;
если a < -15, то x = -3, x = -2, x = -1 – как минимум три целочисленных решения.

Ответ: $a \in \{1\} \cup [-15;\, -5)$.

Задача 41 Решите неравенство $\sqrt{x-a} + \sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4}$. (13)

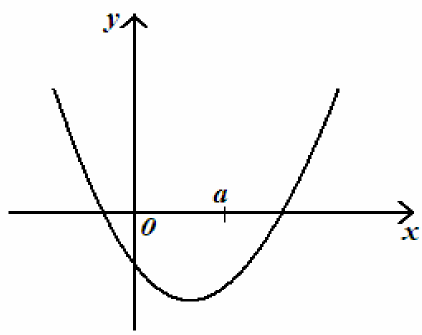
Решение. Чтобы все корни, входящие в неравенство, имели значение, должны выполняться неравенства $x \ge a,\ x \ge -\frac{1}{2},\ x \ge \frac{4}{3}$, т.е. $x \ge a$ и $x \ge \frac{4}{3}$. Так как при таких значениях x и a все корни в (13) неотрицательны, то можно возвести обе части неравенства в квадрат. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x^2 - (2a-1)x - a} > a - 5, \\ x \ge a, \\ x \ge \frac{4}{3}. \end{cases} \qquad (14)$$

Разберем два случая: $a < 5$ и $a \ge 5$. В первом случае $a - 5 < 0$ и потому первое неравенство системы справедливо для всех x, удовлетворяющих двум другим неравенствам. Отсюда получаем, что при $a \le \frac{4}{3}$ решением системы (14) является луч $\left[\frac{4}{3};\, +\infty\right)$, а при $\frac{4}{3} < a < 5$ - луч $[a;\, +\infty)$.

Пусть теперь $a \geq 5$. В этом случае обе части первого неравенства в системе (14) неотрицательны и можно возвести их в квадрат. Так как условие $x \geq \frac{4}{3}$ заведомо выполнено, то имеем систему неравенств $\begin{cases} 8x^2 - 4(2a-1)x - \left(a^2 - 6a + 25\right) > 0, \\ x \geq a. \end{cases}$ Заметим, что $a^2 - 6a + 25 = (a-3)^2 + 16 > 0$ при всех a и потому свободный член квадратного трехчлена отрицателен. Отсюда вытекает, что корни уравнения $8x^2 - 4(2a-1)x - \left(a^2 - 6a + 25\right) = 0$ (15) имеют разные знаки.

Поскольку мы хотим, чтобы один из корней был меньше, чем a, то (см. рис) в точке a трехчлен должен принимать неположительные значения. Отсюда получаем для a неравенство $8a^2 - 4(2a-1)a - \left(a^2 - 6a + 25\right) \leq 0$, т.е. $-\left(a-5\right)^2 \leq 0$. Оно выполняется для всех a. Значит, один из корней уравнения (15), а именно больший, удовлетворяет условию $x \geq a$. Этот корень имеет вид: $x_1 = \frac{1}{4}\left(2a - 1 + \sqrt{6a^2 - 16a + 51}\right)$.



Итак, мы доказали, что если $a \leq \frac{4}{3}$, то $\frac{4}{3} \leq x < +\infty$. Если $\frac{4}{3} < a < 5$, то $a \leq x < +\infty$. Если $a \geq 5$, то $x > \frac{1}{4}\left(2a - 1 + \sqrt{6a^2 - 16a + 51}\right)$.

Задача 42 Найти все значения a, для которых система $\begin{cases} a(x-4) = 3y + 6, \\ y + \sqrt{x} = 0 \end{cases}$ имеет два различных решения.

Решение: Данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} a(x-4) = 3y + 6, \\ \sqrt{x} = -y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x-4) = 3y + 6, \\ x = y^2, \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Эта система будет иметь такое же количество решений, как и система $\begin{cases} a\left(y^2 - 4\right) = 3y + 6, \\ y \leq 0. \end{cases}$

Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «При каких a уравнение $a\left(y^2 - 4\right) = 3y + 6 \Leftrightarrow ay^2 - 3y - 4a - 6 = 0$ имеет два различных положительных корня?» При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень. Пусть $a \neq 0$. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} D>0, \\ y_1 \le 0, \\ y_2 \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D>0, \\ y_1 \cdot y_2 \ge 0, \\ y_1 + y_2 \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+4a(4a+6)>0, \\ \dfrac{-4a-6}{a} \ge 0, \\ \dfrac{3}{a} \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2+24a+9>0, \\ -4a-6 \le 0, \\ a<0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne -\dfrac{3}{4}, \\ a \ge -\dfrac{3}{2}, \\ a<0, \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, 0\right).$$

Ответ: $a \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

5.1 Задачи для самостоятельного решения

1 С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь при различных значениях b уравнение $\sqrt{x} = x + b$.

Ответ: $b \in (0{,}25; +\infty)$ - нет корней;
$b \in (-\infty; 0) \cup \{0{,}25\}$ - один корень;
$b \in [0; 0{,}25)$ - два корня.

2 При каких значениях a уравнение $\sqrt{a-x} = 2 + x$ имеет единственное решение.

Ответ: $[-2; +\infty)$.

3 При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет единственное решение?

Ответ: $(-\infty; 1) \cup \left\{\frac{5}{4}\right\}$.

4 При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1-2a} = x - 1$ имеет два решения?

Ответ: $\left[1; \frac{9}{8}\right)$.

5 При каких значениях параметра a неравенство $(a-x)\sqrt{2+x-x^2} \le 0$ имеет только два решения?

Ответ: $[1;+\infty)$.

6 При каких a уравнение $\sqrt{9-x}+\sqrt{x+7}=ax$ имеет решение?

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{4}{7}\right]\cup\left[\frac{4}{9};+\infty\right)$.

7 Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x+a}=x$ имеет решение, принадлежащее промежутку [0; 1].

Ответ: $a\in\left[-\frac{1}{4};0\right]$.

8 Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{6x-x^2}=x+a$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a\in\left[-6;-3+\sqrt{18}\right]$.

9 Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a$.

Ответ: при $a<0$ решений нет; при a=0уравнение имеет 3 решения;
при $0<a<1$ уравнение имеет 4 решения;
при a=1 уравнение имеет 2 решения;
при $a>1$ решений нет.

10 Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\ge b$ для значения параметра $b\le -1$.

Ответ: $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

11 Решить неравенство $\sqrt{a^2-x^2}\ge a+1$ для значения параметра $a>-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x\in\varnothing$.

12 При каких значениях a неравенство $\sqrt{x^2+8x+20}\le\frac{2a^2-4a-3}{a^2-2a-8}$, не имеет решения?

Ответ: (-2; 4).

13 Определить, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{2x-4a}\ge x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $3|a|$.

Ответ: $\frac{2}{9};-6$.

14 Для каждого значения параметра a решить неравенство $\sqrt{a^2-x^2}\ge a+1$.

Ответ: при $a < -1,\ a \le x \le -a$;

при $-1 \le a \le -\frac{1}{2},\ -\sqrt{-(2a+1)} \le x \le \sqrt{-(2a+1)}$;

при $a > -\frac{1}{2}$ решений нет.

15 При каждом значении параметра a найти все решения неравенства $x + 2a - 2\sqrt{3ax + 4a^2} > 0$.

Ответ: при $a<0$ нет решений;

при $a=0$, $x>0$;

при $a>0$, $x \in \left[-\frac{4a}{3}; -a\right) \cup (0; +\infty)$.

16 Найти все значения b, при каждом из которых среди решений неравенства $\sqrt{(b - x^2)(x^2 + b)} > x + b$ есть ровно два различных целочисленных решения.

Ответ: $b \in \{1\} \cup (5; 15]$.

17 Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3a + \sqrt{4a + 2x - x^2}} = 2x - x^2$, имеет решение.

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{12}; 0\right]$.

18 Решите уравнение $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}}$.

Ответ: $x = a\sqrt{3}; 2$

19 Решите уравнение $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a$.

Ответ: при $a \ge \frac{2}{3}\sqrt{6}$ уравнение имеет единственный корень $x = 2 + a^2 - \frac{a}{2}\sqrt{3a^2 + 16}$.

20 Решите уравнение $\sqrt{a - \sqrt{x+a}} = x$.

Ответ: при $a \ge 1$ уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$;

при $a = 0\ \ x = 0$;

при остальных значениях a корней нет.

6 Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы

Задача 43 Найти все значения действительного параметра *a*, для которых неравенство $4^x - a\cdot 2^x - a + 3 \le 0$ имеет хотя бы одно решение.

Решение: Пусть $y = 2^x$, $y > 0$; тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти все значения *a*, для которых неравенство $y^2 - ay - a + 3 \le 0$ имеет хотя бы одно положительное решение.» при условии $D \ge 0$ решение данного неравенства есть промежуток $y \in \left[\frac{a-\sqrt{a^2+4a-12}}{2}, \frac{a+\sqrt{a^2+4a-12}}{2}\right]$. Для существования хотя бы одного положительного числа в этом промежутке необходимо и достаточно выполнения условия $\frac{a+\sqrt{a^2+4a-12}}{2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+4a-12} > -a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -a < 0, \\ a^2+4a-12 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -a \ge 0, \\ a^2+4a-12 \ge a^2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ a \in (-\infty, -6] \cup [2, +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} a \le 0, \\ a \ge 3, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in [2, +\infty).$$

Ответ: $a \in [2, +\infty)$.

Задача 44 При каждом *a* решить уравнение $4^x - 2a(a+1)\cdot 2^{x-1} + a^3 = 0$.

Решение: Разложим левую часть данного уравнения на множители: $\left(2^x - a\right)\left(2^x - a^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = a, \\ 2^x = a^2. \end{array}\right.$

Рассмотрим три случая:

1) Если $a < 0$, то первое уравнение совокупности не имеет решений, а второе имеет решением $x = \log_2 a^2$.
2) Если $a = 0$, оба уравнения совокупности решений не имеют.
3) Если $a > 0$, то первое уравнение совокупности имеет решением $x = \log_2 a$, а второе - $x = \log_2 a^2$.

Ответ: Если $a < 0$, то $x = \log_2 a^2$; если $a = 0$, то нет решений; если $a > 0$, то $x_1 = \log_2 a$, $x_2 = \log_2 a^2$.

Задача 45 Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых система $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение: Заметим, что если (x_0, y_0) - решение данной системы, то и $(-x_0, y_0)$ - также решение системы. Поэтому необходимым условием единственности решения будет условие $x = 0$. При этом система примет следующий вид: $\begin{cases} 7 = 3y + 3a, \\ y^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{3}, \\ y = 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} \text{a} = \dfrac{10}{3}, \\ y = -1. \end{cases}$

Проверим, сколько решений имеет система при каждом из найденных *a*. Пусть $a = \dfrac{4}{3}$. Исходная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} - 3y = 5\left(x^2 - |x|\right), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Так как выполнены неравенства $3\cdot 2^{|x|} \ge 3\cdot 2^0 = 3$ и $y \le 1$ (следует из второго условия системы), левая часть этого уравнения всегда больше либо равна 0. С другой стороны, из условия $x \le 1$, которое также следует из второго уравнения системы, вытекает, что $x^2 - |x| = |x|\left(|x| - 1\right) \le 0$.

Значит, равенство возможно только в том случае, когда $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}-3y=0, \\ 5\left(x^2-|x|\right)=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} \text{y}=2, \\ \text{x}=\pm 1. \end{cases}$

Легко видеть, что только пара $(0,1)$ будет решением второго уравнения системы. Значит, $a=\dfrac{4}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a=\dfrac{10}{3}$, то исходная система перепишется следующим образом: $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2+6, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Соответствуют по крайней мере три пары чисел (x,y), являющиеся решением этой системы – это $(0,-1)$, $(1,0)$ и $(-1,0)$. Значит, $a=\dfrac{10}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a=\dfrac{4}{3}$.

Задача 46 Найти все значения *a*, при которых уравнение $4^x+(a^2+5)\cdot 2^x-a^2+9=0$ не имеет решений.

Решение: Пусть $y=2^x$, $y>0$. Тогда условие задачи можно переформулировать следующим образом: «При каких значениях *a* уравнение $y^2+\left(a^2+5\right)y+9-a^2=0$ не имеет положительных решений?»

Рассмотрим два случая.

1) Если $9-a^2\ge 0$, т.е. $a\in[-3,3]$, то согласно теореме Виета (при условии, что корни существуют) имеем $\begin{cases} y_1+y_2=-\left(a^2+5\right)<0, \\ y_1y_2=9-a^2\ge 0, \end{cases}$ т.е. оба корня неположительны. Поэтому все *a* из промежутка $a\in[-3,3]$ удовлетворяют условию задачи.

2) Если $9-a^2<0$, т.е. $a\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$, то произведение корней данного квадратного уравнения отрицательно. Таким образом, корни этого уравнения имеют разные знаки, т.е. имеется положительный корен. Заметим, что существование корней уравнения также следует из условия $9-a^2<0$: в этом случае выполнено неравенство $f(0)<0$, но поскольку ветви

параболы $f(y)=y^2+\left(a^2+5\right)y+9-a^2$ направлены вверх, она непременно пересечет ось *Ox*.

Ответ: $a\in[-3,3]$.

Задача 47 Найти все значения параметра *a*, при которых неравенство $9^x<20\cdot 3^x+a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

Решение: Пусть $y=3^x$. Так как по условию задачи *x* не должен принимать целочисленных значений, то *y* не должен принимать значений 1, 3, 9 …, а также $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\dots$ Неравенство при этом запишется следующим образом: $y^2-20y-a<0$.

Поскольку график функции $f(y)=y^2-20y-a$ представляет собой параболу, симметричную относительно прямой $y=10$, то решением неравенства, если оно существует, будет интервал, симметричный относительно точки $y_0=10$. Ясно, что наибольший из таких интервалов, не содержащий точек указанного вида, есть интервал (9, 11). Итак, условию задачи удовлетворяют все такие *a*, для которых $f(9)\ge 0$ (рисунок X).

Имеем: $f(9)=81-180-a\ge 0 \Leftrightarrow a\le -99$.

Ответ: $a\in(-\infty,-99]$.

Задача 48 При каких действительных *p* уравнение $4^x+2^{x+2}+7=p-4^{-x}-2\cdot 2^{1-x}$ имеет решение?

Решение: Преобразуем данное в условии задачи уравнение следующим образом:

$$4^x+4^{-x}+4\left(2^x+2^{-x}\right)+7-p=0 \Leftrightarrow \left(2^x+2^{-x}\right)^2+4\left(2^x+2^{-x}\right)+5-p=0.$$

Пусть $y=2^x+2^{-x},\ y\ge 2$. Тогда условие задачи можно переформулировать следующим образом: «При каких *p* уравнение $y^2+4y+5-p=0$ имеет хотя бы одно решение, большее либо равное 2?» Последнее условие эквивалентно требованию, чтобы больший корень полученного уравнения был больше либо равен 2: $-2+\sqrt{p-1}\ge 2 \Leftrightarrow \sqrt{p-1}\ge 4 \Leftrightarrow p-1\ge 16 \Leftrightarrow p\ge 17$.

Ответ: $p\in[17,+\infty)$.

Задача 49 Найти все *x*, для которых $0{,}5<x<2{,}5$ и которые удовлетворяют неравенству $\log_{3x-x^2}(3a-ax)<1$ при всех *a* из промежутка $0<a<2$.

Решение: Так как при всех указанных *x* основание логарифма больше единицы, данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 3a - ax > 0, \\ 3a - ax < 3x - x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(3-x) > 0, \\ (a-x)(3-x) < 0, \end{cases} \overset{\text{т.к. } 3-x>0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a > 0, \\ x > a. \end{cases}$$

Ясно, что все те *x*, для которых $x \ge 2$, будут удовлетворять полученной системе при любом $0 < a < 2$.

Ответ: $x \in \left[2, \dfrac{5}{2}\right)$.

Задача 50 Определить, для каких *a* неравенство $\log_{\frac{a}{a+1}}\left(x^2+2\right) > 1$ выполняется при любом действительном *x*.

Решение: Пусть $b = \dfrac{a}{a+1}$. Тогда данное неравенство примет следующий вид: $\log_b\left(x^2+2\right) > 1$. Это неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b > 1, \\ x^2 + 2 > b, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < b < 1, \\ x^2 + 2 < b, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b > 1, \\ x^2 > b - 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < b < 1, \\ x^2 < b - 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ясно, что неравенство $x^2 < b - 2$ ни для каких b не может выполняться при всех значениях *x*, а неравенство $x^2 > b - 2$ выполняется при всех значениях *x*, если $b - 2 < 0$, т.е. $b < 2$. С учетом первого неравенства первой системы имеем: $1 < b < 2 \Leftrightarrow 1 < \dfrac{a}{a+1} < 2 \Leftrightarrow 1 < 1 - \dfrac{1}{a+1} < 2 \Leftrightarrow -1 < \dfrac{1}{a+1} < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a + 1 < -1 \Leftrightarrow a < -2$.

Ответ: $a \in (-\infty, -2)$.

Задача 51 Найти все значения *x*, удовлетворяющие уравнению $2\log_{2+a^2}\left(4 - \sqrt{7+2x}\right) = \log_{2+a^2x^2}(4 - 3x)$ при любом действительном *a*.

Решение: Если число x_0 удовлетворяет данному уравнению при всех значениях *a*, то оно удовлетворяет ему и при $a = 0$. При этом уравнение примет следующий вид: $2\log_2\left(4 - \sqrt{7+2x}\right) = \log_2(4 - 3x)$.

Пусть $y = \sqrt{7+2x},\ y \ge 0$. Тогда $x = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{7}{2}$. Имеем:

$$2\log_2(4-y)=\log_2\left(4-3\left(\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}\right)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}4-y>0,\\(4-y)^2=4-3\left(\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}\right),\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y<4,\\16-8y+y^2=-\frac{3y^2}{2}+\frac{29}{2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y<4,\\5y^2-16y+3=0,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=3,\\y=\frac{1}{5}.\end{array}\right.$$

Если $y=3$, то $x=1$, и уравнение, данное в условии задачи, запишется следующим образом: $2\log_{2+a^2}1=\log_{2+a^2}1$.

Ясно, что полученное равенство верно при любом *a*, и поэтому $x=1$ удовлетворяет условию задачи. Если $y=\frac{1}{5}$, то $x=-\frac{87}{25}$. В этом случае имеем:

$$\log_{2+a^2}\frac{361}{25}=\log_{2+a^2\cdot\left(-\frac{87}{25}\right)^2}\frac{361}{25}.$$

Это равенство не является верным, например, при $a=1$. Поэтому $x=-\frac{87}{25}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $x=1$.

Задача 52 Для всех вещественных значений *a* решить уравнение $(a+2)^2\log_3(2x-x^2)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0$.

Решение: Перепишем данное уравнение в виде

$$(a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

Справедливы неравенства: $(a+2)^2\geq 0$; $\log_3\left(1-(x-1)^2\right)\leq 0$, так как $1-(x-1)^2\leq 1$; $(3a-1)^2\geq 0$; $\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\leq 0$, так как $1-\frac{x^2}{2}\leq 1$. Это значит, что $(a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)\leq 0$ и $(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\leq 0$. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1-(x-1)^2>0, \\ 1-\dfrac{x^2}{2}>0, \\ (a+2)^2\log_3(1-(x-1)^2)=0, \\ (3a-1)^2\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+2=0, \\ \log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=0, \\ 0<x<\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} 3a-1=0, \\ \log_3(1-(x-1)^2)=0, \\ 0<x<\sqrt{2}, \end{cases} \end{array}\right.$$

так как легко проверить, что числа $a+2$ и $3a-1$, а также выражения $\log_3(1-(x-1)^2)$ и $\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$ одновременно в нуль не обращаются. Таким образом, если $a=-2$, то $x=0$, что не входит в область определения неравенства. Если $a=1/3$, то $x=1$- является решением задачи.

Ответ: Если $a=1/3$, то $x=1$; если $a\neq 1/3$, то нет решений.

Задача 53 Найти все значения *a*, при каждом из которых любое решение системы $\begin{cases} y-2a\log_2 x=1, \\ y+a^2\log_2 x=1 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $y<1+x$.

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом: вычтем из второго уравнения первое, при этом первое уравнение оставив без изменения. Имеем: $\begin{cases} a^2\log_2 x+2a\log_2 x=0, \\ y-2a\log_2 x=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2)\log_2 x=0, \\ y-2a\log_2 x=1. \end{cases}$

Рассмотрим три случая:

1) Если $a=0$, то решением системы служит пара чисел $(x,1)$, где $x>0$ - любое число. Ясно, что для каждой такой пары выполняется условие $y<1+x$, т.е. $a=0$ является решением задачи.
2) Если $a=-2$, то второе уравнение системы принимает вид $y+4\log_2 x=1$. Пара чисел $x=\dfrac{1}{2}$, $y=5$, будучи решением этого уравнения, не удовлетворяет условию $y<1+x$, поэтому $a=-2$ не является решением задачи.
3) Если $a\neq 0$ и $a\neq -2$, то система имеет единственное решение $x=1$ и $y=1$, которое удовлетворяет условию $y<1+x$, поэтому все такие *a* являются решением задачи.

Объединив все разнообразные случаи, получаем, что решением задачи является любое $a\neq -2$.

Ответ: $a \neq -2$.

Задача 54 При всех *a* решить уравнение $\log_{(x+1)} ax = 2$.

Решение: Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1>0; \\ x+1 \neq 1; \\ ax=(x+1)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1; \\ x \neq 0; \\ x^2+(2-a)x+1=0. \end{cases} \qquad (16)$$

Сразу отметим, что *x*=0 не может являться решением уравнения (16) при каком-либо *a*.

Для того, чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (16) имело хотя бы один корень, больший чем –1.

Изобразим графически случаи расположения параболы, удовлетворяющие этому условию.

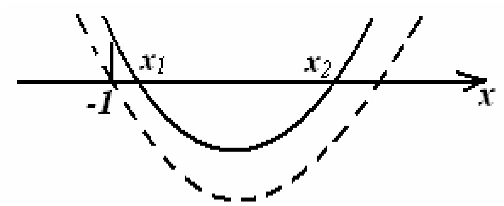


Рисунок 20

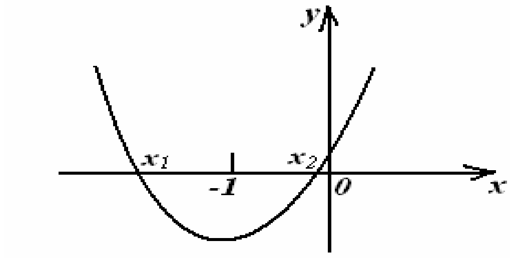
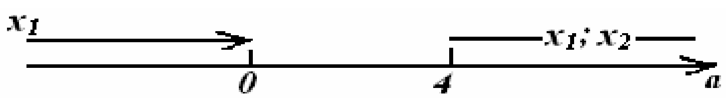


Рисунок 21

Выпишем соответствующие рисунку 20 и рисунку 21 аналитические условия:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D \geq 0; \\ x_1 \geq -1; \text{ соответсвует рисунку14} \\ x_2 > -1; \end{cases} \\ x_1 < -1 < x_2; \text{ соответствует рисунку15} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-2)^2 - 4 \geq 0; \\ 2 \cdot (-1) + 2 - a < 0; \\ 1^2 - (2-a) + 1 \geq 0; \end{cases} \\ 1-(2-a)+1<0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq 0; a \geq 4; \\ a > 0; \\ a \geq 0; \end{cases} \\ a<0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq 4; \\ a < 0. \end{array}\right.$$



Последняя схема позволяет выписать ответ.

Ответ: При $a<0$ $x=\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}$; при $0 \leq a < 4$ решений нет; при *a*=4 *x*=1; при $a>4$ $x_{1,2}=\dfrac{a-2 \pm \sqrt{a^2-4a}}{2}$.

Задача 55 Найдите значения *x*, при которых равенство $\log_{2+a^2}\left(4-\sqrt{7+2x}\right) = \log_{2+a^2x^2}(4-3x)$ выполняется при любом *a*.

Решение: Пусть *a* = 0. Тогда имеем $\log_2\left(4-\sqrt{7+2x}\right)^2 = \log_2(4-3x)$.

$\left(4-\sqrt{7+2x}\right)^2=4-3x,$

$16-8\sqrt{7+2x}+7+2x=4-3x,$

$19+5x=8\sqrt{7+2x}.$

Решение этого уравнения – число 1. При $x = 1$ данное уравнение принимает вид, $\log_{2+a^2}1=\log_{2+a^2}1$, что выполняется при любом a.

Задача 56 Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $\log_a\left(x^2+4\right)>1$ выполняется для всех x.

Решение: Данное неравенство равносильно совокупности двух систем
$\left[\begin{array}{l}1)\begin{cases}0<a<1;\\ x^2+4<a;\end{cases}\\ 2)\begin{cases}a>1;\\ x^2+4>a;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1)\varnothing;\\ 2)\begin{cases}a>1;\\ x^2>a-4;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$ система 1) не может выполняться ни при одном x, так как $x^2+4\geq 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varnothing;\\ \begin{cases}a>1;\\ a<4;\\ x\in R.\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $1<a<4$.

Задача 57 Найдите все значения a, при которых имеет решение неравенство $2^{-\left|x-a^2\right|}\log_2\left(4x-x^2-2\right)\geq 1$

Решение: Легко видеть, что $0\leq 2^{-\left|x-a^2\right|}\leq 1$ для любых значений a и $\log_2\left(4x-x^2-2\right)=\log_2\left(2-(x-2)^2\right)\leq 1$ при всех допустимых значениях x.

Таким образом, должны выполняться неравенства: $2^{-\left|x-a^2\right|}\log_2\left(4x-x^2-2\right)\leq 1$ и $2^{-\left|x-a^2\right|}\log_2\left(4x-x^2-2\right)\geq 1$.

Следовательно, $2^{-\left|x-a^2\right|}\log_2\left(4x-x^2-2\right)=1$, что возможно лишь в случае, когда $2^{-\left|x-a^2\right|}=1$ и $\log_2\left(4x-x^2-2\right)=1$, откуда получаем $x=2$ для $a=\pm\sqrt{2}$.

Задача 58 При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

Решение: Оба выражения определены при всех x. Их сумма равна $\log_a(\cos^2 x+1)+\log_a(\cos^2 x+5)=\log_a((\cos^2 x+1)(\cos^2 x+5))$.

Уравнение $log_a((cos^2 x+1)(cos^2 x+5))=1$ при $a>0, a\neq 1$ равносильно уравнению $(cos^2 x+1)(cos^2 x+5)=a$. Обозначая $\cos^2 x=t,\ t\in[0;1]$, получаем $(t+1)(t+5)=a \Leftrightarrow t^2+6t+(5-a)=0$.

Значит, надо найти все те a, при которых значение квадратичной функции $y=t^2+6t+(5-a)$ хотя бы в одной точке, принадлежащей отрезку [0; 1], обращается в нуль. Эта парабола симметрична относительно вертикали t= - 3. Поэтому если найдется значение аргумента из [0; 1], при котором функция принимает нулевое значение, то оно единственно.

Если при t=0 значение функции равно нулю, то y=0+0+(5-a) = 0 $\Leftrightarrow$ a = 5. При таком a есть второе значение t = - 6 (симметричное первому относительно t =-3 прямой), при котором значение функции равно нулю. При возрастании a вершина параболы опускается вниз и меньшее значение аргумента становится меньше –6, а большее – больше 0. Большее значение равно единице, если 1+6+(5 - a)=0, т.е. если a=12. При дальнейшем увеличении a большее значение аргумента будет лежать вне отрезка [0; 1].

Ответ: [5; 12].

Задача 59 При каких значениях a сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ будет больше единицы при всех x?

Решение: 1) Выделим целые части в выражениях, стоящих под знаком логарифма:

$$\frac{3+2x^2}{1+x^2}=\frac{2(1+x^2)+1}{1+x^2}=2+\frac{1}{1+x^2};\ \frac{5+4x^2}{1+x^2}=\frac{4(1+x^2)+1}{1+x^2}=4+\frac{1}{1+x^2}.$$

2) Оба логарифмических выражения определены при всех x. Их сумма равна $\log_a\left(\left(2+\dfrac{1}{1+x^2}\right)\left(4+\dfrac{1}{1+x^2}\right)\right)=\log_a(t^2+6t+8)$, где $t=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Функция $t=\dfrac{1}{1+x^2}$ четная, убывает, стремясь к нулю, при неограниченном возрастании $|x|$, а ее наибольшее значение равно 1.Значит, $t\in(0;1]$

3) При a>1 логарифмическая функция с основанием a возрастает. Значит, получаем $y=t^2+6t+(8-a)$ симметрична относительно прямой $t=-3$ и возрастает на (0; 1]. Значит, для того чтобы функция принимала положительные значения на этом промежутке, нужно, чтобы было неотрицательно значение в левом конце промежутка $t=0$, т.е. $y(0)\geq 0;\ \ y(0)=0+0+8-a\geq 0;\ \ \ 8\geq a\geq 1$.

4) При $0<a<1$ получаем неравенство $t^2+6t+(8-a)<0$ при всех $t\in(0;1]$. Для того чтобы функция принимала отрицательные значения на этом

промежутке данной квадратичной функции, нужна ее отрицательность в правом конце $t=1$, т.е. $y(1)<0;\ y(1)=1+6+8-a<0;\ a>15$, что противоречит неравенству $a<1$.

Ответ: (1; 8].

Задача 60 Найдите все значения параметра *a*, при которых в области определения функции $y=\ln(a^{ax-4}-a^x)$ лежат числа 20, 50, 70, но не лежат числа 2, 5, 7.

Решение: Область определения функции $y=\ln(a^{ax-4}-a^x)$ есть решения неравенства $a^{ax-4}-a^x>0$, т.е. $D(y)\Leftrightarrow a^{ax-4}>a^x$.

1) Если $a\in(-\infty;1]$, область определения пуста.

2) Если $0<a<1$. Тогда

$a^{ax-4}>a^x \Leftrightarrow ax-4<x \Leftrightarrow ax-x<4 \Leftrightarrow x(a-1)<4 \Leftrightarrow\ \Leftrightarrow x(1-a)>-4$.

Так как $0<a<1$, то *1-a*>0, следовательно, $x>-\dfrac{4}{1-a}$. Значит, $D(y)=\left(-\dfrac{4}{1-a};+\infty\right)$. Но в этом промежутке лежат все положительные числа и, в частности, числа 2, 5, 7. Поэтому такие значения *a* не удовлетворяют условию.

3) Если $a>1$. Тогда $a^{ax-4}>a^x \Leftrightarrow\ ax-4>x \Leftrightarrow (a-1)x>4$.

Так как $a>1$, то $a-1>0$, следовательно, $x>\dfrac{4}{a-1}$. Значит, $D(y)=\left(\dfrac{4}{a-1};+\infty\right)$.

В этом промежутке лежат числа 20, 50, 70, только если его левый конец меньше 20. А для того, чтобы в нем не было чисел 2,5,7, нужно, чтобы левый конец был не меньше 7. Получаем двойное неравенство на параметр $a>1$.

$$7\le\frac{4}{a-1}<20 \Leftrightarrow 7(a-1)\le 4<20(a-1) \Leftrightarrow 0{,}2<a-1\le\frac{4}{7} \Leftrightarrow 1{,}2<a\le\frac{11}{7}.$$

Ответ: $\left(1{,}2;\ \dfrac{11}{7}\right]$.

Задача 61 При каких значениях *a* значение выражения $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше значения выражения $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всех допустимых значениях *x*?

Решение: Перейдем к одинаковому основанию степени в обоих выражениях:

$(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}=(5^{\log_5(1-|x|)})^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$;

$0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)} = 5^{0{,}5\cdot 2\log_5(1-|x|)+a^2-4} = 5^{\log_5(1-|x|)+a^2-4}$.

Введем новую переменную $t=\log_5(1-|x|)$. Ее наибольшее значение равно нулю, а при стремлении x к 1 эта переменная стремится к $-\infty$. В силу непрерывности функции получаем, что $E(t)=(-\infty;\, 0]$.

Таким образом, относительно t исходная задача заключается в решении неравенства $t(t-|a-1|)>t+a^2-4$, $t\le 0$ или $t^2-(|a-1|+1)t+4-a^2>0$, $t\le 0$.

Рассмотрим параболу $y=t^2-(|a-1|+1)t+4-a^2>0$, абсцисса ее вершины $t_{верш}=\dfrac{|a-1|+1}{2}$ - положительные, ветви направлены вверх. Значит, это неравенство $t^2-(|a-1|+1)t+4-a^2>0$ верно при всех неположительных t в том и только в том случае, когда свободный коэффициент положителен. Следовательно, $a^2<4$.

Ответ: (-2; 2).

Задача 62 Решите уравнение

$$\left(1+(a+2)^2\right)\log_3\left(2x-x^2\right)+\left(1+(3f-1)^2\right)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\log_3\left(2x-x^2\right)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Решение: После несложных преобразований имеем $(a+2)^2\log_3\left(2x+x^2\right)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$.

Если $a=-2$, то $\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$ и x = 0, но при этом значении x не определено первое слагаемое. При $a=-2$ нет решения.

Если $a=\dfrac{1}{3}$, то $\log_3\left(2x-x^2\right)=0,\ x^2-2x+1=0$, откуда x = 1.

При $a=\dfrac{1}{3}$ $a=-\dfrac{1}{3}$ $x=1$.

Пусть $a\ne -2$ и $a\ne\dfrac{1}{3}$. Область определения левой части полученного уравнения $\left(0;\,\sqrt{2}\right)$. На этом отрезке $2x-x^2\le 1$ и $1-\dfrac{x^2}{2}\le 1$, значит $\log_3(2x-x^2)\le 0$ и $\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\le 0$. Тогда из уравнения следует, что оба логарифма равны нулю. Первое слагаемое равно нулю при x = 1, второе слагаемое при этом значение x не равно 0. Нет решения.

Задача 63 Для каждого значения *a* решить уравнение $(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}$.

Решение: Используем свойство логарифма $\log_9 4 = \log_3 2 = \dfrac{1}{\log_2 3}$, получаем

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = \frac{1}{(\log_2 3)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}} \Leftrightarrow (\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}+\sqrt{x^2+a^2-6a-5}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+a+2} + \sqrt{x^2+a^2-6a-5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+a+2=0; \\ x^2+a^2-6a-5=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a-2; \\ (-a-2)^2+a^2-6a-5=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-a-2; \\ 2a^2-2a-1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a-2; \\ \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; \\ a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: При $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, $x=\dfrac{-5+\sqrt{3}}{2}$; при $a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x=\dfrac{-5-\sqrt{3}}{2}$; при остальных *a* решений нет.

Задача 64 Для каждого значения *a* решить неравенство $3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}$.

Решение: Запишем неравенство в виде:

$$3^{\sqrt{x+1}} > 3^{(a-1)\log_3 2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > (a-1)\log_3 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} a-1 \ge 0; \\ (x+1) > (a-1)^2 \log_3^2 2; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} a<1; \\ x \ge -1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: При $a<1$, $x \ge -1$; при $a \ge 1$, $x > -1 + (a-1)^2 \log_3^2 2$.

Задача 65 Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнению $(2x-a-2)\log_{x+a+1}\left(\dfrac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12}\right)=0$ удовлетворяют ровно два различных значений переменной *x*.

Решение: Произведение двух множителей равно нулю в том случае, если один из них равен нулю, а второй при этом не теряет смысла.

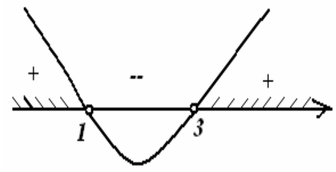
С учетом сказанного, имеем:

$$(2x-a-2)\log_{x+a+1}\left(\frac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+a+1>0;\\ x+a+1\neq 1;\\ \dfrac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12}>0;\\ 2x-a-2=0;\end{cases}\\ \log_{x+a+1}\left(\dfrac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12}\right)=0.\end{array}\right.$$

Решим каждое из составляющих совокупности отдельно.

1) Так как $x^2-6x+12=(x-3)^2+3$, то знаменатель дроби $\dfrac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12}$ всегда положителен, следовательно

$$\begin{cases}x=\dfrac{a+2}{2};\\ \dfrac{a+2}{2}+a+1>0;\\ \dfrac{a+2}{2}+a\neq 0;\\ 2a\cdot\dfrac{a+2}{2}-6a+3>0;\end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}a^2-4a+3>0;\\ a^2-4a+3=0;\\ D=16-12=4;\\ a_{1,2}=\dfrac{4\pm 2}{2}=\left|\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.\end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{a+2}{2};\\ \left[\begin{array}{l}-\dfrac{4}{3}<a<-\dfrac{2}{3};\\ -\dfrac{2}{3}<a<1;\\ a>3.\end{array}\right.\end{cases}$$



$a\in(-\infty;\,1)\cup(3;\,+\infty)$

2) Решаем второе условие совокупности

$$\log_{x+a+1}\left(\frac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x+a+1>0;\\ x+a+1\neq 1;\\ \dfrac{2ax-6a+3}{x^2-6x+12}=1;\end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x^2-6x+12-2ax+6a-3=0;\\ x^2-6x-2ax+6a+9=0;\\ (x^2-6x+9)+(6a-2ax)=0;\\ (x-3)^2-2a(x-3)=0\\ (x-3)(x-3-2a)=0;\\ (x-3)(x-(2a+3))=0.\end{array}\right| \Leftrightarrow$$

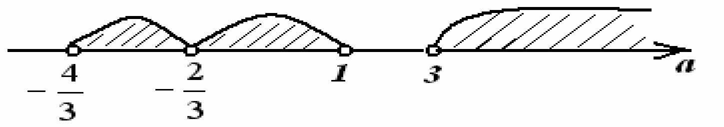
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+a+1>0;\\ x+a\neq 0;\\ (x-3)(x-(2a+3))=0.\end{cases}$$

Итак, получаем, что исходное равносильно совокупности трех систем

1) $\begin{cases} x = \dfrac{a+2}{2}; \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < a < -\dfrac{2}{3}; \\ -\dfrac{2}{3} < a < 1; \\ a > 3. \end{array} \right. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3; \\ a > -4; \\ a \neq -3. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2a+3; \\ a > -\dfrac{4}{3}; \\ a \neq -1. \end{cases}$

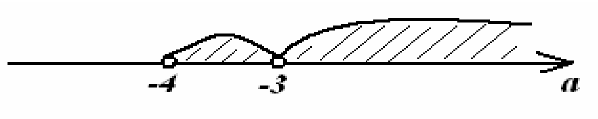
Изобразим множество значений параметра, при каждом из которых существует отдельное значение переменной, удовлетворяющее исходному уравнению.

1) $x = \dfrac{a+2}{2}$



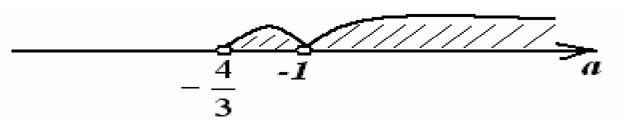
$x = 3.$

2)



$x = 2a + 3.$

3)



Теперь найдем те значения параметра, при которых отдельные значения решений совпадают

$3 = 2a + 3 \Rightarrow a = 0;$

$3 = \dfrac{a+2}{2} \Rightarrow a = 4;$

$2a + 3 = \dfrac{a+2}{2} \Rightarrow a = -\dfrac{4}{3}$

(на $a = -\dfrac{4}{3}$ исключено из системы 3)).

Таким образом, при *a=0* и *a=4* решения соответствующих систем совпадают, и исходящему уравнению удовлетворяют два различных значения переменной. Следовательно, уравнению удовлетворяют два различных значения переменной *x*, при всех $a \in \left\{-1; -\dfrac{2}{3}; 0; 4\right\} \cup [1; 3]$.

Ответ: $a \in \left\{-1; -\frac{2}{3}; 0; 4\right\} \cup [1; 3]$.

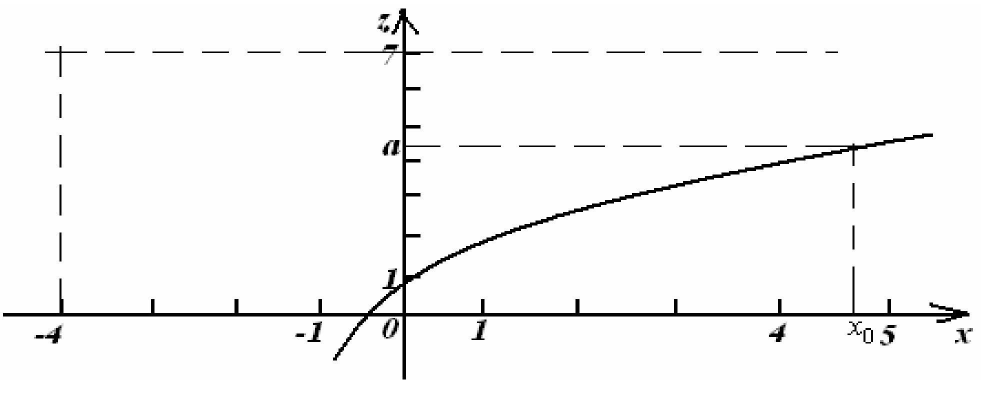
Задача 66 Из области определения функции $y = \log_7\left(a^a - a^{\frac{7x+4}{x+4}}\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения a, при которых такая сумма будет больше 7, но меньше 11.

Решение: Графиком дробно-линейной функции $z = \frac{7x+4}{x+4}$ или $z = 7 - \frac{24}{x+4}$ является гипербола. Поскольку по условию: «из области определения функции $y = \log_7\left(a^a - a^{\frac{7x+4}{x+4}}\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их», то значит x>0. При неограниченном возрастании x дробь $\frac{24}{x+4}$ монотонно убывает и приближается к нулю, а значение функции z возрастают и приближаются к 7. Кроме того, $z(0)=1$.

Далее, по определению логарифма область определения $D(y)$ состоит из решений неравенства $a^a > a^{\frac{7x+4}{x+4}}$. При $a=1$ получаем неравенство, у которого решений нет. Поэтому функция y нигде не определена.

3) При $0<a<1$ показательная функция с основанием a убывает и неравенство $a^a > a^{\frac{7x+4}{x+4}}$ равносильно неравенству $a < \frac{7x+4}{x+4}$. Так как $x>0$, то $z(x)>z(0)=1$. Значит, каждое положительное x является решением неравенства $a < \frac{7x+4}{x+4}$. Поэтому для таких $0<a<1$ указанную в условии сумму нельзя найти.

4) При $a>1$ показательная функция с основанием a возрастает и неравенство $a^a > a^{\frac{7x+4}{x+4}}$ равносильно неравенству $a > \frac{7x+4}{x+4}$. Если $a \geq 7$, то любое положительное число является его решением и указанную в условии сумму нельзя найти. Если $1<a<7$, то множество положительных решений неравенства $a > \frac{7x+4}{x+4}$ - это интервал $(0; x_0)$, где $a=z(x_0)$ (см. рисунок).

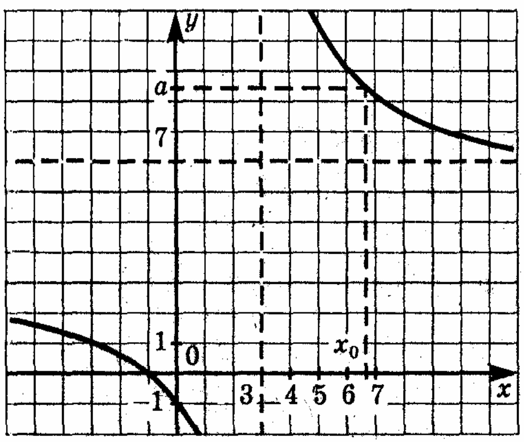


5) Целые числа расположены в этом интервале начиная с 1. Посчитаем суммы последовательно идущих натуральных чисел начиная с 1: 1; 1+2=3; 1+2+3=6; 1+2+3+4=10; 1+2+3+4+5=15; … . Поэтому указанная сумма будет больше 7 и меньше 11, только если число 4 лежит в интервале $(0;x_0)$, а число 5 не лежит в этом интервале. Значит, $4 < x_0 \le 5$. Так как $z = \dfrac{7x+4}{x+4}$ возрастает на [4; 5], то $z(4) < z(x_0) \le z(5)$. Так как $a = z(x_0)$, то $\dfrac{7\cdot 4+4}{4+4} < a \le \dfrac{7\cdot 5+4}{5+4}$, т.е. $a \in \left(4; \dfrac{39}{9}\right]$.

Ответ: $\left(4; \dfrac{13}{3}\right]$.

Задача 67 В области определения функции $y = \left(a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)^{-0,5}$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения, при которых такая сумма будет больше 5, но меньше 10.

Решение: 1) Графиком дробно-линейной функции $z = \dfrac{5x+2}{x+2}$ или $z = 5 - \dfrac{12}{x+2}$ является гипербола. По условию x>0. При неограниченном возрастании x дробь $\dfrac{12}{x+2}$ монотонно убывает и приближается к нулю, а значение функции z возрастают и приближаются к 5. Кроме того, $z(0)$=1.

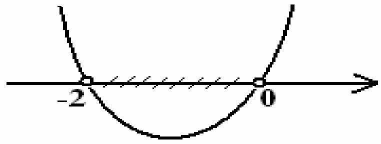


2) По определению степени, область определения *D(y)* состоит из решений неравенства $a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}} > 0$, т.е. $a^a > a^{\frac{5x+2}{x+2}}$. При a=1 получаем неравенство $\frac{5x+2}{x+2} < 1$ или

$\frac{5x+2}{x+2} - 1 < 0$;

$\frac{5x+2-x-2}{x+2} < 0$;

$\frac{4x}{x+2} < 0$,



но т.к. по условию задания x<0, следовательно при a=1 неравенство $a^a > a^{\frac{5x+2}{x+2}}$ решений не имеет. Поэтому функция y нигде не определена.

3) При 0<a<1 показательная функция с основанием a убывает и неравенство $a^a > a^{\frac{5x+2}{x+2}}$ равносильно неравенству $a < \frac{5x+2}{x+2}$. Так как x>0, то $z(x)>z(0)=1$. Значит, каждое положительное x является решением неравенства $a < \frac{5x+2}{x+2}$. Поэтому для таких 0<a<1 указанную в условии сумму нельзя найти.

4) При a>1 показательная функция с основанием a возрастает и неравенство $a^a > a^{\frac{5x+2}{x+2}}$ равносильно неравенству $a > \frac{5x+2}{x+2}$, т.е. $a > 5 - \frac{12}{x+2}$. Если $a \geq 5$, то любое положительное число является его решением и указанную в условии сумму нельзя найти. Если 1<a<5, то множество его положительных решений – это интервал $(0; x_0)$, где $a=z(x_0)$ (см. рис.).

5) Целые числа расположены в этом интервале начиная с 1. Вычислим суммы последовательно идущих натуральных чисел начиная с 1: 1; 1+2=3; 1+2+3=6; 1+2+3+4=10; … . Поэтому указанная сумма будет больше 5 и меньше 10, только если число 3 лежит в интервале $(0; x_0)$, а число 4 не лежит в этом интервале. Значит, $3 < x_0 \leq 4$. Так как $z = \frac{5x+2}{x+2}$ возрастает на [3; 4], то $z(3) < z(x_0) \leq z(4)$. Поэтому $\frac{5 \cdot 3+2}{3+2} < a \leq \frac{5 \cdot 4+2}{4+2}$, т.е. $\left(\frac{17}{5}; \frac{22}{6}\right]$.

Ответ: $\left(3{,}4; \frac{11}{3}\right]$.

Задача 68 Найдите все положительные, не равные 1 значения a, при которых область определения функции

$$y=\left(a^x\cdot\sqrt{a}+a^{3+0,5\log_a x}-x^{0,5+x\log_x a}-a^{3,5}\right)^{0,5} \qquad (17)$$

не содержит двузначных натуральных чисел.

Решение: Вначале преобразуем основание степени предложенной функции, при условии $x>0,\ a>0,\ a\neq 1$.

$$a^x\cdot\sqrt{a}+a^{3+0,5\log_a x}-x^{0,5+x\log_x a}-a^{3,5}=a^x\cdot\sqrt{a}+a^3\cdot\left(a^{\log_a x}\right)^{0,5}-x^{0,5}\cdot\left(x^{\log_x a}\right)^x-$$

$$-a^3\cdot\sqrt{a}=a^x\sqrt{a}+a^3\sqrt{x}-a^x\sqrt{x}-a^3\sqrt{a}=a^x(\sqrt{a}-\sqrt{x})-a^3(\sqrt{a}-\sqrt{x})=$$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{x})(a^x-a^3).$$

Итак, заданная функция приобрела следующий вид:

$$y=\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(a^x-a^3\right)} \qquad (18)$$

Область определения этой функции – все *x*, удовлетворяющие условию

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(a^x-a^3\right)\geq 0 \qquad (19)$$

Поскольку произведение двух сомножителей ≥ 0, в случае, если оба сомножителя одного знака, то уравнение (19) равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{a}-\sqrt{x}\geq 0;\\ a^x-a^3\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{a}-\sqrt{x}\leq 0;\\ a^x-a^3\leq 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}\leq\sqrt{a};\\ a^x\geq a^3;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}\geq\sqrt{a};\\ a^x\leq a^3.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (20)$$

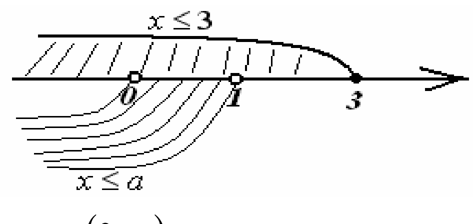
Далее, рассмотрим отдельно два случая, *0<a<1* и *a>1* (так как *a* – основание показательной функции).

1 случай: *0<a<1*. Учитывая, что функция $y=\sqrt{x}$ - возрастающая, а функция $y=a^x$ при *0<a<1* – убывающая, запишем совокупность, равносильную совокупности (4):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq a;\\ x\leq 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq a;\\ x\geq 3.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (21)$$

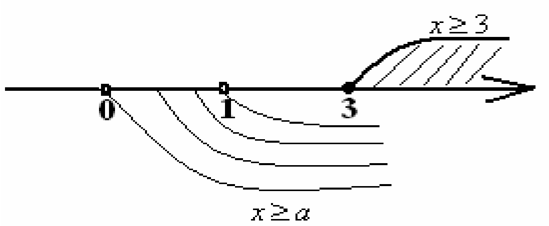
Рассмотрим решение каждой системы в отдельности.

$$1)\begin{cases}x\leq a;\\ x\leq 3.\end{cases}$$



$\Rightarrow$ решение $x\in(0;\,a)$.

2) $\begin{cases} x \ge a; \\ x \ge 3. \end{cases}$



$\Rightarrow$ решение $x \in [3; +\infty)$.

Таким образом при *0<a<1*, *D(y)=* $(0; a) \cup [3; +\infty)$.

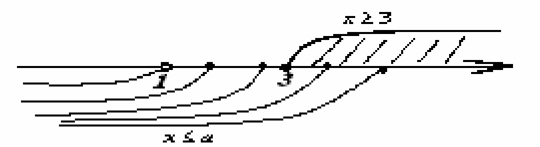
Очевидно эта область определения содержит все двузначные натуральные числа, то есть *0<a<1* не удовлетворяет условию задачи.

2 случай: *a>1*, в этом случае функции $y=a^x$ и $y=\sqrt{x}$ обе возрастающие, следовательно совокупность (20) равносильна:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le a; \\ x \ge 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge a; \\ x \le 3 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (22)$$

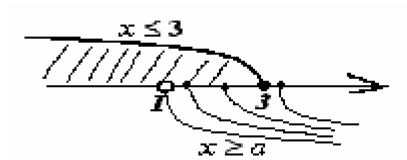
как и в предыдущем случае рассмотрим решение каждой из систем отдельно.

1) $\begin{cases} \mathrm{x} \le \mathrm{a},\ (\mathrm{a} > 1); \\ \mathrm{x} \ge 3. \end{cases}$



Следовательно, решение системы: $3 \le x \le a$.

2) $\begin{cases} \mathrm{x} \ge \mathrm{a},\ (\mathrm{a} > 1); \\ \mathrm{x} \le 3. \end{cases}$



Решение этой системы: $a \le x \le 3$

Таким образом совокупность (22) равносильна

$$\left[\begin{array}{l} 3 \le x \le a; \\ a \le x \le 3, \end{array}\right. \qquad (23)$$

напомним *a>1*.

Теперь на основании совокупности (23) ответим на вопрос задачи, то есть найдем все положительные, не равные 1 значения *a*, при которых область определения заданной функции <u>не содержит</u> двузначных натуральных чисел.

Решение $a \le x \le 3$ (при *a*>*1*) возьмем полностью, то есть $x \in (1;\, 3)$. Что касается неравенства $3 \le x \le a$, то первое двузначное натуральное число 10, следовательно, нас устроят $x \in [3;\, 10)$.

Ответ: (1; 10).

Задача 69 Решите уравнение $2\log_a |x| + 2\log_a (x+2) = 1$.

Решение: По определению логарифма должны выполняться условия $a > 0$, $a \ne 1,\ x \ne 0,\ x > -2$. При этих условиях заданное уравнение равносильно уравнению $|x|(x+2) = \sqrt{a}$.

Если $-2 < x < 0$, то отсюда находим: $-x(x+2) = \sqrt{a}$. Это уравнение имеет действительные корни лишь при $\sqrt{a} \le 1$. В этом случае $x_1 = -1 - \sqrt{1-\sqrt{a}}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1-\sqrt{a}}$, причем легко заметить, что при $0 < a < 1$ оба корня лежат на промежутке $(-2;0)$. При *a* = 1 эти корни совпадают и $x_1 = -1$.

При $x > 0$ получаем уравнение $x(x+2) = \sqrt{a}$, откуда $x_3 = -1 - \sqrt{1+\sqrt{a}}$, $x_4 = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$. Положителен лишь корень x_4.

Итак, при $0 < a < 1$ уравнение имеет три корня x_1, x_2, x_4. При $a > -1$ - лишь один корень x_4.

Задача 70 Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\log_{9(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4})}\left(\log_{11}\left(\left|2x^2 + 2ax - 7\right| + 2\right)\right) \le 0$ верно при всех значениях переменной *x*, принадлежащих отрезку $[-4;\, 2]$.

Решение: Оценим значение основания внешнего логарифма. Так как $\sqrt[3]{5} > \sqrt[3]{4}$, то $9\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}\right) > 0$. Сравним $9\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}\right)$ и 1. для этого преобразуем выражение $9\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}\right)$:

$$9\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}\right) = \frac{9\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}\right)\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{4} + \left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{4} + \left(\sqrt[3]{4}\right)^2} = \frac{9\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{4}\right)^3\right)}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}} = \frac{9}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}}.$$

Поскольку $\dfrac{9}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}} > \dfrac{9}{3\sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{25}} > 1$, то $9\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}\right) > 1$.

Так как основание внешнего логарифма больше 1, то исходное неравенство равносильно неравенству вида: $0 < \log_{11}\left(\left|2x^2 + 2ax - 7\right| + 2\right) \le 1$, которое должно быть верным при всех $x \in [-4;\, 2]$. Решим это равенство:

$0<\log_{11}\left(\left|2x^2+2ax-7\right|+2\right)\le 1 \Leftrightarrow 1<\left|2x^2+2ax-7\right|+2\le 11 \Leftrightarrow -1<\left|2x^2+2ax-7\right|\le 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -9\le 2x^2+2ax-7\le 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax-8\le 0, \\ x^2+ax+1\ge 0. \end{cases}$

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+ax-8$. Первое неравенство будет выполнено для всех значений $x\in[-4;\,2]$ тогда и только тогда, когда будет верна система $\begin{cases} f(-4)\le 0, \\ f(2)\le 0. \end{cases}$ Получим: $\begin{cases} 16-4a-8\le 0, \\ 4+2a-8\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a\ge 8, \\ 2a\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow a=2$.

Осталось проверить, будет ли при a = 2второе неравенство системы также верно для всех значений $x\in[-4;\,2]$. Подставив, получим: $x^2+2x+1\ge(x+1)^2\ge 0$, что является верным неравенством для любых значений переменной, в том числе и для всех значений $x\in[-4;\,2]$.

Ответ: 2.

6.1 Задачи для самостоятельного решения

1 Для каждого значения параметра a решить неравенство $\log_3\left(\sqrt{x^2-2ax+1}-1\right)\le 1$.

Ответ: При $a\ge 0$ $a-\sqrt{a^2+15}\le x<0,\ 2a<x\le a+\sqrt{a^2+15}$; при $a<0$ $a-\sqrt{a^2+15}\le x<2a,\ \ 0<x\le a+\sqrt{a^2+15}$.

2 Найти все решения параметра c, для которых неравенство $1+\log_2\left(2x^2+2x+\dfrac{7}{2}\right)\ge \log_2(cx^2+c)$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $0<c\le 8$.

3 При каких значениях a сумма $\log_a(\sqrt{1-x^2}+1)$ и $\log_a(\sqrt{1-x^2}+7)$ будет равна единице хотя бы при всех допустимых значениях x?

Ответ: $(0;1)\cup(16;+\infty)$.

4 При каких значениях a уравнение $2\log_2^2 x-\left|\log_2 x\right|+a=0$ имеет четыре корня?

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{8}\right)$.

5 Решить уравнение $\left(\log_2 3\right)^{\sqrt{x+a+2}}=\left(\log_9 4\right)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}$.

Ответ: при $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ x=-\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$;

при $a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ x=\dfrac{-5+\sqrt{3}}{2}$.

6 При каких значениях a сумма $\log_a\left(\dfrac{4+3|x|}{1+|x|}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{6+5|x|}{1+|x|}\right)$ будет равна единице при всех x?

Ответ: $(1;15]$.

7 При каких значениях a сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{4+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ не равна единице ни при каких значениях x?

Ответ: $(0;1)\cup(1;6]\cup(12;+\infty)$.

8 При каких значениях a сумма $\log_a(2^x-1)$ и $\log_a(2^x-7)$ равна единице ровно при одном значении x?

Ответ: $(0;1)\cup(1;+\infty)$.

9 При каких значениях a сумма $\log_a(\sin x+2)$ и $\log_a(\sin x+3)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

Ответ: [2; 12].

10 Найдите все значения параметра a, при которых в области определения функции $y=\ln(a^{ax-1}-a^x)$ лежат числа 20, 30, 50, но не лежат числа 2, 3, 5.

Ответ: (1,05; 1,2].

11 Найдите все значения параметра a, при которых в области определения функции $y=(a^{ax-1}-a^x)^{0,25}$ есть трехзначные натуральные числа, но нет ни одного двузначного натурального числа.

Ответ: $\left[\dfrac{1000}{999};\dfrac{100}{99}\right]$.

12 Найдите все значения параметра a, при которых в области определения функции $y=\ln(a^{ax-2}-a^x)$ лежат числа 13, 15, 17, но не лежат числа 3, 5, 7.

Ответ: $\left(\dfrac{15}{13};\dfrac{9}{7}\right]$.

13 При каких значениях a значение выражения $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-a^4}$ больше значения выражения $0{,}25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}}$ при всех допустимых значениях x?

Ответ: (-1; 1).

14 При каких значениях a значение выражения $(\cos x)^{\log_3(\cos x)-|a|}$ больше значения выражения $3^{\log_3(1-\sin^2 x)+a(a-2)}$ при всех допустимых значениях x?

Ответ: (0; 2).

15 Для всех a решить уравнение $(\log_5 2)^{\sqrt{a+x+2}}=(\log_4 25)^{\sqrt{x^2-3a-5}}$.

Ответ: При $a\neq\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ решений нет; при $a=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$; при $a=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

16 Для всех значений *m* решить неравенство $2^{\sqrt{1-x}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{a-m}$.

Ответ: если $m<1$, $x \le -1$; если $m \ge 1$, $x < 1 + [(m-1)\log_2 3]^2$.

17 При всех *a* решить уравнение $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$.

Ответ: При $0 < a \le 1$ $x = \log_2 a$; при других *a* решений нет.

18 В области определения функции $y = \log_3\left(a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения *a*, при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 13.

Ответ: $\left(3\frac{2}{3}; 3\frac{6}{7}\right]$.

19 Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых все решения уравнения $(2x - a - 2)\log_{x+a+1}\left(\frac{2ax - 6a + 3}{x^2 - 6x + 12}\right) = 0$ имеет корни, принадлежащие отрезку [2; 5], но не имеет корней, лежащих вне этого отрезка.

Ответ: $\left(-4; -\frac{4}{3}\right] \cup \{5\}$.

20 В области определения функции $y = \log_9\left(a^{\frac{7x+3}{x-3}} - a^a\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения, при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 16.

Ответ: $[13; 15)$.

21 Найдите все значения *a*, при которых область определения функции $y = \left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+1} + \sqrt{x} \cdot a^4 - x^{0,5 + x\log_x a} - \left(\sqrt{a}\right)^9\right)^{0,5}$. Содержит два или три целых числа.

Ответ: $(1; 3] \cup [5; 7)$.

22 Найдите все значения *a*, при которых область определения функции $y = \left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+10} + \left(x^2 \cdot \sqrt{x}\right)^2 \cdot a^4 - x^{5 + x\log_x a} - \left(a^3\right)^{\log_2 8}\right)$. Содержит ровно три натуральных числа.

Ответ: (7; 8].

23 Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\log_{7\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}\right)}\left(\log_{11}\left(\left|x^2 + 2ax + 2\right| + 2\right)\right) \ge 0$ верно при всех значениях переменной *x*, принадлежащих отрезку $[-1; 7]$.

Ответ: - 3.

24 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{8\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)}\left(\lg\left(\left|x^2+ax-4\right|+2\right)\right)\geq 0$ верно при всех значениях переменной x, принадлежащих отрезку $[-6;\,2]$.

Ответ: 4.

25 Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором неравенство $\log_{\left(\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}\right)}\left(5x^2+ax+3\right)>0$ верно при всех значениях переменной x, принадлежащих отрезку $[0;\,1]$.

Ответ: 6.

26 Найти все значения a, при которых неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+ax+1\right)<1$ выполняется для всех $x<0$.

Ответ: $\left(-\infty;\sqrt{2}\right)$.

27 Для всех значений параметра а, принадлежащих отрезку $[-1;0]$, решить неравенство $\log_{x+a}\left(x^2-(a+1)x+a\right)\geq 1$.

Ответ: при $a=-1$ решение $x\in(2;+\infty)$;

при $-1<a<-\frac{1}{2},\ \ x\in(1;a+2)\cup(1-a;+\infty)$;

при $-\frac{1}{2}<a<0,\ \ x\in(1;1-a)\cup(a+2;+\infty)$;

при $a=0,\ \ x\in[2;+\infty)\cdot$

28 При каких значениях параметра a уравнение $ax-3-\ln x=0$ имеет два решения?

Ответ: $0<a<e^2$.

29 Решить уравнение $10^{\log_a\left(x^2-3x+5\right)}=3^{\log_a 10}$. В ответе записать больший корень уравнения.

Ответ: 2.

30 При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}\log_3(y-3)-2\log_9 x=0\\(x+a)^2-2y-5a=0\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $\left[-\frac{7}{3};6\right)$.

7 Тригонометрические уравнения, неравенства, системы

Задача 71 Решите уравнение $2\cos\pi ax = x + \frac{1}{x}$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = 2\cos\pi ax$. Очевидно, $E(f) = [-2;\, 2]$. Рассмотрим функцию $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел, а также свойство нечетности функции $g(x)$, получим $E(g) = (-\infty;\, -2] \cup [2;\, +\infty)$. Таким образом, имеем: $E(f) \cap F(g) = \{-2;\, 2\}$. Но тогда на основании того, что если для функций $f(x)$ и $g(x)$ $E(f) \cap E(g) = \{A_1;...;A_k\}$, то $f(x) = g(x) = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x0 = A_1 \\ g(x) = A_1 \end{cases} \\ ... \\ \begin{cases} f(x0 = A_k \\ g(x) = A_k, \end{cases} \end{array}\right.$ замечаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} 2\cos\pi ax = 2 \\ x + \frac{1}{x} = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2\cos\pi ax = -2 \\ x + \frac{1}{x} = -2. \end{cases}$

После очевидных преобразований получим: $\begin{cases} a = 2n,\ n \in Z \\ x = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 2n+1,\ n \in Z \\ x = -1. \end{cases}$

Ответ: при $a = 2n\ \ (n \in Z)\ \ x = 1$;

при $a = 2n+1\ \ (n \in Z)\ \ x = -1$;

при $a \notin Z$ решений нет.

Задача 72 Решим уравнение $(a-1)\cos x + (a+1)\sin x = 2a$.

Решение: Разделим обе части уравнения на выражение $\sqrt{(a-1)^2+(a+1)^2}=\sqrt{2\left(a^2+1\right)}$. Так как $\left(\frac{a-1}{\sqrt{2\left(a^2+1\right)}}\right)^2+\left(\frac{a+1}{\sqrt{2\left(a^2+1\right)}}\right)^2=1$, то найдется такое α, что $\sin\alpha=\frac{a-1}{\sqrt{2\left(a^2+1\right)}}$, $\cos\alpha=\frac{a+1}{\sqrt{2\left(a^2+1\right)}}$. Именно если $a\ge -1$, то $\alpha=\arcsin\frac{a-1}{\sqrt{2\left(a^2+1\right)}}$, при $a<-1$ имеем: $\alpha=\pi-\arcsin\frac{a-1}{\sqrt{2\left(a^2+1\right)}}$. Поэтому $\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$, т.е. $\sin(x+\alpha)=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$. Это уравнение имеет действительные корни при условии, что $\left|\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}\right|\le 1$, т.е. $-1\le a\le 1$. В этом случае существует такое β, что $\sin\beta=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$. Поэтому при $-1\le a\le 1$ данное уравнение принимает вид: $\sin(x+\alpha)=\sin\beta$. Отсюда получаем, что $x=2\pi n+\beta-\alpha$ или $x=2\pi n+\pi-\beta-\alpha$, где n – целое число. Эти решения можно представить в виде $x=2\pi n+ar\sin\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}-\arcsin\frac{a-1}{\sqrt{2\left(a^2+1\right)}}$ или $x=(2n+1)\pi-ar\sin\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}-\arcsin\frac{a-1}{\sqrt{2\left(a^2+1\right)}}$.

Задача 73 Найти все отрицательные значения u, при которых выполнено неравенство $\frac{1}{\log_{3\cos u}3}+\frac{1}{\log_3\left(\frac{\cos u}{3}\right)}\ge 0$.

Решение: Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\frac{1}{\frac{1}{\log_3 3\cos u}}+\frac{1}{\log_3\left(\frac{\cos u}{3}\right)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{1+\log_3\cos u}}+\frac{1}{\log_3\cos u-1}\ge 0.$$

Пусть $\log_3\cos u=x$. Имеем: $\frac{1}{\frac{1}{1+x}}+\frac{1}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 1, \\ x+1+\frac{1}{x-1}\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 1, \\ \frac{x^2}{x-1}\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x>1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3\cos u=0, \\ \log_3\cos u>1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos u=1, \\ \cos u>3, \end{array}\right. \overset{\text{т.к. } |\cos u|\le 1}{\Longleftrightarrow} \cos u=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u=2\pi k;\ k\in Z.$$

Так как нужно найти только отрицательные решения неравенства, имеем $u = 2\pi k,\ k \in Z,\ k < 0$.

Ответ: $u = 2\pi k,\ k \in Z,\ k < 0$.

Задача 74 При каких значениях *a* уравнение $2\cos^2\left(2^{2x-x^2-1}\right) = a - \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)$ имеет хотя бы одно решение?

Решение: Преобразуем данное уравнение следующим образом: $1+\cos\left(2^{2x-x^2}\right) = a - \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(2^{2x-x^2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right) = a-1$.

Пусть $2^{2x-x^2} = y,\ y \in (0,\ 2]$ (так как $2x - x^2 = 1-(x-1)^2$ изменяется в пределах от $-\infty$ до 1). Имеем:

$$\cos y + \sqrt{3}\sin y = a-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y = \frac{a-1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a-1}{2}.$$

Найдем, в каких пределах изменяется выражение $\cos\left(y-\frac{\pi}{3}\right)$ при $y \in (0,\ 2]$. Имеем: $0 < y \le 2 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < y - \frac{\pi}{3} \le 2 - \frac{\pi}{3} \overset{\text{см. рисунок 22}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2} < \cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right) \le 1$,

так как при сравнении чисел $2-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ легко получаем, что $2-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$.

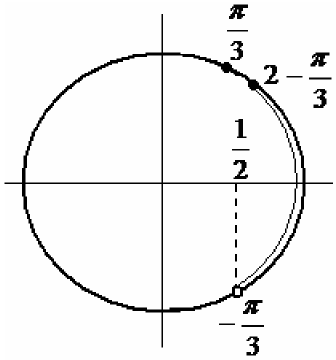


Рисунок 22

Таким образом, исходное уравнение имеет решение, если $\frac{1}{2} < \frac{a-1}{2} \le 1 \Leftrightarrow a \in (2,\ 3]$.

Ответ: $a \in (2,\ 3]$.

Задача 75 Найти все значения *a*, при которых среди корней уравнения $\sin 2x - 2a\cos x - \sin x + a = 0$ найдутся два, разница между которыми равна $\frac{\pi}{2}$.

Решение: Преобразуем данное уравнение следующим образом: $2\sin x\cos x - 2a\cos x - \sin x + a = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - a) - (\sin x - a) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x = a. \end{array}\right.$$

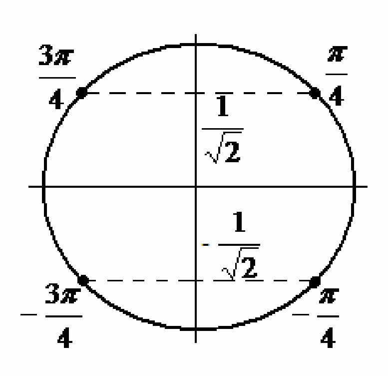


Рисунок 23

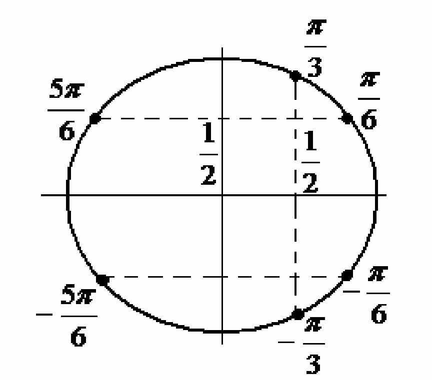


Рисунок 24

Условие задачи будет выполнено в следующих двух случаях:

1) Среди корней уравнения $\sin x = a$ найдутся два, разница между которыми равна $\frac{\pi}{2}$. Как видно из рисунка 23, это произойдет, если $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Найдется корень уравнения $\sin x = a$, отстоящий от одного из корней уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ на $\frac{\pi}{2}$. На рисунке 24 видно, что это произойдет, если $a = \pm\frac{1}{2}$.

Ответ: $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a = \pm\frac{1}{2}$.

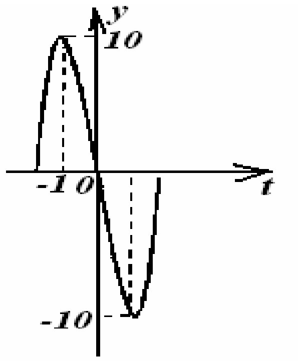
Задача 76 Найдите все значения *p*, при которых уравнение $2\cos 2x + \dfrac{p}{\sin x} = -12$ имеет решение.

Решение: Выполним замену $t = \sin x,\ |t| \le 1$, кроме того, по условию $t \ne 0$. С учетом того, что $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, исходное уравнение принимает

$$2 - 4t^2 + \frac{p}{t} = -12;$$

вид $-4t^3 + p = -14t;$.

$$4t^3 - 14t = p$$



У этого уравнения есть корни, только если *p* лежит во множестве значений левой части. Найдем множество значений функции $y = 4t^3 - 14t$ при $-1 \le t \le 1$. Так как $y' = 12t^2 - 14 < 0$ при $-1 \le t \le 1$, то на отрезке [-1; 1] функция $y = 4t^3 - 14t$ убывает, ее наибольшее значение равно $y(-1)=10$, а наименьшее значение равно $y(1) = -10$ (см. рис.)

Так как функция $y = 4t^3 - 14t$ непрерывна, то множество ее значений на отрезке [-1; 1] есть отрезок [-10; 10]. Причем поскольку $t \ne 0$, то из отрезка [-10; 10] удаляем точку $y(0)=0$.

Ответ: $[-10;\, 0) \cup (0;\, 10]$.

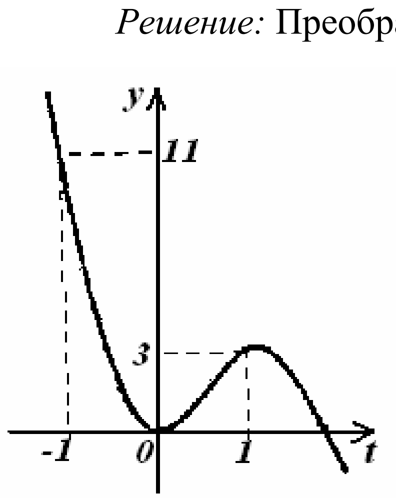
Задача 77 Найдите все значения *p*, при которых уравнение $7 — \cos x = p(1 + tg^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Решение: Преобразуем заданное уравнение:

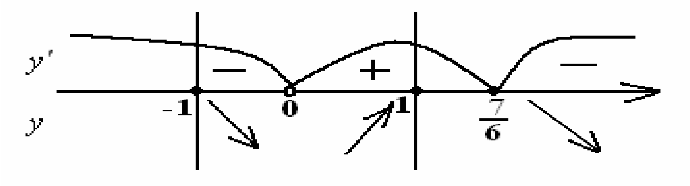
$$7 — \cos x = p(1 + tg^2 x) \Leftrightarrow$$

$$7 - 4\cos x = p\left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \Leftrightarrow 7 - 4\cos x = p\,\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 7 - 4\cos x = \frac{p}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 7\cos^2 x - 4\cos^3 x = p.$$



У этого уравнения есть корни, только если *p* лежит во множестве значений левой части.



Пусть $t = cos\ x$, $t \in [-1; 1]$ и, кроме того, по условию $t \neq 0$. Найдем множество значений функции $y = 7t^2 - 4t^3$ при $-1 \le t \le 1$, $t \neq 0$. $y' = 14t - 12t^2$; $y' = 2t(7 - 6t)$.

Таким образом, на отрезке [-1; 0] функция *y* убывает, а на отрезке [0; 1] она возрастает.

Так как функция *y* непрерывна, то множество ее значений на отрезке [1; 0] равняется отрезку $[y(0);\ y(-1)] = [0;11]$, а множество ее значений на отрезке [0; 1] равняется отрезку $[y(0);\ y(1)] = [0;3]$. Поэтому множество ее значений на отрезке [-1; 1] – отрезок [0; 11]. Значит, множество значений функции $y = 7t^2 - 4t^3$ при $-1 \le t \le 1$, $t \neq 0$ есть промежуток (0; 11] а следовательно уравнение $7cos^2 x - 4cos^3 x = p$ имеет хотя бы один корень при $p \in (0;11]$.

Ответ: (0; 11].

Задача 78 При каких значениях *a*, значение выражения $2 + \cos x(5\cos x + a\sin x)$ будет равно 1 хотя бы при одном значении *x*?

Решение: Другими словами необходимо выяснить при каких значениях *a* уравнение $2 + cos\,x(5cos\,x + a\,sin\,x) = 1$, т.е. $1 + cos\,x(5cos\,x + a\,sin\,x) = 0$, имеет хотя бы одно решение.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$1 + \cos x(5\cos x + a\sin x) = 1 + \frac{5}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{a}{2}\sin 2x = 3{,}5 + \frac{a\sin 2x + 5\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{25 + a^2}\sin(\alpha + 2x)\right),$$ где $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{25 + a^2}}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{25 + a^2}}$.

Выражение $\sqrt{25 + a^2}\sin(\alpha + 2x)$ принимает все значения от $-\sqrt{25 + a^2}$ до $\sqrt{25 + a^2}$. Значит, выражение $1 + \cos x(5\cos x + a\sin x)$ обратится в нуль, только если число 7 лежит в этом отрезке. Другими словами, $7 \le \sqrt{25 + a^2} \Leftrightarrow 49 \le 25 + a^2 \Leftrightarrow |a| \ge 2\sqrt{6}$.

Ответ: $\left(-\infty; -2\sqrt{6}\right] \cup \left[2\sqrt{6}; +\infty\right)$.

Задача 79 Найдите все значения параметра *p*, при которых уравнение $8\sin^3 p = p + 9\cos 2x$ не имеет корней.

Решение: Используя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, имеем $8\sin^3 x = p + 9\left(1 - 2\sin^2 x\right)$.

Произведем замену $t = \sin x,\ |t| \le 1$.

$8t^3 = p + 9(1 - 2t^2),$

$8t^3 + 18t^2 - 9 = p$. (24)

Это уравнение не будет иметь корней, в случае если *p* не принадлежит множеству значений левой части.

Рассмотрим функцию $y = 8t^3 + 18t^2 - 9$. (25)

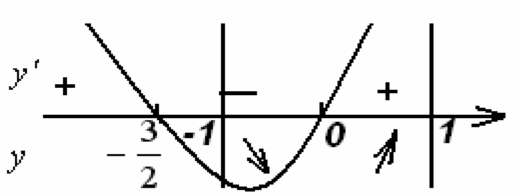
Найдем множество ее значений при $-1 \le t \le 1$. Для этого вначале исследуем функцию на монотонность.

$y' = 24t^2 + 36t$. (26)

$24t^2 + 36t = 0,$

$$12t(2t+3) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

(26) – парабола, ветви которой направлены вверх $\Rightarrow$



$\Rightarrow t = 0$ - точка минимума.

Так как функция (25)на промежутке [-1; 0] – монотонна (убывающая), то множество ее значений есть отрезок $[y(0);\ y(-1)] = [-9;\ 1]$.

На отрезке [0; 1] функция (25) монотонна (возрастающая) $\Rightarrow$ множество ее значений на этом промежутке есть отрезок $[y(0);\ y(1)] = [-9;\ 17]$.

Таким образом множество значений функции (25) есть отрезок [-9; 17], а исходное уравнение не имеет решений при *p*, не принадлежащих этому промежутку.

Ответ: $p \in (-\infty; -9) \cup (17; +\infty)$.

Задача 80 При каких значениях параметра *p* уравнение $12\sin x + p + 4{,}5\cos 2x = 9{,}5$ имеет корни.

Решение: Преобразуем заданное уравнение:

$12\sin x + p + \frac{9}{2}(1 - 2\sin^2 x) = \frac{19}{2}$,

$12\sin x + p + \frac{9}{2} - 9\sin^2 x = \frac{19}{2}$,

$3\sin x\left(4 - 3\sin x\right) - 5 = -p$,

$$-3\sin x(4 - 3\sin x) + 5 = p. \qquad (27)$$

Уравнение (27) будет иметь корни, если графики функций $y = -3\sin x(4 - 3\sin x) + 5$ и $y=p$ будут иметь точки пересечения.

$y=p$ – прямая, параллельная оси абсцисс. Таким образом, если p будет принадлежать множеству значений функции $y = -3\sin x(4 - 3\sin x) + 5$, то графики пересекутся.

Произведем оценку множества значений функции $y = -3\sin x(4 - 3\sin x) + 5$.

$-1 \le \sin x \le 1$,

$-3 \le 3\sin x \le 3$,

$-3 \le -3\sin x \le 3$,

$1 \le -3\sin x(4 - 3\sin x) \le 21$,

$2 \le -3\sin x(4 - 3\sin x) + 5 \le 26$.

Следовательно, функция $y = -3\sin x(4 - 3\sin x) + 5$ имеет множество значений [2; 26]. Таким образом графики функций $y = -3\sin x(4 - 3\sin x) + 5$ и $y=p$ будут пересекаться в случае, если $p \in [2; 26]$.

Ответ: $p \in [2; 26]$.

Задача 81 Решите уравнение: $3\cos x \sin b - \sin x \cos b - 4\cos b = 3$.

Решение: Это уравнение содержит параметр b. Будем решать уравнение относительно x.

$\frac{3\sin b}{\sqrt{9\sin^2 b + \cos^2 b}} \cdot \cos x - \frac{\cos b}{\sqrt{9\sin^2 b + \cos^2 b}} \cdot \sin x = \frac{4\cos b + 3\sqrt{3}}{\sqrt{9\sin^2 b + \cos^2 b}}$, откуда $\cos(x + \varphi) = \frac{4\cos b + 3\sqrt{3}}{\sqrt{9\sin^2 b + \cos^2 b}}$, где $\varphi = \arccos\frac{3\sin b}{\sqrt{9\sin^2 b + \cos^2 b}}$. Решение есть, если $-1 \le \frac{4\cos b + 3\sqrt{3}}{\sqrt{9\sin^2 b + \cos^2 b}} \le 1$. Очевидно, что $0 < 3\sqrt{3} - 4 \le 4\cos b + 3\sqrt{3}$, значит $0 < \frac{4\cos b + 3\sqrt{3}}{\sqrt{9\sin^2 b + \cos^2 b}} \le 1$, $0 < 4\cos b + 3\sqrt{3} \le \sqrt{8\sin^2 b + 1}$. После почленного возведения в квадрат и тождественных преобразований получим $6\left(2\cos b + \sqrt{3}\right)^2 \le 0$, значит $\cos b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\sin b = \frac{1}{2}$ или $\sin b = -\frac{1}{2}$, откуда без труда находим значение параметра, при которых есть решение, и находим само решение.

Задача 82 Для всех допустимых значений параметра a решить уравнение
$$\frac{a^2-\dfrac{1}{\cos^2 x}+tg^2 x}{2\cos^2 3x}=\frac{a+\sin^2 2x}{\sin^2 6x+2\cos 6x\cdot\cos^2 3x}. \qquad (28)$$

Решение. Прежде всего отметим, что $a\in R$. Далее, производя тригонометрические преобразования, уравнение (28) можно привести к равносильному $\dfrac{a^2-\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{2\cos^2 3x}=\dfrac{a+\sin^2 2x}{2\cos^2 3x}$.

Поскольку $\cos 3x$ содержит множителем $\cos x(\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x)$, то последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} a^2-1=a+\sin^2 2x \\ \cos 3x\neq 0. \end{cases}$

При решении тригонометрических уравнений, как правило, удобно пользоваться следующими двумя принципами:

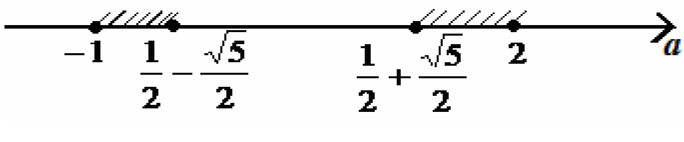
1. При решении простейшего уравнения удобно понизить его степень за счет изменения его аргумента.
2. В случае необходимости проверки удобно подставлять в уравнение не значение найденного аргумента, а значения используемых в решении тригонометрических функций.

В соответствии с первым выдвинутым принципом преобразуем первое уравнение системы $\sin^2 x=a^2-a-1\Leftrightarrow\cos^2 2x=2+a-a^2\Leftrightarrow\cos 4x=3+2a-2a^2$.

Таким образом уравнение (28) равносильно системе:
$$\begin{cases} \cos 4x=3+2a-2a^2 \\ \cos x(4\cos^2 x-3)\neq 0. \end{cases} \qquad (29)$$

В результате можно выдвинуть следующее достаточное условие на параметр a: для того чтобы уравнение (28) не имело решений, достаточно выполнения неравенства $\left|2a^2-2a-3\right|>1$.

Пусть теперь $\left|2a^2-2a-3\right|\le 1$, т.е. $\begin{cases} a^2-a-2\le 0 \\ a^2-a-1\ge 0 \end{cases}$ или графически



В результате $a \in \left[-1; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; 2\right] = A$.

Теперь, когда первое уравнение системы (29) всегда имеет решения, нужно позаботиться о выполнении второго ее второго условия. На основании второго принципа равносильными преобразованиями приведем систему к следующему виду $\begin{cases} 4\cos^4 x - 4\cos^2 x = 1 + a - a^2 \\ \cos x(4\cos^2 x - 3) \neq 0. \end{cases}$

Таким образом, при ограничении $a \in A$, на параметр a возникают следующие дополнительные условия: для того чтобы уравнение (28) не имело решений, необходимо и достаточно, чтобы любое значение переменной x, для которой $4\cos^4 x - 4\cos^2 x = 1 + a - a^2, \quad a \in A$, (30)

Удовлетворяло совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos^2 x = \frac{3}{4}. \end{array}\right.$

По необходимости, если $\cos x = 0$, тогда $1 + a - a^2 = 0$, и $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \in A$. Однако при таких a уравнение (30) принимает вид $4\cos^2 x\left(\cos^2 x - 1\right) = 0$ и не всякое его решение удовлетворяет указанной выше совокупности. Таким образом, при $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ уравнение (28) имеет решениями те значения переменной x, для которой $\cos^2 x = 1$, т.е. $\sin x = 0$ и $x = \pi m,\ m \in Z$.

Аналогично, если $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, то $1 + a - a^2 = -\frac{3}{4}$, и $a_{3,4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{2} \in A$. При таких значениях параметра a уравнение (30) принимает вид $16\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right) = 0$.

Тогда уравнение (28) имеет решениями те значения переменной x, что $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, т.е. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Для остальных значений параметра $a \in A$ уравнение имеет решения вида $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(3 + 2a - 2a^2) + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

В результате, имеем *ответ:*

при $a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty),\ x \in \varnothing$;

при $a \in \left[-1; \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}; 2\right]$,

$x = \pm\frac{1}{4}\arccos(3 + 2a - 2a^2) + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$;

при $a \in \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right\},\ x = \pi m,\ m \in Z$;

при $a \in \left\{\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\right\},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Задача 83 При каких значениях параметра c, уравнение $3\sin x + 4\cos x = c$ не имеет решений.

Решение: Разделим обе части уравнения на $\sqrt{9+16} = 5$, имеем $\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{c}{5}$. Введем вспомогательный угол φ, полагая

$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{3}{5}, \\ \sin\varphi = \frac{4}{5}. \end{cases}$ Тогда, $\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{5} \iff \sin(x+\varphi) = \frac{c}{5}$.

Уравнение не будет иметь решений при $\left|\frac{c}{5}\right| > 1$.

Откуда, $|c| > 5 \iff \left[\begin{array}{l} c > 5 \\ c < -5 \end{array}\right.$.

Ответ: $c \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Задача 84 При каких значениях параметра b, уравнение $3\sin x\cos x = \frac{b-1}{2}$ не имеет решений?

Решение: Упростим левую часть уравнения, применив формулу синуса двойного аргумента.

$$3\sin x\cos x = \frac{b-1}{2},$$

$$\frac{3}{2}\sin 2x = \frac{b-1}{2},$$

$$\sin 2x = \frac{b-1}{3}.$$

Так как значение функции $y = \sin x$ ограничено условием $|\sin x| \le 1$, то уравнение не будет иметь решений, если $\left|\frac{b-1}{3}\right| > 1$.

$|b-1| > 3 \iff \left[\begin{array}{l} b-1 > 3, \\ b-1 < -3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} b > 4, \\ b < -2. \end{array}\right.$

Ответ: $b \in (-\infty;-2) \cup (4;+\infty)$.

Задачи 85 Найти все значения параметра *a*, при котором неравенство $\left|3\sin^2 x + 2a\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3$ выполняется для любых значений *x*.

Решение: Воспользовавшись формулами: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos 2x$ заданное неравенство преобразуется к виду: $\left|\dfrac{3(1-\cos 2x)}{2} + a\sin 2x + \dfrac{1+\cos 2x}{2} + a\right| \le 3 \Leftrightarrow \left|a\sin 2x - \cos 2x + a + 2\right| \le 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{a^2+1}\sin(2x-\varphi) + a + 2\right| \le 3, \qquad (31)$$

где $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}. \end{cases}$

Если $x \in (-\infty; +\infty)$, то $\sqrt{a^2+1}\sin(2x-\varphi)$ принимает все значения из отрезка $\left|-\sqrt{a^2+1}; \sqrt{a^2+1}\right|$ и не принимает ни каких других значений.

Задача 86 Для каждого значения *a* найти число решений уравнения $a \cdot tgx + \cos 2x = 1$, принадлежащих промежутку $0 \le x \le 2\pi$.

Решение: $a \cdot tgx + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow a \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ a = \sin 2x, \end{array}\right. \\ \cos x \ne 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in Z, \\ \sin 2x = a, \end{array}\right. \\ \cos x \ne 0. \end{cases}$$

Серия $x = \pi n,\ n \in Z$ содержит три корня $x_1 = 0; x_2 = \pi;\ x_3 = 2\pi$ на отрезке $[0; 2\pi]$ независимо от *a*.

Если хотя бы один из этих корней является решением уравнения $\sin 2x = a$, то $a = 0$. В этом случае $\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos x \ne 0, \\ 0 \le x \le 2\pi, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ 0 \le x \le 2\pi, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = \pi, \\ x_3 = 2\pi. \end{array}\right.$

При $|a| > 1$ других решений нет.

Если $a = -1$, то $\begin{cases} \sin 2x = -1, \\ \cos x \ne 0, \end{cases} \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

На отрезке $[0;\,2\pi]$ расположены корни $x_4=\dfrac{3\pi}{4};\ x_5=\dfrac{7\pi}{4}$.

Если a=1, то $\begin{cases}\sin 2x=1,\\ \cos x\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z$, и на отрезке $[0;\,2\pi]$ расположены корни $x_4=\dfrac{\pi}{4};\ x_5=\dfrac{7\pi}{4}$.

Если $-1<a<0$, то $\begin{cases}\sin 2x=a,\\ \cos x\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\arcsin a+\pi n,\ n\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin a+\pi m, m\in Z.\end{array}\right.$

Решая неравенства $\begin{cases}0\le \dfrac{1}{2}\arcsin a+\pi n\le 2\pi,\\ n\in Z,\end{cases}$ и $\begin{cases}0\le \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin a+\pi m\le 2\pi,\\ m\in Z\end{cases}$ получаем $n=1, n=2$ и $m=0, m=1$.

В этом случае получаем еще 4 решения на $[0,\,2\pi]$.

Аналогично, для $0<a<1$ имеем: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\arcsin a+\pi n,\ n\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin a+\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.$

решениям на $[0;\,2\pi]$ соответствуют $n=0,\ n=1$ и $m=0, m=1$.

Ответ: при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ - три решения;

при $a\pm 1$ - пять решений;

при $a\in(-1;0)\cup(0;1)$ - семь решений;

при $a=0$ – три решения.

7.1 Задачи для самостоятельного решения

1 При каких значениях p, при которых уравнение $3-2\cos x=p(1+tg^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $[-7;\,0)\cup(0;\,7]$.

2 При каких значениях p, при которых уравнение $\cos 2x+\dfrac{p}{\sin x}=-7$ имеет решения.

Ответ: $[-6;\,0)\cup(0;\,6]$.

3 При каких значениях p, при которых уравнение $5\cos 2x+\dfrac{2p}{\sin x}=-29$ имеет решения.

Ответ: $[-12;\,0)\cup(0;\,12]$.

4 При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)\sin^2 x-(a+2)\sin x+3a-2=0$ не имеет решений?

Ответ: $\left(-\infty;\,-\dfrac{1}{5}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};\,+\infty\right)$**.**

5 Найдите все значения *a*, при которых такая сумма будет больше 4, но меньше

Ответ: $\left(4\dfrac{3}{4};\,5\right]$.

6 Найдите все значения параметра *p*, при которых уравнение $5-3\cos x=p(1+tg^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: (0; 8].

7 Найдите все значения *p*, при которых уравнение $7-2\cos x=p(1+tg^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: (0; 9].

8 Найдите все значения *p*, при которых уравнение $3-2\cos x=p(1+tg^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: (0; 5].

8 При каких значениях *a* значение выражения $3+\sin x(2\sin x+a\cos x)$ будет равно –1 хотя бы при одном значении *x*?

Ответ: $(-\infty;\,-4\sqrt{6}]\cup[4\sqrt{6};+\infty)$.

9 При каких значениях *a* значение выражения $2+\cos x(3\cos x+a\sin x)$ не равно нулю ни при каких значениях *x*?

Ответ: $(-2\sqrt{10};2\sqrt{10})$.

10 Найдите все значения *p*, при которых уравнение $6\sin^3 x=p-5\cos 2x$ не имеет корней.

Ответ: $(-\infty;\,-1)\cup(5;\,+\infty)$.

11 Найдите все значения *p*, при которых уравнение $5-3\cos x=p\left(1+tg^2 x\right)$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $(0;\,3]$.

12 При каких значениях *p* уравнение $5\cos 2x+\dfrac{2p}{\sin x}=-29$ имеет решения.

Ответ: $[-12;\,0)\cup(0;\,12]$**.**

13 Укажите количество целых значений параметра *p*, при которых уравнение $4\cos x(\cos x+1)=p-4$ имеет корни.

Ответ: 10.

14 Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\cos^2 x+3a\sin x-b^2<b-2$ выполняется для любого числа *x*.

Ответ: $a < -\frac{\sqrt{17}+3}{2};\ a > 2$.

15 Указать все значения *a*, для которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}} = \sin x$, имеет решение.

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

16 При каком наибольшем отрицательном значении α (в градусах) график функции $y = \cos(x-\alpha)$ пересечет ось OX в точках $x = 180°k$.

Ответ: $-90°$.

17 При каких значениях параметра *a* неравенство $\log_{\frac{-2a-13}{5}}\left(\frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x - a - 4}{5}\right) > 0$ выполняется для любых значений *x*?

Ответ: $a < -11;\ -7 < a < -\frac{13}{2}$.

18 Найти все значения параметра *a*, при которых любой корень уравнения $a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$ является корнем уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(3tgx - 1) - \log_2(3tgx+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - tgx) = 1$ и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ: $a=1$.

19 Найти все значения параметра *a*, при которых неравенство $\left|5\sin^2 x + 2a\sin x \cdot \cos + \cos^2 x + a + 1\right| \le 6$ выполняется для любых значений *x*.

Ответ: $-\frac{24}{5} \le a \le 0$.

20 Для каждого значения *b* решить уравнение $3\cos x \cdot \sin b - \sin x \cdot \cos b - 4\cos b = 3\sqrt{3}$.

Ответ: при $b = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z,\ \ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$;

при $b = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z,\ \ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$;

при других *b* решений нет.

8 Задачи с параметром на применение производной

Задача 87 Найдите все такие значения a, при которых касательная к графику функции $y = x^4 + ax^2 - 2x - 3$, проведенная в точке графика с абсциссой –1, имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Решение: По условию задачи график функции и касательная к нему имеют ровно одну общую точку – точку касания с абсциссой $x_0 = -1$.

Составим уравнение касательной в виде $y = y_0 + y_0'(x - x_0)$, где $y_0 = a$ и $y_0' = -(2a + 6)$ – значения функции и её производной при $x_0 = -1$:
$y = -(2a + 6)x - a - 6$.

Тогда уравнение $x^4 + ax^2 - 2x - 3 = -(2a + 6)x - a - 6$, или после преобразования $x^4 + ax^2 + (2a + 4)x + a + 3 = 0$, имеет единственный корень $x = -1$.

Так как рассматриваемое уравнение четвертой степени, то это может быть лишь в двух случаях: когда –1 имеет кратность два и других действительных корней нет, либо когда –1 имеет кратность 4.

Таким образом, многочлен в левой части уравнения разлагается на множители: $x^4 + ax^2 + (2a + 4)x + a + 3 = (x + 1)^2 (x^2 - 2x + a + 3)$.

Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 2x + 3$ – неположительное число, если $a \geq -2$. Но при $a = -2$ квадратный корень равен 1, что противоречит условию задачи.

Следовательно, график функции и касательная к нему имеют ровно одну общую точку при всех $a > -2$.

Ответ: $a > -2$.

Задача 88 Найдите все пары чисел *a* и *b*, при которых прямая $y = ax + b$ является касательной к кривой $y = x^2 - 3x + 2$. Какую фигуру в координатной плоскости aOb составляет множество точек $(a;b)$?

Решение: Нетрудно установить, например из графических соображений, что ни одна прямая, заданная уравнением $y = ax + b$, где $b > 2$, не может быть касательной. Из прямых, заданных уравнением $y = ax + 2$, касательной является лишь одна, уравнение которой $y = -3x + 2$ (здесь $a = y'(0) = -3$). Для прямых $y = ax + b$, где $b < 2$, потребуем, чтобы они имели с данной параболой ровно одну общую точку, т.е. чтобы система уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2, \\ y = ax + b, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (3 + a)x + 2 - b = 0, \\ y = ax + b \end{cases}$ имела единственное решение. Это требование выполняется в том и лишь в том случае, когда $D = (3 + a)^2 - 4(2 - b) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}\left(a^2 + 6a + 1\right)$.

Таким образом все точки с координатами $(a;b)$ лежат на параболе, заданной уравнением $b = -\frac{1}{4}\left(a^2 + 6a + 1\right)$.

Задача 89 При каких значениях параметра *b* функция $f(x) = bx^5 - 20x^3 + 5(b + 9)x - 7$ монотонна при всех $x \in R$?

Решение: Вычислим $f'(x) = 5bx^4 - 60x^2 + 5b + 45$. Функция монотонна, если она не имеет экстремумов, то есть уравнение $f'(x) = 0$ не имеет корней. Условию задачи удовлетворяют те значения *b*, при которых уравнение $5bx^4 - 60x^2 + 5b + 45 = 0 \Leftrightarrow \left| x^2 = y \right| \Leftrightarrow by^2 - 12y + b + 9 = 0$ не имеет решений или имеет отрицательные корни, то есть

$\begin{cases} b \neq 0 \\ \frac{D}{4} = 36 - 9b - b^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow b \in (-\infty; -12) \cup (3; +\infty)$ или $\begin{cases} \frac{D}{4} = 39 - 9b - b^2 \geq 0 \\ \frac{b + 9}{b} > 0 \\ \frac{12}{b} < 0. \end{cases}$ (второе и третье условие системы записаны с использованием теоремы Виета)

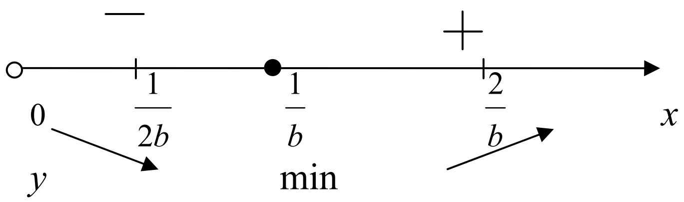
Решая систему, получим $b \in [-12; -9)$.

Ответ: $(-\infty; -9) \cup (3; +\infty)$.

Задача 90 При каких положительных значениях параметра *b* минимум функции $y = bx - \ln x$ равен 2?

Решение: Данная функция определена, непрерывна и дифференцируема на промежутке $(0; +\infty)$, $y' = b - \frac{1}{x}$, $y' = \frac{bx - 1}{x}$. На промежутке $(0; +\infty)$

производная y' равна 0 при $x = \dfrac{1}{b}$ ($b > 0$ по условию). Определим знак производной слева и справа от точки $x = \dfrac{1}{b}$: $y'(2/b) = b/2 > 0$. Характер монотонности функции y показан на рисунке.



Таким образом, функция $y = bx - \ln x$ убывает на $\left(0; 1/2b\right]$. Отсюда следует, что при $x \in \left(0; 1/b\right)$ справедливо неравенство $y(x) > y(1/b)$. Функция возрастает на $\left[1/b; +\infty\right)$, следовательно, для $x \in \left[1/b; +\infty\right)$ имеем $y(x) > y(1/b)$. Мы получили, что число $y(1/b)$ есть наименьшее значение функции $y = bx - \ln x$ на области ее определения. По условию задачи $y(1/b) = 2$, т. е. $1 + \ln b = 2$, значит, $b = e$.

Ответ: $b = e$.

Задача 91 При каких значениях параметра b наименьшее значение функции $y = e^{x-b} - x$ равно –3?

Решение: Найдем производную данной функции $y' = e^{x-b} - 1$. В точке минимума производная равна нулю, а значение функции $y = -3$, т. е. имеет место система уравнений

$$\begin{cases} e^{x-b} - 1 = 0, \\ e^{x-b} - x = -3. \end{cases}$$

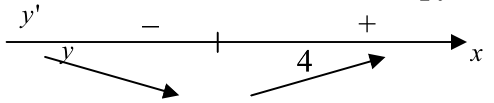
Вычтем из первого уравнения второе: $x - 1 = 3$, откуда $x = 4$. Подставим это значение x в первое уравнение системы: $e^{x-b} = 1$, $4 - b = 0$, $b = 4$.

Итак, получена функция

$$y = e^{x-4} - x. \qquad (31)$$

Теперь необходимо проверить, действительно ли минимальное значение функции (31) равно –3. Найдем производную этой функции $y' = e^{x-4} - 1$ и установим, что функция (31) имеет единственную критическую точку $x = 4$. Нетрудно подсчитать, что $y'(3) = e^{-1} - 1 < 0$, $y'(5) = e - 1 > 0$.

Из рисунка видно, что в точке $x = 4$ функция принимает минимальное



значение $y(4) = 1 - 4 = -3$. Таким образом, условиям задачи удовлетворяет единственное значение параметра $b = 4$.

Ответ: $b = 4$.

8.1 Задачи для самостоятельного решения

1 При каких значениях параметра a прямая $y = ax - 3$ будет касательной к графику функции $y = \ln x$?

Ответ: $a = e^2$.

2 Определить b и c в уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$,если прямая $y = 2x + 2b$ касается параболы в точке $M(2;0)$.

Ответ: $b = -2,\ c = 0$.

3 Указать точку и значение a, при которых прямая $y = x - 1$ касается параболы $y = ax^2$.

Ответ: $x = 2,\ a = \frac{1}{4}$.

4 При каких значениях p через точку $B(p; -1)$ можно провести три различные касательные к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 3$?

Ответ: $p \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

5 Найти все отрицательные a, для каждого из которых касательные к параболе $y = (x-1)^2$, проведенные через точку оси $OУ$ с ординатой a, высекают не оси OX отрезок длины 4.

Ответ: a = -15.

6 Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = -x^3 + ax^2 - 3ax - 1$ убывает на R.

Ответ: [0; 9].

7 Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = x^3 - ax^2 + 3ax + 1$ не является монотонной на R.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (9; +\infty)$.

8 Найдите все такие положительные значения параметра b, что функция $y = \ln x - bx^2$ убывает на интервале $(2; +\infty)$.

Ответ: $b \in [1/8; +\infty)$.

9 При каких положительных значениях параметра a максимум функции $y = \ln x - ax$ равен 2?

Ответ: $a = \frac{1}{e^3}$.

10 Найти все такие положительные значения параметра a, что функция $y = ax^2 - \ln x$ убывает на интервале (0;5).

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{50}\right)$.

11 При каких значениях a функция $y = x^6 e^{-x}$ имеет ровно один экстремум на отрезке $[a; a+7]$?

Ответ: $[-7; 1) \cup (0; 6]$.

12 Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = -x^3 + ax^2 - 3ax - 1$ убывает на R.

Ответ: $[0;9]$.

13 Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = x^3 - ax^2 + 3ax + 1$ не является монотонной на R.

Ответ: $(-\infty;0) \cup (9;+\infty)$.

14 Найти критические точки функции $y = 0{,}5e^{2x} + (1-a)e^x - ax + \sin 2$, если $a > 0$.

Ответ: $\ln a$.

15 Стороны треугольника лежат на осях координат и на касательной к графику функции $y = -x^2 + 6x - 9$ в точке, абсцисса которой b удовлетворяет условию $0 \le b \le \dfrac{5}{2}$. Найти значение b, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

Ответ: $b = 1$.

16 При каких p наименьшее значение функции $g(x) = -x^3 + 2px^2 - 2{,}25px$ на отрезке $\left[-3\sqrt{2}; 3\right]$ достигается в двух различных точках?

Ответ: $p = -\dfrac{12}{103}\left(19\sqrt{2} - 1\right)$ и $p = 2{,}25$.

17 Из заготовки, имеющей форму шара диаметром 12 см вытачивается прямой цилиндр с высотой h см. При каком значении h объем вытачиваемого цилиндра максимален?

Ответ: $h = 2\sqrt{3}$.

18 Найти m и n такие, при которых функция $y = \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2 - 6x + 14}, & x \le 1 \\ mx + n, & x > 1 \end{array}\right.$ не имеет критических точек. В ответе записать $6m + 3n$.

Ответ: 7.

19 Найти m и n такие, при которых функция $y=\begin{cases}\sqrt{x^2+3x+5}, & x\le 1\\ mx+n, & x>1\end{cases}$ имеет одну критическую точку. В ответе записать $12m+6n$.

Ответ: 23.

20 Найти все значения параметра α, удовлетворяющие неравенствам $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, при каждом из которых минимум функции $f(x)=3x^4+4x^2(\cos\alpha-\sin\alpha)-3x^2\sin 2\alpha$ на отрезке $-\sin\alpha\le x\le\cos\alpha$ принимает наименьшее значение.

Ответ: $arctg\frac{2\sqrt{31}-7}{5};\ \frac{\pi}{2}-arctg\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$.

Список использованных источников

1 **Вавилов, В.В.** Алгебра: задачи по математике /В.В.Вавилов [и др.]. – М.: Изд-во «Наука», 1987.

2 **Вавилов, В.В.** Уравнения и неравенства: задачи по математике /В.В.Вавилов [и др.]. – М.: Изд-во «Наука», 1987.

3 **Горнштейн, П.И.** Задачи с параметрами /П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир – М.: Илекса; Харьков: Гимназия, 1998.

4 **Дорофеев, Г.В.** Пособие по математике /Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов. – М.: Наука, 1970.

5 **Дорофеев Г.В.** Пособие по математике для поступающих в ВУЗы /Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов. – М.: Изд-во «Наука», 1972.

6 **Кострикин, А.И.** Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры /А.И. Кострикин. – М.: Изд-во «Физико-математическая литература», 2000.

7 **Кравцев, С.В.** Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных /С.В. Кравцев [и др.]. – М.: Экзамен, 2001.

8 **Мельников, И.И.** Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах /И.И. Мельников, И.Н. Сергеев. – М.: Изд-во МГУ, 1990.

9 **Мерзляк, А.Г.** Неожиданный шаг, или Сто тринадцать красивых задач /А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир – Киев, 1993.

10 **Московский университет:** Справочник для поступающих. – М.: Изд-во «Наука», 1970 – 2001.

11 **Сикорская Г.А.** Математика: Учебное пособие для поступающих в вузы. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2003. – 474с.

12 **Ткачук, В.В.** Математика – абитуриенту. – М.: Теис, 1994.

13 **Чаплыгин, В.Ф.** Задачи с параметрами по алгебре и анализу /В.Ф.Чаплыгина, Н.Б. Чаплыгина. – Ярославль. 1998.

14 **Чучуев, И.И.** Уравнения вида $f(f(x))=f(h(x))$ и нестандартные методы решения /И.И.Чучуев, С.И. Мещерякова //Математика в школе. – 1995. - №3.

15 **Шарыгин, И.Ф.** Факультативный курс по математике: Решение задач (11 класс) /И.Ф.Шарыгин, В.И.Голубев. – М.: Просвещение, 1991.

1

16 **Шестаков, С.А.** Уравнения с параметром /С.А.Шестаков, Е.В.Юрченко. – М.: Слог, 1993.