

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

В. Н. ЕВСЮКОВ

# **НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программе высшего профессионального образования по техническим специальностям.

Оренбург 2007

УДК 681.5 (07)  
ББК 32.965 я 7  
Е 25

Рецензент  
доктор технических наук, профессор Н. З. Султанов

Е 25 **Евсюков В. Н.**  
**Нелинейные системы автоматического управления: учебное пособие для студентов вузов / В.Н. Евсюков. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. - 172 с.**

**ISBN**

Учебное пособие предназначено для студентов по курсу «Теория автоматического управления», специальностей 220301.65, 230101.65 и других. В учебном пособии дано понятие о нелинейных системах и методах их исследования (по фазовой траектории, метод точечных преобразований, метод гармонического баланса, метод статистической линеаризации). Показано определение устойчивости по второму (прямому) методу Ляпунова, по методу В. Попова, по методу Гольдфарба, определение границ абсолютной устойчивости и дополнительной области устойчивости. Рассмотрены вопросы качества регулирования и методы компенсации нелинейной характеристики. По основным разделам приводятся вопросы для самоконтроля и задачи.

ББК 32.965 я 7

Е  $\frac{2402000000}{6Л9-07}$

ISBN

© Евсюков В. Н., 2007  
© ГОУ ОГУ, 2007

# Содержание

	<b>Введение</b> .....	5
<b>1</b>	<b>Понятие о нелинейных системах</b> .....	5
1.1	Введение.....	6
1.2	Классификация нелинейных характеристик .....	11
1.3	Типовые нелинейные звенья и их статические характеристики.....	14
1.4	Анализ методов исследования нелинейных систем.....	17
<b>2</b>	<b>Методы исследования нелинейных систем</b>	
2.1	Введение.....	19
2.2	Метод фазовых траекторий.....	19
2.2.1	Общие понятия о фазовом пространстве.....	19
2.2.2	Получение уравнения фазовой траектории.....	21
2.2.3	Влияние нелинейных элементов на характеристику выходного сигнала.....	27
2.2.4	Построение фазовой траектории нелинейных элементов типа «люфт» и «сухое трение».....	30
2.2.5	Предельные циклы фазовой траектории.....	32
2.3	Метод точечных преобразований.....	35
2.4	Метод гармонической линеаризации.....	39
2.4.1	Основные положения.....	39
2.4.2	Получение расчётной структурной схемы.....	41
2.4.3	Определение гармонической передаточной функции при однозначной характеристики релейного элемента.....	44
2.4.4	Определение гармонической передаточной функции при гистерезисной характеристики релейного элемента.....	47
2.4.5	Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейных звеньев.....	50
<b>3</b>	<b>Релейные системы автоматического регулирования.</b>	
3.1	Особенности релейных систем.....	54
3.2	Методы анализа релейных систем.....	55
3.2.1	Анализ релейной системы методом фазовых траекторий.....	56
3.2.2	Релейная система со скользящим режимом.....	64
3.2.3	Использование скользящего режима в релейных системах.....	69
3.2.4	Релейные системы с логическим переключающим устройством.....	71
3.2.5	Логические алгоритмы управления.....	74
3.2.6	Вибрационная линеаризация реле.....	77
3.2.7	Анализ релейной системы методом Гольдфарба.....	81

<b>4</b>	<b>Устойчивость нелинейной системы</b>	
4.1	Введение.....	90
4.2	Анализ устойчивости по второму (прямому) методу Ляпунова....	91
4.3	Определение устойчивости по функции Ляпунова.....	94
4.4	Критерии абсолютной устойчивости В.М. Попова .....	101
4.5	Определение границ абсолютной устойчивости через параметры линейной части системы.....	111
4.6	Определение границ дополнительной области устойчивости.....	113
4.7	Область рабочего автоколебательного режима.....	117
<b>5</b>	<b>Качество регулирования нелинейных систем</b>	
5.1	Общие положения.....	120
5.2	Анализ симметричных автоколебаний.....	120
5.2.1	Анализ симметричных автоколебаний одноконтурной САУ по диаграмме качества.....	121
5.2.2	Анализ симметричных автоколебаний многоконтурной САУ по диаграмме качества.....	127
5.2.3	Построение графика переходного процесса по диаграмме качества.....	131
5.3	Коррекция нелинейных систем.....	135
5.3.1	Способы коррекции.....	137
5.3.2	Компенсация влияния нелинейности в виде зоны нечувствитель- ности.....	136
5.3.3	Компенсация влияния нелинейности путем включения в цепь звена с желаемой характеристикой.....	137
5.3.4	Компенсация влияния нелинейности с помощью дополнительной обратной связи.....	138
5.3.5	Псевдолинейные корректирующие устройства.....	141
<b>6</b>	<b>Случайные процессы в нелинейных системах</b>	
6.1	Введение.....	145
6.2	Основные характеристики случайного процесса.....	146
6.3	Спектральная плотность случайного процесса.....	150
6.4	Анализ точности работы линейной системы при случайном воздействии.....	152
6.5	Особенности расчета случайного процесса в нелинейной системе.....	156
6.6	Определение коэффициентов статистической линеаризации.....	158
6.7	Анализ нелинейных разомкнутых систем методом статистической линеаризации .....	163
6.8	Анализ нелинейных замкнутых систем методом статистической линеаризации .....	165
	<b>Список использованных источников</b>	171

## Предисловие

Изучение динамических свойств нелинейных систем автоматического управления теперь стало совершенно необходимой составной частью инженерного проектирования автоматических систем. Строго говоря, все реальные системы управления являются в большей или меньшей степени нелинейными. С инженерной точки зрения допустимо их рассматривать как линеаризованные, если ошибка линеаризации в пределах точности расчета. При этом используется *теория линейных САУ*, как более простая и методически хорошо разработанная. Если нелинейные характеристики элементов САУ существенно изменяют динамическую характеристику систем управления и выявляют её новые качества, то необходимо использовать *теорию нелинейных систем*.

Теория нелинейных систем базируется на теории линейных систем и при этом расширяет понятия об управлении. Она позволяет теоретически определить такие свойства системы, которые по теории линейных систем не определяются. Основная задача автора состоит в том, чтобы показать эти динамические особенности нелинейных систем управления и основные методы их расчёта. Более полный и точный расчет проводится с использованием ЭВМ и в данном учебном пособии не рассматривается.

Последовательность изложения материала следующая. В начале дается общее понятие о нелинейных системах, и классификация нелинейных характеристик (раздел 1). Затем рассматриваются основные методы исследования нелинейных систем. Основное внимание уделено методу фазовых траекторий и методу гармонической линеаризации (раздел 2). В отдельную главу выделен анализ релейных систем, как наиболее широко используемых и имеющих сравнительно простой метод анализа (раздел 3). При анализе устойчивости нелинейной системы в основу положен второй (прямой) метод Ляпунова. Показаны различные варианты определения устойчивости по В. Попову и по Гольдфарбу (раздел 4). Вопросы качества процесса управления анализировались с использованием метода гармонической линеаризации и дополнительно показаны способы компенсации влияния нелинейности (раздел 5). Подробно рассмотрены методы анализа случайных процессов в нелинейной системе. В начале показан метод анализа случайных процессов в линейной системе и затем показаны особенности анализа случайных процессов в нелинейной системе с использованием метода статистической линеаризации (раздел 6).

В виду ограничения объема учебного пособия ряд интересных видов нелинейных систем (с несимметричными нелинейными характеристиками, с несколькими нелинейными элементами, цифровые системы и др.) не рассматривались. Некоторые методы расчёта только упоминались без их подробного рассмотрения. Более полно эти методы можно изучить по используемой литературе.

Профессор Оренбургского  
государственного университета

В.Н. Евсюков.

# 1 Понятие о нелинейных системах

## 1.1 Введение

Основные вопросы по теории автоматического управления вначале рассматриваются в линейных системах с постоянными коэффициентами. [1,2,3] Или анализ реальной системы заменяется анализом её линейной моделью, которую в общем виде можно представить после преобразования по Лапласу в виде

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n)x(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_{m-1} p + b_m)U(p) + (d_0 p^k + d_1 p^{k-1} + d_2 p^{k-2} + \dots + d_{k-1} p + d_k)f(p) = \\ = A(p)x(p) + B(p)U(p) + D(p)f(p),$$

где  $A(p)$  – полином, характеризующий собственное движение системы;  
 $B(p)$  – полином, характеризующий управляющие воздействие на систему;  
 $D(p)$  – полином, характеризующий возмущающее воздействие на систему;

Если начальные условия ненулевые, тогда изображение по Лапласу дифференциального уравнения, характеризующее влияние ненулевых начальных условий, будет иметь вид.

$$M(p) = x_0 p^{n-1} + (x_1 + x_0 a_1) p^{n-2} + (x_2 + a_1 x_1 + a_0 x_0) p^{n-3} + (x_3 + a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_0) p^{n-4} + \\ + (x_{n-3} + a_1 x_{n-3} + \dots + a_{n-3} x_1 + a_{n-2} x_0) + (x_{n-1} + a_1 x_{n-2} + \dots + a_{n-2} x_1 + a_{n-1} x_0)$$

где  $x_0$  – начальное значение регулируемой величины;  
 $x_1$  – первая производная по начальному значению регулируемой величины;  
 $x_2$  – вторая производная по начальному значению регулируемой величины;  
 $x_3$  – третья производная по начальному значению регулируемой величины;  
 $x_n$  –  $n$ -ая производная по начальному значению регулируемой величины;

В общем случае значение регулируемой величины  $x(p)$  в преобразовании по Лапласу при управляющем воздействии  $U(p)$ , возмущающем воздействии  $f(p)$  и при ненулевых начальных условиях имеет вид:

$$x(p) = \frac{B(p)}{A(p)}U(p) + \frac{D(p)}{A(p)}f(p) + \frac{M(p)}{A(p)},$$

где  $\frac{B(p)}{A(p)}$  — передаточная функция управляющего воздействия;  
 $\frac{D(p)}{A(p)}$  — передаточная функция возмущающего воздействия;  
 $\frac{M(p)}{A(p)}$  — передаточная функция ненулевых начальных условий.

Такое определение регулируемой величины  $x(p)$  обосновывается на том, что в линейных системах выполняется *принцип суперпозиции* – при сложении различных воздействий на систему её реакция равна сумме реакций от каждого отдельного воздействия. Это позволяет однозначно определять динамическую характеристику системы от каждого воздействия отдельно. В нелинейной системе такой однозначной зависимости нет. Её параметры при различных условиях работы изменяются. Её динамические свойства при изменении внешнего воздействия или начальных условиях работы изменяются. Принцип суперпозиции – не выполняется. Реакция системы от каждого воздействия взаимосвязаны между собой. Есть и другие особенности поведения нелинейных систем как в установившемся, так и в переходном процессе, которые при расчёте системы по линейным дифференциальным уравнениям не определяются. Рассмотрим эти особенности [4,5,6].

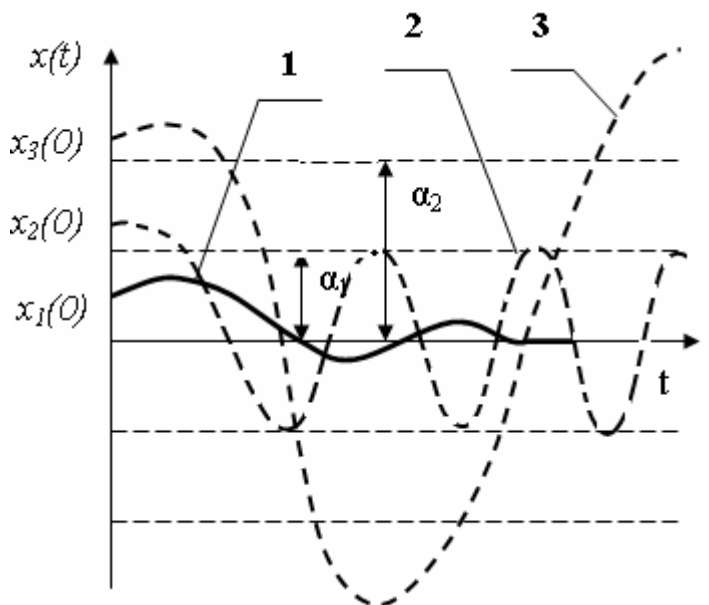


Рисунок 1.1 – Графики переходных процессов в нелинейной системе

В линейных системах при изменении величины начальных условий пропорционально изменяется только масштаб переходного процесса, а вид переходного процесса и его динамические показатели остаются без изменения. В нелинейной системе при изменении величины начальных условий могут существенно измениться динамические свойства. Нелинейная система при этом может иметь два вида установившегося значения регулируемой величины: *устойчивое состояние равновесия и устойчивое состояние автоколебаний*.

На рисунке 1.1 показаны различные виды переходных процессов в нелинейной системе в зависимости от различных начальных условий. Так при начальных условиях в пределах некоторой величины  $a_1$  ( $x_1(0) < a_1$ ) собственные колебания системы являются затухающими и система переходит в устойчивое состояние равновесия (кривая 1). При начальных условиях  $a_1 < x_2(0) < a_2$  нелинейная система переходит в устойчивый колебательный режим (кривая 2). Причем, амплитуда ус-

тановившихся автоколебаний может быть больше величины отклонения при начальных условиях. Но возможны случаи, когда амплитуда автоколебаний будет меньше, чем отклонение от начальных условий.

Такие незатухающие автоколебания возникают при отсутствии внешних периодических воздействий за счёт внутренних свойств системы. При этом внутри системы возникает равенство потери энергии и притока энергии от внутреннего источника во время автоколебания. Таким источником энергии обычно служит регулируемый объект или усилитель. Этот баланс между потерей энергии и её притоком возникает при наличии в системе нелинейного звена. В ряде случаев в системе возможны возникновения автоколебаний с разными частотами при разных начальных условиях. Например, после небольших начальных отклонений в системе можно наблюдать высокочастотные незатухающие автоколебания с небольшой амплитудой. Если начальные отклонения будут выше определённого порога, то устанавливаются низкочастотные незатухающие автоколебания со значительно большей амплитудой. Могут возникать даже многочастотные колебания (биение частот).

Возникшие в системе автоколебания могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Неустойчивые автоколебания при малых случайных воздействиях могут легко переходить в другой периодический режим с другой амплитудой и с другой частотой. Устойчивые автоколебания имеют постоянную амплитуду и частоту. При случайных малых отклонениях система возвращается к этому автоколебательному режиму работы. Таким образом, к устойчивому автоколебательному режиму могут сходитьсь периодические процессы «снизу» (при малых начальных отклонениях) и «сверху» (при больших начальных отклонениях). Амплитуда и частота такого устойчивого автоколебательного режима в нелинейной системе может не зависеть от начальных условий, а зависеть только от вида нелинейного элемента и параметров системы.

Вторая существенная особенность нелинейных систем в понятие устойчивости, которое отличается от понятия устойчивости линейных систем. В линейных системах устойчивость полностью зависит от корней характеристического уравнения. Согласно теореме Ляпунова, если все корни имеют отрицательную действительную часть, то система устойчива. Причем, устойчивость линейных систем не зависит от вида и величины воздействий. Устойчивость нелинейной системы зависит от величины воздействия. Одна и та же нелинейная система при одном воздействии может перейти в новое установившееся состояние, а при другом воздействии стать неуправляемой. Для анализа устойчивости нелинейных систем введены понятия: устойчивость "в малом", устойчивость "в большом", устойчивость "в целом". Причём система может быть устойчивая "в малом", но неустойчивая "в большом" и наоборот. Если система устойчива при любых воздействиях, то она считается устойчивой "в целом". На рисунке 1.1 показан переходной процесс системы устойчивой «в малом» (кривая 1). При  $t \rightarrow \infty$  колебания затухают и отклонение и отклонение от заданного значения  $\Delta x \rightarrow 0$ . Переходной процесс 2 соответствует устойчивости «в большом» (кривая 2). При  $t \rightarrow \infty$  возникает устойчивое колебание с постоянной амплитудой. Переходной процесс 3 соответствует неустойчивой системе (кри-



вая 3). При  $t \rightarrow \infty$  возникает возрастающее колебание с амплитудой  $A \rightarrow \infty$  (теоретически). В нелинейной системе возможны случаи, когда при любом начальном условии колебания затухают и отклонение от заданного значения  $\Delta x \rightarrow 0$ . Такая система считается устойчивой "в целом". Возможны случаи, когда при любых начальных условиях возникает устойчивое автоколебание. Такая система считается устойчивой "в большом", но неустойчива "в малом".

Если при изменении начальных условий система может попасть в область с колебательным переходным процессом, а для ее работы необходим монотонный переходной процесс, то с помощью отрицательной дифференцирующей обратной связи в нелинейном звене можно создать так называемый *скользящий режим работы*. При этом режиме работы колебания регулируемого параметра переходят, образно говоря, в «микрколебания» относительно экспоненты и установившейся режим работы стремится к  $\Delta A \rightarrow \infty$ . Таким образом, из области автоколебаний система переводится в область монотонного переходного процесса.

Изменение режимов работы нелинейной системы рассматривалось в зависимости от начальных условий. Если при этом учесть внешнее входное воздействие, то режим работы может существенно измениться. Например, если на нелинейное звено подавать высокочастотный периодический сигнал, то его нелинейная характеристика может линеаризоваться. Такая линеаризация нелинейной зависимости называется *вибрационная линеаризация*. Она позволяет нелинейную систему регулирования делать более устойчивой и надежной. Например, если нелинейность звена в виде зазора или сухого трения, то с помощью вибрационной линеаризации выходной сигнал становится, близкой по своему виду к прямолинейной зависимости. Такой метод еще называется *вибрационным сглаживанием*.

Если на систему подавать сигнал, частота которого может совпадать с частотой собственных колебаний системы, то в системе могут возникать резонансные явления, может произойти скачок амплитуды. В общем случае при приложении внешних периодических воздействий возникает наложение собственных и внешних колебаний. При увеличении амплитуды внешних воздействий может произойти срыв автоколебаний собственной частоты и система переходит на частоту внешних колебаний. Такой режим работы нелинейной системы называется *синхронный режим*. Важна также скорость приложения внешнего воздействия. При скачкообразном воздействии может быть такое перерегулирование, что выводит систему в совершенно другую область притяжения и с другим режимом, по сравнению с тем случаем, когда такое же по величине воздействие было бы подано более плавно.

Для управления существенно нелинейным объектом или со значительным запаздыванием в системе управления используется *логический алгоритм управления* (ЛАУ), который обеспечивает переменную структуру регулятора. В общем случае ЛАУ представляет собой нелинейную функцию в зависимости от параметров работы системы. ЛАУ может скачкообразно или по заданной программе изменять структуру системы. Это позволяет значительно повысить точ-

ность и быстродействие системы управления, позволяет расширить область допустимых нагрузок и управляющих воздействий.

Таким образом, анализ системы по линеаризованному дифференциальному уравнению даёт приближённую оценку динамических свойств нелинейной системы и не позволяет учесть следующие её особенности:

- зависимость устойчивости системы от уровня воздействия на неё;
- различные виды установившихся режимов;
- изменение динамических свойств системы при изменении режимов её работы;

Такие особенности в работе реальной автоматической системы возникают, если в системе есть хотя бы один нелинейный элемент (звено).

***Система автоматического управления считается нелинейной, если она содержит хотя бы одно звено с нелинейной характеристикой.***

Уравнение звена считается нелинейным, если некоторые координаты или их производные входят в уравнение в виде произведения или степени, а так же в виде нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В данном учебном пособии рассмотрено влияние статических нелинейных зависимостей на динамические характеристики системы.

Нелинейные звенья, с одной стороны, делают поведение системы менее предсказуемой. Но, с другой стороны, нелинейные звенья могут специально вводиться в систему для придания системе управления особых свойств, которые принципиально недостижимы с помощью линейных звеньев. Например, для уменьшения динамической ошибки или для получения максимального быстродействия. В ряде случаев нелинейные регулирующие устройства оказываются более простыми и надёжными, чем линейные. Поэтому нелинейные элементы широко используются в системах самонастройки и в оптимальных системах управления.

### **Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.1**

- 1 Какая САУ считается нелинейной?
- 2 Почему линейную систему анализировать математически проще, чем нелинейную?
- 3 Как определяется “принцип суперпозиции”?
- 4 Какие качества нелинейной системы нельзя определить по линеаризованному дифференциальному уравнению?
- 5 Какие два вида устойчивого состояния имеет нелинейная система управления?
- 6 Возникновение установившегося автоколебательного режима в нелинейной системе может зависеть от начальных условий?
- 7 Может ли возникновение автоколебательного режима не зависеть от начальных условий?
- 8 Какие три вида устойчивости имеет нелинейная система управления?
- 9 Что значит система устойчивости «в целом»?

- 10 Как изменяется характеристика нелинейного звена при скользящем режиме?
- 11 Как производится вибрационная линеаризация?
- 12 Какой режим работы нелинейной системы называется синхронный режим работы?
- 13 Как используется логический алгоритм управления?
- 14 В чём преимущество нелинейных регулирующих устройств?

## 1.2 Классификация характеристик нелинейных элементов

При рассмотрении нелинейного элемента принимаем, что выходная величина зависит от одной переменной  $x_{вх}$

*Если каждому значению  $x_{вх}$  соответствует одно определённое значение  $x_{вых}$ , то такую характеристику называют однозначной (рисунок 1.2).*

*Если одному значению  $x_{вх}$  соответствует несколько значений  $x_{вых}$ , то такую характеристику называют многозначной (рисунок 1.3).*

При этом число всевозможных значений выходной величины  $x_{вых}$  при заданном значении входной величины  $x_{вх}$  чаще всего два. Например, за счёт люфта в механическом звене (рисунок 1.3 б), или петля гистерезиса в электромагнитной системе (рисунок 1.4 з). При малом значении петли гистерезиса этой величины пренебрегают, что значительно упрощает расчёт. В общем случае число возможных значений выходной величины может быть бесконечно много, но в каких-то пределах по условию работоспособности системы.

Динамическая характеристика нелинейной системы не всегда существенно отличается от динамической характеристики линейной системы. Например, при незначительной величине люфта, кулоновского трения, насыщения усилителя и т.д. Такие статические характеристики нелинейного элемента называются несущественно-нелинейными.

*Несущественно-нелинейной статической характеристикой называется такая, которая можно аппроксимировать линейной зависимостью без нарушения качественных показателей нелинейной системы*

Но при расчёте такой нелинейной системы могут измениться *количественные показатели её работы*. Если ошибка аппроксимации (отклонение действительного значения нелинейной зависимости) в пределах точности расчёта, то такая аппроксимация допустима. Например, в пределах изменения входного сигнала от минус  $\alpha$  до  $\alpha$  (смотри рисунок 1.2 а).

Динамическая характеристика нелинейной системы может существенно зависеть от нелинейного элемента и иметь свои специфические особенности. Например, когда при изменении входного сигнала устойчивый переходной процесс в такой нелинейной системе может стать неустойчивым. Заметим,

что в линейной системе устойчивость не зависит от входного сигнала. Такие статические характеристики нелинейного элемента называются существенно-нелинейными.

**Существенно-нелинейной статической характеристикой называется такая, которую нельзя аппроксимировать линейной зависимостью без нарушения качественных показателей нелинейной системы.**

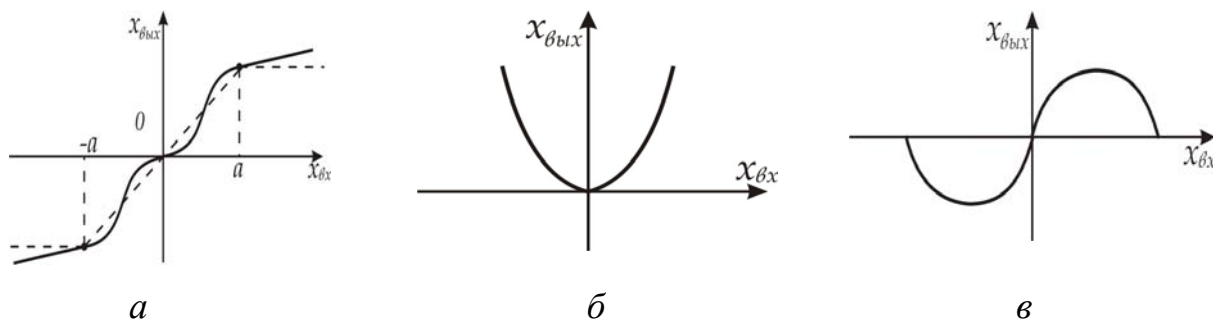
Например, если в нелинейной системе в качестве усилителя используется идеальное реле (без зоны нечувствительности), то может возникнуть автоколебательный режим её работы. В линейной системе такое новое качество её работы определить нельзя.

Нелинейные характеристики делятся на *естественные и искусственные*.

**Естественная нелинейная характеристика элемента является результатом его физической природы и принципа действия.**

**Искусственная нелинейность специально вводится в характеристику элементов с целью получения новых динамических свойств системы, которые другим методом получить достаточно сложно.**

Нелинейные характеристики могут иметь различные типы симметрии: чётно-симметричная характеристика, нечётно-симметричная характеристика, несимметричная характеристика [5,6].



*a* - нелинейная характеристика с насыщением;

*б* - нелинейная характеристика  $x_{\text{вых}} = k \cdot x_{\text{вх}}^2$ ;

*в* - нелинейная характеристика  $x_{\text{вых}} = k \cdot \sin x_{\text{вх}}$ .

Рисунок 1.2 – Характеристики элементов с гладкой однозначной нелинейностью

**Если нелинейная характеристика удовлетворяет условию  $F(x) = F(-x)$ , то такую характеристику называют симметричной относительно оси ординат или чётно-симметричной (рисунок 1.2 б).**

**Если нелинейная характеристика удовлетворяет условию  $F(x) = -F(-x)$ , то такую характеристику называют симметричной относительно начала координат или нечётно-симметричной (рисунок 1.2 в).**

***Если нелинейная характеристика не удовлетворяет ни одному из приведённых условий, то такую характеристику называют несимметричной.***

Нелинейные характеристики разделяются на гладкие, ломанные и кусочно-линейные.

***Если в любой точке характеристики существует производная  $dx_{\text{вых}}/dx_{\text{вх}}$ , то такая характеристика считается гладкой (рисунок 1.2).***

***Если характеристика имеет изломы, в которых производная  $dx_{\text{вых}}/dx_{\text{вх}}$  однозначно не определяется, то такая характеристика считается ломаной (рисунок 1.3)***

***Если характеристика между точками излома имеет прямолинейную зависимость, то такая характеристика считается кусочно-линейной (рисунок 1.3)***

В ряде случаев для упрощения расчёта гладкую характеристику приближенно заменяют кусочно-линейной (рисунок 1.2 а), которые разделяются на непрерывные и разрывные.

***Если в точке излома характеристика имеет однозначное значение, то такая характеристика считается непрерывной (рисунок 1.3)***

***Если в точке излома характеристика имеет неоднозначное значение, то такая характеристика считается разрывной (рисунок 1.5)***

Типичным примером разрывной характеристики является релейная характеристика, в которой при значении входной величины соответствующей срабатыванию реле, выходная величина имеет два значения: реле ещё не сработало и реле уже сработало. При этом выходная величина, образно говоря, разрывается в точке излома на две части, разделённых на величину срабатывания реле.

Нелинейные характеристики с однозначной и неоднозначной нелинейностью - это *статистические характеристики*. Нелинейные характеристики в виде дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые содержат производные (или другие комбинации) – это *динамические характеристики*. Нелинейные характеристики, которые изменяют параметры системы по правилам «если-то» называются *логическими характеристиками*.

Все статические характеристики разделяются на типовые и нетиповые (или особые)

***Типовые статические характеристики при соответствующем упрощении могут быть представлены кусочно-линейными зависимостями симметрично относительно начала координат (нечётно-симметричные).***

**Нетиповые статические характеристики не могут быть представлены кусочно-линейными зависимостями симметрично относительно начала координат.**

Типовые нелинейные звенья могут иметь однозначную (рисунок 1.3) и неоднозначную (рисунок 1.4) характеристику. Могут быть непрерывными (рисунок 1.2) и разрывными (рисунок 1.5).

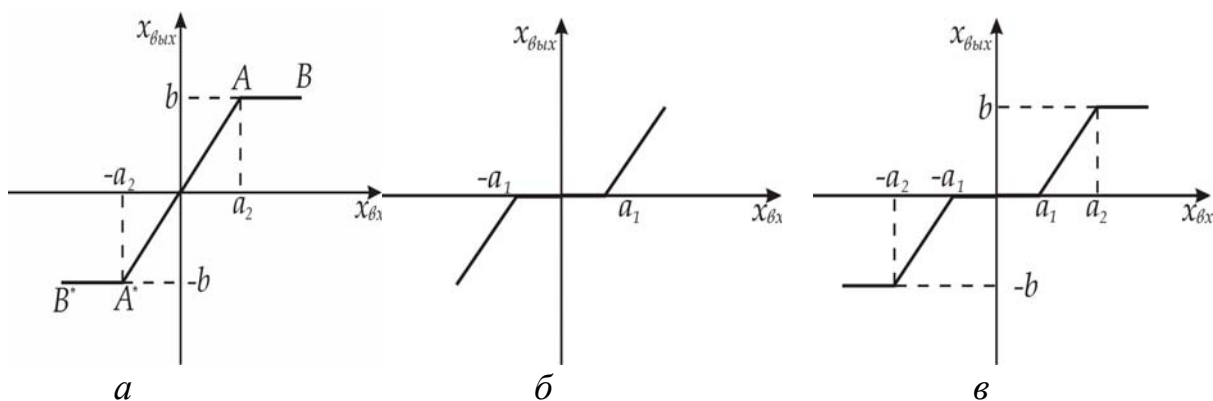
### Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.2

- 1 Отличие естественной и искусственной нелинейности.
- 2 Отличие существенной и несущественной нелинейности.
- 3 Как проводится аппроксимация нелинейной зависимости прямыми линиями?
- 4 Как определяется ошибка аппроксимации?
- 5 Отличие однозначной и многозначной характеристики.
- 6 Какая характеристика называется чётно-симметричной?
- 7 Какая характеристика называется нечётно-симметричной?

### 1.3 Типовые статические характеристики нелинейных звеньев

Для упрощения расчёта автоматических систем нелинейную характеристику с гладкой нелинейностью аппроксимируют характеристикой с кусочно-линейной зависимостью. Это на рисунке 1.2 *а* показано пунктирной линией.

Нелинейные характеристики могут быть разделены на однозначные (рисунок 1.3 *а, б, в*) и неоднозначные (рисунок 1.4 *а, б, в*). Рассмотрим типовые, кусочно-линейные, однозначные характеристики нелинейных элементов.



*а* - нелинейная характеристика с насыщением;

*б* - нелинейная характеристика с зоной нечувствительности;

*в* - нелинейная характеристика с насыщением и зоной нечувствительности.

Рисунок 1.3 – Характеристика элементов с кусочно-линейной однозначной зависимостью

Характеристика, показанная на рисунке 1.3 а имеет линейную зону ( $A^* A$ ) и участок насыщения ( $AB$  и  $B^* A^*$ ). Уравнение такой статической характеристики

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= k \cdot x_{\text{вх}} && \text{при } |x_{\text{вх}}| \leq a_2, \\ x_{\text{вых}} &= b \cdot \text{sign}(x_{\text{вх}}) && \text{при } |x_{\text{вх}}| > a_2 \end{aligned}$$

Примечание – Функция  $\text{sign}$  означает

$$\text{sign} = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

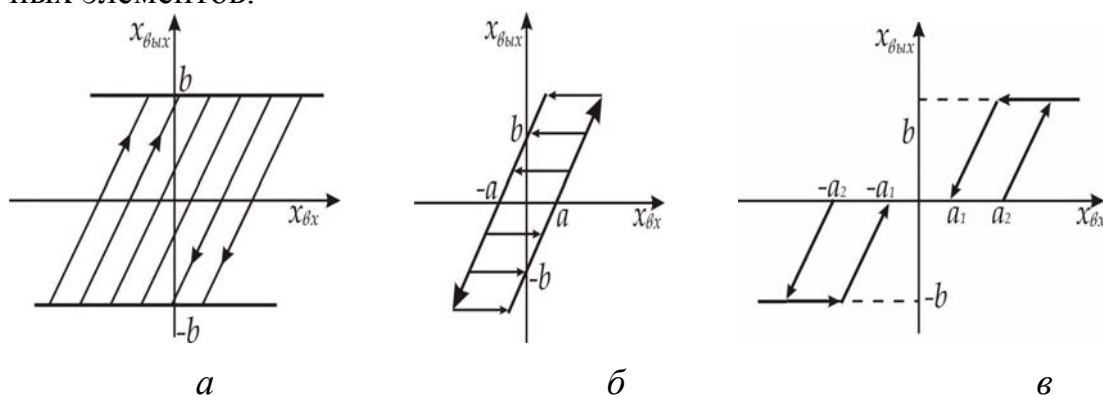
Характеристика, показанная на рисунке 1.3 б имеет зону нечувствительности при  $|x_{\text{вх}}| < a$ . Уравнение такой статической характеристики

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= 0 && \text{при } |x_{\text{вх}}| \leq a_1, \\ x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} - a_1) && \text{при } x_{\text{вх}} > a_1, \\ x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} + a_1) && \text{при } x_{\text{вх}} < -a_1. \end{aligned}$$

Характеристика, показанная на рисунке 1.3 в имеет и зону нечувствительности и участок насыщения. Уравнение статической характеристики

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= 0 && \text{при } |x_{\text{вх}}| \leq a_1, \\ x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} - a_1) && \text{при } a_2 > x_{\text{вх}} > a_1, \\ x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} + a_1) && \text{при } -a_2 < x_{\text{вх}} < -a_1, \\ x_{\text{вых}} &= b \cdot \text{sign}(x_{\text{вх}}) && \text{при } |x_{\text{вх}}| > a_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим неоднозначные кусочно-линейные характеристики нелинейных элементов.



- а - нелинейная характеристика типа “упор” для ограничения движения;
- б - нелинейная характеристика типа “люфт”, без зоны нечувствительности;
- в - нелинейная характеристика типа “люфт”, с зоной нечувствительности.

Рисунок 1.4 – Характеристика элементов с неоднозначной кусочно-линейной зависимостью

Характеристика, показанная на рисунке 1.4 *а* показывает ограничения типа “упор” в зависимости от направления движения входного сигнала. Уравнение такой характеристики

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= b && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} > 0, \\ x_{\text{вых}} &= -b && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} < 0. \end{aligned}$$

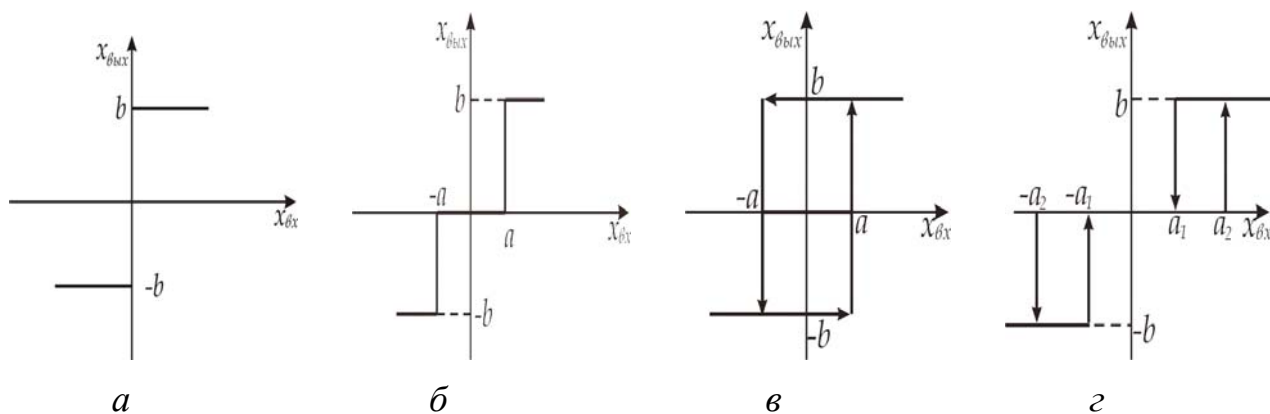
Характеристика, показанная на рисунке 1.4 *б* имеет участок насыщения  $x_{\text{вых}} = |b|$  и зону неоднозначности. Это гистерезисная характеристика типа “люфт”. Уравнение такой характеристики

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} - a) && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} > 0, \\ x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} + a) && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} < 0, \\ x_{\text{вых}} &= b \cdot \text{sign}(x_{\text{вх}}) && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} = 0. \end{aligned}$$

Характеристика, показанная на рисунке 1.4 *в* дополнительно имеет зону нечувствительности. Уравнение такой характеристики

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= 0 && \text{при } |x_{\text{вх}}| < a_1, \\ x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} - a_1) && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} > 0, \\ x_{\text{вых}} &= k(x_{\text{вх}} + a_1) && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} < 0, \\ x_{\text{вых}} &= b \cdot \text{sign}(x_{\text{вх}}) && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} = 0. \end{aligned}$$

Если в системе есть элемент с релейной характеристикой, то такая система называется релейной или дискретной системой, в которой релейный элемент осуществляет квантование сигнала по уровню.



- а* - характеристика идеального реле;
- б* - характеристика реле с зоной нечувствительности;
- в* - характеристика реле с гистерезисом;
- г* - характеристика реле с зоной нечувствительности и гистерезисом.

Рисунок 1.5 – Характеристики реле

Характеристика, показанная на рисунке 1.5 *а* – это идеальное двухпозиционное реле.

$$x_{\text{вых}} = b \cdot \text{sign}(x_{\text{вх}})$$



Характеристика, показанная на рисунке 1.5 б – это трёхпозиционное реле, в котором дополнительная позиция за счёт нечувствительности. Уравнение такой характеристики

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= 0 && \text{при } |x_{\text{вх}}| < a, \\ x_{\text{вых}} &= b \cdot \text{sign}(x_{\text{вх}}) && \text{при } |x_{\text{вх}}| > a. \end{aligned}$$

Характеристика, показанная на рисунке 1.5 в – это двухпозиционное реле с гистерезисом. Его ещё называют “реле с памятью”. Оно “помнит” своё предыдущее состояние и в пределах  $|x_{\text{вх}}| < a$  сохраняет это своё значение. Уравнение такой характеристики

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= b \cdot \text{sign}(x - a) && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} > 0, \\ x_{\text{вых}} &= b \cdot \text{sign}(x + a) && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} < 0, \\ x_{\text{вых}} &= +b && \text{при } x_{\text{вх}} > -a ; \quad \dot{x}_{\text{вх}} < 0, \\ x_{\text{вых}} &= -b && \text{при } x_{\text{вх}} < a ; \quad \dot{x}_{\text{вх}} > 0, \end{aligned}$$

Характеристика, показанная на рисунке 1.5 г – это трёхпозиционное реле с гистерезисом, в котором дополнительная позиция за счёт зоны нечувствительности. Уравнение такой характеристики

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= \frac{b}{2} [\text{sign}(x - a_2) + \text{sign}(x + a_1)] && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} > 0, \\ x_{\text{вых}} &= \frac{b}{2} [\text{sign}(x + a_2) + \text{sign}(x - a_1)] && \text{при } \dot{x}_{\text{вх}} < 0. \end{aligned}$$

Из приведённых уравнений видно, что при отсутствии петли гистерезиса выходное воздействие реле зависит только от значения  $x_{\text{вх}}$  или  $x_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}})$ . При наличии петли гистерезиса значение  $x_{\text{вых}}$  зависит ещё от производной по  $x_{\text{вх}}$  или  $x_{\text{вых}} = f(x_{\text{вх}}, \dot{x}_{\text{вх}})$ , где  $\dot{x}_{\text{вх}}$  характеризует наличие “памяти” у реле.

#### 1.4 Анализ методов исследования нелинейных систем

Для решения задач анализа и синтеза нелинейной системы прежде всего необходимо построить её математическую модель, которая характеризует связь выходных сигналов системы, с сигналами отражающих приложенные к системе воздействия. В результате получаем нелинейное дифференциальное уравнение высокого порядка, иногда с рядом логических соотношений. Современная вычислительная техника позволяет решать любые нелинейные уравнения и требуется решить невероятно большое количество этих нелинейных дифференциальных уравнений. Затем выбрать наилучшее из них. Но при этом нельзя быть уверенным в том, что выбранное решение действительно оптимальное и неизвестно как улучшить выбранное решение. Поэтому одна из задач теории управления следующая [6,7,9].

***Создание таких методов проектирования системы управления, которые позволяют определить наилучшую структуру и оптимальные соотношения параметров системы.***

Для выполнения этой задачи нужны такие методы расчета, которые позволяют в достаточно простом виде определяют математические связи параметров нелинейной системы с динамическими показателями процесса управления. И при этом без нахождения решения нелинейного дифференциального уравнения. Для решения поставленной задачи нелинейные характеристики реальных элементов системы заменяют некоторыми идеализированными приближенными характеристиками. Расчет нелинейных систем по таким характеристикам дает приближенные результаты, но главное в том, что полученные зависимости позволяют связать структуру и параметры системы с ее динамическими свойствами.

В простейших случаях и в основном для нелинейной системы второго порядка применяется **метод фазовых траекторий**, который позволяет наглядно показать динамику движения нелинейной системы при различных видах нелинейного звена с учетом начальных условий. Однако по этому методу трудно учесть различные внешние воздействия.

Для системы высокого порядка используется **метод гармонической линеаризации**. При обычной линеаризации нелинейная характеристика рассматривается как линейная и теряет некоторые свойства. При гармонической линеаризации специфические свойства нелинейного звена сохраняются. Но этот метод является приближенным. Он используется при выполнении ряда условий, которые будут показаны при расчете нелинейной системы по этому методу. Важное свойство этого метода в том, что он непосредственно связывает параметры системы с динамическими показателями процесса регулирования.

Для определения статистической ошибки регулирования при случайных воздействиях используют **метод статистической линеаризации**. Сущность этого метода в том, что нелинейный элемент заменяется эквивалентным линейным элементом, который одинаково с нелинейным элементом преобразует два первых статистических момента случайной функции: математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию (или среднее квадратическое отклонение). Есть и другие методы анализа нелинейных систем. Например, **метод малого параметра в форме Б.В. Булгакова**, **Асимптотический метод Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова** для анализа процесса во времени вблизи периодического решения. **Графо-аналитический метод** позволяет нелинейную задачу свести к линейной. **Метод гармонического баланса**, который использовал Л.С. Гольдфарб для анализа устойчивости нелинейных систем по критерию Найквиста. **Графоаналитические методы**, среди которых наибольшее распространение получил метод Д.А. Башкирова. Из всего многообразия методов исследования в данном учебном пособии будут рассмотрены: метод фазовых траекторий, метод точечных преобразований, метод гармонической линеаризации Е.П. Попова, графо-аналитический метод Л.С. Гольдфарба, критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова, метод статистической линеаризации.

## 2 Методы исследования нелинейных систем

### 2.1 Введение

Наличие нелинейной зависимости в звеньях автоматической системы не позволяет для этих звеньев использовать преобразование Лапласа. Напоминаем, что для преобразования по Лапласу временная функция должна быть непрерывная, гладкая и дифференцируемая во всех точках. Нелинейное звено может быть прерывистым с кусочно-линейной характеристикой и не дифференцируемым во всех точках. Кроме этого, при различных входных воздействиях и, соответственно, при различных режимах работы коэффициенты нелинейных звеньев изменяются и представляют собой некоторую функцию от регулирующего воздействия. Поэтому анализ и тем более синтез нелинейных систем представляет собой достаточно сложный расчёт. Полный расчёт можно сделать только для некоторых видов нелинейных звеньев, а в большинстве случаев получаем приближенное решение с рядом допущений. Например, в ряде нелинейных систем возникают высокочастотные гармоники; их расчёт весьма затруднителен и поэтому расчёт ведётся по основной гармонике. Кроме этого, если в системе есть нелинейное звено, то путём структурных преобразований это нелинейное звено отделяют от линейной части и систему представляют в виде двух обобщённых звеньев: нелинейное звено и линейная часть системы. При этом принимается допущение, что полученная после преобразования схема адекватна по своим динамическим характеристикам исходной схеме, что не всегда соблюдается.

В зависимости от поставленной задачи исследования и вида нелинейного звена используются индивидуальные методы расчета для каждого вида нелинейности. Среди большого разнообразия методов расчёта выделяют три основных метода [10,11,12].

- метод фазовых траекторий;
- метод точечных преобразований;
- метод гармонического баланса.

### 2.2 Метод фазовой траекторий

#### 2.2.1 Общие понятия о фазовом пространстве

Этот метод основан на понятии о фазовом пространстве. Известно, что состояние системы, описываемое дифференциальным уравнением, вполне определяется, если в каждый момент времени значение регулируемой величины и её  $(n-1)$  производных известно (где  $n$  – порядок дифференциального уравнения). Это даёт возможность представить состояние системы в некотором  $n$ -мерном пространстве, которое называется *фазовым пространством*.

**Фазовое пространство образовано системой координат, состоящей из регулируемой величины и её производных.**

Состояние системы в таком фазовом пространстве изобразится точкой или её состояние можно рассматривать, как задание фаз для некоторой точки М. Процесс изменения состояния системы представляет собой некоторое движение изображающей точки или изменение её фазовой траекторией движения  $\{x(t_1), x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ .

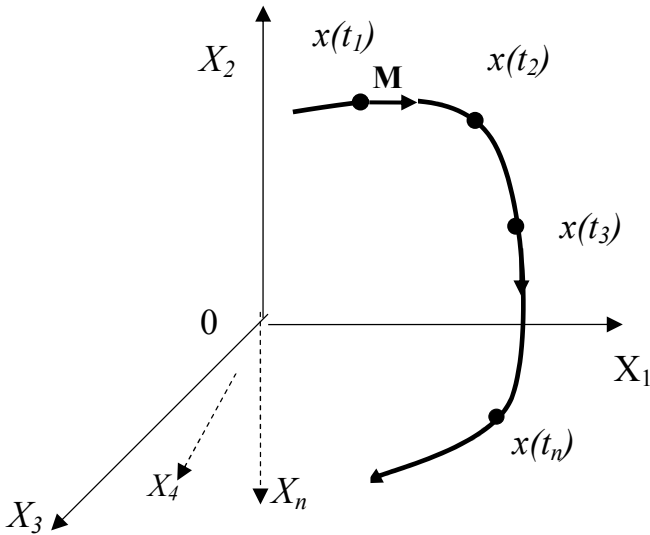


Рисунок 2.1 – Фазовая траектория точки М в фазовом пространстве

**Фазовая траектория движения показывает изменение регулируемой величины в фазовом пространстве.**

Фазовая траектория в фазовом пространстве, таким образом, даёт геометрическое представление о динамике исследуемого процесса. Но при этом координата времени отсутствует. Время отображается в неявном виде, поэтому фазовая траектория не даёт *временную динамическую характеристику системы*, а является *качественной динамической характеристикой*. Эта качественная динамическая характеристика достаточно полная. Она показывает не только значения производных

$(X_2, X_3, \dots, X_n)$  в каждый момент времени, но и закон изменения каждой производной, что по временной динамической характеристике не всегда можно определить. Кроме этого, временную динамическую характеристику (то есть кривую переходного процесса) можно построить по фазовой траектории различными способами.

Фазовая траектория показывает динамику движения системы при ненулевых начальных условиях. Эти начальные условия изображаются начальной точкой фазовой траектории. При равновесии в системе, когда изменение регулируемой величины нет и все производные по регулируемой величине равны нулю, то это состояние системы изображается конечной точкой фазовой траектории, которая называется *особой точкой* [6,7,9].

**Особая точка фазовой траектории соответствует равенству нулю всех координат фазового пространства.**

В общем случае нелинейная система может иметь различные установившиеся значения по оси  $x$ , в том числе и не в начале координат. Например, за счёт зоны нечувствительности нелинейного элемента. Тогда систему координат можно перенести в это новое установившееся значение и при этом закон изменения движения системы по производным регулируемой величины не изменя-

ется. Поэтому для удобства расчёта принимается, что *особая точка соответствует началу координат*. При изменении начальных условий, соответственно изменится фазовая траектория. В результате получаем целый набор фазовых траекторий для данной системы или *фазовый портрет системы*.

***Фазовым портретом системы называется совокупность фазовых траекторий для различных начальных условий.***

Графически изобразить фазовый портрет в  $n$ -мерном пространстве невозможно, Поэтому при анализе нелинейных систем ограничиваются двухмерной *фазовой плоскостью*, которая практически позволяет изучить все особенности поведения нелинейной системы.

***Фазовой плоскостью называется двухмерное фазовое пространство с двумя фазовыми координатами: регулируемая величина и её первая производная.***

Метод анализа по фазовой плоскости достаточно прост и отличается большой наглядностью. По оси абсцисс откладывается значение переменной  $x$ . По оси ординат откладывается значение  $y$ , где  $y = dx/dt$ . Состояние системы в каждый момент времени характеризуется значениями  $x$  и  $y$ . Изменение значений  $x$  и  $y$  на фазовой плоскости даёт возможность судить о качественной динамической характеристике системы.

### 2.2.2 Получение уравнения фазовой траектории

Рассмотрим линейную систему, которая описывается уравнением

$$(\tau^2 \cdot \rho^2 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot \rho + 1)x = 0$$

Корни характеристического уравнения в зависимости от значения  $\xi$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } |\xi| > 1 \\ \alpha_2 \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{j\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} = \alpha \pm j\omega \quad \text{при } |\xi| < 1$$

Рассмотрим различные виды фазовых траекторий для системы второго порядка в зависимости от коэффициента демпфирования [9,10].

***1 Демпфирование отсутствует ( $\xi = 0$ ).*** Такое колебательное звено называется консервативным. Корни характеристического уравнения мнимые, сопряженные  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ . Решение этого уравнения фактически является уравнение фазовой траектории в параметрической форме

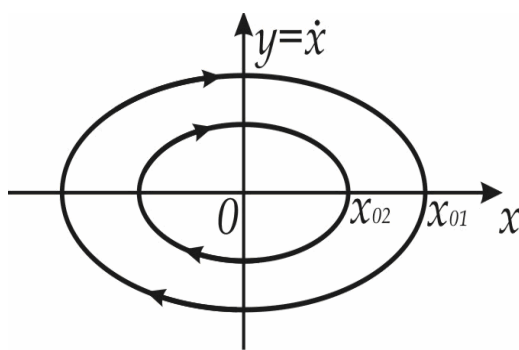
$$x = x_0 \cos \omega t, \quad \dot{x} = y = -x_0 \omega \sin \omega t,$$

Определим это уравнение в каноническом виде

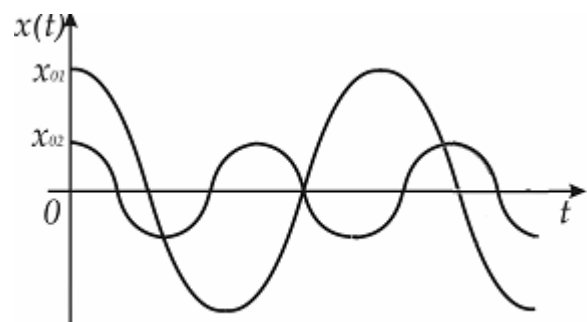
$$\frac{x^2}{x_0^2} = \cos^2 \omega t; \quad \frac{y^2}{x_0^2 \cdot \omega^2} = \sin^2 \omega t; \quad \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{x_0^2 \cdot \omega^2} = 1$$

Это уравнение эллипса с полуосями по оси абсцисс  $x = x_0$ , по оси ординат  $y = x_0 \omega$ . При различных начальных значениях  $x_0$  на фазовой плоскости получаем семейство подобных эллипсов. Через каждую точку на оси абсцисс при  $x = x_{01}$  проходит только один эллипс, который нигде не пересекается с другим эллипсом при другом значении  $x = x_{02}$ .

Таким образом, фазовые траектории имеют форму подобных эллипсов с общим центром в начале координат. Такая фазовая траектория и соответствует незатухающим колебаниям во временной области (рисунок 2.2 б) и называется *центром*. Он соответствует устойчивому предельному циклу (рисунок 2.2 а).



а – Центр



б – Переходный процесс

Рисунок 2.2 – Фазовый портрет и переходный процесс консервативного звена

**2 Слабое демпфированное ( $0 < \xi < 1$ ).** Это колебательное звено с затухающим колебанием. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью  $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$ . Решение уравнения

$$x = x_0 \cdot e^{-\alpha t} \cos \omega t; \quad \dot{x} = y = -x_0 \cdot e^{-\alpha t} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

Фактически получим уравнение фазовой траектории в параметрической форме. Учитывая, что выражение  $(\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$  имеет максимум при  $\operatorname{tg} \omega t = \omega / \alpha$ . Отсюда

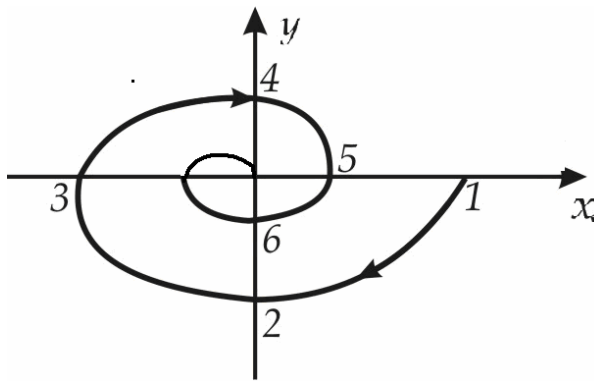
$$(\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)_{\max} = \frac{(\alpha^2 + \omega^2)^{1/2}}{\alpha}$$

Поэтому уравнение фазовой траектории через радиус-вектор имеет вид

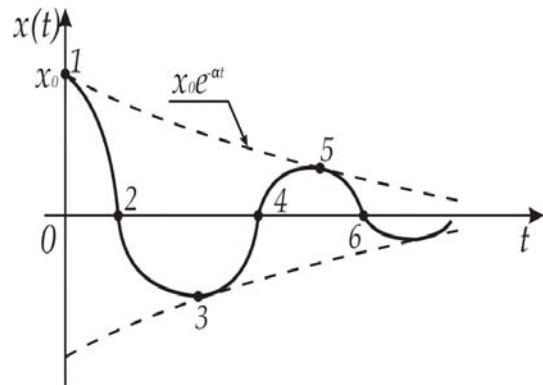
$$R^2 \leq x_0^2 \cdot e^{-2\alpha t} \left[ 1 + \frac{(\alpha^2 + \omega^2)^{1/2}}{\alpha^2} \right]$$

При  $t \rightarrow \infty$  радиус-вектор  $R$  уменьшается. Фазовый портрет изменяется по *закручивающейся спирали* и стремится к нулю. Точка равновесия ( $x = 0$ ,

$y = 0, R = 0$ ) находится в начале координат. При различных начальных условиях фазовая траектория представляется различными спиралями, но все они вложены друг в друга, нигде не пересекаются и неограниченно приближаются к особой точке (начало координат). Такая фазовая траектория называется *устойчивый фокус* (рисунок 2.3 б) и соответствует затухающим колебаниям во временной области (рисунок 2.3 а).



б – Устойчивый фокус



а – Переходный процесс

Рисунок 2.3 – Переходный процесс и фазовый портрет слабо - демпфированного колебательного звена

Примечание - Для наглядности цифрами показаны точки на кривой переходного процесса и соответствующие точки на фазовом портрете.

**3 Отрицательное демпфирование звено ( $-1 < \xi < 0$ ).** Это колебательное звено с неограниченно возрастающей амплитудой. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью  $\lambda_{1,2} = +\alpha \pm j\omega$ . Решение уравнения

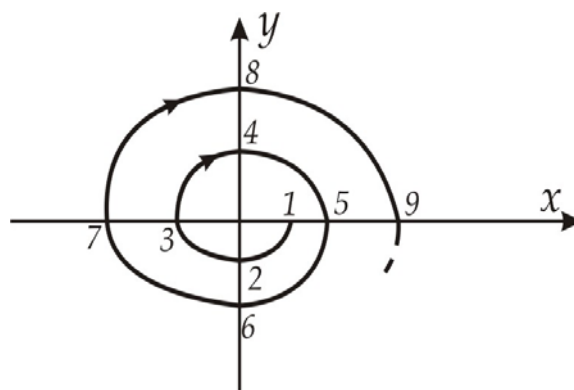
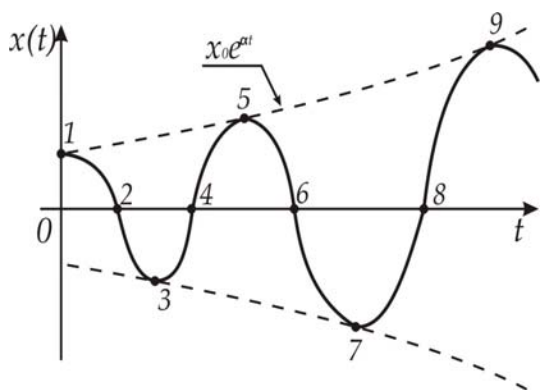
$$x = x_0 \cdot e^{\alpha t} \cos \omega t; \quad \dot{x} = y = -x_0 \cdot e^{\alpha t} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

Аналогично случаю, когда  $0 < \xi < 1$  определяем уравнение траектории через радиус – вектор. Это уравнение будет отличаться знаком вещественной части корня.

$$R^2 \leq x_0^2 \cdot e^{2\alpha t} \left[ 1 + \frac{(\alpha^2 + \omega^2)^2}{\alpha^2} \right]$$

При  $t \rightarrow \infty$  радиус-вектор  $R$  увеличивается. Фазовый портрет изменяется по *раскручивающейся спирали*, которая неограниченно возрастает. При разных начальных условиях фазовая траектория представляется различными спиралями, которые нигде не пересекаются и неограниченно возрастают. Положение равновесия соответствует началу координат при  $x = 0, y = 0, R = 0$ . Однако это равновесие неустойчивое и при сколь угодно малом отклонении  $\Delta x$  изображающая точка начнёт двигаться по раскручивающейся спирали, постоянно удаляясь от положения равновесия. Такая фазовая траектория называется *неустой-*

чивый фокус (рисунок 2.4 б) и соответствует возрастанию амплитуды колебаний во временной области (рисунок 2.4 а).



а – Переходный процесс

б – Неустойчивый фокус

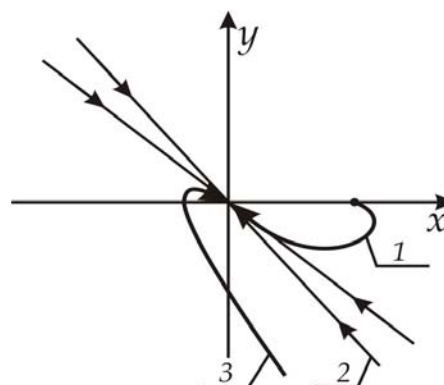
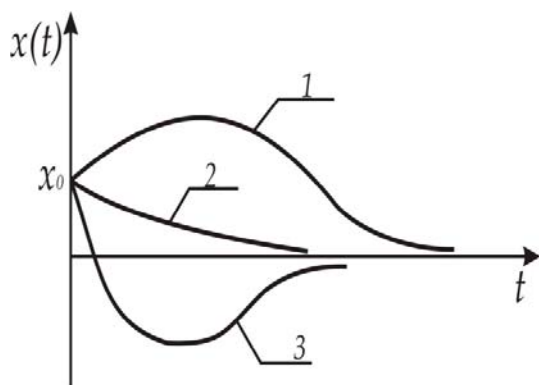
Рисунок 2.4 – Переходный процесс и фазовый портрет колебательного звена с отрицательным демпфированием

**4 Сильное демпфированное ( $\xi > 1$ ).** Это двойное аperiodическое звено с затухающим переходным процессом. Корни характеристического уравнения вещественные, отрицательные  $\lambda_1 = -\alpha_1$  и  $\lambda_2 = -\alpha_2$ . Решение уравнения

$$x = x_{01} \cdot e^{-\alpha_1 t} + x_{02} \cdot e^{-\alpha_2 t}; \quad \dot{x} = y = -x_{01} \cdot \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 t} - x_{02} \cdot \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 t},$$

где  $x_{01}$  и  $x_{02}$  – начальные условия.

Получили уравнение фазовой траектории в параметрическом виде. В этом уравнении нет тригонометрических функций. Значит отсутствует колебательность переходной характеристики и, соответственно, нет спирального вида фазовой траектории. Во временной области эта характеристика будет монотонно убывать. Такая фазовая характеристика называется *устойчивый узел* (рисунок 2.5 б) и соответствует аperiodическому затухающему процессу (рисунок 2.5 а)



а – Переходный процесс

б – Устойчивый узел

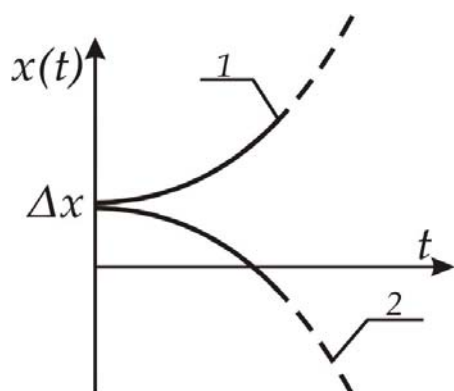
Рисунок 2.5 – Переходный процесс и фазовый портрет двойного аperiodического звена с затухающим переходным процессом



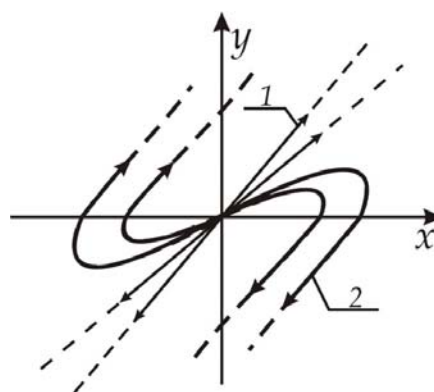
**5 Сильно отрицательное демпфирование ( $\xi < -1$ ).** Это двойное аperiodическое звено с неограниченно возрастающим переходным процессом. Корни характеристического уравнения вещественные, положительные  $\lambda_1 = \alpha_1$  и  $\lambda_2 = \alpha_2$ . Решение уравнения

$$x = x_{01} \cdot e^{\alpha_1 t} + x_{02} \cdot e^{\alpha_2 t}; \quad \dot{x} = y = x_{01} \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + x_{02} \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 t},$$

Получим уравнение фазовой траектории в параметрическом виде. По этому уравнению движение изображающей точки направлено от точки равновесия к бесконечно удалённой точке фазовой плоскости. Положение равновесия неустойчивое. Достаточно дать сколь угодно малое отклонение  $\Delta x$  от этого положения и изображающая точка станет удаляться от положения равновесия. Фазовая траектория называется *неустойчивый узел* (рисунок 2.6 б) и соответствует неограниченному возрастающему аperiodическому процессу (рисунок 2.6 а).



а – Переходный процесс



б – Неустойчивый узел

Рисунок 2.6 – Переходный процесс и фазовый портрет двойного аperiodического звена с возрастающим переходным процессом

**6 Демпфирование отсутствует ( $\xi = 0$ ) и звено имеет отрицательный статизм.** Характеристическое уравнение такого звена  $(T^2 \cdot p^2 - 1)x = 0$ . Корни характеристического уравнения вещественные с разными знаками  $\alpha_1$  и минус  $\alpha_2$ . Решение уравнения

$$x = x_{01} \cdot e^{\alpha_1 t} + x_{02} \cdot e^{-\alpha_2 t}; \quad \dot{x} = y = x_{01} \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 t} - x_{02} \cdot \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 t}$$

Получили уравнение фазовой траектории в параметрической форме. Представим это уравнение в канонической форме непосредственно из уравнения  $(T^2 p^2 - 1)x = 0$ . Считая, что

$$T^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = x; \quad \frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{T^2},$$

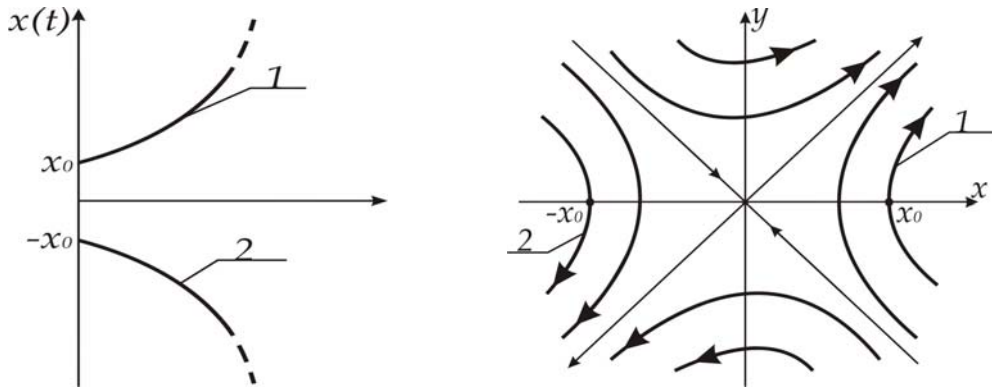
тогда 
$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{x/T^2}{y}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{T^2 y}; \quad T^2 y dy = x dx$$

Интегрируя полученное уравнение, найдём

$$y^2 - \frac{x^2}{T^2} = \frac{A}{T^2},$$

где  $A$  – зависит от начальных условий.

Это уравнение равносторонних гипербол отнесённых к главным осям. На какой бы фазовой оси не находилась изображающая точка  $M$  (за исключением одной асимптоты), она будет отдаляться от точки равновесия в бесконечность. Такая фазовая траектория называется *седло* (рисунок 2.7 б) и соответствует возрастающему аperiодическому процессу (рисунок 2.7 а).



а – Переходный процесс

б – Седло

Рисунок 2.7 – Переходный процесс и фазовый портрет звена с отрицательным статизмом и при отсутствии демпфирования

При построении фазовых траекторий надо принять во внимание следующие общие правила их начертания:

- фазовые траектории между собой не пересекаются;
- фазовые траектории пересекают ось абсцисс (ось  $x$ ) под прямым углом;
- при положительном значении  $y$  (то есть в верхней половине фазовой плоскости) изображающая точка движется по фазовой траектории слева направо; а при отрицательном значении  $y$  она движется справа налево.

Обобщим полученные результаты. Фазовые портреты линейных систем могут быть следующих видов.

- а) *центр*, когда корни характеристического уравнения мнимые, сопряженные;
- б) *устойчивый фокус*, когда корни характеристического уравнения комплексные, сопряженные, с отрицательной вещественной частью;
- в) *неустойчивый фокус*, когда корни характеристического уравнения комплексные, сопряженные с положительной вещественной частью;
- г) *устойчивый узел* при вещественных отрицательных корнях;
- д) *неустойчивый узел* при вещественных положительных корнях;
- е) *седло* при вещественных корнях разных знаков.

Рассмотренные фазовые портреты линейной системы второго порядка показывают, что по характеру фазовых траекторий можно непосредственно судить об устойчивости движения системы и об её динамической характеристике. Нелинейные элементы искажают характер фазовых траекторий. Но в принципе они имеют такой же вид, такое же название и такую же зависимость от корней характеристического уравнения. По фазовому портрету нелинейной системе так же можно анализировать её динамическую характеристику.

### Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.2.2

- 1 Почему к нелинейным звеньям не применяют преобразования Лапласа?
- 2 Что называется фазовым пространством?
- 3 Что показывает фазовая траектория движения системы?
- 4 Как на фазовом пространстве показывают начальные условия движения системы?
- 5 Что называется особой точкой фазовой траектории?
- 6 Где располагается особая точка на фазовом пространстве?
- 7 Что называется фазовой плоскостью?
- 8 Что называется фазовым портретом?
- 9 При каком значении демпфирования в колебательном звене фазовый портрет в виде устойчивого предельного цикла?
- 10 При каком значении демпфирования в колебательном звене фазовый портрет в виде устойчивого фокуса?
- 11 При каком значении демпфирования в колебательном звене фазовый портрет в виде неустойчивого фокуса?
- 12 При каком значении демпфирования в звене фазовый портрет в виде устойчивого узла?
- 13 При каком значении демпфирования в звене фазовый портрет в виде неустойчивого узла?
- 14 При каком значении демпфирования в звене фазовый портрет в виде седла?

### 2.2.3 Влияние нелинейных элементов на характеристику выходного сигнала

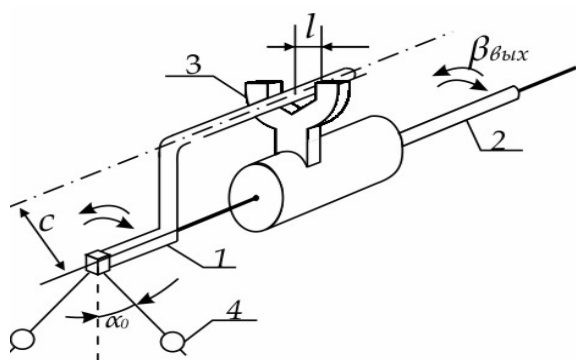


Рисунок 2.8 – Схема передачи углового перемещения с помощью рычага

В автоматических системах наиболее часто встречаются нелинейные элементы в виде люфта и силы трения, которые приводят к неоднозначности регулируемой величины [7,10].

Рассмотрим влияние *нелинейного звена типа “люфт”* на передачу сигнала с вала 1 на вал 2 с помощью

развилки 3 при колебании маятника 4 (рисунок 2.8).

Раствор развилки 3 больше толщины входящего в него рычага на величину  $l$  и из-за этого зазора поворота вала 2 не совпадает с углом поворота вала 1. Возникает искажение в повороте вала 2.

Во-первых, поворот вала 2 происходит с некоторым запаздыванием относительно вала 1 пропорционально зазору в рычаге, за счёт люфта между рычагом и вилкой. Характеристика типа «люфт» показана на рисунке 2.9.

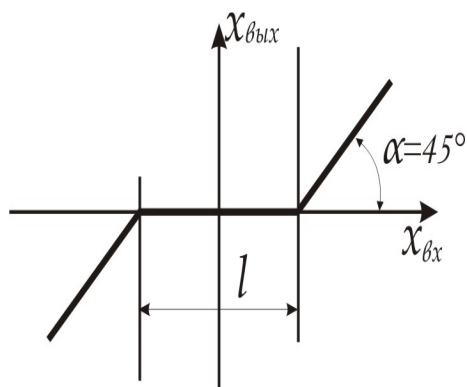


Рисунок 2.9 – Характеристика типа «люфт»

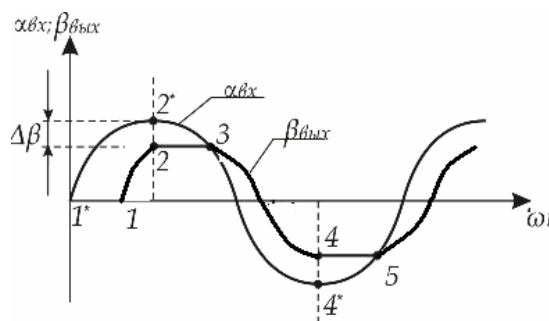


Рисунок 2.10 – График изменения угла поворота вала 2 ( $\beta_{\text{вых}}$ ) относительно вала 1 ( $\alpha_{\text{вх}}$ )

Во-вторых, при повороте вала 1 по синусоидальному закону выходной вал не полностью изменяется по синусоидальному закону. В момент, когда вал 1 достигает максимум поворота, вал 2 ещё не доходит до такого же максимума, он запаздывает. Когда вал 1 начинает двигаться в обратном направлении, вал 2 из-за люфта ещё стоит на месте, пока не выбран этот люфт. Таким образом, движение вала 2 происходит с уменьшением амплитуды колебаний.

Рассмотрим график изменения угла поворота вала 2 при передаче на него синусоидального сигнала с вала 1 при колебании маятника 4.

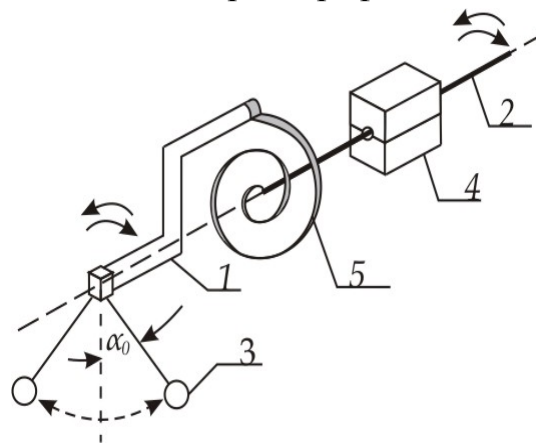


Рисунок 2.11 – Схема передачи углового перемещения с помощью спиральной пружины

Пусть в начале движения рычаг в растворе находится с зазором. Тогда при повороте вала 1 вал 2 стоит на месте, пока не выберется весь зазор и только потом начинает движение (точка 1 рисунок 2.10). В точке 2 вал 1 достигает своего максимума и начинает двигаться в обратную сторону, а вал 2 из-за люфта в растворе вилки стоит на месте. В точке 3 люфт выбран и вал 2 начинает двигаться в обратном направлении до точки 4, а затем вал 2 снова остановился, «он ждёт» пока выберется зазор между рычагом и вилкой (отрезок 4-5). Если пренебречь силами трения при повороте осей и при колебании маятника, то вал

2 будет совершать незатухающие колебания со сдвинутой по времени характеристикой (относительно вала 1) и с уменьшенной, но стабильной амплитудой.

Рассмотрим влияние *нелинейного звена типа “сухое трение”* на передачу сигнала с оси 1 на ось 2 (рисунок 2.11).

Угловому перемещению с оси 1 на ось 2 при колебании маятника 3 противодействует сила трения в подшипнике 4. Для преодоления этой силы трения требуется дополнительный момент, который создаётся спиральной пружиной 5. Если это воздействие пружины на ось 2 меньше силы трения, то движение от оси 1 к оси 2 не передаётся. Если воздействие пружины (т.е. крутящий момент) больше силы трения, то движение начнёт передаваться. Величина этого момента зависит от предварительного поворота оси 1 относительно оси 2 на такую величину, когда угол закручивания пружины создаст момент, достаточный для преодоления силы трения в подшипнике 4.

Рассмотрим влияние нелинейного элемента типа “сухое трение” (рисунок 2.12) на изменение выходной величины. Прямая  $N^*-N$  характеризует передачу движения при увеличении входящего сигнала, а прямая  $M^*-M$  характеризует передачу движения при обратном движении входного сигнала. В данном примере величина  $(-\alpha \alpha)$  пропорциональна углу поворота оси 1 относительно оси 2 для создания необходимого крутящего момента за счёт закручивания (раскручивания) пружины.

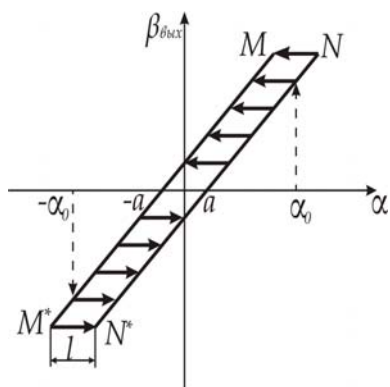


Рисунок 2.12 – Характеристики типа “сухое трение”

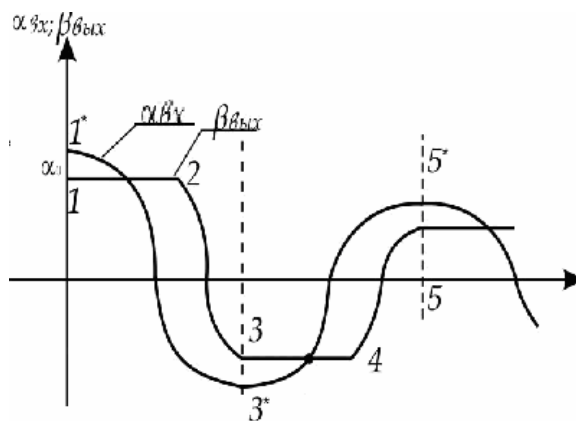


Рисунок 2.13 – График изменения угла поворота оси 2 ( $\beta_{\text{вых}}$ ) относительно оси 1 ( $\alpha_{\text{вх}}$ ) при передаче на него косинусоидального сигнала

Рассмотрим график изменения угла поворота оси 2 при передаче на неё косинусоидального сигнала с оси 1 при колебании маятника 3. Пусть маятник в начале движения отклонён на угол  $\alpha_0$  относительно вертикальной оси (рисунок 2.13). При повороте оси 1 ось 2 будет неподвижна (отрезок 1-2) пока пружина не создаст необходимый крутящий момент. В дальнейшем ось 2 будет повторять движение оси 1, но с некоторым запаздыванием по сравнению с точкой  $1^*$ . Это показано отрезком 2-3. Ось 1 в точке  $3^*$  будет иметь меньшую амплитуду. Часть энергии маятника потеряно на создание крутящего момента в пружине. После точки  $3^*$  ось 1 начинает обратный поворот, а ось 2 остаётся на месте, пока пружина не закрутится в обратную сторону для создания необходимого

момента, чтобы ось 2 двигалась в другом направлении. Амплитуда колебания оси 1 в точке 5\* снова уменьшится. Соответственно уменьшается амплитуда колебания оси 2.

Отметим принципиальное отличие нелинейного звена типа “сухое трение” от нелинейного звена типа “люфт” при передаче движения от колебания маятника. В нелинейном звене типа “люфт” при отсутствии сил трения вал 2 совершает *незатухающие колебания*, и ничто этому не препятствует. В нелинейном звене типа “сухое трение” при каждом повороте оси 2 требуется дополнительная энергия для преодоления силы трения за счёт инерции маятника. Поэтому ось 2 совершает *затухающие колебания*.

## 2.2.4 Построение фазовой характеристики нелинейных элементов типа “люфт” и “сухое трение”

Если входной сигнал в звене с *нелинейным элементом типа “люфт”* совершает незатухающие колебания, то уравнение движения вала 1

$$x = x_0 \cos \omega t; \quad \dot{x} = y = -x_0 \omega \sin \omega t,$$

где  $x_0$  – амплитуда колебаний;

Это уравнение в каноническом виде является уравнением фазовой траектории

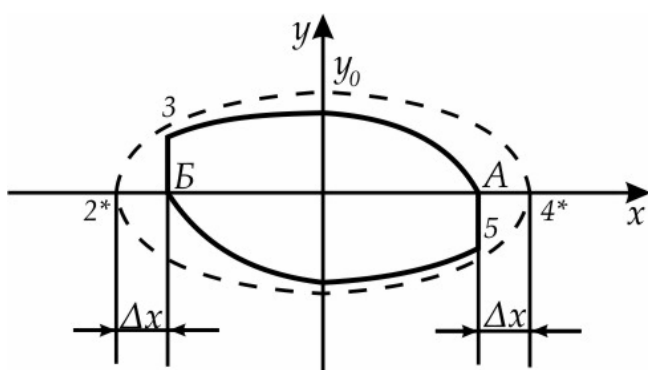


Рисунок 2.14 – Фазовые траектории незатухающих колебаний для звена типа «люфт»

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{x_0 \omega}\right)^2 = 1$$

Получим уравнение эллипса с полуосями по оси абсцисс  $x = x_0$ , по оси ординат  $y = y_0 = x_0 \omega$  (рисунок 2.14).

Фазовая траектория колебания вала 1 показана пунктирной линией. На этой траектории максимальная амплитуда показана цифрами 2\* и 4\*. Фазовая траектория колебания вала 2 показана сплошной линией. Она отличается от фазовой траектории колебания вала 1 тем, что за счёт люфта её амплитуда колебания меньше на величину  $\Delta x = \Delta \alpha$ .

Эту величину уменьшения амплитуды за счёт люфта в развилке, можно определить по формуле через угол отклонения маятника от вертикальной оси

$$\Delta x = \Delta \beta = \arctg \frac{\ell}{C},$$

где  $\ell$  – величина люфта в развилке;

$C$  – расстояние от оси вала 1 до оси рычага.

На фазовой траектории колебания вала 2 отрезки Б-3 и А-5 характеризуют остановку этого вала за счёт запаздывания при движении вала 1 в обратную сторону. Они фактически показывают остановку вала за счёт люфта. Эти отрезки траекторий равны между собой, т.к. зависят только от величины люфта. Напоминаем, что колебание обоих валов будет незатухающим.

Движения оси 1 с *нелинейным элементом типа “сухое трение”* описывается уравнением

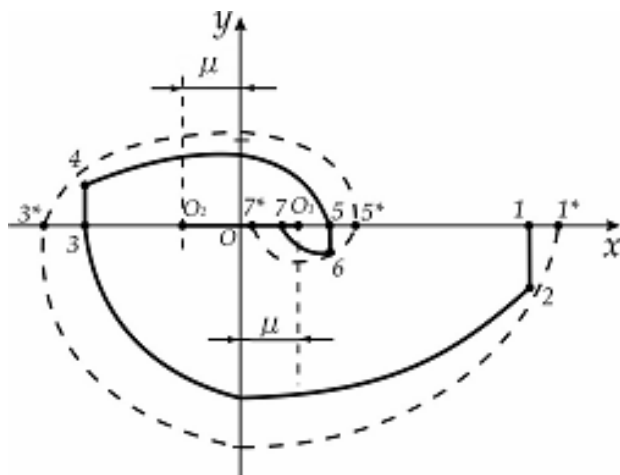
$$x = \pm \mu + x_0 \cdot \cos \omega t; \quad \dot{x} = y = -x_0 \cdot \omega \sin \omega t,$$

где  $\mu$  – постоянный коэффициент, характеризующий влияние сухого трения на амплитуду колебания. Он имеет противоположный знак относительно второго слагаемого  $x_0 \cdot \cos \omega t$ .

Уравнение фазовой траектории

$$\left( \frac{x \pm \mu}{x_0} \right)^2 + \left( \frac{y}{x_0 \omega} \right)^2 = 1$$

Это уравнение эллипса с изменяющимся центром в точках  $(O_1 = +\mu)$  и  $(O_2 = -\mu)$ . Учитывая, что трение всегда направлено против движения, то в зависимости от направления движения эллипс будет иметь разные центры.



Рассмотрим колебание оси 1 от положения точки 1\* (смотри рисунок 2.15). Эта точка имеет координаты  $x = x_0$  и  $y = 0$ . Фазовая траектория точки 1\* до точки 3\* представляет собой эллипс с центром в точке  $O_1$ , где расстояние  $O-O_1$  равно  $\mu$ . Уравнение эллипса для этого участка фазовой траектории

Рисунок 2.15 – Фазовые траектории затухающих колебаний для звена типа «сухое трение»

$$\left( \frac{x - \mu}{A_1} \right)^2 + \left( \frac{y}{A_1 \omega} \right)^2 = 1,$$

где  $A_1$  – начальные условия движения.

жения.

В данном случае  $A_1 = x_0$ . Тогда уравнение эллипса будет

$$\left( \frac{x - \mu}{x_0} \right)^2 + \left( \frac{y}{x_0 \omega} \right)^2 = 1.$$

После точки 3\* сила трения изменяет свой знак, т.к. направляющие движения изменились. Поэтому уравнение траектории движения оси 1 на участке 3\*-5\* с центром  $O_2$  будет

$$\left(\frac{-x + \mu}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2 \omega}\right)^2 = 1,$$

где  $A_2$  – новые условия движения вала 1 из точки 3\*. Значение  $A_2$  определим из уравнения точки 3\*

$$\left(\frac{-x_0 + 2\mu}{A_2}\right)^2 = 1 \quad A_2 = x_0 - 2\mu.$$

Уравнение фазовой траектории на участке 3\*-5\*

$$\left(\frac{-x + \mu}{x_0 - 2\mu}\right)^2 + \left(\frac{y}{\omega(x_0 - 2\mu)}\right)^2 = 1.$$

Этот участок эллипса заканчивается в точке 5\* с координатами  $x = x_0 - 3\mu$ ,  $y = 0$ . При дальнейшем движении точка фазовой траектории попадает в зону нечувствительности (точка 7\*), где сила упругости пружины не может преодолеть силу трения.

Фазовая траектория движения оси 2 отличается от фазовой траектории движения оси 1 тем, что в точках максимума (при движении оси 1 в обратном направлении) ось 2 стоит на месте и ждёт пока пружина не закрутится с достаточной силой и преодолет силу трения в подшипнике 4. Эти остановки оси 2 на фазовой траектории показаны отрезками 1-2, 3-4, 5-6. Окончательная остановка оси 2 произойдёт раньше (точка 7), чем остановка оси 1 (точка 7\*).

### 2.2.5 Предельные циклы фазовой траектории

Понятие предельного цикла рассмотрим на основе понятия устойчивого движения системы по второму (прямому) методу Ляпунова. Этот метод основан на простой идее, известной из механики: в положении равновесия система имеет минимум потенциальной энергии. Абсолютный минимум энергии считается равным нулю. Тогда, если движение системы стремится к нулю – она устойчивая. Если движение системы происходит с увеличением потенциальной энергии – она неустойчивая.

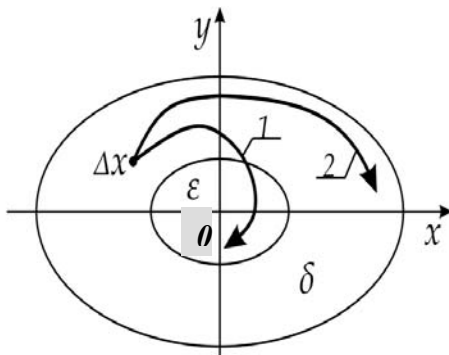


Рисунок 2.16 – Траектория движения устойчивой и неустойчивой системы

Рассмотрим различные варианты движения систем на фазовой плоскости (рисунок 2.16). Равновесие системы соответствует началу координат (точка 0). Область допустимого отклонения системы от абсолютного минимума (точка 0) обозначим  $\varepsilon$ . Заданную область отклонения параметров системы обозначим  $\delta$ . Условие устойчивости по Ляпунову следующее. Система считается устойчивой, если при отклонении параметров системы в пределах достаточно малой области  $\delta$  траектория движения системы достигает гра-



ницу области допустимого отклонения системы от абсолютного минимума (область  $\varepsilon$ ) и остаётся в пределах этой области (кривая 1, рисунок 2.16). Система считается неустойчивой, если при отклонении параметров системы в пределах области  $\delta$  траектория движения системы не достигает области  $\varepsilon$  (кривая 2).

Таким образом, устойчивость системы по Ляпунову рассматривается при достаточно малых начальных отклонениях параметров системы, то есть устойчивость “в малом”. Поведение неустойчивой системы “в малом” характеризуется расходящимся процессом. Но амплитуда расходящихся колебаний из-за нелинейности характеристики может увеличиваться до определённого предела и затем оставаться постоянной [11,12].

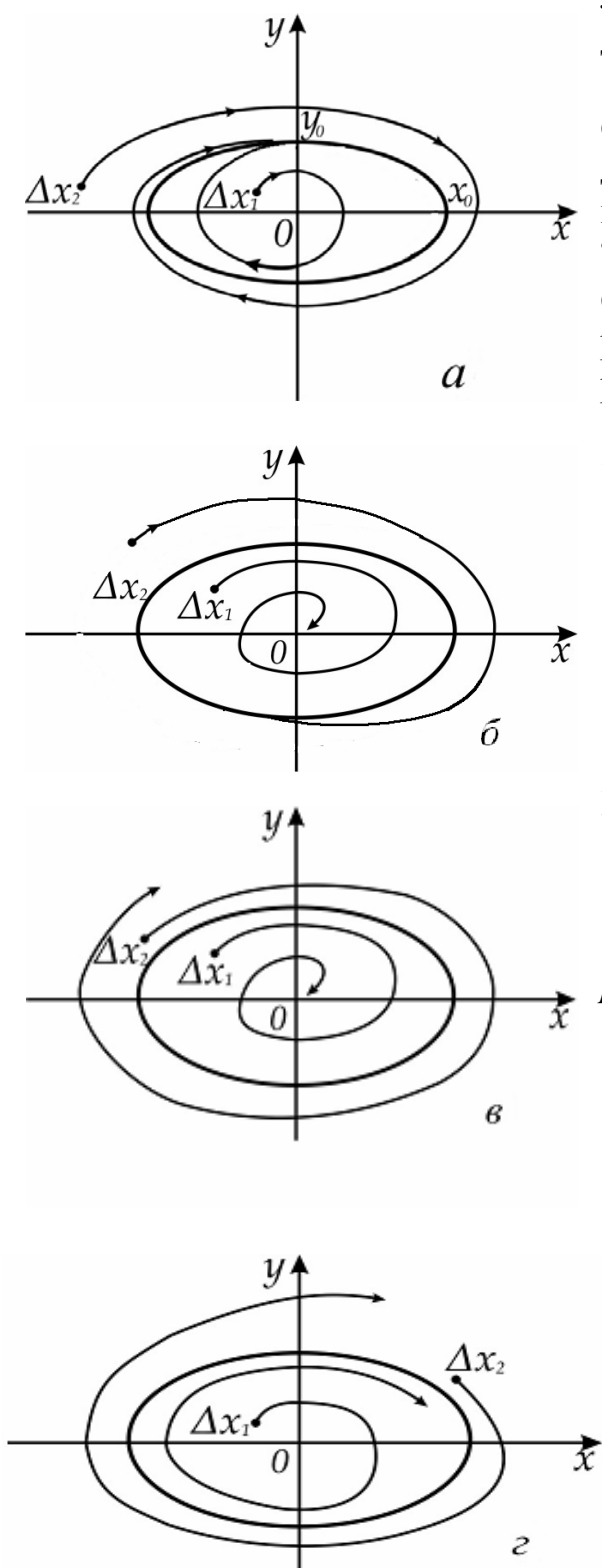
На рисунке 2.17 *a* показана фазовая характеристика системы, которая при отклонении “в малом” ( $\Delta x_1$ ) имеет вид неустойчивого фокуса. Спираль этой фазовой характеристики расходится, асимптотически приближаясь к некоторому изолированному замкнутому контуру, имеющему конечные размеры.

Если система попала на устойчивый предельный цикл, то она обладает устойчивыми автоколебаниями. Амплитуда автоколебаний определяется по оси абсцисс ( $x_0$ ), скорость изменения колебаний определяется по оси ординат ( $y_0$ ). Пусть параметры системы имеют отклонения  $\Delta x_2$ . Фазовая характеристика имеет вид устойчивого фокуса и траектория движения системы стремится к устойчивому предельному циклу. В данном случае система устойчива “в большом” при отклонении  $\Delta x_2$ , но она неустойчива “в малом” при отклонении  $\Delta x_1$ , т.к. эта фазовая траектория системы удаляется от абсолютного минимума (точка 0).

**Изолированная фазовая траектория в виде замкнутого контура называется предельным циклом.**

Если система попала на устойчивый предельный цикл, то она обладает устойчивыми автоколебаниями. Амплитуда автоколебаний определяется по оси абсцисс ( $x_0$ ), скорость изменения колебаний определяется по оси ординат ( $y_0$ ). Пусть параметры системы имеют отклонения  $\Delta x_2$ . Фазовая характеристика имеет вид устойчивого фокуса и траектория движения системы стремится к устойчивому предельному циклу. В данном случае система устойчива “в большом” при отклонении  $\Delta x_2$ , но она неустойчива “в малом” при отклонении  $\Delta x_1$ , т.к. эта фазовая траектория системы удаляется от абсолютного минимума (точка 0).

Рисунок 2.17 – Предельные циклы фазовых траекторий



Если фазовая траектория при любых отклонениях параметра системы  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  имеет вид сходящегося фокуса (рисунок 2.17 б), то такая система считается устойчивой и “в малом”, и “в большом”. Она устойчива “в общем”. Предельный цикл (если он существует) неустойчивый. Если параметры системы имеют отклонение в пределах малой величины  $\Delta x_1$  (рисунок 2.17 в) и фазовая характеристика имеет вид устойчивого фокуса, то установившееся значение системы стремится в область допустимого отклонения или даже в точку 0. Система устойчива “в малом”. Но если при отклонении параметров на величину больше предельного цикла, например,  $\Delta x_2$ , то фазовая характеристика имеет вид неустойчивого фокуса и система с течением времени увеличивает амплитуду своих колебаний, система становится неустойчива “в большом”. Таким образом одна и та же система в зависимости от отклонения параметров  $\Delta x$  может быть устойчива “в малом” (при  $\Delta x_1$ ) и неустойчива “в большом” (при  $\Delta x_2$ ). Предельный цикл (если он существует) является неустойчивым.

Если фазовая траектория системы при малых отклонениях параметра ( $\Delta x_1$ ) и при больших отклонениях параметра ( $\Delta x_2$ ) имеют вид расходящегося фокуса (рисунок 2.17 г), то такая система неустойчива и “в малом”, и “в большом”. Предельный цикл (если он существует) является неустойчивым.

Примечание – Анализ амплитудных колебаний нелинейного звена проводится по первой (основной) гармонике. Как правило, в нелинейном звене возникают гармоники и более высокого порядка. Определение параметров этих гармоник математически сложная задача и обычно не рассматривается.

### **Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.2.5**

- 1 Критерий устойчивости по второму (прямому) методу Ляпунова.
- 2 Что значит устойчивость “в малом”?
- 3 Что значит устойчивость “в большом”?
- 4 Что значит устойчивость “в общем”?
- 5 Что называется предельным циклом?
- 6 Что значит устойчивый предельный цикл? Какая при этом будет устойчивость “в малом” и устойчивость “в большом”?
- 7 Что значит неустойчивый предельный цикл? Будет ли при этом устойчивость “в большом”?
- 8 Может ли быть устойчивость “в общем” при неустойчивом предельном цикле?
- 9 Может ли система иметь несколько предельных циклов как устойчивых, так и неустойчивых?
- 10 Если система устойчива “в общем”, то может ли она иметь устойчивый предельный цикл?

### 2.3 Метод точечных преобразований

Метод точечных преобразований позволяет определить существование автоколебаний в нелинейной системе, устойчивость или неустойчивость предельного цикла без построения фазовых траекторий. Известно, что нелинейные системы в большинстве случаев описываются сложными дифференциальными уравнениями. Поэтому целесообразно провести не всё построение фазовой траектории, а рассмотреть изменение фазовой траектории того участка, описание которого можно сделать по приближенному линейному дифференциальному уравнению без особых затруднений. Затем, по этому отдельному участку можно судить о возможности или невозможности возникновения автоколебаний. В принципе, этот метод пригоден для системы любого порядка, но если порядок дифференциального уравнения выше третьего, то возникают трудности в расчёте [11,12,13].

Рассмотрим применение этого метода для системы второго порядка с трёхпозиционным реле с гистерезисом (рисунок 2.18). Фазовая траектория этой системы показана на рисунке 2.19.

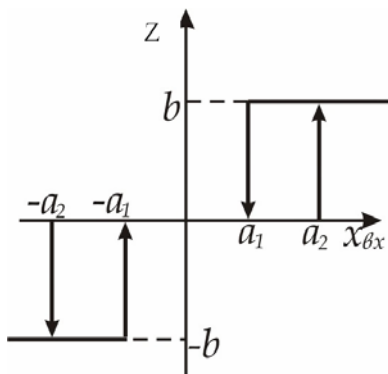


Рисунок 2.18 - Характеристика трехпозиционного реле с гистерезисом

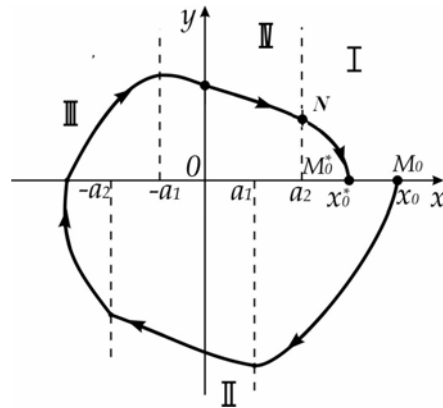


Рисунок 2.19 - Фазовая характеристика системы с трехпозиционным реле с гистерезисом

Чтобы исследовать динамику системы по этому методу, необходимо выяснить, как в зависимости от начальных условий перемещается точка  $M_0$  по оси абсцисс. Для этого вся фазовая траектория (рисунок 2.19) разделяется на отдельные участки:

I участок. От значения  $x > a_2$ , когда реле включено ( $+b$ ) до отключения реле при  $x_{вх} = a_1$  (смотри рисунок 2.18)

II и VI участок. Реле отключено; движение системы за счёт инерционности системы.

III участок. Реле включается с противоположным знаком своей выходной величины ( $-b$ ) при  $x < -a_2$ .

IV участок. Реле снова включилось ( $+b$ ) при  $x_{вх} > a_2$ .

Из всех участков рассмотрим изменение фазовой траектории на оси  $+x$ .

Допустим, что начальное положение изображающей точки системы  $M_0$ , где  $x(0) = x_0$ . Изображающая точка будет двигаться по соответствующим траекториям и снова приходит на ось  $+x$  в точку  $M_0^*$ , где  $x^* < x_0$ . Если при любых значениях  $x_0$  оказывается, что  $x^*$  всегда меньше  $x_0$ , то система имеет затухающий и поэтому устойчивый переходный процесс. Но если  $x^* > x_0$ , то это свидетельствует о расходящемся и поэтому неустойчивом процессе. Возможен и третий случай, когда при заданном  $x_0$  получаем равенство  $x^* = x_0$ . Система снова вернулась в исходное состояние. Это значит, что система имеет предельный цикл (автоколебания). Сразу возникает вопрос: эти автоколебания устойчивые или неустойчивые? По методу точечных преобразований это решается достаточно просто.

Пусть свободное движение системы при включённом реле на участке I описывается уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k F(x),$$

где  $F(x)$  – характеристика реле

Уравнение фазовой траектории

$$x = T \cdot k F(x) \cdot \ln(y - kF(x)) - Ty + C_0,$$

где  $C_0$  – начальные условия.

Пусть начальные условия  $C_0$  соответствуют значениям  $x_0$  и  $y_0$ . Уравнение фазовой траектории на участке I с учетом этих начальных условий  $x_0$  и  $y_0$  при  $F(x) = b$

$$x_1 = x_0 + Tkb \cdot \ln \frac{y - kb}{y_0 - kb} - T(y - y_0)$$

Рассмотрим на участке I изменение положения точки  $M_0$  (при  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = 0$ ) до  $M_0^*$  (при  $x_1, y = 0$ ). Это характеризует изменение координаты по оси  $x$  на величину  $\Delta x$  (при  $F(x) = b$  и  $y = 0$ ).

$$\Delta x = x_0 - x_1 = x_0 - x + Tkb \cdot \ln \frac{0 - kb}{y_0 - kb} - T(0 - y_0)$$

Изменение положения точки  $M_0$  не зависит от  $y$ . Величина  $y$  для обоих значений  $M_0$  и  $M_0^*$  равна 0. Это изменение  $\Delta x$  зависит от начального значения  $x_0$ . В результате получаем зависимость

$$x_1 = f(x_0)$$

Для анализа системы строим график, где ось абсцисс – состояние системы выраженное через начальное значение точки  $x_0$ . Ось ординат – вычисленное значение точки  $x_1$  (рисунок 2.20).

На этом графике проводим биссектрису координатного угла т.е. прямую под углом  $45^\circ$ . Эта биссектриса характеризует те точки фазовой траектории где  $x_{0i} = x_1$  или те значения  $x_{0i}$ , когда фазовая траектория возвращается в первоначальное состояние.

чальное состояние (предельный цикл). Возможны следующие случаи взаиморасположения кривой  $x_1 = f(x_0)$  и прямой  $x_1 = x_0$

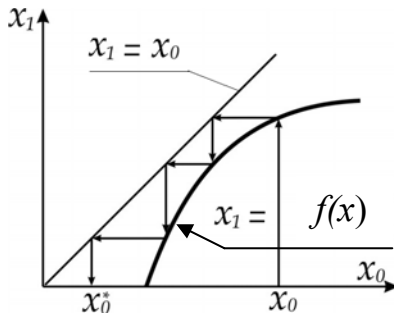


Рисунок 2.20 - Характеристика  $x_1 = f(x_0)$  справа от  $x_1 = x_0$

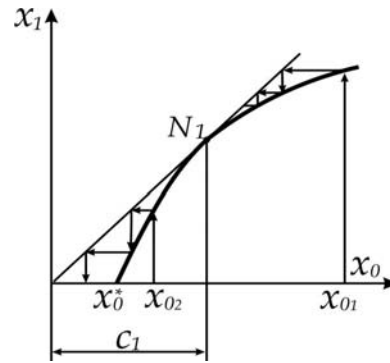


Рисунок 2.21 - Характеристика  $x_1 = f(x_0)$  касается  $x_1 = x_0$

1 Кривая  $x_1 = f(x_0)$  расположена справа от прямой  $x_0 = x_1$  и её не пересекает (рисунок 2.20). При любом начальном значении  $x_0$  процесс сходящийся к конечному значению  $x_0^*$ . Система устойчива “в общем”.

2 Кривая  $x_1 = f(x_0)$  расположена справа от  $x_0 = x_1$  и её касается в точке  $N_1$  (рисунок 2.21). При  $x_0 > C_1$  процесс сходится к полуустойчивому предельному циклу в точке  $N_1$  и легко может сойти с него. При  $x_0 < C_1$  процесс сходится к значению  $x_0^*$ . Система устойчива “в общем”, но возможен режим автоколебаний при  $x_0 = C_1$ .

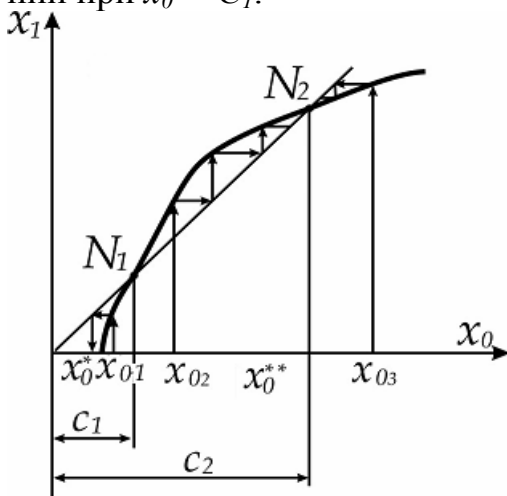


Рисунок 2.2 2 - Характеристика  $x_1 = f(x_0)$  пересекает  $x_1 = x_0$  в двух точках

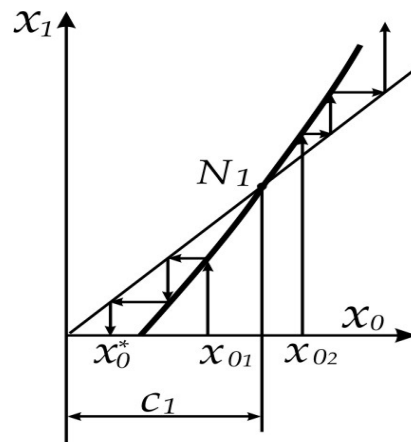


Рисунок 2.23 - Характеристика  $x_1 = f(x_0)$  пересекает  $x_1 = x_0$  в одной точке

3 Кривая  $x_1 = f(x_0)$  и прямая  $x_0 = x_1$  имеют две точки пересечения  $N_1$  и  $N_2$ . (рисунок 2.22). Возможны три варианта поведения системы:

- при  $x_{01} < C_1$  система движется к значению  $x_0^*$ . Система устойчива “в малом”;
- при  $C_1 < x_{02} < C_2$  система движется к  $N_2$ . Значение  $x_1 = f(x_0)$  увеличивается. Система неустойчива “в малом”, величина  $x_{02}$  возрастает до  $C_2$ , где

$x_0^{**} = C_2$  – устойчивый предельный цикл. Система устойчива “в большом”.

– при  $x_{03} > C_2$  система возвращается к значению  $N_2$ , величина  $x_{03}$  уменьшается до  $x_0^{**} = C_2$ . Система тоже устойчива “в большом”.

Система имеет два предельных цикла. При  $x_0 = C_1$  неустойчивый предельный цикл (точка  $N_1$ ). При  $x_0 = C_2$  устойчивый предельный цикл (точка  $N_2$ ).

4 Кривая  $x_1 = f(x_0)$  имеет одну точку пересечения  $N_1$  (рисунок 2.23). Устойчивость системы зависит от значения  $x_0$  относительно  $C_1$ :

– при  $x_{01} < C_1$  система движется к  $x_0^*$ . Система устойчива “в малом”.

– при  $x_{02} > C_1$  значение  $x_0$  возрастает. Система неустойчива “в большом”.

Система имеет один неустойчивый предельный цикл в точке  $N_1$ .

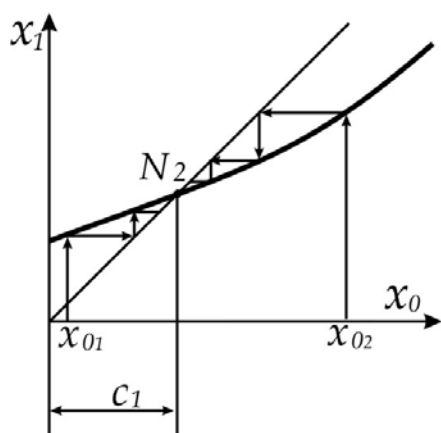


Рисунок 2.24 - Характеристика  $x_1 = f(x_0)$  пересекает  $x_1 = x_0$  в одной точке

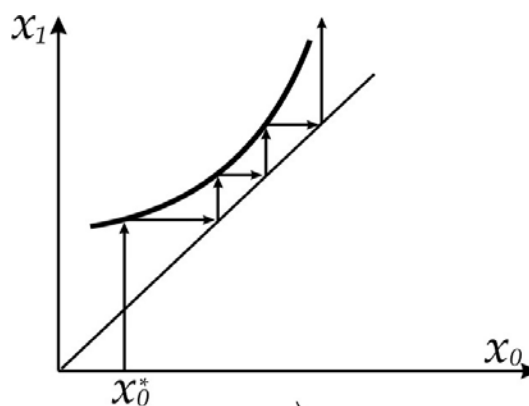


Рисунок 2.25 - Характеристика  $x_1 = f(x_0)$  слева от  $x_1 = x_0$

5 Кривая  $x_1 = f(x_0)$  имеет одну точку пересечения  $N_2$  (рисунок 2.24). При любом значении  $x_0$  система стремится к точке  $N_2$ . Если  $x_{01} < C_1$ , то значение  $x_0$  увеличивается до  $x_0 = C_2$ . Система неустойчива “в малом”. Если  $x_{02} > C_1$ , то значение  $x_0$  уменьшается до  $x_0 = C_1$ . Система устойчива “в большом”. Она имеет один устойчивый предельный цикл в точке  $N_2$  при  $x_0 = C_1$ .

6 Кривая  $x_1 = f(x_0)$  расположена слева от прямой  $x_1 = x_0$  и нигде не пересекается (рисунок 2.25). Если нет точки пересечения, то нет предельного цикла. При любом значении  $x_0$  значение  $x_1 = f(x_0)$  увеличивается. Система неустойчива и “в малом”, и “в большом”, она неустойчива “в общем”.

Такой расчёт можно сделать по изменению скорости движения системы  $y_1 = f(y_0)$  относительно  $y_1 = y_0$ . Это зависит от того, на каком участке движение системы проще получить и анализировать уравнение фазовой траектории.

### Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.3

1 Что можно определить методом точечных преобразований?

- 2 В чём отличие анализа систем методом точечных преобразований от анализа систем методом фазовых траекторий?
- 3 Как выбирается участок фазовой траектории для анализа систем методом точечных преобразований?
- 4 В чём преимущество анализа системы методом точечных преобразований?
- 5 В каких координатах строится характеристика  $x_1 = f(x_0)$ ? Что откладывается по оси абсцисс и по оси ординат?
- 6 Что характеризует прямая  $x_1 = x_0$ ?
- 7 При каком взаимном расположении кривой  $x_1 = f(x_0)$  и прямой  $x_1 = x_0$  система устойчива “в общем”?
- 8 При каком взаимном расположении кривой  $x_1 = f(x_0)$  и прямой  $x_1 = x_0$  система неустойчива?
- 9 При каком взаимном расположении кривой  $x_1 = f(x_0)$  и прямой  $x_1 = x_0$  система устойчива “в малом” и неустойчива “в большем”?
- 10 При каком взаимном расположении кривой  $x_1 = f(x_0)$  и прямой  $x_1 = x_0$  система неустойчива “в малом” и устойчива “в большем”?

## 2.4 Метод гармонической линеаризации

### 2.4.1 Основные положения

Под этим общим названием объединяются группы методов анализа нелинейных систем, основанных на анализе амплитудно-частотных характеристик, возникающих в нелинейных системах. Он основан на принципе гармонического баланса разработанным Н.М.Крыловым Н.Н. Боголюбовым. Применительно к автоматическим системам принцип гармонического баланса разработан Е.П.Поповым. Этот метод определяет *возможность возникновения в системе автоколебаний*, условия возникновения устойчивого колебательного режима и параметры этого автоколебательного режима.

В дальнейшем будет рассмотрен анализ не всех видов нелинейных систем, а значительно узкий класс, в котором *нелинейный элемент является безинерционным звеном со статической характеристикой*. Зависимость между входной и выходной величиной в таких нелинейных элементах описывается нелинейными алгебраическими неравенствами. Если система содержит несколько таких нелинейных элементов (НЭ), то данный метод расчета пригоден в том случае, если возможно заменить эти НЭ одним с результирующей статической характеристикой. Для исследования таких нелинейных систем используется линейная теория частотных методов анализа автоматических систем. Она основана на гипотезе низкочастотного фильтра линейной части системы и на предположении о гармоническом характере свободного движения в нелинейной системе. Рассмотрим эти два положения подробнее [10,11,12].

По этому методу исследования выбирается некоторая расчетная структурная схема, в которой нелинейный элемент (НЭ) выделен в качестве входного звена, а вся остальная линейная часть (ЛЧ) системы объединена в одну общую передаточную функцию, которая располагается после нелинейного элемента (рисунок 2.26). Рассмотрим прохождение некоторого гармонического сигнала через нелинейный элемент в виде идеального реле. Если сигнал на входе НЭ является синусоидальным

$$x(t) = A \sin \omega t$$

то на выходе НЭ получаем гармонический сигнал

$$y(t) = F(x) = F(A \sin \omega t)$$

Функция  $F(A \sin \omega t)$  является периодической и может быть разложена в ряд Фурье.

$$y(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sin \omega_k t + C_k \cos \omega_k t)$$

Прохождение синусоидального сигнала через нелинейный элемент показано в расчетно - структурной схеме (рисунок 2.26).

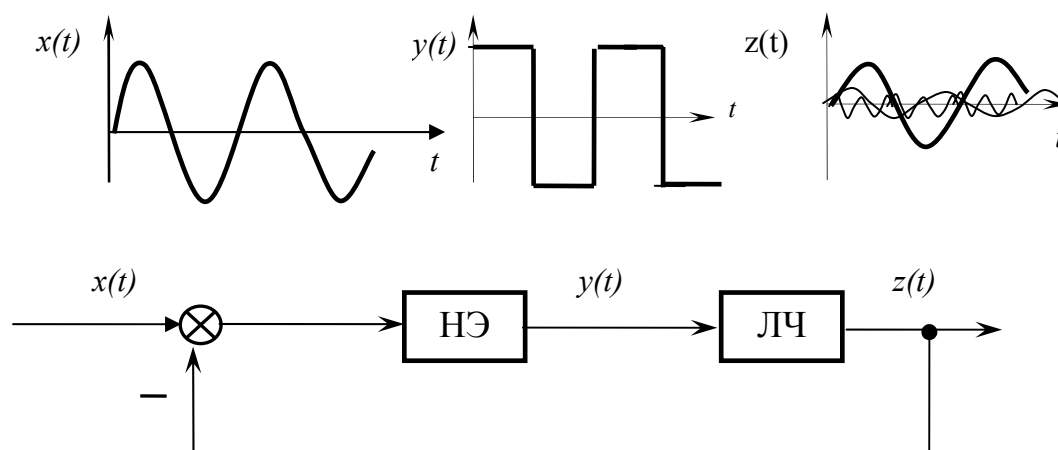


Рисунок 2.26 – Расчетная структурная схема нелинейной системы

Следовательно, на линейную часть системы (ЛЧ) действует сигнал, содержащий весь спектр частот (после разложения их в ряд Фурье), которые возникли в нелинейном элементе (НЭ). В силу принципа суперпозиции в линейной части системы каждая гармоника действует независимо от остальных. Амплитуда каждой гармоники на выходе линейной части системы  $z(t)$  будет зависеть от динамических свойств этой линейной части. Изменение амплитуды высокочастотных гармоник показано на рисунке 2.27. Величину такого изменения можно определить по амплитудной характеристике линейной части системы.



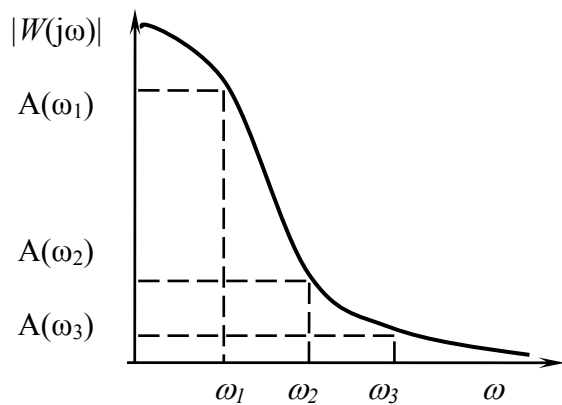


Рисунок 2.27 – Амплитудная характеристика линейной части системы (ЛЧ)

Пусть при заданном значении частоты входного сигнала  $\omega_1$  амплитуда равна  $A(\omega_1)$ . Если при других частотах  $\omega_2 = 2\omega_1$ ,  $\omega_3 = 3\omega_1$ ,  $\omega_4 = 4\omega_1$ , и т.д. амплитуды значительно меньше, то линейную часть (ЛЧ) системы можно считать фильтром низких частот, который не пропускает высшие гармоники, порождённые нелинейным элементом и на выходе ЛЧ остается только первая гармоника.

Таким образом, расчет колебаний в нелинейной системе производится при выполнении двух условий:

- на вход нелинейного элемента (НЭ) поступает гармонический сигнал с заданной частотой;

- линейная часть системы (ЛЧ) обладает свойством низкочастотного фильтра и гасит все высшие гармоники, порождаемые нелинейным элементом.

На выходе системы рассматривается только первая гармоника. На рисунке 2.26 эта первая гармоника на графике  $z(t)$  показана жирной линией.

## 2.4.2 Получение расчетной структурной схемы

Если в заданной структурной схеме есть нелинейное звено, то это существенно ограничивает возможности структурных преобразований по сравнению с структурными преобразованиями в линейных системах. Главная причина в том, что в нелинейных системах не выполняется принцип суперпозиции (когда реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакции на каждое воздействие)

Покажем это на примере нелинейного звена  $y = F(x) = x^2$ . Пусть на нелинейное звено подействовало два сигнала  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 3$ . Тогда

$$y_1 = F_1(x_1^2) = 1^2 = 1; \quad y_2 = F_2(x_2^2) = 3^2 = 9;$$

$$F_{\Sigma}(x) = F_1(x_1^2) + F_2(x_2^2) = 1 + 9 = 10$$

$$y_{\Sigma} = F(x_1 + x_2)^2 = (1 + 3)^2 = 4^2 = 16; \quad 16 \neq 10$$

Кроме этого, в нелинейных системах не выполняется принцип коммутативности (перестановочности, когда  $a \cdot b = b \cdot a$ ). Покажем это на примере последовательного соединения НЭ и ЛЧ, а так же при последовательном соединении ЛЧ и НЭ (рисунок 2.28). Пусть линейная часть системы имеет ПФ  $W(p) = 4$ , НЭ имеет зависимость  $F(x) = x^2$ . Входное воздействие  $x(t) = 1$

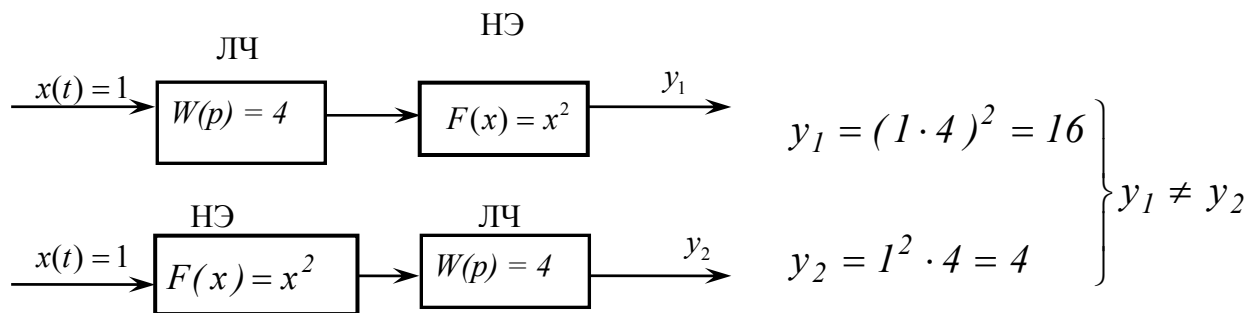


Рисунок 2.28 – Схемы различного последовательного соединения НЭ и ЛЧ

По приведённому на рисунке 2.28 расчёту видно, что значение  $y_1$  и  $y_2$  не равны. Поэтому перемещение линейного звена через нелинейное и наоборот недопустимо. В общем случае ЛЧ может быть динамическим звеном любого порядка. Исключением является перемещение звена запаздывание  $W(p) = e^{-p\tau}$  через нелинейное звено, что вполне допустимо. В связи с этим не все правила преобразования структурной схемы, которые используются для линейной системы, подходят для нелинейной системы.

Правила получения эквивалентной передаточной функции при последовательном, параллельном и встречно-параллельном соединении нелинейных звеньев такие же, как в линейных системах. Перемещение нелинейного звена через узел разветвления по направлению или против направления сигнала – то же аналогичные. Недопустимы следующие преобразования структурной схемы с нелинейными элементами:

- перемещение нелинейного звена через другое звено (кроме звена с запаздыванием), так как в нелинейной системе не выполняется принцип коммутативности;
- перемещение нелинейного звена через суммирующий узел, так как в нелинейной системе не выполняется принцип суперпозиции.

**Пример 2.1** – Получить расчетную структурную схему нелинейной системы по заданной структурной схеме (рисунок 2.29).

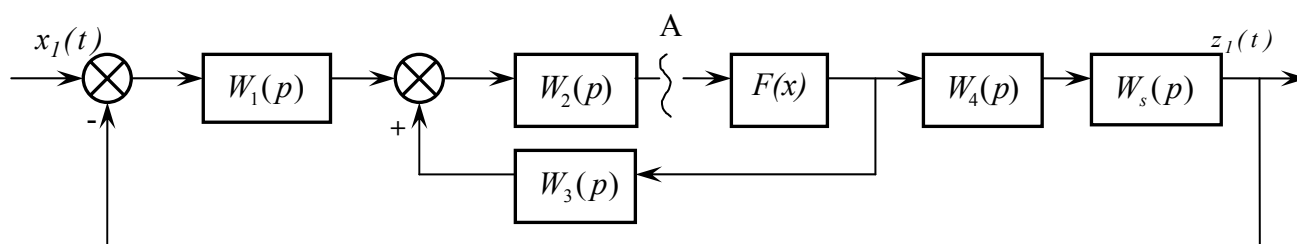


Рисунок 2.29 – Структурная схема нелинейной системы к примеру 2.1

### РЕШЕНИЕ

1 Разомкнем структурную схему перед нелинейным элементом  $F(x)$  (в точке А). Тогда входом будет воздействие на  $F(x)$ , а выходом – сигнал с  $W_2(p)$ . При этом входное воздействие  $x_1(t)$  должно быть приложено к этому новому входу – к нелинейному элементу  $F(x)$ . Преобразуем заданную структурную

схему так, чтобы получить новое входное воздействие  $x_2(t)$  по заданному входному воздействию  $x_1(t)$ .

2 Новое входное воздействие  $x_2(t)$  перед тем, как попасть на вход  $F(x)$  должно пройти через звенья  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$ . В преобразовании по Лапласу

$$L[x_2(t)] = L[x_1(t)]W_1(p)W_2(p);$$

Все остальные связи между звеньями сохраняются

3 В расчетной схеме входной сигнал будет  $x_2(t)$ , выходной сигнал будет  $z_2(t)$  со звена  $W_2(p)$  (рисунок 2.30).

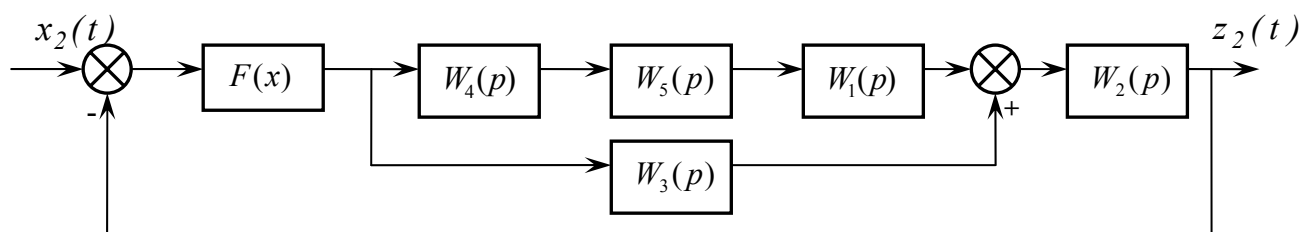


Рисунок 2.30 – Расчетная структурная схема нелинейной системы

4 Передаточная функция линейной части (ЛЧ)

$$W_{ЛЧ}(p) = [W_4(p)W_5(p)W_1(p) + W_3(p)]W_2(p)$$

Полученная расчетная структурная схема соответствует расчетному виду (смотри рисунок 2.26).

Примечание – В полученной расчетной структурной схеме входное воздействие  $x_2$  изменилось. Выходная координата тоже стала другая. Было выход  $z_1(t)$  со звена  $W_5(p)$ , стало – выход  $z_2(t)$  со звена  $W_2(p)$ .

**Пример 2.2** – Получить расчетную структурную схему нелинейной системы, когда нелинейный элемент находится в цепи обратной связи (рисунок 2.31)

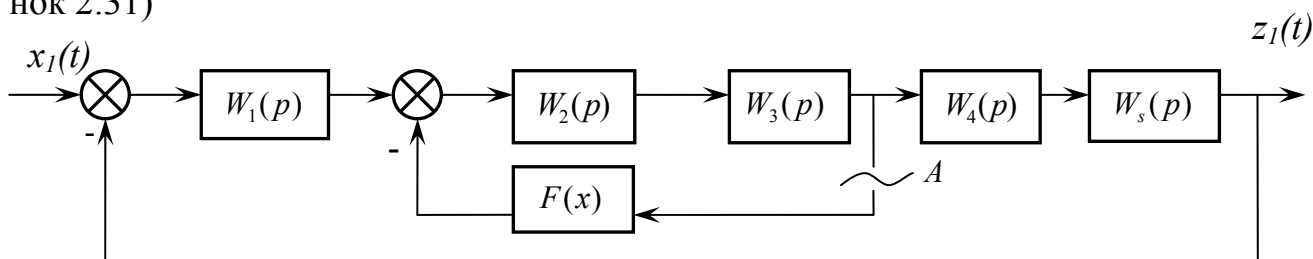


Рисунок 2.31 – Структурная схема нелинейной системы к примеру 2.2

РЕШЕНИЕ

1 Разомкнем структурную схему перед нелинейным элементом  $F(x)$  (в точке  $A$ ) определим новое входное воздействие  $x_2(t)$

$$L[x_2(t)] = L[x_1(t)]W_1(p)W_2(p)W_3(p)$$

2 В расчетной структурной схеме выходная координата будет со звена  $W_3(p)$ . Общий вид расчетной структурной схемы показан на рисунке 2.32

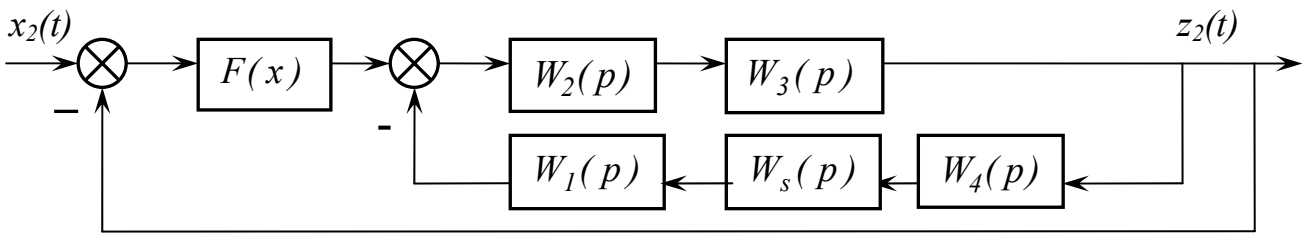


Рисунок 2.32 – Расчетно-структурная схема к примеру 2.2

3 Передаточная функция линейной части

$$W_{ЛЧ}(p) = \frac{W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_1(p) \cdot W_s(p) \cdot W_4(p)}$$

### Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.4.2

- 1 Что такое принцип суперпозиции?
- 2 Покажите свой пример его невыполнения в нелинейном звене.
- 3 Что такое принцип коммутативности?
- 4 При последовательном соединении нелинейного и линейного звена можно ли их менять местами?
- 5 Какие правила структурных преобразований линейных систем выполняются при структурных преобразованиях нелинейных систем?
- 6 Какие правила структурных преобразований линейных систем не выполняются при структурных преобразованиях нелинейных систем?
- 7 Чем отличается расчетная структурная схема нелинейной системы от заданной структурной схемы?
- 8 Изменяется ли при этом величина входного сигнала на нелинейный элемент?
- 9 Изменяется ли при этом величина выходного сигнала с расчетной структурной схемы?

### 2.4.3 Определение гармонической передаточной функции при однозначной характеристике релейного элемента

Пусть на вход нелинейного звена в виде релейного элемента с зоной нечувствительности (рисунок 2.33 а) подан синусоидальный сигнал (рисунок 2.33 б). На выходе релейного элемента возникает последовательность прямоугольных импульсов (рисунок 2.33 в).

Высота импульсов соответствует выходной величине реле. Частота следования импульсов полностью совпадает с частотой входного синусоидального сигнала. Ширина импульса зависит от амплитуды входного сигнала  $A$ . С увеличением  $A$  ширина импульсов увеличивается.

Полученную функцию выходного сигнала разложим в ряд Фурье с учетом, что входной сигнал центрированный ( $x_0 = 0$ ) и расчет ведется по первой (основной) гармонике.

$$y(t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t$$

Учитывая, что петли гистерезиса нет, то  $C_1 = 0$ .

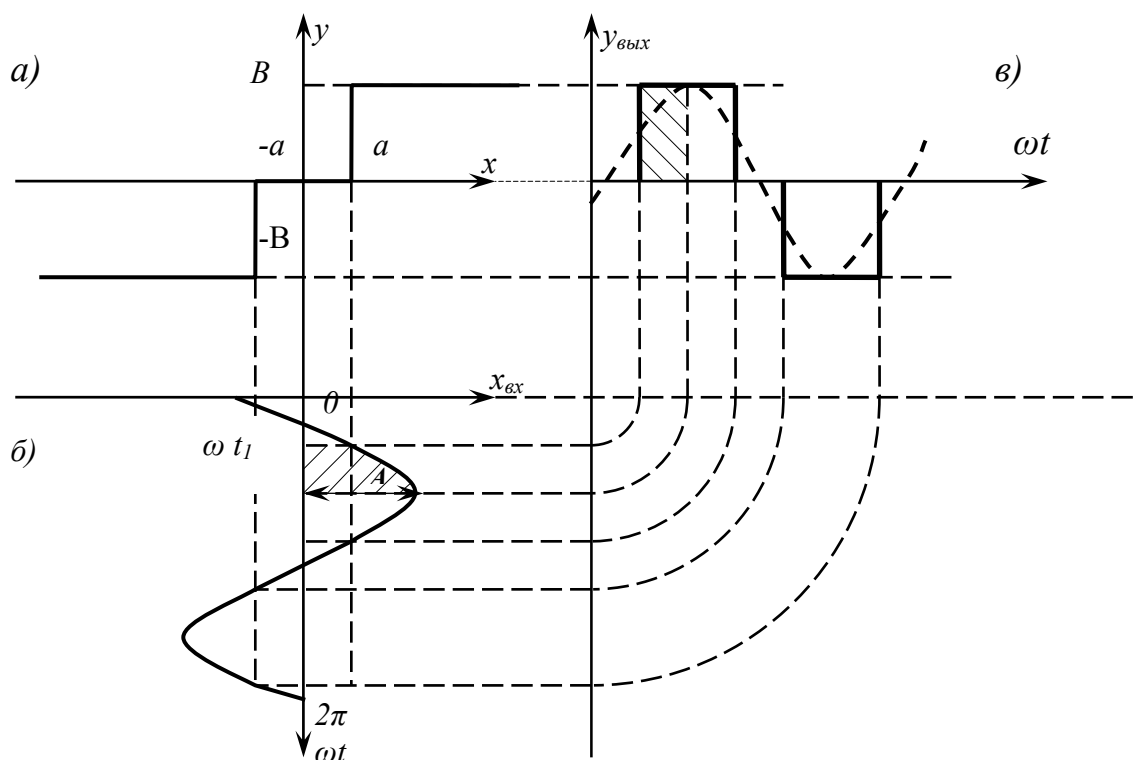


Рисунок 2.33 – К определению гармонической передаточной функции релейного элемента с зоной нечувствительности

Случай, когда  $C_1 \neq 0$  будет рассмотрен для реле с петлёй гистерезиса.

На вход релейного сигнала подана вся синусоида от  $\omega t = 0$  до  $\omega t = 2\pi$ , поэтому величина двух полученных импульсов определяется уравнением

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B \sin \omega t d\omega t$$

По рисунку 2.33 б видно, что реле срабатывает при входном сигнал больше зоны нечувствительности или  $A \cdot \sin \omega t_1 \geq a_1$ . На участке от 0 до  $\omega t_1$  входного сигнала нет. Следовательно, интегрирование надо осуществлять с момента  $\omega t_1$ . Поскольку выходной сигнал с реле симметричен, то можно изменить пределы интегрирования (так проще взять интеграл). Интегрирование будет

выполняться в пределах от  $\omega t_1$  до  $\pi/2$ . Эта часть входного и выходного сигнала на рисунках 2.33 б, в заштрихована. Затем полученный результат надо учетверить, чтобы получить значение импульсов от всей синусоиды от  $\omega t = 0$  до  $\omega t = 2\pi$ . В результате определяем  $y(t)$

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} B \sin \omega t d\omega t = -\frac{4B}{\pi} [-\cos \omega t]_{\omega t_1}^{\pi/2} = \frac{4B}{\pi} \cos \omega t_1$$

В полученном уравнении выразим  $\cos \omega t_1$  через  $\sin \omega t_1$

$$y(t) = \frac{4B}{\pi} \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_1}$$

Значение  $\sin \omega t_1$  связано с амплитудой входного сигнала  $A$  и зоной нечувствительности реле  $a$  следующим соотношением

$$A \sin \omega t_1 = a \quad \text{или} \quad \sin \omega t_1 = \frac{a}{A}$$

Подставим это значение  $\sin \omega t_1$  в выражение  $y(t)$  и получаем значение амплитуды выходного сигнала в зависимости от амплитуды входного сигнала и зоны нечувствительности реле

$$y = \frac{4B}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$$

Чтобы получить передаточную функцию релейного элемента с зоной нечувствительности надо взять отношение первой гармоники выходного сигнала к входному сигналу. В данном случае входной сигнал – это амплитуда входного сигнала  $A$ . При изменении входного сигнала  $A$  изменяется значение передаточной функции. Поэтому она обозначается  $W(A)$ .

$$W(A) = \frac{y}{A} = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$$

**Передаточной функцией нелинейного элемента называется отношение амплитуды первой гармоники выходного сигнала к амплитуде входного сигнала**

Эту передаточную функцию еще называют: *гармонический коэффициент преобразования нелинейного элемента, передаточная функция эквивалентного линейного звена, гармоническая передаточная функция* (Г-ПФ). Гармоническая, так как она характеризует по амплитуду первой гармонике ряда Фурье выходного сигнала.

Метод гармонической линеаризации релейного элемента называют *амплитудной интерполяцией*, так как полученная Г-ПФ характеризует зависимость амплитуды выходного сигнала от амплитуды входного сигнала и не зависит от изменения частоты входного сигнала. Такая амплитудная интерполя-

ция для большинства инженерных расчетов дает достаточно адекватный результат расчета.

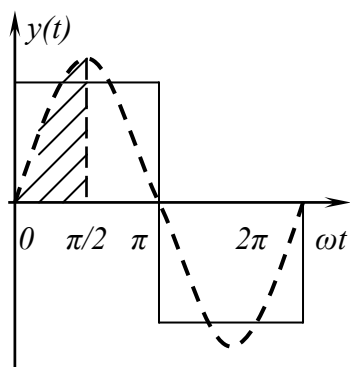


Рисунок 2.34 – Графики выходного сигнала идеального реле и его первой гармоники ряда Фурье

Рассмотрим получение гармонической передаточной функции (Г-ПФ) идеального реле (рисунок 1.5 а). Выходной сигнал будет иметь вид, показанный на рисунке 2.34. После аппроксимации выходного сигнала первым членом ряда Фурье в виде амплитуды выходного сигнала (на рисунке 2.34 показано штриховой жирной линией), получаем пределы измерения четверти выходной синусоиды от  $\omega t = 0$  до  $\omega t = \pi/2$ . Эта часть синусоиды заштрихована. Вся амплитуда выходного сигнала определяется

$$y = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} B \sin \omega t \cdot d\omega t = \frac{4B}{\pi} [-\cos \omega t]_0^{\pi/2} = \frac{4B}{\pi} \cdot 1$$

Тогда Г-ПФ идеального реле при выходном сигнале  $B$  и при амплитуде входного сигнала  $A$

$$W(A) = \frac{y}{A} = \frac{4B}{\pi \cdot A}$$

Таким образом, ограничиваясь рассмотрением первой гармоники на выходе нелинейного элемента при гармоническом сигнале на его входе, заданный вид нелинейности заменяют линейным уравнением, которое зависит от амплитуды входного сигнала  $A$ . Такая замена называется *гармонической линейризацией нелинейных зависимостей*. В иностранной литературе этот метод называется *метод описывающих функций*.

#### 2.4.4 Определение гармонической передаточной функции при гистерезисной характеристике релейного элемента

При гистерезисной характеристике релейного элемента Г-ПФ зависит от выходного сигнала по возрастающей ветви гистерезисной характеристики и его изменении по спадающей ветви гистерезисной характеристики. Определение гармонической передаточной функции (Г-ПФ) нелинейного элемента будем производить при тех же двух условиях (смотри рисунок 2.26):

- на вход НЭ поступает сигнал  $x(t) = A \cdot \sin \omega t$ ;
- ЛЧ системы обладает свойством фильтра.

Полученное значение выходного сигнала  $y(t)$  так же разложим в ряд Фурье и расчет проведём по основной гармонике

$$y(t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t,$$

где  $B_1$  – выходная величина реле;

$C_1$  – характеризует влияние гистерезиса характеристике.

Эти коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin u) \sin u \cdot du;$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin u) \cos u \cdot du,$$

где  $u$  – переменная интегрирования,  $u = \omega t$ .

Учитывая, что  $x(t) = A \cdot \sin \omega t$ , тогда  $A \cos \omega t = \frac{dA \sin \omega t}{\omega dt} \xrightarrow{L} \frac{px}{\omega}$

Обозначим отношение выходного сигнала к входному, который в виде амплитуды  $A$  через  $q(A)$  и  $q'(A)$

$$q(A) = \frac{B_1}{A}, \quad q'(A) = \frac{C_1}{A}$$

С учетом этих обозначений

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin u) \sin u \cdot du;$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin u) \cos u \cdot du;$$

Тогда гармоническая передаточная функция (Г-ПФ)

$$W(A, p) = \frac{y}{A} = \left[ q(A) + \frac{q'(A) \cdot p}{\omega} \right]$$

Для определения гармонической частотной передаточной функции (Г-ЧПФ) сделаем подстановку  $p = j\omega$

$$W(A, \omega) = [q(A) + jq'(A)]$$

Коэффициенты  $q(A)$  и  $q'(A)$  называются коэффициентами гармонической линеаризации.

**Пример 2.3** – Определить  $q(A)$  и  $q'(A)$  для идеальной релейной характеристики с петлёй гистерезиса (рисунок 2.35).

**РЕШЕНИЕ**

1 Переключение реле происходит при  $x = a$ . Поэтому в момент переключения величина  $\sin u$  определяется выражением  $\sin u = a/A$ ,

где  $a$  – амплитуда переключения;

$A$  – амплитуда входного сигнала.



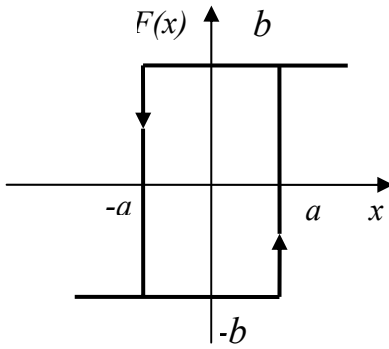


Рисунок 2.35 – Статическая характеристика идеального реле с петлёй гистерезиса

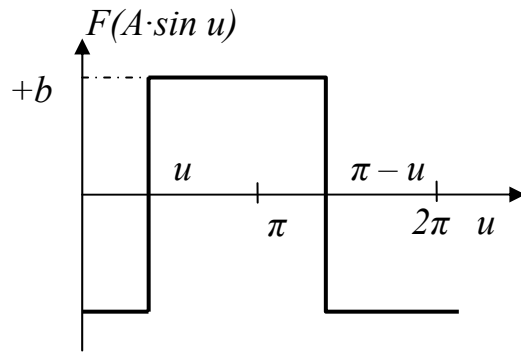


Рисунок 2.36 – Характеристика выходного сигнала реле

Очевидно, что для срабатывания реле необходимо  $A \geq a$ .

2 Значение  $q(A)$  определяется по формуле (рисунок 2.36)

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x) \sin u \cdot du = \frac{2}{\pi A} \left[ \int_0^{u_1} (-b) \sin u du + \int_{u_1}^{\pi} (-b) \sin u du \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi A} \left[ b \cos u \Big|_0^{u_1} - b \cos u \Big|_{u_1}^{\pi} \right] = \frac{2b}{\pi A} [\cos u_1 - 1 + 1 + \cos u_1] = \frac{4b}{\pi A} \cos u_1$$

3 Представим  $\cos u_1$  через  $\sin u_1$  и с учетом  $\sin u_1 = a/A$  получаем

$$q(A) = \frac{4b}{\pi A} \cdot \cos u_1 = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \sin^2 u} = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - a^2 / A^2}$$

Примечание – Получено такое же выражение, как для реле с зоной нечувствительности.

4 Определим значение  $q'(A)$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x) \cos u \cdot du = \frac{2}{\pi A} \left[ \int_0^{u_1} (-b) \cos u du + \int_{u_1}^{\pi} (-b) \cos u du \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi A} \left[ (-b) \sin u \Big|_0^{u_1} - b \cdot \cos u \Big|_{u_1}^{\pi} \right] = \frac{2b}{\pi A} [(-b) \sin u_1 - b \sin u_1] = \frac{-4b}{\pi A} \sin u_1$$

5 Учитывая, что  $\sin u_1 = a/A$ , получаем

$$q'(A) = \frac{-4ab}{\pi A^2}$$

Модуль Г –ЧПФ совпадает с соответствующим выражением для идеального реле. Это видно по следующей формуле

$$A = |W_H(A)| = \sqrt{q^2(A) + [q'(A)]^2} = \frac{4b}{\pi A}$$

Фазовый сдвиг для петлевой релейной характеристики определяется как  $\arctg$  отношения мнимой части к вещественной в Г-ЧПФ

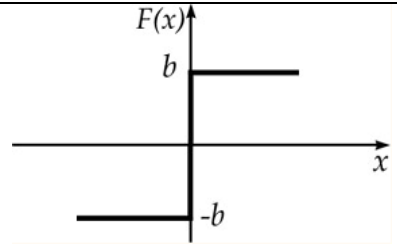
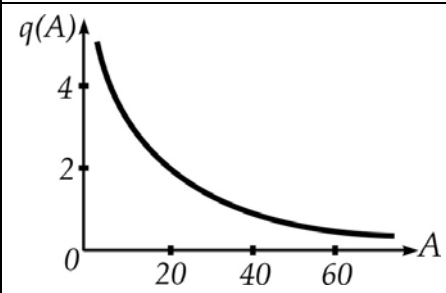
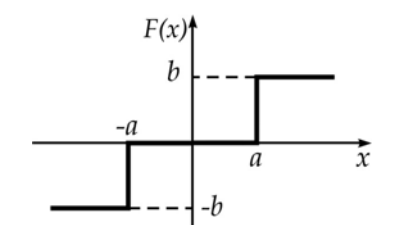
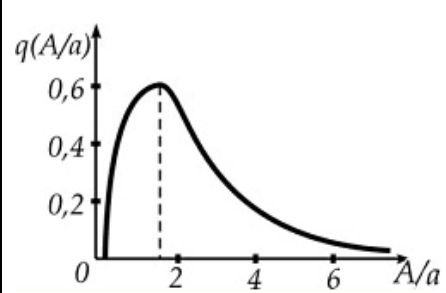
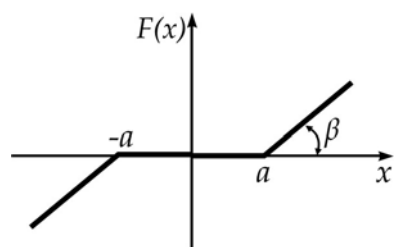
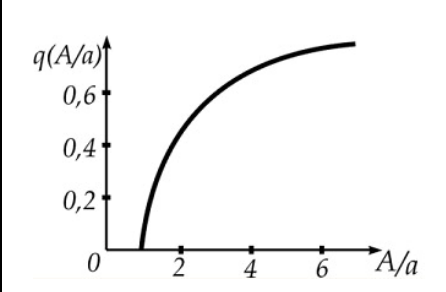
$$\varphi(A) = -\arctg \frac{a}{\sqrt{A^2 - a^2}}$$

При  $A = a$ , тогда  $\varphi(A) \rightarrow -\pi/2$ ; при  $A/a \rightarrow \infty$ ; тогда  $\varphi(A) \rightarrow 0^\circ$

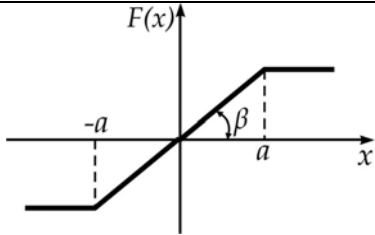
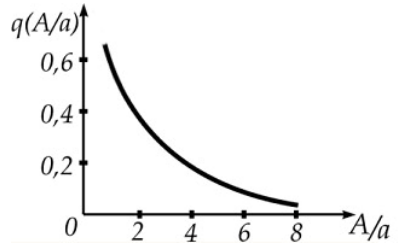
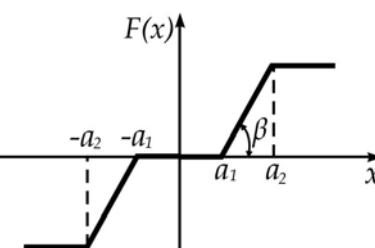
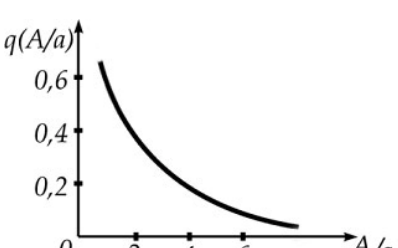
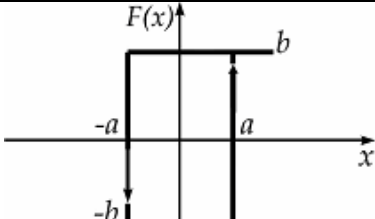
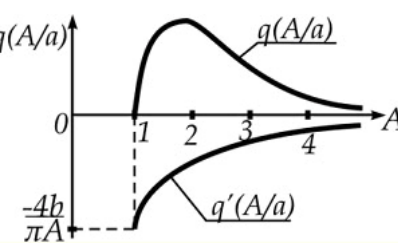
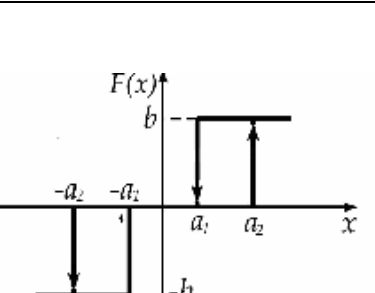
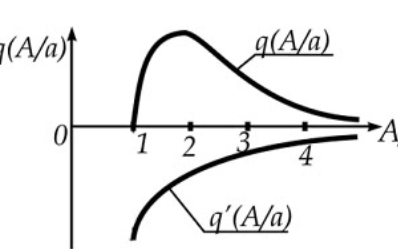
### 2.4.5 Коэффициенты гармонической линейзации нелинейных звеньев

В зависимости от вида нелинейности коэффициенты гармонической линейзации можно представить в виде зависимости  $q(A)$  и  $q'(A)$  от амплитуды входного сигнала. Основные характеристики нелинейных звеньев показаны в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Типовые нелинейности и их характеристики

Типовая нелинейность	Формулы для вычисления $q(A)$ и $q'(A)$	Характеристика $q(A)$ и $q'(A)$
<p style="text-align: center;"><b>1</b></p>  <p style="text-align: center;">Идеальное реле</p>	<p style="text-align: center;"><b>2</b></p> $q(A) = \frac{4b}{\pi A}$ $q'(A) = 0$	<p style="text-align: center;"><b>3</b></p> 
 <p style="text-align: center;">Реле с зоной нечувствительности</p>	$q(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}$ $q'(A) = 0$ <p style="text-align: center;">при <math>A &gt; a</math></p>	
 <p style="text-align: center;">Зона нечувствительности</p>	$q(A) = \frac{2K}{\pi} \left[ 1 - \left( \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) \right]$ $q'(A) = 0$ <p style="text-align: center;">при <math>A &gt; a</math>      <math>K = \operatorname{tg} \beta</math></p>	

Продолжение таблицы 2.1

1	2	3
 <p>насыщение</p>	$q(A) = \frac{2K}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right)$ $q'(A) = 0 \quad K = \operatorname{tg} \beta$	
 <p>Зона нечувствительности и насыщения</p>	$q(A) = \frac{2K}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{a_2}{A} - \operatorname{arctg} \frac{a_1}{A} + \frac{a_2}{A} \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{A^2}} - \frac{a_1}{A} \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}} \right)$ $q'(A) = 0 ; K = \operatorname{tg} \beta$ <p>при <math>A &gt; a_1</math></p>	
 <p>Гистерезисное реле</p>	$q(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}$ $q'(A) = -\frac{4ba}{\pi A^2}$ <p>при <math>A &gt; a</math></p>	
 <p>Гистерезисное реле с зоной нечувствительности</p>	$q(A) = \frac{2b}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}} \right)$ $q'(A) = -\frac{2ba_2}{\pi A^2} \left( 1 - \frac{a_1}{a_2} \right)$ <p>при <math>A &gt; a</math></p>	

Следует иметь в виду, что метод гармонической линеаризации является приближенным методом исследования по изменению первой гармоники ряда Фурье. При этом количественно не оцениваются погрешности в результате отбрасывания высших гармоник. Но можно утверждать: чем выше порядок линейной части системы, тем более строго выполняется гипотеза фильтра и тем большее значение имеет именно первая гармоника.

**Пример 2.4** – Определить абсолютное численное значение коэффициентов гармонической линейзации с учётом выходного значения реле  $b$  по формулам таблицы 2.1 при следующих данных:

$$b = 10; A = 2; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 1,2; K = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Определить коэффициент гармонической линейзации в относительных единицах

РЕШЕНИЕ

1 Для идеального реле  $q(A) = \frac{4b}{\pi A} = \frac{4 \cdot 10}{3,14 \cdot 2} = 6,36$

2 Для реле с зоной нечувствительности

$$q(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} = \frac{4 \cdot 10}{3,14 \cdot 2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5,5$$

3 Для усилительного звена с зоной нечувствительности

$$q(A) = \frac{2K}{\pi} \left( \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) = \frac{2 \cdot 1}{3,14} \left( \arcsin 0,5 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) = 0,698$$

4 Для усилительного звена с насыщением

$$q(A) = \frac{2K}{\pi} \left( \arcsin \frac{a_2}{A} + \arcsin \frac{a_1}{A} - \frac{a_1}{A} \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}} \right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{3,14} \left( \arcsin \frac{1,2}{2} + \arcsin \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2^2}} \right) = 0,350$$

5 Для гистерезисного реле

$$q(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} = \frac{4 \cdot 10}{3,14 \cdot 2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5,5$$

$$q'(A) = \frac{-4b\alpha}{\pi A^2} = \frac{-4 \cdot 10 \cdot 1}{\pi \cdot 4^2} = -0,79$$

6 Для гистерезисного реле с зоной нечувствительности

$$q(A) = \frac{2b}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{A^2}} \right) = \frac{2 \cdot 10}{3,14 \cdot 2} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{1,2}{2}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) = 5,3$$

$$q'(A) = \frac{-2ba_2}{\pi A^2} \left( 1 - \frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1,2}{3,14 \cdot 2 \cdot 4} \left( 1 - \frac{1}{1,2} \right) = -0,318$$

Примечание - Для получения коэффициентов гармонической линейризации в относительных единицах необходимо полученное значение для реле разделить на коэффициент усиления реле  $b$ . В данном примере  $b = 10$ .

1 Для реле с зоной нечувствительности

$$q(A) = 5,5 / 10 = 0,55$$

2 Для гистерезисного реле

$$q(A) = 5,5 / 10 = 0,55$$

$$q'(A) = -0,79 / 10 = -0,079$$

3 Для гистерезисного реле с зоной нечувствительности

$$q(A) = 5,3 / 10 = 0,53$$

$$q'(A) = -0,318 / 10 = -0,0318$$

### Вопросы для самоконтроля к подразделам 2.4.3 -2.4.5

- 1 Какой входной сигнал считается центрированным?
- 2 Как определяется передаточная функция нелинейного звена?
- 3 Почему она называется гармонической передаточной функцией или Г-ПФ?
- 4 Чему равняется Г-ПФ при  $A < a$  для нелинейного элемента с зоной нечувствительности?
- 5 Как получается гармоническая частотная передаточная функция (Г-ЧПФ)?
- 6 Как можно математически (через коэффициенты  $q(A)$  и  $q'(A)$  определить величину запаздывания)?
- 7 С увеличением амплитуды входного сигнала величина запаздывания в нелинейных звеньях с петлёй гистерезиса увеличивается или уменьшается?
- 8 С увеличением частоты входного сигнала величина запаздывания в однозначных нелинейных звеньях увеличивается или уменьшается?

## 3 Релейные системы автоматического регулирования

### 3.1 Особенности релейных систем

*Система автоматического регулирования называется релейной, если она содержит хотя бы один релейный элемент.*

*В релейном элементе при плавном изменении входного сигнала выходной сигнал изменяется скачкообразно.*

Релейные системы обладают рядом преимуществ, благодаря которым они широко используются в системах автоматического управления:

- простота устройства и надежность в работе;
- высокое быстродействие или практическая безинерционность;
- стабильность выходного параметра при широком диапазоне изменения входного сигнала;
- возможность реализовать сложный логический алгоритм работы;

*По статической характеристике* релейные системы разделяются на системы с однозначной статической характеристикой и системы с неоднозначной статической характеристикой реле, например, реле с петлей гистерезиса.

*По особенностям режима работы* релейные системы можно разделить на две группы [10,11,12].

К первой относятся системы, где реле работает по алгоритму «открыто-закрыто». При этом регулируемый орган может занимать конечное число состояний. Обычно два (в двухпозиционном реле) или три (в трехпозиционном реле). Особенность режима работы в том, что при отсутствии внешнего периодического воздействия их рабочий режим может быть колебательный.

Ко второй группе относятся системы, где реле обеспечивает постоянную скорость исполнительного устройства или, точнее говоря, со скоростью, которая не зависит от управляющего сигнала. Обычно это системы с исполнительным двигателем и гибкой обратной связью. В отличие от релейных систем первой группы, автоколебания в таких системах нежелательны. Их стараются устранить или уменьшить до достаточно малой величины.

*По характеристике линейной части* релейные системы подразделяются на системы с устойчивой, нейтральной и неустойчивой линейной частью. Использование релейных элементов в главной цепи таких систем или в виде корректирующего звена в обратной цепи позволяет обеспечить не только устойчивость системы с нейтральной и неустойчивой линейной частью, но и заданные динамические свойства системы.

Специфические особенности релейных систем в том, что форма выходной величины не зависит от формы входного сигнала. Это позволяет проводить математический анализ релейных систем сравнительно простыми средствами. Более того, эта особенность даёт возможность использовать методы расчёта, которые в некотором смысле аналогичны методам расчёта линейных систем.

Такая аналогия позволяет сохранить привычные понятия и терминологию линейной теории управления. Например, понятие передаточной функции, частотной и временной характеристики.

В этой главе большое место занимают примеры расчёта релейных систем, в которых наглядно показаны принципиально важные теоретические особенности расчёта, которые трудно сразу уяснить по общим полученным выводам. Конкретные примеры становятся не менее поучительны, чем подробное изложение теории расчёта.

### 3.2 Методы анализа релейных систем

Особенности релейных систем в том, что они наиболее склонны к возникновению устойчивого автоколебательного режима работы. Поэтому одна из задач *анализа релейных систем* состоит в определении возможности возникновения автоколебательного режима работы и если такой режим работы системы может возникнуть, то определить амплитуду и частоту этих колебаний. Затем становится задача *синтеза релейных систем* в определении таких коэффициентов линейной части системы, чтобы параметры автоколебательного режима работы были в заданных пределах или добиться отсутствия автоколебательного режима [13,14,15].

Для решения поставленных задач используют *метод фазовой плоскости* и по полученной траектории движения судят о динамических свойствах системы. Но этот метод пригоден только для системы второго порядка.

Для системы более высокого порядка используют *метод Гольдфарба*.

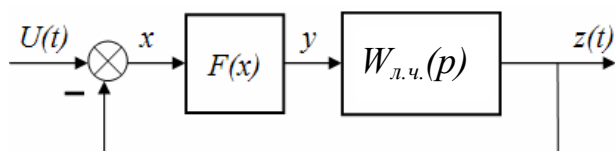


Рисунок 3.1 – Простейший вид структурной схемы замкнутой релейной системы

Для этого структурную схему представляют в виде последовательного соединения релейного элемента и линейной части системы. Линейная часть включает в себя все элементы системы, за исключением релейного элемента и описывается передаточной функцией  $W_{л.ч.}(p)$  (рисунок 3.1).

Релейный элемент описывается гармонически линеаризованной релейной характеристикой. По пересечению годографов АФЧХ линейной части системы и гармонически линеаризованной передаточной функцией реле определяется амплитуда и частота автоколебаний.

Для получения автоколебательного режима с заданной амплитудой и частотой колебания используется *метод скользящего режима* путём охвата релейного звена обратной связью с дифференцирующим звеном. Этот метод позволяет довести амплитуду колебания до бесконечности малой величины.

Для получения линейной характеристики реле (в заданных пределах) используют *метод вибрационной линеаризации* путём подачи на реле высокочастотного сигнала. При этом выходная характеристика реле становится близкой к линейной, но коэффициент усиления существенно уменьшается.

Для построения графика переходного процесса используется *метод пропорций* или метод А.В. Башарина, основанный на статических характеристиках реле и представляет собой графическое решение уравнения в конечных разностях. *Метод секущих* или метод Д.А. Башкирова для получения кривой переходного процесса основан на свойстве равномерного затухания экспоненты. Дифференциальное уравнение системы приводится к  $n$  уравнениям первого порядка. Внешнее воздействие на каждое уравнение используется в виде графика. На основании свойства равномерного затухания экспоненты через моменты времени  $\Delta t$  значений функции изменяется на  $e^{\Delta t/T}$ , где  $T$  - постоянная времени, определяемая касательной к экспоненте. По оси абсцисс откладывается  $t_{i+1} = t_i + \Delta x$  и проводится вертикальная линия до пересечения с секущей линией. Затем операция повторяется через  $t_{i+1} + \Delta t$ ,  $t_{i+2} + \Delta t$  и так далее. В настоящее время при широком развитии вычислительной техники все эти графо-аналитические методы используются редко.

В настоящее время реле всё шире используется как *логические переключающие устройства*, которые позволяют изменять параметры линейной части системы в зависимости от режима работы системы. Дальнейшее развитие этого направления привело к созданию *логических алгоритмов управления*, которые обеспечивают не только переменную структуру регулятора, но и позволяют изменять в нужном направлении сразу несколько характеристик системы по заданному критерию.

Все эти особенности релейной системы более подробно и с конкретными примерами рассмотрены в следующих разделах этой главы.

### 3.2.1 Анализ релейной системы методом фазовых траекторий

Для анализа процесса регулирования по фазовой траектории уравнение системы второго порядка представляют в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y, F(x)),$$

где  $x$  – регулируемая величина;

$y$  – скорость изменения регулируемой величины;

$F(x)$  – характеристика реле.

Чтобы изобразить динамику процесса на фазовой плоскости, из этих двух уравнений исключают время. Для этого первое уравнение делят на второе

$$\frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{y}{f(x, y, F(x))}, \quad \partial x = \frac{y \partial y}{f(x, y, F(x))}$$

Интегрируя это выражение, получаем уравнение траектории на фазовой плоскости в виде зависимости регулируемой величины  $x$  от скорости ее изменения  $y$ .



$$x = \int \frac{y \partial y}{f(x, y, F(x))}$$

Характеристику релейного элемента (рисунок 1.5 и 1.6), можно аппроксимировать кусочно-линейными функциями, которые изображаются ломаными линиями с точками разрыва. Эти точки разрыва на фазовой плоскости изображаются вертикальными линиями, которые называются *линии переключения*. Эти линии делят фазовую плоскость на ряд областей.

Построение фазовой траектории ведут по этим областям, то есть по отдельным линеаризованным участкам реле. Начальное значение каждого нового участка равно конечному значению предыдущего участка. Если нелинейный элемент имеет такую кусочно-линейную характеристику, то поведение системы на каждом участке описывается *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*. При пересечении изображающей точки на фазовой плоскости линией переключения коэффициенты дифференциального уравнения изменяют свои значения и снова остаются постоянными до следующей линии переключения. Так как линейные дифференциальные уравнения легко интегрируются, то получение уравнения фазовой траектории каждого участка можно получить достаточно просто.

Эти фазовые траектории имеют следующие свойства:

- при возрастании времени  $t$  движение изображающей точки происходит слева направо в верхней полуплоскости и справа налево в нижней полуплоскости;
- при  $y > 0$  переменная  $x$  всегда возрастает;
- при  $y < 0$  переменная  $x$  всегда убывает;
- при  $y = 0$  переменная  $x$  пересекает ось абсцисс перпендикулярно этой оси.

Рассмотрим построение фазовой траектории релейной системы и анализ переходного процесса на конкретных примерах.

**Пример 3.1** – Определить устойчивость и качество переходного процесса релейной системы по фазовой траектории. Простейший вид структурной схемы показан на рисунке 3.2. Статическая характеристика реле с зоной нечувствительности показана на рисунке 3.3.

Параметры системы:  $K = 1, T = 10,$   
 Параметры реле:  $b/a = 3, \alpha = 2$

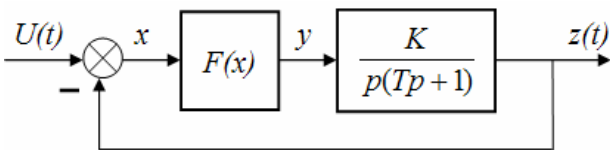


Рисунок 3.2 – Структурная схема релейной следящей системы к примеру 3.1

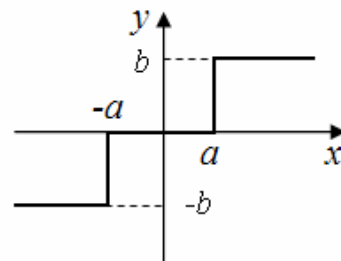


Рисунок 3.3 – Статическая характеристика релейного элемента с зоной нечувствительности

## РЕШЕНИЕ

1 Определим общую передаточную функцию системы

$$W_{\text{общ}}(p) = \frac{\frac{F(x)k}{P(Tp+1)}}{1 + \frac{F(x)k}{P(Tp+1)}} = \frac{F(x)k}{Tp^2 + p + F(x)k}$$

2 Проанализируем собственное движение системы по характеристическому уравнению

$$Tp^2 + p + F(x)k = 0$$

Представим это уравнение в виде дифференциального уравнения и введем уравнение по скорости изменения  $x$ . Тогда получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ T \frac{dy}{dt} + y + F(x)k = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-(y + F(x)k)}{T} \end{cases}$$

3 Первое уравнение делим на второе и определяем значение  $\partial x$

$$\frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{Ty}{-(y + F(x)k)}$$

$$\partial x = \frac{-Ty \cdot \partial y}{y + F(x)k} = \frac{-T[y + F(x)k - F(x)k] \partial y}{y + F(x)k} = -T \partial y + \frac{TF(x)k \cdot \partial y}{y + F(x)k}$$

4 Проинтегрируем полученное уравнение и получаем уравнение фазовой траектории

$$x = -T \cdot y + T \cdot F(x) \ln|y + k \cdot F(x)| + C_0, ,$$

где  $C_0$  – постоянная интегрирования, характеризующая начальные условия движения системы;

$x$  – изменение регулируемой величины;

$y$  – изменение скорости движения регулируемой величины.

5 Начальное значение фазовой траектории зависит от заданных начальных условий  $C_0$ . Пусть при  $t = 0$  начальное значение фазовой траектории равно  $x_0$  и  $y_0$ . Определим  $C_0$

$$x_0 = -Ty_0 + T \cdot F(x) \ln|y_0 + kF(x)| + C_0$$

$$C_0 = x_0 + Ty_0 + T \cdot F(x) \ln|y_0 + kF(x)|$$

Тогда уравнение фазовой траектории с учетом начальных условий

$$x = x_0 + T(y_0 - y) + T \cdot F(x) \ln \left| \frac{y + kF(x)}{y_0 + kF(x)} \right|$$

6 В полученном уравнении фазовой траектории характеристика релейного элемента в зависимости от величины  $x$  может иметь три различных значения

$$F(x) = \begin{cases} -b, & \text{при } x \leq -a \\ 0, & \text{при } |x| < a \\ b, & \text{при } x \geq a \end{cases}$$

Уравнение фазовой траектории можно разделить на три участка

$$\text{I участок} \quad x_1 = x_0 + T(y_0 - y) - T \cdot b \cdot \ln \left| \frac{y - kb}{y_0 - kb} \right|, \quad \text{при } x \leq -a$$

$$\text{II участок} \quad x_1 = x_0 + T(y_0 - y), \quad \text{при } |x| < a$$

$$\text{III участок} \quad x_1 = x_0 + T(y_0 - y) + T \cdot b \cdot \ln \left| \frac{y + kb}{y_0 + kb} \right|, \quad \text{при } x \geq a$$

Переход фазовой траектории с одного участка на другой происходит при срабатывании реле. На фазовой плоскости значения, при которых срабатывает реле, называются *линиями переключения*. На этих линиях переключения производятся «сшивание» фазовых траекторий между участками. При этом конечное значение предыдущей фазовой траектории становится начальным условием для следующей фазовой траектории.

Построим фазовую траекторию при следующих значениях параметров системы:  $k=1$ ;  $T=10$ ;  $b=\pm 3$ ;  $a=\pm 2$  (рисунок 3.4).

Начальное значение движения системы  $x_{01} = -6$ ;  $y_{01} = 0$ .

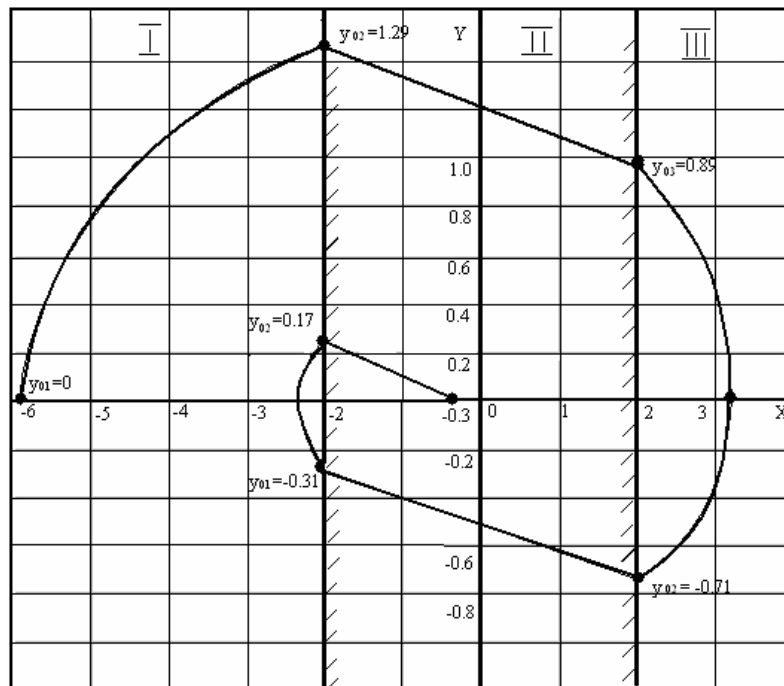


Рисунок 3.4 – Фазовая траектория релейной системы к примеру 3

7 Движение системы начинается на I участке. Реле включено  $b = -3$ .

$$x_1 = x_0 + T(y_{01} - y) - T \cdot b \cdot \ln \left| \frac{y - kb}{y_{01} - kb} \right| = -6 + 10(0 - y) - 10 \cdot 3 \cdot \ln \left| \frac{y - 3}{0 - 3} \right|$$

$$\text{При } y=0 \quad x_1 = -6 - 0 - 30 \cdot 0 = -6;$$

$$\text{При } y=0,8 \quad x_1 = -6 - 8 - 30 \cdot (-0,31) = -4,7;$$

$$\text{При } y=1,29 \quad x_1 = -6 - 12,9 - 30 \cdot (-0,56) = -2.$$

Фазовая траектория дошла до линии переключения и при  $x_1 = -2$  реле отключается (зона нечувствительности), но система по инерции продолжает движение на участке II.

8 Определим фазовую траекторию на участке II. Начальные условия движения на этом участке  $x_{02} = -2$ ;  $y_{02} = -1,29$ . Реле отключено  $b = 0$ .

$$x_2 = x_{02} + T(y_{02} - y) = -2 + 10 \cdot (1,29 - y)$$

$$\text{При } y=1,2 \quad x_2 = -2 + 10 \cdot (1,29 - 1,2) = -1,1;$$

$$\text{При } y=1 \quad x_2 = -2 + 10 \cdot (1,29 - 1) = 0,9;$$

$$\text{При } y=0,89 \quad x_2 = -2 + 10 \cdot (1,29 - 0,89) = +2.$$

При  $x_2 = 2$  реле включается и система двигается на участке III.

9 Определим фазовую траекторию на участке III. Начальные условия движения на этом участке  $x_{03} = +2$ ;  $y_{03} = 0,89$ . Реле включено ( $b = +3$ ).

$$x_3 = x_{03} + T(y_{03} - y) + T \cdot b \cdot \ln \left| \frac{y + kb}{y_{03} + kb} \right| = +2 + 10 \cdot (0,89 - y) + 10 \cdot 3 \cdot \ln \left| \frac{y + 3}{0,89 + 3} \right|$$

$$\text{При } y=0,5 \quad x_3 = +2 + 10 \cdot (0,89 - 0,5) + 30 \cdot \ln \left| \frac{0,5 + 3}{3,89} \right| = 2,13;$$

$$\text{При } y=0 \quad x_3 = +2 + 10 \cdot (0,89 - 0) + 30 \cdot \ln \left| \frac{0 + 3}{3,89} \right| = 2,13;$$

$$\text{При } y=-0,5 \quad x_3 = +2 + 10 \cdot (0,89 + 0,5) + 30 \cdot \ln \left| \frac{-0,5 + 3}{3,89} \right| = 2,13;$$

$$\text{При } y=-0,71 \quad x_3 = +2 + 10 \cdot (0,89 + 0,71) + 30 \cdot \ln \left| \frac{-0,71 + 3}{3,89} \right| = 2,13.$$

При  $x_3 = +2$  реле отключается, но система продолжает движение по инерции на участке II.

10 Определим фазовую траекторию на участке II. Начальные условия движения на этом участке  $x_{04} = +2$ ;  $y_{04} = -0,71$ . Реле отключено ( $b = 0$ ).

$$x_2 = x_{02} + T(y_{04} - y) + 0$$

$$\text{При } y=-0,5 \quad x_4 = +2 + 10 \cdot (-0,71 + 0,5) = +0,1;$$

$$\text{При } y=-0,35 \quad x_4 = +2 + 10 \cdot (-0,71 + 0,35) = -1,6;$$

$$\text{При } y=-0,31 \quad x_4 = +2 + 10 \cdot (-0,71 + 0,31) = -2.$$

При  $x_2 = -2$  реле включается, и система движется на участке I.

11 Определим фазовую траекторию на участке I. Начальные условия  $x_{05} = -2$ ;  $y_{05} = -0,31$ . Реле включено ( $b = -3$ ).

$$\text{При } y = 0 \quad x_5 = -2 + 10 \cdot (-0,31 - 0) + 30 \cdot 0,096 = -2,3;$$

$$\text{При } y = 0 \quad x_5 = -2 + 10 \cdot (-0,31 - 0,21) + 30 \cdot 0,17 = -2,0.$$

12 При  $x_1 > -2$  реле отключается (снова зона нечувствительности). Фазовая траектория на участке II при начальных условиях  $x_6 = -2; y_6 = 0,17$ .

$$\text{При } y = 0 \quad x_6 = -2 + 10 \cdot (0,17 - 0) = -2 + 1,7 = -0,3 \text{ (движение закончено).}$$

ОТВЕТ Система устойчивая «в общем». (при любых начальных условиях). Установившееся значение – устойчивое состояние равновесия при  $x_\infty = -0,3$ . Переходной процесс – колебательный, затухающий.

**Пример 3.2** – По фазовому портрету определить устойчивость и качество переходного процесса для релейной системы по примеру 1, где поставлено реле с петлей гистерезиса (рисунок 3.5). Параметры реле:  $|a| = 2, |b| = 3$ . Начальные значения фазовой траектории такое же:  $x_0 = -6; y_0 = 0$

### РЕШЕНИЕ

Фазовая траектория этого примера 3.2 будет отличаться от фазовой траектории примера 3.1 по двум показателям.

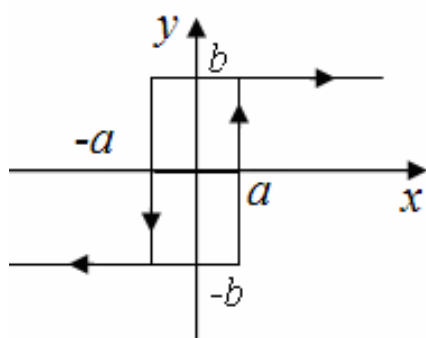


Рисунок 3.5 – Статическая характеристика реле с петлей гистерезиса

Во-первых, в заданной характеристике реле нет зоны нечувствительности и поэтому *нет установившегося состояния равновесия, а будет установившееся состояние автоколебаний.*

Во-вторых, данное реле двухпозиционное и может принимать только два положения: включено ( $+b$ ) и включено ( $-b$ ). *Фазовая траектория системы с таким реле имеет только два участка. Участок I (включено  $+b$ ) и участок III (включено  $-b$ ). Участка II, где реле отключается, нет.*

Приступаем к построению фазовой траектории. Напоминаем, изменились только параметры реле: нет зоны нечувствительности, но есть петля гистерезиса  $a = \pm 2$ . Начальное значение

движения фазовой траектории то же:  $x_{01} = -6, y_{01} = 0$  (рисунок 3.6). Поэтому начало движения этой фазовой траектории соответствует участку I примера 1. Но эта траектория продолжается до  $x_{01} = +2$ , а затем сразу на III участке от  $x_{01} = 2$  до  $x_{02} = -2$ , потом снова I участок и так далее (участка II нет, так как нет зоны нечувствительности). Уравнения фазовой траектории на I и III участке соответствуют уравнениям движения на этих участках по примеру 3.1. Разница движения в примере 3.2 в начальных условиях по каждому участку. Обозначим начало движения на I участке  $x_{01}$  и  $y_{01}$ ; конец движения на I участке  $x_{02}$  и  $y_{02}$ . Эти координаты являются началом движения на III участке. Конец движения на III участке становится началом движения на I участке ( $x_{03}, y_{03}$ ) и так далее. В таблице 3.1 Эти значения обозначаются  $x_{0i}$  и  $y_{0i}$ . Результаты такого вычисления показаны в таблице 3.1

Таблица 3.1 – Параметры фазовой траектории к примеру 3.2

$y$	$y_{01} = 0$	0,5	1	1,5	$y_{02} = 1,7$	1	0	-1	-1,5	$y_{03} = -1,64$
$x$	$x_{01} = -6$	-5,5	-4,4	-1,8	$x_{02} = 2$	4,1	5,5	4,6	-0,5	$x_{03} = -2$

Продолжение таблицы 3.1

$y$	-1	0	1	$y_{04} = 1,64$	1	0	-1	$y_{05} = y_{03} = -1,64$
$x$	-4	-5,4	-3,2	$x_{04} = 2,0$	4,1	5,4	3,1	$x_{05} = x_{03} = -2$

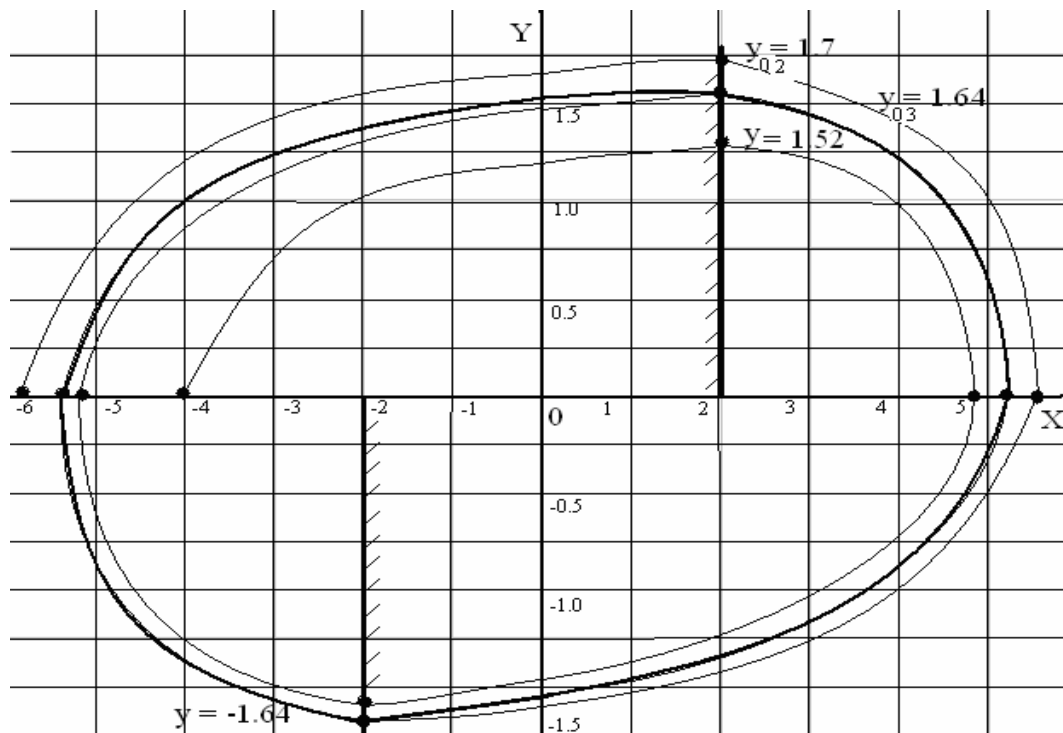


Рисунок 3.6 – Фазовые траектории релейной системы к примеру 3.2 и 3.3

*Обратите внимание!* Фазовая траектория имеет вид устойчивого фокуса. При  $y = 0$  её амплитуда колебания уменьшается:  $x_{01} = -6$ ,  $x_{02} = +5,5$ ,  $x_{03} = -5,4$ ,  $x_{04} = +5,4$  и в дальнейшем амплитуда не изменяется. Она перешла на *устойчивый предельный цикл установившихся колебаний (автоколебания)*.

**Пример 3.3** - Определить, какая будет фазовая траектория по примеру 3.2, если начальные условия внутри предельного цикла ( $x_{01}^* = -4$ ,  $y_{01}^* = 0$ ). Результаты вычисления для этого случая показаны в таблице 3.2. График фазовой траектории показан на том же рисунке 3.6.

Таблица 3.2 – Параметры фазовой траектории к примеру 3.3

$y^*$	$y_{01}^* = 0$	1	1,5	$y_{02}^* = 1,52$	1	0	-1	-1,5
$x^*$	$x_{01}^* = -4$	-1,7	+1,9	$x_{02}^* = 2,0$	3,7	4,9	2,7	-1,8

Продолжение таблицы 3.2

$y^*$	$y^*_{03} = -1,64$	-1	-0,5	0	1	1,5	$y^*_{04} = 1,64$	1	0	$y^*_{05} = y^*_{03} = -1,64$
$x^*$	$x^*_{03} = -2,0$	-3,9	-4,7	-5,2	-3,1	0,6	$x^*_{04} = 2,0$	4,1	5,4	$x^*_{05} = x^*_{03} = -2,0$

ОТВЕТ При начальных условиях  $y^*_{04} = 0$  и  $x^*_{04} = -4$  фазовая траектория внутри предельного цикла имеет вид *неустойчивого фокуса*. С переходом на этот же предельный цикл (автоколебания с  $|A_\infty| = 5,4$  и  $\omega = 1,64 \text{ c}^{-1}$ )

Значит, такая релейная система устойчива «в большом» (при  $|x_{01}| > 5,4$ ) и неустойчива «в малом» (при  $|x^*_{01}| < 5,4$ ). Эти две области возможных начальных значений являются *областями притяжения* к устойчивому циклу (автоколебание).

### Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.2.1

- 1 Можно ли провести анализ системы методом фазовой плоскости для любого типа реле?
- 2 Можно ли провести анализ системы методом фазовой плоскости для системы любого порядка?
- 3 Последовательность математических операций для получения уравнения фазовой траектории.
- 4 В зависимости от какого параметра релейной системы фазовая плоскость разбивается на участки.
- 5 Что называется линиями переключения?
- 6 Как по фазовой траектории определить устойчивость системы?
- 7 Что такое предельный цикл фазовой траектории?

### 3.2.2 Релейная система со скользящим режимом

Рассмотрим релейную следящую систему (рисунок 3.1) с идеальным реле (без зоны нечувствительности). Очевидно, что если нет зоны нечувствительности, то фазовый портрет будет устойчивый фокус с предельным циклом установившихся колебаний (рисунок 3.7). Для уменьшения предельного цикла установившихся колебаний, а в идеале для полной ликвидации колебательного процесса в установившемся режиме дополнительно в обратную связь включают дифференцирующее звено (рисунок 3.8).

Определим её общую передаточную функцию по ошибке регулирования  $\Delta x$

$$W_{ou}(p) = \frac{1}{1 + \frac{F(\Delta x) \cdot K}{P(Tp + 1)}} = \frac{P(Tp + 1)}{Tp^2 + p + F(\Delta x) \cdot K}$$

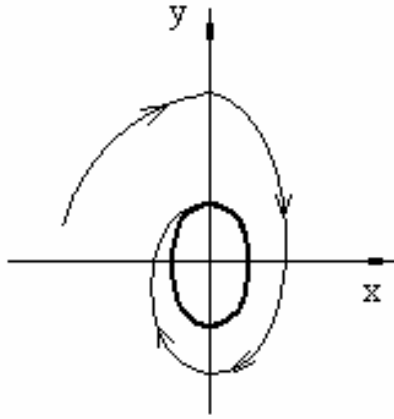


Рисунок 3.7 – Фазовая траектория устойчивой системы с идеальным реле

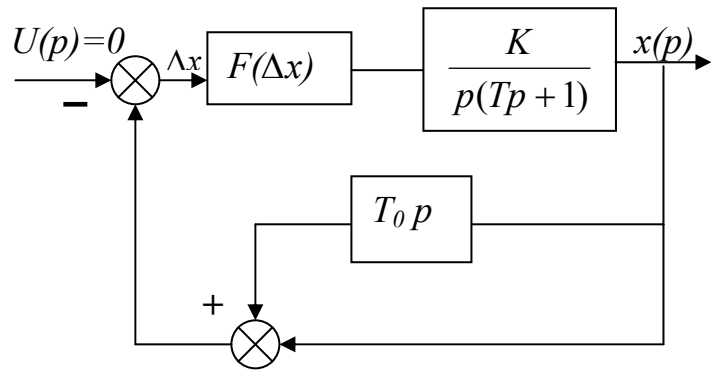


Рисунок 3.8 – Структурная схема релейной системы с дополнительным включением дифференцирующего звена в обратную связь

Представим характеристическое уравнение в дифференциальной форме

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + F(\Delta x) \cdot K = 0$$

При исследовании свободного (собственного) движения системы принимается, что управляющий сигнал отсутствует и входом на релейный элемент будет сигнал обратной связи  $\Delta x = x + T_0 dx/dt$

Тогда входной сигнал на реле будет зависеть от выходного сигнала  $x$  и ещё дополнительно от производной по этому сигналу с постоянной времени  $T_0$ .

Дифференциальное уравнение свободного движения системы принимает вид

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + F\left(x + T_0 \frac{dx}{dt}\right) \cdot K = 0$$

Введем дополнительное уравнение  $dx/dt = y$  и получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ T \frac{dy}{dt} + y + K \cdot F(x + T_0 y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-(y + K \cdot F(x + T_0 y))}{T}; \end{cases}$$

Первое уравнение делим на второе и определяем  $x = f(y)$ :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-T \cdot y}{y + K \cdot F(x + T_0 y)}, \quad \partial x = \frac{-T \cdot y \cdot \partial y}{y + K \cdot F(x + T_0 y)}$$

$$x = -T \cdot y + T \cdot F(x + T_0 y) \cdot \ln |y + K \cdot F(x + T_0 y)| + C_0;$$

Пусть начальные условия движения системы  $x_0$  и  $y_0$ . С учётом этих начальных условий окончательно получаем уравнение фазовой траектории (смотри пример 3.1)



$$x = x_0 + T(y_0 - y) + T \cdot F(x + T_0 \cdot y) \cdot \ln \left| \frac{y + K \cdot F(x + T_0 y)}{y_0 + K \cdot F(x + T_0 y)} \right|;$$

*Обратите внимание!* Уравнение фазовой траектории получилось аналогичное с примером 1, но срабатывание реле на линии переключения зависит и от  $x$ , и от  $y$  (производной по  $x$ ). При этом возможны три случая.

Первый случай. Если  $T_0 = 0$ , тогда переключение реле зависит только  $x$ .

Второй случай. Если  $T_0 > 0$  и значение  $\Delta x$  возрастает. При  $x < 0$ , но  $y = (dx/dt) > 0$ , тогда  $\Delta x$  может быть положительным и переключение реле (+ $b$ ) произойдет при отрицательном значении  $x$ .

Третий случай. Если  $T_0 > 0$  и значение  $x$  убывает. При  $x > 0$ , но  $y = (dx/dt) < 0$ , тогда  $\Delta x$  может стать отрицательным и выходной сигнал реле (- $b$ ) будет при положительном значении  $x$  (смотри рисунок 3.9).

Конкретное уравнение линии переключения зависит от характеристики реле. В данном случае при идеальном реле это уравнение переключения зависит только от сигнала обратной связи.

$$x + T_0 y = 0, \quad \text{тогда} \quad y = -x/T_0.$$

Получили уравнение переключения в виде наклонной прямой линии переключения, проходящей через второй и четвёртый квадрант фазовой плоскости (рисунок 3.9). В этом фазовом портрете при  $x = -1$  и  $y > 0,55$  величина  $\Delta x$  становится положительной и выходной сигнал реле (+ $b$ ). Когда  $\Delta x$  убывает, то  $x = +1$ ,  $y < -0,55$ , величина  $\Delta x$  становится отрицательной и выходной сигнал реле (- $b$ ). Такая наклонная линия переключения может существенно изменить фазовую траекторию релейной системы. Это покажем в примерах 3.4 и 3.5.

**Пример 3.4** – Построить фазовый портрет и определить качество переходного процесса для системы без дополнительного дифференцирующего звена в обратной связи (рисунок 3.2).

Параметры системы:  $K = 1$ ,  $T = 10$  с,

Параметры реле:  $b = /3/$ ,  $a = 0$  (зоны нечувствительности нет).

Начальные условия движения:  $x_{01} = -6$ ,  $y_{01} = 0$ .

### РЕШЕНИЕ

1 Определим фазовую траекторию системы при  $T_0 = 0$ , когда форсирующего звена нет (первый случай). Линия переключения расположена на оси ординат. Уравнение фазовой траектории

$$x = x_0 + T(y_0 - y) + T \cdot F(x) \cdot \ln \left| \frac{y + kF(x)}{y_0 + kF(x)} \right|$$

В это уравнение подставим числовые значения системы

$$x = -6 - 10y + 10F(x) \cdot \ln \left| \frac{y + 1 \cdot F(x)}{0 + 1 \cdot F(x)} \right|$$

Релейный элемент может иметь два значения

$$F(x) = \begin{cases} -3 & \text{при } x < 0 \\ +3 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Уравнение фазовой траектории можно разделить на два участка

I участок  $x = x_0 + 10(y_0 - 3) + 10(-3) \cdot \ln \left| \frac{y-3}{y_0-3} \right|$  при  $x < 0$

II участок  $x = x_0 + 10(y_0 + 3) + 10 \cdot 3 \cdot \ln \left| \frac{y+3}{y_0+3} \right|$  при  $x > 0$

Результаты вычисления показаны в таблице 3.3

Таблица 3.3 – Параметры фазовой траектории к примеру 3.4

y	y <sub>01</sub> = 0	1	y <sub>02</sub> = 1,52	1	0,5	0	-0,5	y <sub>03</sub> = -1,18	-0,5	0	0,5
x	x <sub>01</sub> = -6	-3,4	x <sub>02</sub> = 0	1,7	2,5	2,9	2,3	x <sub>01</sub> = 0	-1,5	-1,8	-1,2

Продолжение таблицы 3.3

y	y <sub>04</sub> = 0,96	0,5	0	-0,5	y <sub>05</sub> = -0,76	0	y <sub>06</sub> = 0,55	0	y <sub>07</sub> = -0,55	0
x	x <sub>04</sub> = 0	0,9	1,3	0,8	x <sub>05</sub> = 0	-0,82	x <sub>06</sub> = 0	0,45	x <sub>07</sub> = 0	-0,45

Построение фазовой траектории показано на рисунке 3.9

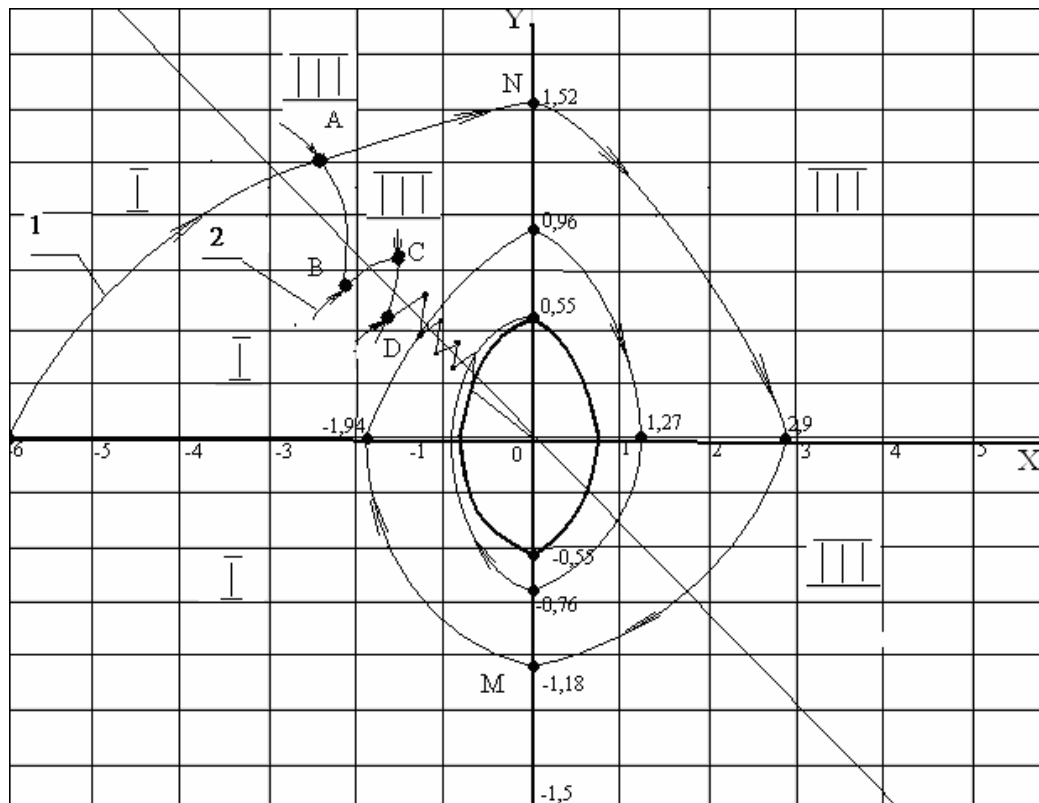


Рисунок 3.9 – Фазовые траектории релейной системы к примеру 3.4 и 3.5

**ВЫВОД** Фазовая траектория – устойчивый фокус. После четырёх колебаний система перешла в устойчивый предельный цикл с амплитудой  $A = 0,45$  и частотой  $\omega = 0,55 \text{ c}^{-1}$  (рисунок 3.9).

**Пример 3.5** – Построить фазовый портрет и определить качество переходного процесса систему по примеру 3.4 с дополнительным дифференцирующим звеном в обратной связи с  $T_0 = 2,5$  с.

**РЕШЕНИЕ** При включении дифференцирующего звена в обратную связь с  $T_0 = 2,5$  с. Изменится линия переключения. Без дифференцирующего звена она была на оси ординат (смотри предыдущее решение). С дифференцирующим звеном линия переключения определяется уравнением

$$y = -x/T_0, \text{ или } y = -x/2,5 = -0,4x.$$

Фазовая траектория с наклонной линией переключения не будет совершать полный цикл от  $(+y)$  до  $(-y)$ , а станет колебаться около линии переключения и постепенно приближаться к началу координат, к устойчивому состоянию системы. В результате возникает *скользящий режим*.

***Движение системы вдоль линии переключения к началу координат называется скользящим режимом системы.***

Рассмотрим физическую причину возникновения такого скользящего режима. Главная особенность фазового портрета с дифференцирующим звеном в цепи обратной связи в том, что расположение участков на фазовой плоскости изменилось. Часть I –го участка перешло во второй квадрант фазовой плоскости, а часть III-го участка перешло в четвёртый квадрант. Поэтому фазовая траектория будет иметь принципиально другой вид.

Допустим, что система обладает некоторой инерционностью, она «проскакивает» линию переключения и только потом начинает двигаться по новой траектории. Пусть изображающая точка начинает двигаться по траектории устойчивого фокуса (I участок) от начального значения  $x_{01} = -6$ ,  $y_{01} = 0$ . Она «проскакивает» линию переключения и попадает в точку  $A$ . В точке  $A$  система восприняла переключение реле и стала двигаться по траектории III участка, который расположен во втором квадранте. Система снова «проскочила» линию переключения и попала в точку  $B$  (I участок). Там восприняла переключения реле и стала двигаться по траектории I участка в точку  $C$ . Далее процесс колебания системы относительно линии переключения повторяется.

***Обратите внимание!*** Все фазовые траектории относительно наклонной линии переключения входящие и нет выходящей с полным циклом от  $(+y)$  до  $(-y)$ . Так траектория I участка «встречает» траекторию III участка в точке  $A$ , которую, в свою очередь, «встречает» траектория I участка в точке  $B$ . Затем траектории «встречаются» в точке  $C$ , и в точке  $D$  и так далее. Некоторый отрезок выхода траектории за линию переключения получается при принятом допущении об инерционности реального реле и для наглядности рассмотрения скользящего режима.

В этом скользящем режиме амплитуда колебаний уменьшается, так как наклон фазовой траектории к оси абсцисс с каждым циклом возрастает. Частота колебаний при этом увеличивается.

В результате изображающая точка двигается непосредственно по линии переключения, которая на фазовой плоскости в виде прямой линии. Определим уравнение движения системы по линии переключения в зависимости от времени. Линия переключения определяется уравнением

$$T_0 y + x = 0; \quad T_0 \frac{dx}{dt} + x = 0;$$

Решение этого уравнения  $x = x_0 \cdot e^{-t/T_0}$ .

Таким образом, вначале был колебательный процесс (до точки  $A$ ), а затем движение по линии переключения заканчивается практически аperiodическим процессом.

Скользящий режим в системе с дифференцирующим звеном в цепи обратной связи возникает не при любом значении  $T_0$ . Для его возникновения наклон фазовой траектории после переключения реле должен быть больше, чем наклон линии переключения. Тогда после линии переключения фазовая траектория снова возвращается на эту же линию переключения. Но возможен случай, когда скользящий режим возникнет не сразу, а на втором, или на третьем, или на  $n$ -ном витке устойчивого фокуса. Но может быть, что скользящий режим не возникнет при малой величине наклона линии переключения.

**Пример 3.6** – Построить фазовый портрет по данным примера 3.5, но постоянная времени в дифференцирующем звене обратной связи  $T_0 = 0,5$  с.

РЕШЕНИЕ

Согласно условию примера 3.5 :  $K = 1, T = 10$  с,  $F(x) = \pm 3$

Уравнение фазовой траектории

$$x = x_0 + T(y_0 - y) + T \cdot F(x) \cdot \ln \left| \frac{y + kF(x)}{y_0 + kF(x)} \right|$$

Результаты расчёта показаны в таблице 3.4 Фазовая траектория показана на рисунке 3.10.

Таблица 3.4 – Параметры фазовой траектории к примеру 3.6

$y$	$y_{01} = 0$	0,5	1	$y_{02} = 1,45$	1	0	-0,5	$y_{03} = -0,82$	-0,5	0
$x$	$x_{01} = -6$	-5	-3,5	$x_{02} = -0,8$	0,6	2,0	1,5	$x_{03} = 0,52$	-0,6	-0,4

Продолжение таблицы 3.4

$y$	0,2	$y_{04} = 0,35$	0,25	0	$y_{05} = -0,2$	$y_{06} = -0,2$
$x$	-0,3	$x_{04} = -0,2$	2	-0,05	$x_{05} = 0,1$	$x_{06} = -0,1$

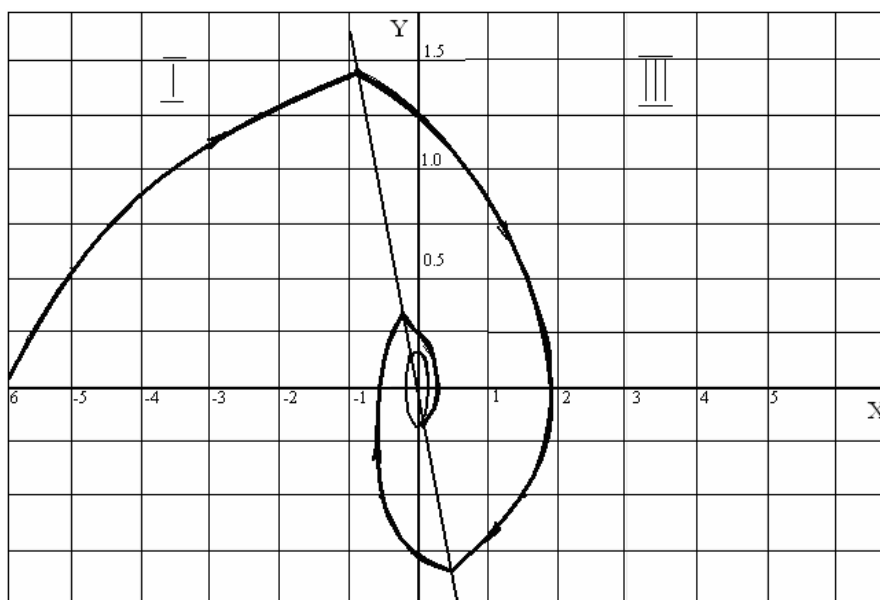


Рисунок 3.10 – Фазовая траектория релейной системы к примеру 3.6

**ВЫВОД** Фазовая траектория системы при  $T_0 = 0,5$  с осталась в виде устойчивого фокуса, но амплитуда колебания существенно уменьшилась, частота колебаний – уменьшилась, количество колебаний – уменьшилось. Установившееся состояние системы осталось в виде предельного цикла.

Если характеристика реле с зоной нечувствительности, то тоже возможен скользящий режим. Но при этом амплитуда колебания в скользящем режиме будет больше, так как колебания совершаются между двумя линиями переключения, соответствующими ширине зоны нечувствительности. Если характеристика реле с петлёй гистерезиса, то тоже возможен скользящий режим, но устойчивое равновесие будет в виде предельного цикла, амплитуда которого определяется шириной петли гистерезиса.

### 3.2.3 Использование скользящего режима в релейных системах

Для автоматического управления объектами, в которых допускается автоколебание регулируемой величины в заданных пределах, наиболее эффективно использовать скользящий режим релейной системы.

***Скользящий режим релейной системы обеспечивает колебательный режим регулируемого параметра вдоль линии переключения.***

Рассмотрим в качестве примера процесс пуска химического реактора, в котором необходимо регулировать два параметра: давление и температуру (рисунок 3.11). Эти параметры между собой взаимосвязаны. В реакторе протекает экзотермическая реакция со значительным выделением тепла и, соответственно, с возможным избыточным повышением давления. Имеется система охлаждения, но при резком возрастании температуры она может не справиться. Если снижается давление, то температура тоже снизится и при этом скорость реакции, то есть производительность реактора, упадёт.

Задача управления: обеспечить максимальную производительность реактора путём обеспечения максимального давления и при этом не допускать превышение температуры выше допустимой. При этом учитывать, что процесс в реакторе может изменяться случайным образом.

Дано:  $P_0$  – заданное давление рабочего режима;  
 $t_{max}$  – максимально допустимая температура.

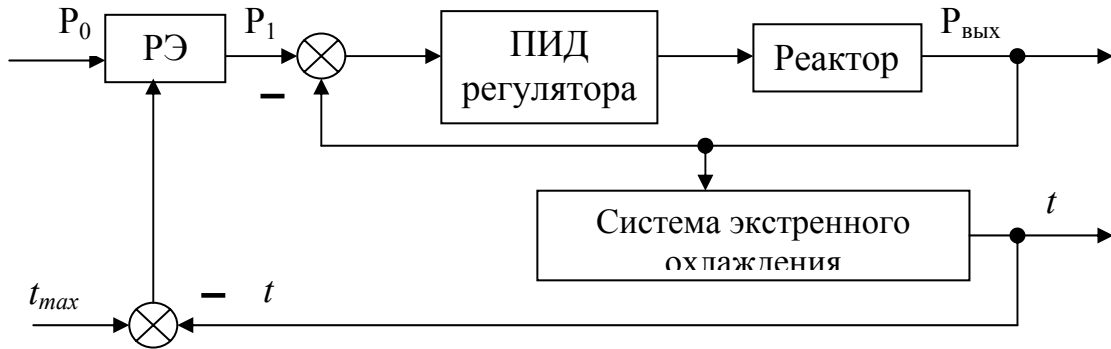


Рисунок 3.11 – Функциональная схема работы реактора

Управление давлением осуществляется с помощью ПИД-регулятора с релейным элементом переключения, который обеспечивает скользящий режим работы при согласовании давления и температуры. Система экстренного охлаждения реактора зависит от избыточного давления в реакторе  $P_{вых}$ .

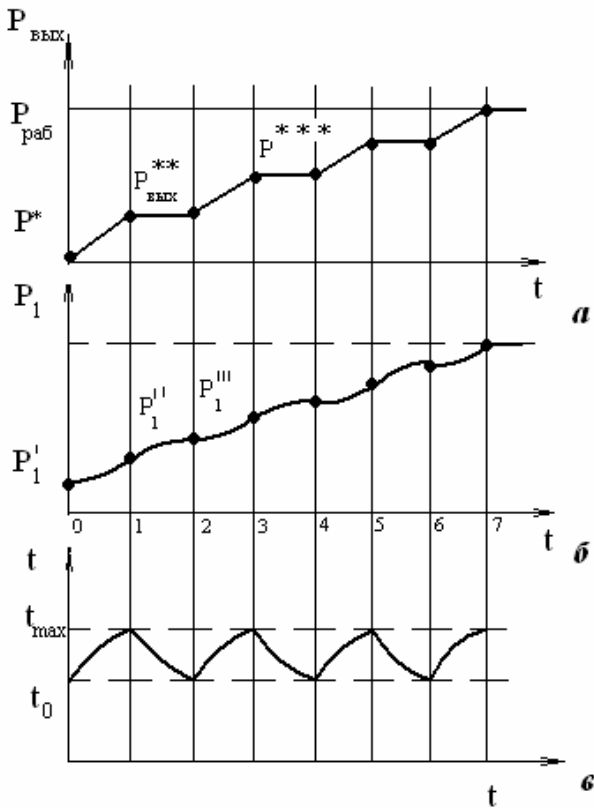


Рисунок 3.12 – Циклограмма пуска реактора

### РЕШЕНИЕ

Рассмотрим систему температурной защиты реактора при его пуске от дремлющего состояния до рабочего режима по циклограмме (рисунок 3.12).

- а* – циклограмма изменения давления в реакторе;
- б* – циклограмма задающего давления;
- в* – циклограмма изменения температуры в реакторе.

Пусть в дремлющем состоянии в реакторе было давление  $P^*$  и температура  $t_0$ . При увеличении задающего воздействия с  $P_1'$  до  $P_1''$  (участок 0-1) одновременно повышается температура от  $t_0$  до  $t_{max}$ . Релейный элемент (РЭ) отключает систему и давление  $P_{вых}^{**}$  не увеличивается (участок 1-2). Температура на этом участке снижается от  $t_{max}$  до  $t_0$ . На участке 2-3 РЭ включается, увеличивается давление. Значение  $P_{раб}$  увеличивается от  $P_{вых}^{**}$

до  $P_{\text{вых}}^{***}$ . Температура снова достигает  $t_{\text{max}}$ . Далее процесс повторяется. Таким образом, релейный элемент обеспечивает скользящий режим работы путём включения и отключения системы повышения давления. С повышением давления кривая возрастания рабочего давления  $P_{\text{раб}}$  будет приближаться к заданному значению рабочего давления. Причем, давление будет возрастать с максимально возможной скоростью. Таким образом, скользящий режим обеспечивает оптимизацию системы по критерию максимального быстродействия.

### Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.2.2 - 3.2.3

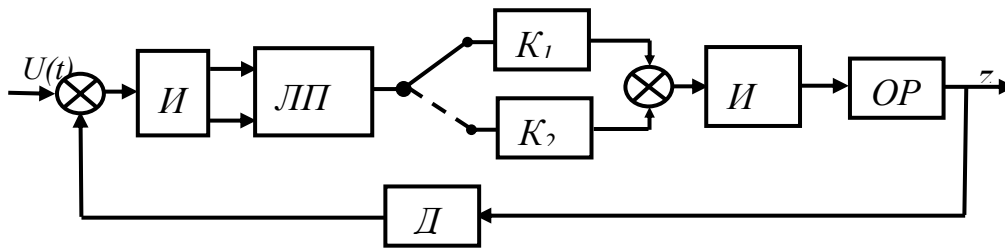
- 1 Что такое скользящий режим релейной системы?
- 2 С помощью какого функционального элемента организуется скользящий режим?
- 3 Как изменяется линия переключения при скользящем режиме?
- 4 Как зависит возникновение скользящего режима от постоянной времени дифференцирующего звена в цепи обратной связи?
- 5 Может ли система при скользящем режиме быстрее достигнуть заданного значения регулируемой величины?
- 6 Может ли система при скользящем режиме перейти в автоколебательный установившийся режим работы?
- 7 Может ли система при скользящем режиме иметь апериодический переходной процесс?

### 3.2.4 Релейные системы с логическим переключающим устройством

Логическое переключающее устройство (ЛПУ) обеспечивает изменение структурной схемы при переходе изображающей точки на фазовом пространстве через некоторую, заранее определенную границу. Это дает дополнительную возможность существенно изменить динамическую характеристику системы и добиться желаемого процесса управления. Особенно эффективно ЛПУ для создания скользящего режима работы, который может быть заранее заданным вне зависимости от параметров основной части системы. Такую систему с логическим переключающим устройством ещё называют *системой с переменной структурой (СПС)*.

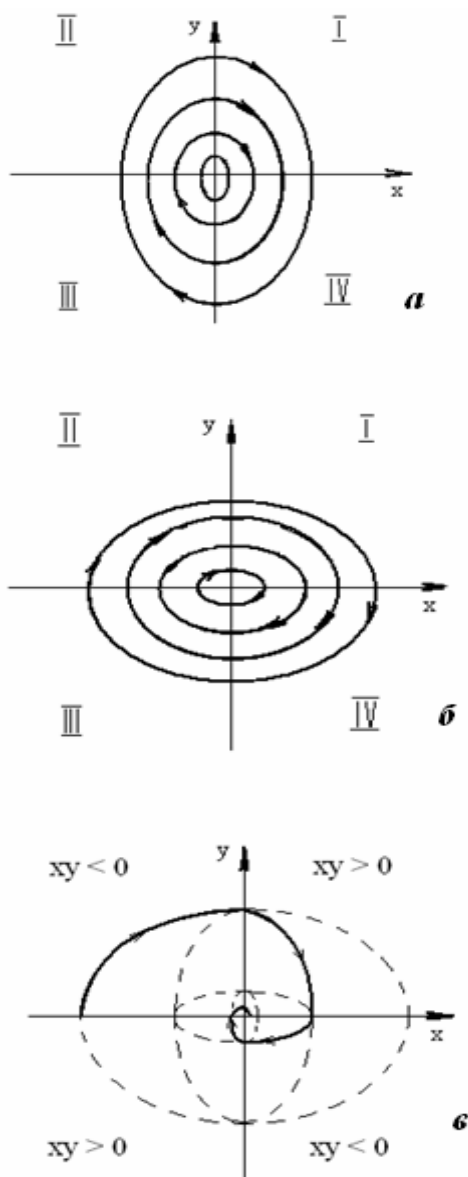
***Логические переключающие устройства (ЛПУ) обеспечивают переменную структуру управления для получения желаемого переходного процесс.***

Рассмотрим работу системы, в которой с помощью ЛПУ могут переключаться звенья  $K_1$  и  $K_2$  (рисунок 3.13) и в зависимости от знака произведения  $x \cdot y$  ( $x$  - регулируемая величина,  $y$  - производная по  $x$ ) Назначение ЛПУ – обеспечить устойчивый переходной процесс при неустойчивой характеристики основной части системы.



- И – измеритель;  
 ЛПУ – логическое переключающее устройство;  
 $K_1, K_2$  – переключающиеся звенья с разными коэффициентами усиления;  
 ИУ – исполнительное устройство;  
 ОР – объект регулирования;  
 Д – датчик.

Рисунок 3.13 – Функциональная схема системы с логическим переключающимся устройством (ЛПУ)



Пусть исполнительное устройство вместе с объектом регулирования описывается передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^2};$$

Звенья  $K_1$  и  $K_2$  имеют существенно разные коэффициенты усиления  $K_1 \ll K_2$ . Тогда уравнение динамики системы при звене  $K_1$  и при  $K_2$  будут

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K_1x = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + K_2x = 0.$$

Эти уравнения в каноническом виде

$$\frac{x^2}{x_{01}^2} + \frac{y^2}{K_1^2 \cdot y_{01}^2} = 1, \quad \frac{x^2}{x_{02}^2} + \frac{y^2}{K_2^2 \cdot y_{02}^2} = 1.$$

Получены уравнения фазовой траектории в виде эллипса с полуосями по оси абсцисс  $x = x_{0i}$ , по оси ординат  $y_0 = x_{0i} \omega$ . При различных значениях  $x_{0i}$  на фазовой плоскости получаем семейство эллипсов. Каждое из этих эллипсов соответствует устойчивому предельному циклу или устойчивому состоянию автоколебаний. Для обеспечения устойчивого переходного процесса и уменьшения автоколебаний в установившемся режиме используется логическое переключающее устройство (ЛПУ).

Рисунок 3.14 – Фазовые траектории в системе ЛПУ



Фазовая траектория по первому уравнению имеет сравнительно небольшую амплитуду колебания, но значительную частоту (рисунок 3.14 а). Фазовая траектория по второму уравнению наоборот имеет большую амплитуду, но сравнительно небольшую частоту (рисунок 3.14 б). Задача ЛПУ в том, чтобы перемененно использовать положительные свойства каждой фазовой траектории. Если начальное состояние системы ( $x = -x_0, y = 0$ ), то первое движение (во II четверти) по второй траектории, второе движение (в I четверти) по первой траектории, третье движение (в IV четверти) по второй траектории и так далее. Каждый раз выбирается такая траектория, которая ближе подводит систему к установившемуся режиму ( $x = 0, y = 0$ ). Под действием ЛПУ система автоматически выбирает оптимальную траекторию движения (рисунок 3.14 в) и общая фазовая траектория типа эллипс переходит к устойчивому фокусу.

Алгоритм работы ЛПУ:

- при  $xу < 0$  движение по второй траектории;
- при  $xу > 0$  движение по первой траектории.

Примечание – На рисунке 3.14 в жирной линией показана фазовая траектория движения системы при разных переключениях  $K_1$  и  $K_2$ . Пунктирная линия соответствует продолжению траекторий С помощью ЛПУ можно создать различные переходные процессы, но особый интерес представляет такие ЛПУ которые реализуют скользящий процесс, который не зависит от параметров основной части системы и может протекать с заранее заданными свойствами.

Рассмотрим работу системы, в которой ЛПУ переключает звенья  $K_1$  и  $K_2$ , коэффициенты которых равны  $|K_1| = |K_2|$ , но имеют противоположные знаки (рисунок 3.13). Тогда уравнения фазовых траекторий в каноническом виде при  $(+K_1)$  и при  $(-K_2)$

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{K_1^2 \cdot y_0^2} = 1 \quad (\text{уравнение эллипса})$$

$$\frac{x^2}{x_0^2} - \frac{y^2}{K_2^2 \cdot y_0^2} = 1 \quad (\text{уравнение гиперболы}).$$

Датчик обратной связи дополнительно имеет производную с постоянной  $T_0$  по регулируемой величине. Этим обеспечивается скользящий режим работы. Уравнением линии переключения

$$y = -Cx, \quad \text{где } C = 1/T$$

ЛПУ работает по следующему алгоритму (рисунок 3.15).

В I квадранте и часть IV квадранта (до линии переключения) включается  $(+K_1)$ . А также в III квадранте и часть II квадранта (до линии переключения) тоже включается  $(+K_1)$ . Изображающая точка идёт по замкнутому циклу (эллипса).

Во II квадранте от линии переключения до оси  $y$  и в IV квадранте от линии переключения до оси  $(-y)$  включается  $(-K_2)$ . Изображающая точка идёт по фазовой траектории «седло». При любом начальном значении  $x_0$  и  $y_0$  система

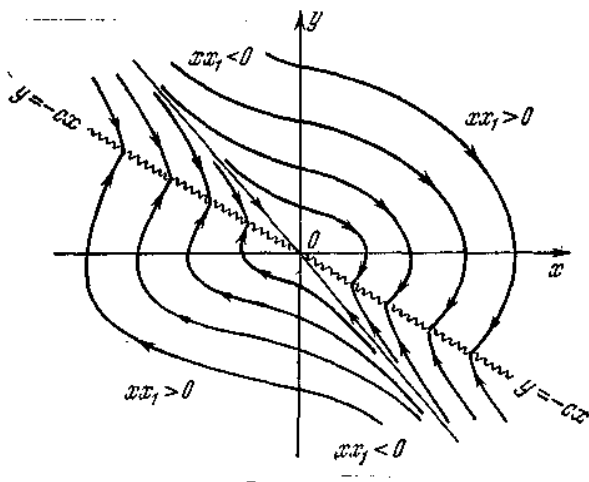


Рисунок 3.15 – Фазовые траектории в системе с ЛПУ

стремится к линии переключения и по ней устойчивому состоянию. Это устойчивое состояние может быть автоколебательным с достаточно малой частотой и амплитудой. Оно может иметь устойчивое равновесное состояние. Необходимо отметить, что при  $|K_1| = |K_2|$  фазовые траектории всегда попадут на линию переключения и система дальше пойдёт по скользящему режиму. Это не зависит от абсолютного значения величины  $K_1$  и  $K_2$ .

### Вопросы для самопроверки к подразделу 3.2.4

- 1 Что такое ЛПУ?
- 2 Что изменяет ЛПУ в системе?
- 3 Может ли ЛПУ обеспечить автоколебательный режим работы?
- 4 Может ли ЛПУ обеспечить апериодический переходной процесс?
- 5 Может ли ЛПУ обеспечить заданный режим работы вне зависимости от остальной части системы?
- 6 Как влияет постоянная времени дифференцирующего звена в цепи обратной связи на скользящий режим?

### 3.2.5 Логические алгоритмы управления

Выбор алгоритма управления должен полностью соответствовать требованиям, предъявляемым к качеству технологического процесса. Чем выше эти требования, тем сложнее алгоритм управления. Если объект существенно нелинейный, если он нестационарный, если есть значительное запаздывание в системе, то логические переключающие устройства (ЛПУ) с управлением таким объектом не справятся. Это можно добиться при применении специального алгоритма управления со сложными зависимостями от переменных состояниях системы и прежде всего от ошибки регулирования  $\varepsilon(t)$  и её производной, а также, и с учётом управляющего воздействия на объект  $\mu(t)$  и её производной. Такой алгоритм управления называется *логический алгоритм управления (ЛАУ)*.

*Логический алгоритм управления обеспечивает переменную структуру регулятора и позволяет изменять в нужном направлении сразу несколько характеристик системы по заданному критерию.*

В общем случае ЛАУ представляют собой нелинейные функции, например,  $F_1(\mu, d\mu/dt, d^2\mu/dt^2)$ ;  $F_2(\varepsilon, d\varepsilon/dt, d^2\varepsilon/dt^2)$ ;  $F_3(\mu, \int \varepsilon dt, |\varepsilon| \text{sign} \varepsilon)$  и другие, которые могут изменяться скачкообразно или по программе в зависимости от требований к процессу управления.

Широкие возможности таких ЛАУ позволяют существенно повысить точность регулирования, снизить перерегулирование до 50 %, в 2-3 раза уменьшить время регулирования и, главное, значительно расширить область устойчивости системы или, по другому, расширить область допустимых нагрузок и управляющих воздействий.

В ЛАУ можно выделить следующие составляющие:

- логические составляющие, которые представляют совокупность логических операций управления, определяемых функциями переключения;
- оптимизирующие составляющие, которые обеспечивают минимум или максимум какой-либо величины;
- параметрические составляющие, которые формируются обычно в виде нелинейных функций текущих координат;
- функциональные составляющие, которые определяются нелинейными функциями  $F_i$ ;

**Логические составляющие** (алгоритмы) формируются на основе анализа знаков  $\varepsilon$ ,  $d\varepsilon/dt$  и их комбинации ( $\varepsilon + d\varepsilon/dt$ ;  $\varepsilon(\varepsilon + d\varepsilon/dt)$ ), а также по модулю функций  $|\varepsilon|$ ,  $d|\varepsilon|/dt$ . На основании логического анализа вырабатываются функции переключения  $\mu_i(t)$ .

$$\mu_1(t) = \text{sign} \varepsilon (K_1 |\varepsilon| + K_2 \dot{\varepsilon});$$

$$\mu_2(t) = \text{sign} \varepsilon (\varepsilon + K \dot{\varepsilon} |\varepsilon|);$$

$$\mu_3(t) = 1 \text{ при } F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) > 0 \text{ и } \mu_3(t) = 0 \text{ при } F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) < 0.$$

**Оптимизирующие составляющие** осуществляют функцию переключения с значения  $+x_{max}$  на  $(-x_{max})$ . Моменты переключения определяются комбинацией  $n$ -переменных, где  $n$ -порядок САУ. Эти алгоритмы содержат комбинацию составляющих нелинейной функции логического типа

$$\mu_1(t) = \varepsilon + k \dot{\varepsilon}^2 \text{sign} \varepsilon;$$

$$\mu_2(t) = \varepsilon + \dot{\varepsilon} \text{sign} \varepsilon \ln(1 - \varepsilon \text{sign} \varepsilon);$$

$$\mu_3(t) = K_1 \varepsilon + (K_2 - K_3 \varepsilon) \dot{\varepsilon}.$$

Такие алгоритмы управления обеспечивают минимум ошибки регулирования с поддержанием на определённом уровне заданные параметры САУ.

**Параметрические составляющие** базируются на отклонении от заданного закона управления, который определяется через скорость изменения координат САУ. Это достаточно сложный алгоритм от различных функций

$$\mu(t) = f(\varepsilon, |\varepsilon|, \dot{\varepsilon}, |\dot{\varepsilon}|, \dots, \mu, y, x, \dots).$$

Основное управляющее воздействие ЛАУ на объект регулирования осуществляется через функцию переключения. Функция переключения формиру-

ется с использованием пропорциональных составляющих или в виде интеграла, например,  $F(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$  с переключаемым пределом интегрирования.

Функцию переключения удобно записывать через обобщенные функции, используя единичные функции типа:

$$\text{«до» } I_{i0}(t) \text{ «после» } {}_{i0}I(t).$$

Наиболее часто используются следующие типовые (унифицированные) алгоритмы функций переключения.

1 *Нелинейный П - регулятор* с переменным коэффициентом передачи  $K_p$ .

$$\psi_1(K_p) = K_1 \cdot I_{t_1}(t) + K_2 \cdot {}_{t_1}I(t),$$

где  $t_1$  – момент переключения в функции изменения знака;

$K_1, K_2$  – выбираются для уменьшения перерегулирования.

Такой алгоритм управления применяется для системы с запаздыванием.

2 *Нелинейный И-регулятор* с изменением постоянной интегрирования  $T_u$

$$\psi_2(T_u) = F(1/T_u) \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau,$$

где  $F(1/T_u)$  – нелинейный коэффициент функции переключения

Такой алгоритм управления применяется для управления неустойчивыми объектами.

3 *Нелинейный ПИ-регулятор* с переменным коэффициентом передачи  $K_p$  и/или с переменной постоянной интегрирования  $T_I$

$$\psi_3(K_p, T_I) = \psi_1(K_p) + \psi_2(T_I).$$

4 *Полупропорциональный регулятор* со сбросом регулируемого воздействия (ППС-регулятор)

$$\psi_4(K_p, K_c) = K_p \varepsilon(t) I_{t_1}(t) + (K_p - K_c) \varepsilon_{\max}(t_1) {}_{t_1}I_{t_2} + K_p \varepsilon(t) {}_{t_2}I(t),$$

где при  $\varepsilon(d\varepsilon/dt) > 0$  ППС работает как П – регулятор (первое слагаемое);

при  $t = t_1$  происходит сброс регулирующего воздействия (второе слагаемое);

при  $t \geq t_2$  ППС снова работает как П – регулятор (третье слагаемое).

5 *Полупропорциональный регулятор* со сбросом и запоминанием регулируемого воздействия (ПЗС-регулятор).

Отличие этого ПЗС - регулятора от ППС-регулятора в том, что коэффициент  $K_p$  находится в зависимости от  $K_1$  и  $K_2$ , например,  $F(K_p, t) = K_1 |\varepsilon| + K_2 (d|\varepsilon|/dt)$ , а настройка  $t_1$  и  $t_2$  зависит от значений  $K_1$  и  $K_2$ . До  $t_1$ , пока  $F(K_p, t) > 0$  управление ведётся по П-закону; в момент  $t_1$ , когда  $F(K_p, t) = 0$  происходит сброс регулирующего воздействия на величину  $K_c$  и его запоминание; в момент  $t_2$  при  $F(K_p, t) < 0$  опять пропорциональное регулирование согласно запомина-

ния  $K_c$ . Затем всё повторяется. Это позволяет обеспечить большую точность и меньшую длительность переходного процесса.

В общем случае ЛАУ могут быть в определённые моменты времени П, ПИ, ПД, ПИД, ППС, ПЗС – регуляторами или с более сложной зависимостью. В регуляторы может вводиться блок самонастройки по параметрам  $K_P, T_I, T_D$ ; могут использоваться нелинейные зависимости ( $x^2, x^{1/2}, x^K$  и др.). Следовательно, такие регуляторы можно отнести к классу адаптивных (самонастраивающихся) регуляторов, обеспечивающих квазиоптимальное управление технологическим процессом.

### 3.2.6 Вибрационная линеаризация реле

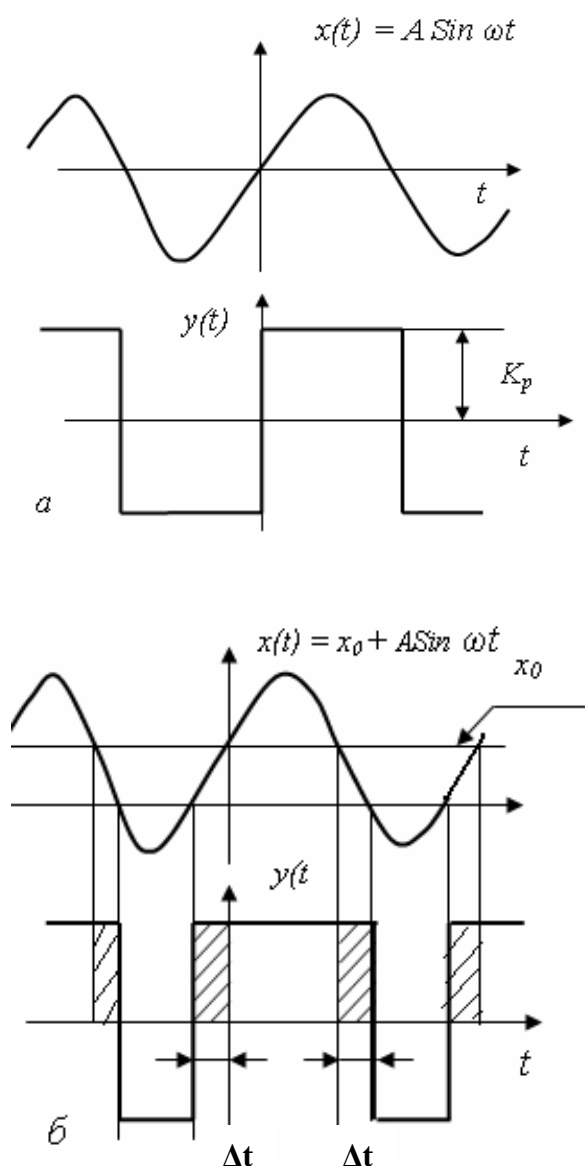


Рисунок 3.16 – Изменение сигнала на выходе реле при подаче гармонического сигнала на вход реле

Релейный элемент является существенно-нелинейным элементом. Его выходная величина изменяется скачком при подаче на вход непрерывно возрастающей входной величины. После срабатывания реле эта выходная величина остается постоянной при дальнейшем увеличении входной величины. Такое свойство релейного элемента позволяет сравнительно просто коммутировать большие мощности в выходном сигнале при сравнительно небольшом входном сигнале.

*Поставим такую задачу.* При непрерывном изменении входного сигнала добиться, чтобы выходной сигнал реле изменялся также пропорционально и непрерывно, а не скачком. Для этого одновременно с входным сигналом  $x_1(t)$  на вход релейного элемента подадим дополнительное периодическое высокочастотное воздействие  $A \sin \omega t_0$ . Тогда при входном сигнале  $x_1(t)$  и гармоническом сигнале  $A f(\omega t)$  выходная величина реле  $y(t)$

$$y(t) = \varphi [x_1(t) + A f(\omega t)]$$

Предположим, что  $x_1(t) = x_0$ , (постоянная величина) и  $|x_0| < A$ . Пусть реле имеет идеальную характеристику. Это облегчит расчет и принципиального значения не имеет.

$$y(t) = \varphi [x_0 + A \cdot f(\omega t)].$$

Выходная величина реле становится периодической функцией с частотой поданного гармонического сигнала.

На рисунке 3.15 а на вход реле подан только гармонический сигнал в виде синусоиды ( $x_0 = 0$ ). Выходной сигнал с реле имеет одинаковую ширину положительных и отрицательных импульсов.

На рисунке 3.15 б на вход реле подано два сигнала: гармонический в виде синусоиды и постоянный сигнал  $x_0$ . На величину этого постоянного сигнала синусоида увеличила свою положительную составляющую, она «приподнялась» над осью абсцисс на эту величину. Поэтому реле стало раньше срабатывать на включения положительного сигнала и позже отключаться при отрицательном сигнале. Произошла широтно-импульсная модуляция сигнала. Время положительного сигнала увеличилось на величину  $2\Delta t$  и, соответственно, на  $2\Delta t$  уменьшилось время отрицательного сигнала. Сигнал с идеального реле остался периодическим, поэтому его можно представить в виде ряда Фурье

$$y(t) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Каждому значению  $x_0$  будет соответствовать своя величина постоянной составляющей  $C_0$ , своя широтно-импульсная модуляция сигнала и своя фазовая характеристика. Выходной сигнал реле далее поступает на линейную часть системы, которая подавляет все высокочастотные гармоники. Остается только постоянная составляющая ряда Фурье  $Y_{cp}$ . Определим зависимость  $Y_{cp}$  от  $x_0$ . Очевидно, что  $Y_{cp}$  будет пропорционально разности площадей положительных и отрицательных импульсов.

$$Y_{cp} = 4K_p \Delta t,$$

где  $K_p$  - величина выходного сигнала реле;

$\Delta t$  - отрезок на оси абсцисс, при котором функция  $A \cdot f(\omega t) = x_0$ , отнесенная к периоду  $2\pi/\omega$ .

Обозначим через  $f^{-1}(\omega \Delta t)$  функцию взаимнообратную  $f(\omega \Delta t)$ . Тогда

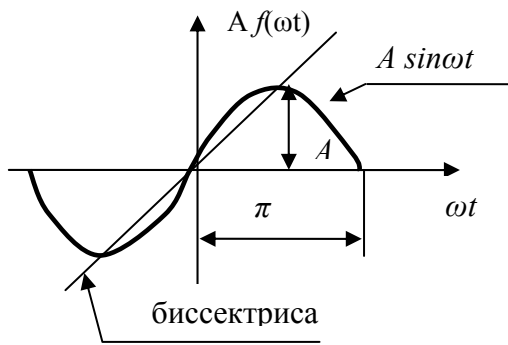
$$f(\omega \Delta t) = \frac{x_0}{A} \quad \text{или} \quad \Delta t = \frac{1}{\omega} f^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)$$

Подставим значение  $\Delta t$  в уравнение  $Y_{cp}$ . Тогда значение  $Y_{cp}$  за время одного периода  $T = 2\pi/\omega$

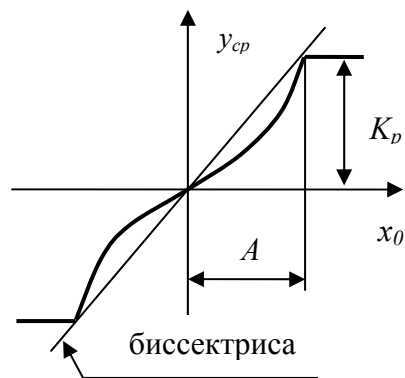
$$Y_{cp} = \frac{4K_p \cdot \frac{1}{\omega} f^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)}{2\pi/\omega} = \frac{2K_p}{\pi} f^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)$$

Чтобы найти эту зависимость  $Y_{cp}$  от отношения  $x_0/A$  достаточно по заданной функции внешнего воздействия  $f(\omega t)$  в интервале  $-\pi/\omega < t\omega < \pi/\omega$  построить взаимно обратную функцию  $f^{-1}(\omega t)$ , используя обычный графиче-

ский прием зеркального отображения функции  $f(\omega t)$  относительно биссектрисы, проходящей через I и III квадранты.



а - синусоидальное дополнительное воздействие



б - зависимость  $y_{cp}$  от  $x_0$

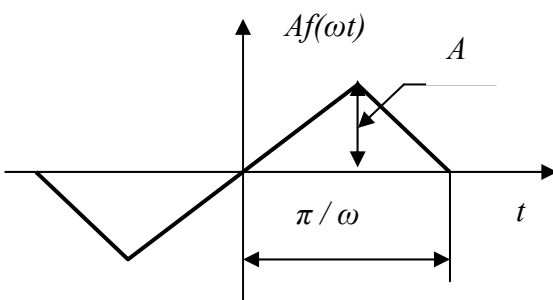
Рисунок 3.17 - Зависимость  $y_{cp}$  от  $x_0$  при синусоидальном дополнительном воздействии

Построенная таким образом зависимость при синусоидальном дополнительном воздействии показана на рисунке 3.17. Обозначим через  $K_f$  наклон касательной к функции  $Y_{cp} = f(x_0)$  в точке  $x_0 \approx 0$ . При малых значениях  $x_0 / A$  функцию  $f^{-1} x_0 / A$  можно заменить линейной функцией  $K_f x_0 / A$ . Тогда значение  $Y_{cp} = f(x_0)$  будет определяться простым алгебраическим уравнением

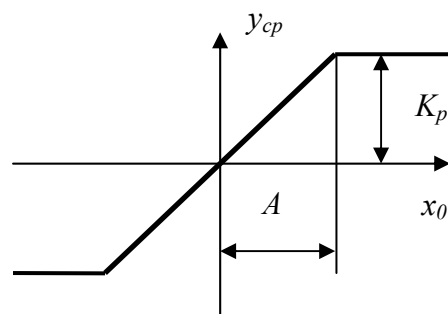
$$Y_{cp} = \frac{2K_p \cdot K_f \cdot x_0}{\pi A}$$

Уточняем, для синусоидального воздействия в точке  $x_0 \approx 0$  и при  $x_0 / A \ll 1$ .

Для получения более пропорциональной зависимости  $Y_{cp} = f(x_0)$  в качестве дополнительного гармонического сигнала и используют треугольную форму импульса (рисунок 3.18).



а - треугольная форма импульса



б - зависимость  $y_{cp}$  от  $x_0$

Рисунок 3.18 – Зависимость  $y_{cp}$  от  $x_0$  при треугольной форме импульса

Таким образом, при наличии дополнительного периодического воздействия относительно высокой частоты по сравнению с управляющим сигналом, реле начинает работать не скачкообразно (типа «включено» или «отключено»), а выдает на выходе сигнал пропорционально входному воздействию. Сделаем несколько выводов по вибрационной линеаризации релейного элемента.

*Среднее значение, выходного сигнала реле определяется взаимнообратной функцией  $f^{-1}(x_0/A)$  по отношению к функции дополнительного воздействия  $f(x_0/A)$ .*

*Диапазон выпрямленной релейной характеристики равен амплитуде  $A$  дополнительного периодического воздействия.*

*Максимальное значение выпрямленной характеристики равно выходному сигналу реле  $K_p$ .*

Эти выводы получены при рассмотрении характеристики идеального реле, которое без зоны нечувствительности и без петли гистерезиса.

Анализируя выходную характеристику реле с зоной нечувствительности и с петлей гистерезиса выясняется, что при вибрационной линеаризации влияние зоны нечувствительности существенно устраняется, а влияние петли гистерезиса устраняется фактически полностью. Таким способом можно существенно снизить влияние люфтов, зазоров и сухого трения в механических системах.

Некоторым неудобством такой вибрационной линеаризации релейных систем является необходимость в наличии генератора периодических колебаний. В качестве периодических колебаний могут быть использованы автоколебания самой релейной системы, за счёт своих высокочастотных составляющих. Частота этих колебаний должна быть существенно больше, чем частота управляющего или возмущающего воздействия. В качестве такого примера можно привести систему автоматической стабилизации самолет - автопилот, где повышение частоты автоколебаний для вибрационной линеаризации прибора осуществляется с помощью контура RC в цепи обратной связи релейного элемента. Для увеличения частоты автоколебаний можно использовать, упругую внутреннюю связь в виде трансформатора или вспомогательного реле. В общем случае, такая линеаризация релейных систем может быть не достаточно эффективной, так как есть требования к частоте и амплитуде вынужденных колебаний относительно входного сигнала. В результате этого линеаризованная релейная характеристика может оказаться не достаточно прямолинейная.

В заключении необходимо отметить, что любое улучшение одного показателя качества системы приводит к ухудшению другого показателя качества системы. В данном случае вибрационная линеаризация релейной характеристики приводит к уменьшению быстродействия системы потому, что исполнительное устройство реагирует на среднее значение управляющего воздействия  $Y_{cp}$ , которое всегда меньше выходного сигнала реле  $K_p$ .

Если основное требование к системе является быстродействие, то вибрационная линеаризация существенно препятствует этому. Целесообразно ис-



пользовать основное свойство реле – при малом входном сигнале практически мгновенно выдавать мощный сигнал. А уменьшение перерегулирования и автоколебания надо проводить другим способом.

### Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.2.6

- 1 Основное преимущество вибрационной линеаризации релейной характеристики.
- 2 Как определяется зависимость  $Y_{cp}$  от величины поданного сигнала согласно широтно-импульсной модуляции?
- 3 Как определяется зависимость  $Y_{cp}$  от параметров вынужденных колебаний?
- 4 Как графически можно получить зависимость  $Y_{cp}$  от величины поданного сигнала  $x_0$ ?
- 5 От какого параметра вынужденных колебаний зависит диапазон выпрямленной характеристики?
- 6 Чему равняется максимальное значение выпрямленной характеристики?
- 7 Как влияет зона нечувствительности реле на выпрямленную характеристику?
- 8 Как влияет петля гистерезиса на выпрямленную характеристику?
- 9 Какими дополнительными средствами можно создать на входе нелинейного элемента вынужденные колебания?

### 3.2.7 Анализ релейных систем методом Гольдфарба

Это графо-аналитический способ определения амплитуды и частоты автоколебаний. Он основан на критерии устойчивости Найквиста. Предварительно структурную схему нелинейной системы преобразуют так, чтобы все линейные элементы объединяют в одну частотную передаточную функцию  $W_{л.ч}(j\omega)$ , а нелинейный элемент представляют в виде гармонической частотной передаточной функцией  $W_{н.э}(A)$  на входе системы. Тогда общая передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$W_{раз}(j\omega, A) = W_{н.э}(A) \cdot W_{л.ч}(j\omega)$$

Предположим, что замкнутая нелинейная система находится на границе устойчивости и в ней возникли незатухающие колебания (автоколебания). Тогда согласно критерию Найквиста амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы  $W_{раз}(j\omega, A)$  должна проходить через точку с координатами  $(-1, j0)$ . Отсюда условие существования автоколебаний в замкнутой системе.

$$W_{н.э}(A) \cdot W_{л.ч}(j\omega) = -1$$

Непосредственно построить эту амплитудно-фазовую характеристику на комплексной плоскости трудно. В этом уравнении две переменных величины:

частота  $\omega$ , которую изменяем от 0 до  $\infty$  и амплитуда входного сигнала на нелинейного элемента  $A$ , который определяется по  $W_{л.ч}(j\omega)$ . Л.С. Гольдфарб предложил это уравнение представить в виде

$$W_{л.ч}(j\omega) = \frac{-1}{W_{н.э}(A)}$$

Автоколебания в системе возможны, если выполняются два условия гармонического баланса

$$\begin{cases} |W_{л.ч}(j\omega)| = \left| \frac{1}{W_{н.э}(A)} \right| \\ \varphi_{н.э}(A) + \varphi_{л.ч}(\omega) = -\pi \end{cases}$$

*Первое условие.* Отдельно построенная левая часть уравнения при изменении частоты и отдельно построенная правая часть уравнения при изменении амплитуды имеют общую точку пересечения (в некоторых случаях несколько точек пересечения).

*Второе условие.* Точки пересечения соответствуют суммарному фазовому сдвигу на угол  $-\pi$  (радиан) или минус  $180^\circ$ .

Таким образом, колебательный процесс в системе возможен, если есть точки пересечения амплитудных характеристик и выполняется требование к фазовым характеристикам (рисунок 3.19).

Полученные уравнения проще всего решать графо-аналитически. Очевидно, что если эти два годографы на комплексной плоскости не пересекаются, то они не имеют общего решения и в исследуемой системе нет колебательного процесса (рисунок 3.19 а). Если эти годографы пересекаются, то есть общее решение в исследуемой системе и есть колебательный процесс (рисунок 3.19 б). Если эти годографы пересекаются в двух точках, то в исследуемой системе есть два вида колебательных процесса. Из них один вид или с амплитудой  $A_1$  – неустойчивый колебательный процесс, а второй вид или с амплитудой  $A_2$  – устойчивый колебательный процесс (рисунок 3.19 в).

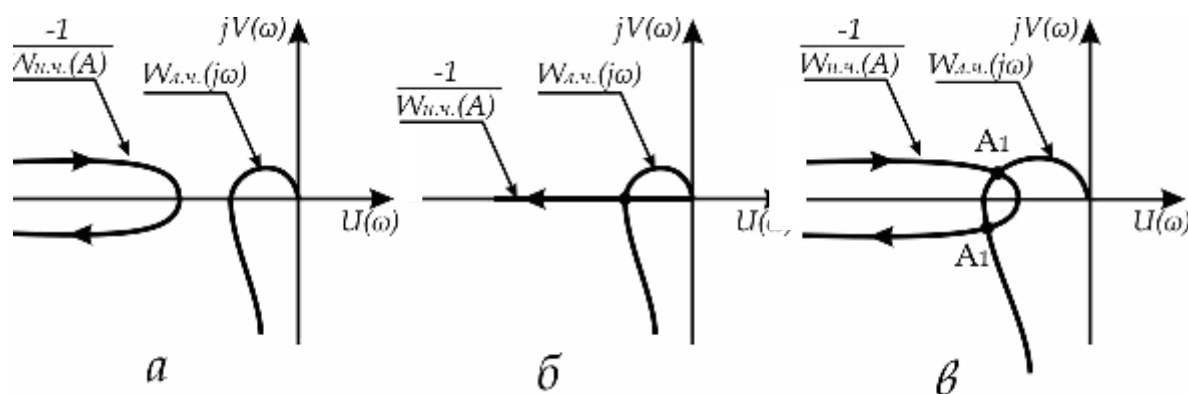


Рисунок 3.19 – Взаимное расположение АФЧ линейной части системы  $W_{л.ч}(j\omega)$  и гармонически линеаризованной характеристики реле  $-1/W_{н.э}(A)$

Об устойчивости или неустойчивости колебательного процесса судят следующим образом. Пусть годографы пересекаются в точке  $A_1$  при частоте  $\omega_0$  и амплитуде  $A_0$  (рисунок 3.19 в). Зададим некоторое приращение  $\Delta A$ . Для устойчивости автоколебаний требуется, чтобы при  $A_1 + \Delta A$  колебания становились затухающими и амплитуда возвращалась к  $A_1$ . При  $A_1 - \Delta A$  колебания становились возрастающими и амплитуда тоже возвращается к  $A_1$ .

Если при  $A_1 + \Delta A$  амплитуда начала возрастать, а при  $A_1 - \Delta A$  она стала убывать, то возникший предельный цикл неустойчивый.

Анализ устойчивости нелинейной системы по методу Л.С. Гольдфарба и определение возникновения колебательного режима работы покажем на конкретных примерах.

**Пример 3.7** – Исследовать систему на возможность возникновения автоколебаний, структурная схема которой показана на рисунке 3.20.

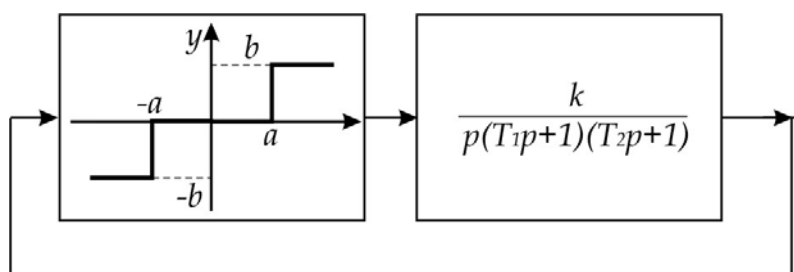


Рисунок 3.20 – Структурная схема релейной системы к примеру 3.7

Параметры линейной части системы  $k = 2$ ,  $T_1 = 0,05 c^{-1}$ ,  $T_2 = 0,02 c^{-1}$ . Параметры реле  $a = 0,25$ ,  $b = 110$ . Если автоколебательный режим работы системы возможен, то определить параметры этого режима

### РЕШЕНИЕ

1 Определим параметры амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы по её ЧПФ

$$W_{л.ч}(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)}$$

Модуль этой характеристики

$$A(\omega) = |W_{л.ч}(j\omega)| = \frac{k}{\omega \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}} = \frac{2}{\omega \sqrt{1 + 0,0025 \omega^2} \sqrt{1 + 0,0004 \omega^2}}$$

Фаза этой характеристики

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg T_1 \omega - \arctg T_2 \omega = -90^\circ - \arctg 0,05 \omega - \arctg 0,02 \omega$$

Задаваясь значением  $\omega$  от 0 до  $\infty$  определяем параметры этой характеристики. Результаты вычисления показаны в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Расчёт АФЧХ к примеру 3.7

$\omega$	15	20	30	32	40	60
$A(\omega)$	0,102	0,066	0,032	0,0273	0,017	0,006
$\varphi^\circ(\omega)$	-142 °	-156 °	-177 °	-180 °	-192°	-211°

2 Гармонически линеаризованная передаточная функция реле с зоной нечувствительности

$$W_{н.э}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2}$$

Обозначим  $\frac{-1}{W_{н.э}(A)} = Z(A)$ . После подстановки численных значений реле  $\alpha = 0,25$ ,  $b = 110$

$$Z(A) = \frac{\pi A^2}{440 \sqrt{A^2 - 0,0625}}$$

Задаемся значениями  $A$  от  $A > \alpha = 0,25$  до  $A \rightarrow \infty$  и определяем параметры этой характеристики. Результаты вычисления показаны в таблице 3.6

Таблица 3.6 – Расчёт  $Z(A)$  к примеру 3.7

$A$	0,2501	0,2503	0,2505	0,35	3,85	10
$Z(A)$	-0,63	-0,11	-0,028	-0,0035	-0,028	-0,071

Примечание – Однозначная характеристика реле с зоной нечувствительности не имеет фазового сдвига. Поэтому второе условие гармонического баланса выполняется за счёт амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы или  $\varphi_{л.ч.}(\omega) = -\pi$ .

3 По результатам расчёта построим амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы и  $Z(A)$  реле на комплексной плоскости (рисунок 3.21).

Годограф  $Z(A)$  проходит по отрицательной вещественной полуоси комплексной плоскости. Для удобства анализа их взаимного расположения годограф  $Z(A)$  показан выше отрицательной полуоси при его возрастании и ниже отрицательной полуоси при его убывании.

4 Годографы  $W_{л.ч.}(j\omega)$  и  $Z(A)$  пересекаются в двух точках. Значит автоколебательный режим работы системы возможен. Система имеет два периодических решения:

$$x_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t, \quad x_2(t) = A_2 \sin \omega_1 t,$$

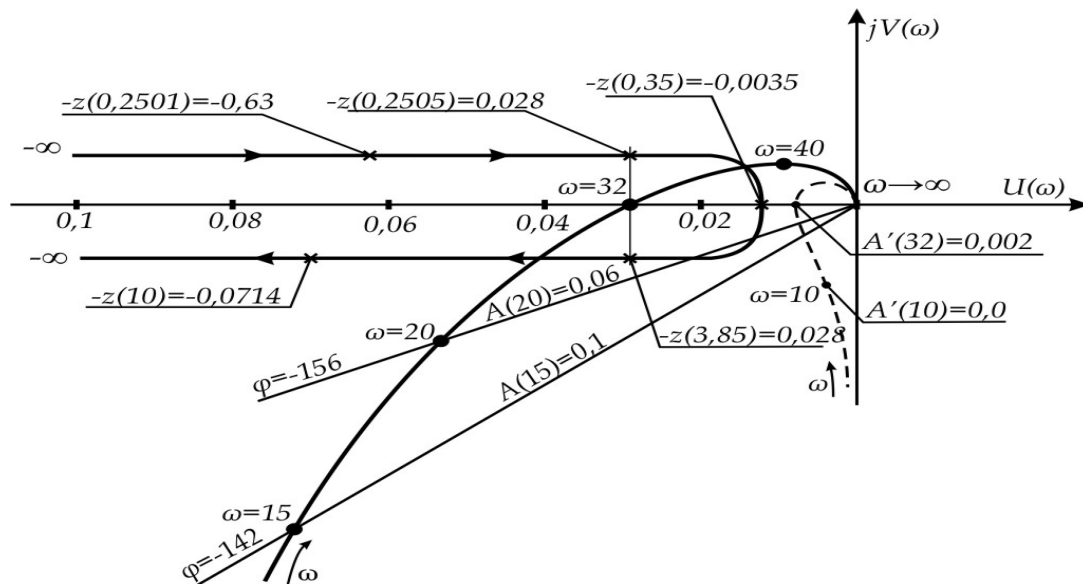


Рисунок 3.21 – АФЧХ линейной части системы и  $Z(A)$  к примеру 3.7

Согласно рисунка 3.21 при  $\omega_1 = 32 \text{ c}^{-1}$ ,  $A_1 = 0,2505$  или  $A_2 = 3,85$

Тогда  $x_1(t) = 0,2505 \sin 32t$ ,  $x_2(t) = 3,85 \sin 32t$

5 Определим устойчивость полученного периодического решения.

$$x_1(t) = 0,2505 \sin 32t$$

Зададим некоторое приращение  $\pm \Delta A = 0,0003$  к значению  $A_1 = 0,2505$  и определим устойчивость системы по критерию Найквиста.

При  $A_1 + \Delta A = 0,2505 + 0,0003 = 0,2508$

$$W(A = 0,2508) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2} = \frac{4 \cdot 110}{3,14 \cdot 0,2508} \sqrt{1 - \left(\frac{0,25}{0,2508}\right)^2} = 558,43 \cdot 0,0798 = 44,567$$

$$W_{л.ч}(32) \cdot W_{н.э}(0,2508) = -0,028 \cdot 44,567 = -1,2478$$

При  $A_1 + \Delta A = 0,2505$  разомкнутая система охватывает точку  $(-1; j_0)$ . Амплитуда периодических колебаний будет продолжать возрастать.

При  $A_1 - \Delta A = 0,2505 - 0,0003 = 0,2502$

$$W_{н.э}(A = 0,2502) = \frac{4 \cdot 110}{3,14 \cdot 0,2502} \sqrt{1 - \left(\frac{0,25}{0,2502}\right)^2} = 559,77 \cdot 0,03997 = 22,377$$

$$W_{л.ч}(j32) \cdot W_{н.э}(0,2502) = -0,028 \cdot 22,377 = -0,6265$$

При  $A_1 - \Delta A = 0,2502$  разомкнутая система становится устойчивой (не охватывает точку  $(-1; j_0)$ ). Амплитуда периодических колебаний будет продолжать уменьшаться.

**ВЫВОД** При любом отклонении от  $A_1 = 0,2505$  процесс будет расходящийся. Периодическое решение  $x(t) = 0,2505 \sin 32t$  - неустойчивое.

6 Определим устойчивость полученного периодического решения при  $A_2=3,85$ . Зададим некоторое приращение  $+ \Delta A = 0,1$  к значению  $A_2=3,85$  и определим устойчивость по критерию Найквиста.

При  $A_2 + \Delta A = 3,85 + 0,1 = 3,95$ ,

$$W_{н.э}(3,95) = \frac{4 \cdot 110}{3,14 \cdot 3,95} \sqrt{1 - \left(\frac{0,25}{3,95}\right)^2} = 35,457 \cdot 0,9977 = 35,386$$

$$W_{л.ч}(j32) \cdot W_{н.э}(3,95) = -0,028 \cdot 35,386 = -0,990$$

При  $A_2 + \Delta A = 3,95$  система устойчивая и амплитуда периодических колебаний будет уменьшаться и приближаться к  $A_2 = 3,85$

При  $A_2 - \Delta A = 3,85 - 0,1 = 3,75$ ,

$$W_{н.э}(3,75) = \frac{4 \cdot 110}{3,14 \cdot 3,75} \sqrt{1 - \left(\frac{0,25}{3,75}\right)^2} = 37,348 \cdot 0,9977 = 37,264$$

$$W_{л.ч}(j32) \cdot W_{н.э}(3,75) = -0,028 \cdot 37,264 = -1,043$$

При  $A_2 - \Delta A = 3,75$  система неустойчивая и амплитуда периодических колебаний будет возрастать и приближаться обратно к  $A_2 = 3,85$ .

**ОБЩИЙ ВЫВОД** Данная система имеет два периодических решений

- при  $A_1 = 0,2505$ ;  $x_1(t) = 0,2505 \sin 32t$  - неустойчивый колебательный режим

- при  $A_2 = 3,85$ ;  $x_2(t) = 3,85 \sin 32t$  - устойчивый автоколебательный режим

**Пример 3.8** – Исследовать систему на возможность возникновения автоколебаний по условиям примера 3.7 при  $k = 0,14$  (коэффициент усиления  $W_{л.ч}(p)$ ).

### РЕШЕНИЕ

1 Фазовая характеристика линейной части системы не зависит от коэффициента  $k$ . Поэтому в данном примере  $\varphi(32) = -180^\circ$ . Определим амплитудную характеристику при  $\omega = 32$  и  $k = 0,14$ .

$$A'(32) = \frac{0,14}{32 \left( \sqrt{1 + 0,0025 \cdot 32^2} \right) \cdot \left( \sqrt{1 + 0,000432^2} \right)} = \frac{0,14}{32 \cdot 1,1886 \cdot 1,1187} \approx 0,00195$$

2 Параметры реле не зависят от  $k$ . Поэтому характеристика  $Z(A)$  примера 3.7 соответствует условию примера 3.8.

Значение  $Z(A)$  достигает минимум по абсолютному значению

при  $A = \alpha\sqrt{2} = 0,25 \cdot 1,41 = 0,3525$ .

$$\text{Тогда } |Z(A)|_{\min} = \frac{\pi \cdot A}{2 \cdot b} = \frac{3,14 \cdot 0,3525}{2 \cdot 110} = 0,00503$$

3 По фазовой характеристике условие возникновения автоколебаний выполняется  $\varphi(32) = -180^\circ$ . По соотношению амплитудной характеристики ли-

нейной части системы при  $\omega = 32$  и значение  $|Z(A)|_{min}$  условие возникновения автоколебания не выполняется

$$|Z(A)|_{min} > |A'(32)|, \quad 0,00503 > 0,00195$$

Значит, эти две характеристики не пересекаются. Взаимное расположение этих двух годографов на комплексной плоскости показано на рисунке 3.22. Характеристика  $W(j\omega)$  при  $k = 0,14$  показана пунктирной линией.

**ОТВЕТ** Автоколебаний в данной системе не возникнет. Система переходит в устойчивое равновесие в пределах зоны нечувствительности реле.

**Пример 3.9** – Исследовать систему на возможность возникновения автоколебаний по условию примера 3.7 при идеальном реле с  $b = 110$ .

### РЕШЕНИЕ

1 Параметры АФХ линейной части системы остаются такие же, как в примере 3.7 (смотри таблицу 3.5)

2 Параметры  $Z(A)$  для идеального реле определяются по формуле

$$|Z(A)|_{min} = \frac{-\pi \cdot A}{2 \cdot b} = \frac{-3,14 \cdot A}{4 \cdot 110}$$

Результаты вычисления показаны в таблице 3.7

Таблица 3.7 – Расчёт  $Z(A)$  к примеру 3.9

$A$	0	0,2736	1	2	3	3,92	6	10	15
$Z(A)$	0	0,000195	0,00714	0,01428	0,02142	0,028	0,00357	0,0714	0,107

3 По результатам расчёта (таблицы 3.5 и 3.7) построим амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы и  $Z(A)$  идеального реле на комплексной плоскости (рисунок 3.22).

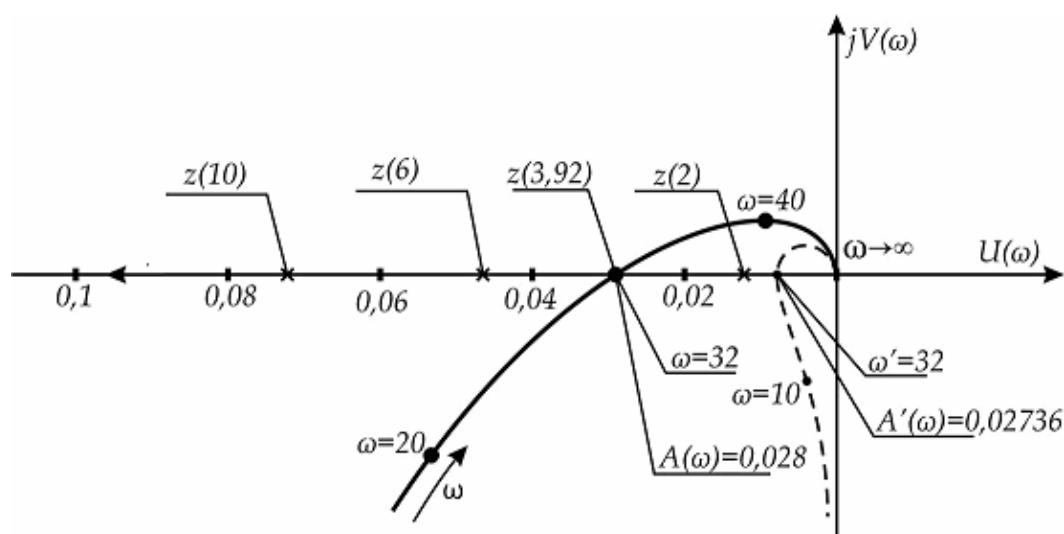


Рисунок 3.22 – АФЧХ линейной части системы и  $Z(A)$  к примеру 3.9

4 Годографы  $W_{л.ч}(j\omega)$  и  $Z(A)$  пересекаются в одной точке. Значит автоколебательный режим возможен при  $\omega_0 = 32 \text{ с}^{-1}$  и  $A_0 = 3,92$

5 Определим устойчивость полученных периодических колебаний

$$\text{При } A_0 + \Delta A = 3,92 + 0,1 = 4,02, \quad Z(A) = \frac{4b}{\pi A} = \frac{4 \cdot 110}{3,14 \cdot 4,02} = 34,75$$

$$W_{л.ч}(j32) \cdot W_{н.э}(3,75) = 0,028 \cdot 34,75 = 0,973$$

Амплитуда периодических колебаний будет уменьшаться и возвращаться к  $A_0 = 3,92$ .

$$\text{При } A_0 - \Delta A = 3,92 - 0,1 = 3,82, \quad Z(A) = \frac{4 \cdot 110}{3,14 \cdot 3,82} = 36,66$$

$$W_{л.ч}(j32) \cdot W_{н.э}(3,82) = 0,028 \cdot 36,66 = 1,026$$

Амплитуда периодических колебаний будет возрастать и возвращаться к  $A_0 = 3,92$ .

ОТВЕТ В системе может возникнуть автоколебательный режим с  $\omega_0 = 32 \text{ с}^{-1}$ ,  $A_0 = 3,92$ .

Примечание – По условию примера 3.8 и при идеальном реле автоколебательный режим, возможен при  $\omega_1 = 32 \text{ с}^{-1}$ ,  $A_1 = 0,02736$  при коэффициенте усиления  $W_{л.ч}(j\omega) = 0,14$ . Таким образом, при идеальном реле всегда будет устойчивый автоколебательный режим если фазовая характеристика линейной части системы имеет

$$\varphi(\omega i) < -180^\circ.$$

**Пример 3.10** – Исследовать систему на возможность возникновения автоколебаний по условию примера 3.7 при гистерезисном реле (без зоны нечувствительности) с  $\alpha = 0,25$ ,  $b = 110$ .

РЕШЕНИЕ

1 Параметры АФХ линейной части системы остаются такие же, как в примере 3.7 (смотри таблицу 3.5).

2 Параметры для  $Z(A)$  гистерезисного реле определяем по формуле

$$Z(A) = \frac{1}{q(A) + jq'(A)} = \frac{-\pi\sqrt{A^2 - \alpha^2}}{4b} - j\frac{\pi\alpha}{4b}$$

Поскольку мнимая часть не зависит от амплитуды входного сигнала  $A$ , то её можно вычислить заранее

$$-j\frac{\pi\alpha}{4b} = -j\frac{3,14 \cdot 0,25}{4 \cdot 110} = -j0,00178$$

Вещественная часть зависит от амплитуды входного сигнала  $A$  и определяется по формуле



$$\frac{-\pi\sqrt{A^2 - \alpha^2}}{4b} = \frac{-3,14}{4 \cdot 110} \sqrt{A^2 - 0,25^2} = -0,00714 \sqrt{A^2 - 0,0625}$$

Изменение вещественной части  $Z(A)$  показано в таблице 3.10

Таблица 3.8 – Расчёт  $Z(A)$  к примеру 3.10

A	2	4	6	7,25	8	10
$Z(A)$	-0,0141	-0,028	-0,022	-0,0518	-0,0573	-0,0714

3 По результатам расчёта видно, что обе части  $Z(A)$  имеют отрицательное значение, поэтому график этой характеристики есть прямая в третьем квадранте параллельно оси абсцисс (рисунок 3.23).

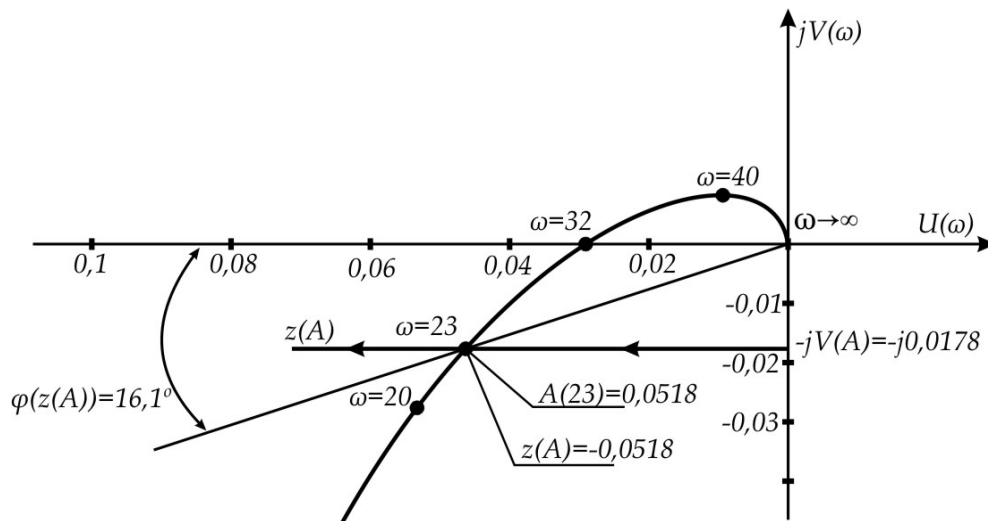


Рисунок 3.23 – АФЧХ линейной части системы и  $Z(A)$  к примеру 3.10

Годографы  $W_{л.ч}(j\omega)$  и  $Z(A)$  пересекаются в одной точке. Значит автоколебательный режим возможен при  $\omega_0 = 23 \text{ с}^{-1}$ ,  $A_0 = 7,25$ . При пересечении двух годографов в одной точке проверку на устойчивость автоколебаний не делают.

4 Гистерезисная релейная характеристика вносит отставание по входному сигналу из реле. С учётом этого определим выполнение второго условия возникновения автоколебаний в данной системе

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -90^\circ - \arctg T_1 \omega_0 - \arctg T_2 \omega_0 - \arctg \frac{\alpha}{A\sqrt{1 - (\alpha/A)^2}} = \\ &= 90^\circ - \arctg 0,05 \cdot 23 - \arctg 0,02 \cdot 23 - \arctg \frac{0,25}{7,25\sqrt{1 - (0,25/7,25)^2}} = \\ &= -90^\circ - 48,9^\circ - 24,7^\circ - 16,1^\circ \approx -180^\circ \end{aligned}$$

Условие по суммарному фазовому углу выполняется.

Примечание – По методу Л.С. Гольдфарба можно определять возможность возникновения колебательного режима для любого вида нелинейной характеристики. В примерах 3.7 – 3.10 в качестве нелинейного звена взято реле.

## 4 Устойчивость нелинейных систем

### 4.1 Введение

Одной из основных задач теории автоматического регулирования является изучение динамических процессов, происходящих в САУ при нарушении её равновесия каким-либо воздействием. Это может быть управляющее воздействие, изменение нагрузки или различные виды помех. САУ должна поддерживать заданный режим работы, быть малочувствительной к посторонним возмущениям. Иными словами, САУ должна быть работоспособной, несмотря на действие на неё различных возмущений или быть *устойчиво* [1,3,12].

***Под устойчивостью понимается свойство системы возвращаться к состоянию установившегося равновесия после устранения всех возмущений.***

Устойчивость нелинейных систем зависит от величины возмущающего воздействия. Например, при малом (бесконечно малом) значении возмущающего воздействия система может быть устойчива, или устойчива «в малом». При большом (конечным по величине) значении возмущающего воздействия система может быть неустойчива, или неустойчива «в большом». Но может быть и наоборот: неустойчива «в малом» и устойчива «в большом».

Если динамика линейной системы описывается дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то её устойчивость «в малом» обеспечивает неограниченную устойчивость «в большом» благодаря принципу суперпозиции. При этом считается, что она устойчива «в общем». Её устойчивость можно определить по первой теореме (по первому методу) А.М. Ляпунова.

***Линейная система устойчива, если все вещественные корни характеристического уравнения отрицательные.***

Определение устойчивости нелинейной системы связано с преодолением значительной трудности. Это связано со следующим:

- устойчивость «в малом» и устойчивость «в большом» требует отдельного определения;
- установившейся режим работы системы может быть в виде устойчивого равновесия, а так же в виде автоколебаний;
- в зависимости от вида нелинейности система может быть устойчива при одних начальных условиях и неустойчива при других или при других воздействиях.

В отдельных случаях, если можно линеаризировать нелинейное дифференциальное уравнение, то устойчивость такой системы можно определить по критериям устойчивости линейной системы (критерий Рауса, Гурвица, Михай-

лова). Но это только для определенного, достаточно малого отклонения регулируемой величины относительно исходного режима.

Наиболее общие результаты по исследованию устойчивости нелинейных систем могут быть получены по второму (прямому) методу Ляпунова. Этот метод основан на простой идеи, известной из механики: в положении равновесия система имеет минимум потенциальной энергии. Абсолютный минимум можно считать равным нулю. Тогда, если движение системы стремится к нулю – она устойчивая. Если движение системы происходит с увеличением потенциальной энергии – она неустойчивая.

## 4.2 Анализ устойчивости по второму (прямому) методу Ляпунова

Пусть математическая модель нелинейной системы представлена в форме системы дифференциальных уравнений [10,11].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

или в векторной форме записи  $\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t)$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  – величины, определяющие состояние системы и не зависящие явно от времени  $t$ .

Это означает, что на систему не действуют никакие внешние возмущения, а все действующие силы являются внутренними и зависят от состояния системы. Такие системы считаются *автономными*.

Решение дифференциальных уравнений, описывающих движение такой системы при заданных начальных условиях  $x_0$  по Ляпунову называют *невозмущенным движением*  $\varphi(x_0, t)$ . Его выбор произволен. В частности, если начальные условия соответствуют равновесию системы, то оно тоже будет считаться невозмущенным движением. При изменении начальных условий на  $\Delta x$ , получим другое решение дифференциальных уравнений  $\varphi_i(x_0 + \Delta x, t)$ , которое называется *возмущенным движением*.. Разность между возмущенным и не возмущенным движением  $\Delta \varphi(t)$  называется *вариацией движения* и определяется

$$\Delta \varphi(t) = \varphi_i(x_0 + \Delta x, t) - \varphi_0(x_0, t)$$

Согласно второму методу устойчивости Ляпунова

**Невозмущенное движение называется устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon)$ , что из  $\|\Delta x\| < \delta(\varepsilon)$  для всех  $t < T$  следует  $\|\Delta\varphi(t)\| < \varepsilon$ .**

Пояснение к этому определению.

$\delta(\varepsilon)$  – допустимое отклонение параметра системы;

$\Delta x$  – действительное отклонение параметра системы;

$\varepsilon$  – допустимое отклонение возмущенного движения по отношению к невозмущенному при которой система считается устойчивой;

$\Delta\varphi(t)$  – действительное отклонение возмущенного движения по отношению к невозмущенному или вариация отклонения;

$T$  – конечное время, в течение которого определяется выполнение условия  $\|\Delta\varphi(t)\| < \varepsilon$ . Фактически это означает что время  $t$  – ограничено;

$\|\bullet\|$  - означает норму вектора.

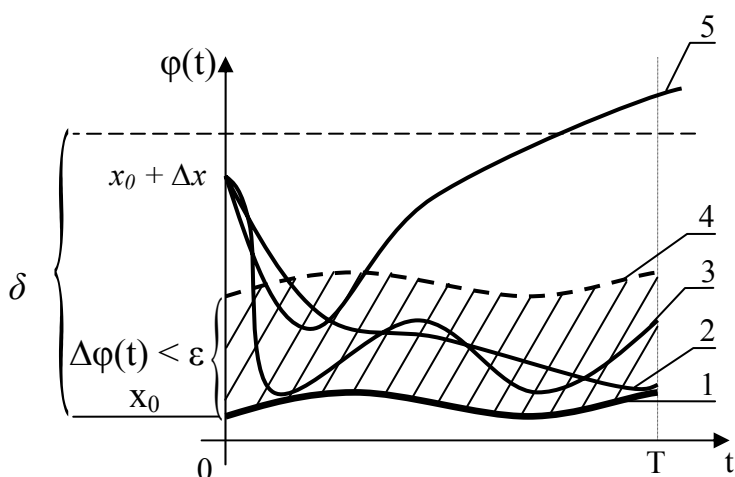


Рисунок 4.1 – Траектории движения системы при изменении  $x_0$  на  $x_0 + \Delta x$

Пусть невозмущенное движение системы  $\varphi(x_0, t)$  характеризуется траекторией 1, которая выделена жирной линией (рисунок 4.1). Возможны три варианта движения системы при изменении  $x_0$  на  $x_0 + \Delta x$ .

Первый вариант. Возмущенное движение  $\varphi(x_0 + \Delta x, t)$  (траектория 2) с течением времени неограниченно приближается к невозмущенному и отклонение  $\Delta\varphi(t) \rightarrow 0$ . Система имеет *асимптотическую устойчивость*.

Второй вариант. Возмущенное движение (траектория 3) с течением времени не выходит за данные пределы  $\varepsilon$ . Система *устойчива*. Допустимые пределы вариации отклонения возмущенного при котором системы считается устойчивой движения заштрихованы. Верхний предел показан штриховой линией 4.

Третий вариант. Возмущенное движение (траектория 5) с течением времени выходит за пределы  $\varepsilon$ . Система *неустойчивая*.

Покажем отклонения возмущенного движения от невозмущенного на фазовой плоскости, где по оси абсцисс  $\Delta\varphi(t)$  – вариации отклонения от заданного движения. По оси ординат производная по этому отклонению  $\Delta\varphi'(t)$  (рисунок 4.2). На этой же плоскости покажем значения  $\Delta x$  – отклонение системы от заданного установившегося значения при  $t = 0$ . Это отклонение в пределах  $\delta_1(\varepsilon)$  и её производной  $\delta_2(\varepsilon)$ . На фазовой плоскости показаны области в которых может находиться система при изменении  $x_0$  на  $x_0 + \Delta x$ , в виде трёх окружностей. Окружность радиуса  $r \rightarrow 0$  - соответствует области асимптотической

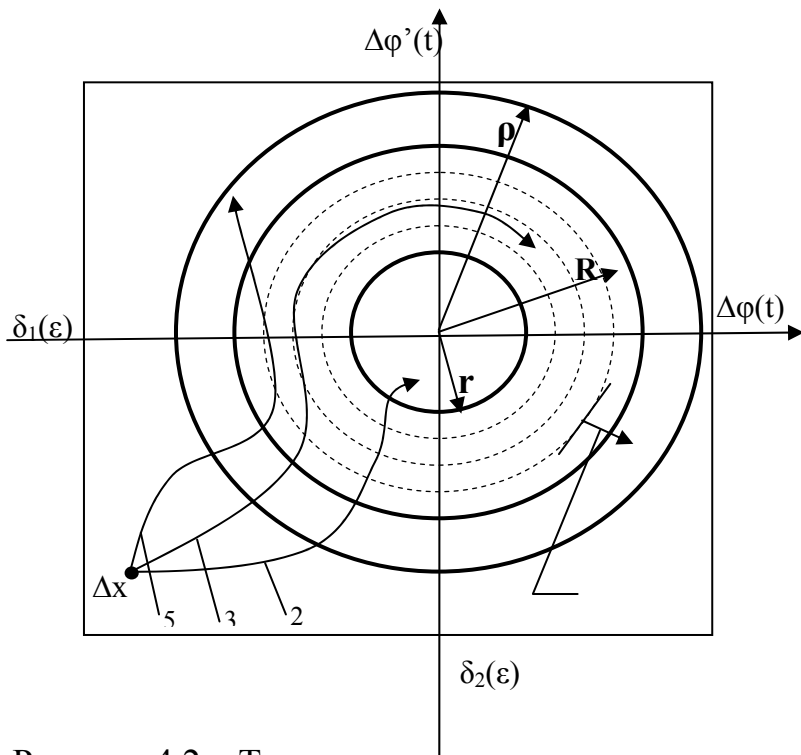


Рисунок 4.2 – Траектория отклонения возмущающего движения от невозмущенного на фазовой плоскости

ответствует асимптотически устойчивой системы. За конечное время  $t < T$  фазовая траектория попадает в область, ограниченной радиусом  $r \rightarrow 0$ . Движение системы 3 соответствует области устойчивости потому, что фазовая траектория в пределах допустимого отклонения  $\|\Delta\varphi(t)\| < \varepsilon$  (окружность с радиусом  $R$ ). Движения системы 5 соответствует области неустойчивого движения. За конечное время эта система достигает сферы  $\rho$ ,  $\|\Delta\varphi(t)\| > \varepsilon$ . и даже может выйти за ее пределы. Обозначение траекторий движения системы на рисунке 4.1 и на рисунке 4.2 одинаковые.

Если известны уравнения, описывающие движение автономной системы (смотри уравнение 4.1), то как определить по траектории возмущенного движения будет ли данная нелинейная система устойчивая? Для этого на фазовой плоскости нанесены линии равного уровня состояния возмущенного движения. На рисунке 4.2 они условно показаны пунктирными окружностями. Значение этих функций можно интерпретировать как некоторое обобщенное расстояние между различным состоянием системы. Если фазовая траектория возмущенного движения последовательно проходит эти функции так, что каждая следующая функция с меньшим радиусом (с меньшей потенциальной энергией), то такая фазовая траектория движения возмущенной системы постепенно приближается к окружности радиуса  $r$ , которая соответствует нулевой потенциальной энергией или асимптотической устойчивости системы. Если фазовая траектория проходит эти функции так, что каждая следующая функция с большим радиусом, с большей потенциальной энергией, то такая траектория

устойчивости, где отклонение движения  $\Delta\varphi(t) \rightarrow 0$ . Окружность радиуса  $R$  соответствует области устойчивости с допустимым отклонением  $\|\Delta\varphi(t)\| < \varepsilon$ . Окружность радиуса  $\rho$  соответствует недопустимому увеличению отклонения движения, когда это отклонение  $\|\Delta\varphi(t)\| > \varepsilon$ . Система при таком отклонении становится неустойчивой.

Пусть даны три системы с отклонением параметров при  $t = 0$  в пределах заданной области  $\|\Delta x\| < \delta(\varepsilon)$ . Траектория отклонения возмущенного движения от невозмущенного или движение системы 2 со-

движения системы уходит от центра с радиусом  $r$ , где потенциальная энергия нулевая. В такой траектории каждое новое состояние приводит к увеличению потенциальной энергии; система движется к сфере радиуса  $\rho$ , к недопустимой величине отклонения возмущенного движения относительно невозмущенного. Эти линии равного состояния системы называются *функциями Ляпунова*. С их помощью определяется устойчивость системы.

### 4.3 Определение устойчивости по функции Ляпунова

Введем в рассмотрение однозначную дифференцируемую в некоторой области скалярную *функцию переменных состояния*  $V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которую называют *функцией Ляпунова* [10,11].

*Функция Ляпунова называется знакоопределенной (положительно определенной или отрицательно определенной в зависимости от знака), если она имеет значение нуль только в начале координат (при  $x_i = 0$ ), а в остальной области имеет значение только одного знака.*

*Функция Ляпунова называется знакопостоянной, если она имеет значение нуль не только в начале координат, но и в некоторых других точках, а в остальной области имеет значение только одного знака.*

*Функция называется знакопеременной, если она имеет значение нуль не только в начале координат, но и в некоторых других точках, а в остальной области и положительное, и отрицательное значение.*

Рассмотрим ряд примеров. Пусть для данной системы приняты следующие функции Ляпунова.

$$\begin{aligned} V_1(x) &= (x_1+x_2)^2 + x_2^2 + 2x_3^2; \\ V_2(x) &= (x_1+x_2)^2 + x_3^2; \\ V_3(x) &= x_1+x_2+x_3^2. \end{aligned}$$

Определим вид этих функций.

Функция  $V_1(x)$  – *знакоопределенная, положительная*. Она равна нулю только в начале координат, когда  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . В любой другой точке эта функция определено положительная.

Функция  $V_2(x)$  – *знакопостоянная, положительная*. Она равна нулю не только в начале координат, когда  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , но и при  $(x_1+x_2) = 0$  и  $x_3 = 0$ . При любых других значениях  $x_1, x_2, x_3$  эта функция положительная.

Функция  $V_3(x)$  – *знакопеременная*. Есть такое отрицательное значение  $x_1$  и  $x_2$ , когда функция  $V_3(x)$  будет отрицательная. Такая функция для определения устойчивости системы по второму методу Ляпунова не используется.

Любую знакопостоянную или знакоопределённую функцию, которая тождественно обращается в нуль при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , будем называть функцией Ляпунова, если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются параметрами системы.

Второй (прямой) метод Ляпунова основан на построении этих специальных функций Ляпунова и позволяет получить достаточные условия устойчивости. В основе метода лежат две теоремы Ляпунова.

**Теорема 1** *Если существует знакопостоянная функция  $V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , производная которой по времени  $W = dV/dt$  в силу дифференциальных уравнений системы является знакопостоянной функцией противоположного с  $V(x)$  знака или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

**Теорема 2** *Если, кроме того, функция  $W = dV/dt$  знакоопределенная, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.*

Рассмотрим систему второго порядка, заданную в фазовых координатах

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2); \\ \frac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

где  $X_1, X_2$  – произвольные функции и содержат любой вида нелинейности. Допустим, что для рассматриваемой системы известна функция Ляпунова  $V(x_1, x_2)$ . Найдем полную производную функции  $V(x_1, x_2)$  по времени.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x_1, x_2),$$

где  $V(x_1, x_2)$  – функция Ляпунова;

$X_i(x_1, x_2)$  – система в заданных координатах.

Для системы n-го порядка получаем:

$$\frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

В полученном выражении вычислить производную по  $\partial V / \partial x_i$  большей трудности не составляет. Производная  $dx_i / dt = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – эта заданная (рассматриваемая) система. Требуется определить знак  $dV(x)/dt$  и по нему судить об устойчивости системы. Определить знак полученной производной достаточно просто. Главная проблема и до конца не решенная – правильно определить функцию Ляпунова. Наибольшее распространение для анализа широкого класса линейных систем получила функция Ляпунова в виде квадратичной формы.

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} x_i x_j, \quad \text{где } P_{ij} = P_{ji}$$

Определение устойчивости по функции Ляпунова покажем на конкретных примерах [13,14].

**Пример 4.1** - Исследовать устойчивость системы с помощью функции Ляпунова по заданному уравнению системы

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + x_2^2\end{aligned}$$

**РЕШЕНИЕ**

1 Используем функцию Ляпунова в виде  $V = x_1^2 + x_2^2$ . Эта функция знакоопределённая, положительно определенная при любых значениях  $x_1$  и  $x_2$ . При  $x_1 = x_2 = 0$   $V = 0$ .

2 Определяем полную производную функции Ляпунова с учетом заданного уравнения системы.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial(x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_1}(-x_1 + x_1x_2) + \frac{\partial(x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_2}(-x_2 + x_2^2) = \\ &= 2x_1(-x_1 + x_1^2) + 2x_2(-x_2 + x_2^2) = -2x_1^2 + 2x_1^2x_2 - 2x_2^2 + 2x_2^3 = \\ &= 2[-(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2x_2 + x_2^3]\end{aligned}$$

**ОТВЕТ** При  $|x_1| \ll 1$  и  $|x_2| \ll 1$  полная производная будет отрицательна. Система асимптотически устойчивая.

**Пример 4.2** - Исследовать устойчивость системы с помощью функции Ляпунова по заданному уравнению

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 - x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1^2 + x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1^2 + x_3\end{aligned}$$

**РЕШЕНИЕ**

1 Используем функцию Ляпунова в виде  $V = x_2^2 + x_3^2$ . Это знакоопределённая, положительно определенная функция.

2 Определяем полную производную функции Ляпунова с учетом уравнения системы.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial(x_2^2 + x_3^2)}{\partial x_1}(x_2 - x_3) + \frac{\partial(x_2^2 + x_3^2)}{\partial x_2}(x_1^2 + x_2) + \frac{\partial(x_2^2 + x_3^2)}{\partial x_3}(x_1^2 + x_3) \\ &= 0(x_2 - x_3) + 2x_2(x_1^2 + x_2) + 2x_3(x_1^2 + x_3) = 2[x_2^2 + x_3^2 + x_1^2(x_2 + x_3)]\end{aligned}$$



ОТВЕТ При любых значениях  $x_1, x_2, x_3$  полная производная по  $V$  будет положительная. Система неустойчивая.

Примечание - Но может быть неудачно выбрана функция Ляпунова? Такое может быть. Если принять другую функцию Ляпунова, то система в действительности может оказаться устойчивой. Устойчивость нелинейной системы можно определить по её линеаризованному виду по 1-му методу Ляпунова. Для этого используются следующие теоремы Ляпунова.

***Если линеаризованная система устойчива, то исходная нелинейная система тоже устойчива.***

***Если линеаризованная система неустойчива, то исходная нелинейная система тоже неустойчива.***

***Если устойчивость линеаризованной системы не определена, то для определения ее устойчивости, надо учесть нелинейность этой системы.***

Для определения устойчивости используются критерии Гурвица или Михайлова. Но когда диагональный минор Гурвица равен нулю или когда годограф Михайлова проходит через начало координат, то ничего конкретного сказать об устойчивости нельзя. Возникает «критический случай» - по определению Ляпунова. Выход: определять устойчивость нелинейной системы по 2-му методу Ляпунова. Здесь главная трудность в правильном выборе функции Ляпунова. Но если по какому либо методу определения устойчивости система окажется устойчивой – значит она действительно устойчива.

**Пример 4.3** - Исследовать устойчивость системы по 1-му методу Ляпунова по заданному уравнению системы (смотри пример 4.1)

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + x_2^2\end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ

1 Линеаризуем эту систему уравнения относительно точки  $x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2\end{aligned}$$

2 Определяем характеристическое уравнение линеаризованной системы и его корни

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

**ВЫВОД** Корни характеристического уравнения отрицательные. Система действительно асимптотически устойчивая.

**Пример 4.4** - Исследовать устойчивость системы по 1-му методу Ляпунова по заданному уравнению системы

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 - x_1 x_2^2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1^3\end{aligned}$$

**РЕШЕНИЕ**

1 Линеаризуем эту систему уравнений относительно точки  $x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0\end{aligned}$$

2 Определяем характеристическое уравнение линеаризованной системы и его корни

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

3 По линеаризованному уравнению определить устойчивость (или неустойчивость) не получается. Проверим устойчивость системы с учетом ее нелинейных членов уравнения по 2-му методу Ляпунова. Функцию Ляпунова примем в виде

$$V = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2}$$

4 Определяем полную производную этой функции с учетом уравнения системы

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial(x_1^4/4 + x_2^2/2)}{\partial x_1}(x_2 - x_1 x_2^2) + \frac{\partial(x_1^4/4 + x_2^2/2)}{\partial x_2}(-x_1^3) = \\ &= x_1^3(x_2 - x_1 x_2^2) + x_2(-x_1^3) = x_1^3 x_2 - x_1^4 x_2^2 - x_1^3 x_2 = -x_1^4 x_2^2\end{aligned}$$

**ОТВЕТ** Принятая функция Ляпунова положительно определенная при любом значении  $x_1 \neq 0$  и  $x_2 \neq 0$ . Полная производная функции Ляпунова отрицательно определенная при любом  $x_1 \neq 0$  и  $x_2 \neq 0$ . Система асимптотически устойчивая.

Трудность при использовании второго метода Ляпунова в нахождении функции Ляпунова. Это весьма сложная задача и полностью пока не решенная. Второй недостаток этого метода в следующем. Пусть найдена функция Ляпу-

нова и при исследовании с ее помощью получили результат: система не устойчивая. Но этот результат не окончательный. Возможно неудачна была определена эта функция Ляпунова, возможно при другом виде функции Ляпунова система окажется устойчивой.

Примечание - Условие устойчивости по первому методу Ляпунова (по критерию Рауса, Гурвица, Михайлова) является *необходимым и достаточным*. Вопрос устойчивости по этому первому методу решается однозначно (устойчива или неустойчива).

Вопрос устойчивости по второму методу решается не однозначно. Неустойчивая система при одной функции Ляпунова может быть в действительности устойчивая при другой функции Ляпунова. Этот метод базируется на *достаточном* условии устойчивости, но он не является *необходимым* условием устойчивости.

### Вопросы для самоконтроля к подразделам 4.2 – 4.3

- 1 Что такое устойчивость системы управления?
- 2 Как определяется устойчивость по первому методу Ляпунова?
- 3 Как определяется устойчивость по второму методу Ляпунова?
- 4 Обоснование устойчивости по второму методу Ляпунова?
- 5 Чем отличается определение устойчивости по первому и по второму методу Ляпунова?
- 6 Как определяется невозмущенное движение системы?
- 7 Есть ли ограничение на вид невозмущенного движения системы?
- 8 Можно ли принять в качестве невозмущенного движения установившееся состояние системы?
- 9 Как определяется возмущенное движение системы?
- 10 Как определяется вариация движения системы?
- 11 Понятие устойчивости движения по второму методу Ляпунову?
- 12 Понятие асимптотически устойчивой системы по Ляпунову?
- 13 Что характеризуют функции Ляпунова на фазовом пространстве?
- 14 Как должна проходить фазовая траектория вариации движения системы относительно функции Ляпунова, чтобы система была устойчивой?
- 15 Какая функция переменных состояний или функция Ляпунова считается знакоопределенной?
- 16 Какая функция Ляпунова считается знакопостоянной?
- 17 Какая функция Ляпунова считается знакопеременной?
- 18 Как определяется полная производная функции Ляпунова?
- 19 Как определяется устойчивость системы с помощью функции Ляпунова?
- 20 Можно ли по линеаризованному уравнению системы определять устойчивость исходной нелинейной системы?
- 21 Что значит «критический случай» при определении устойчивости по линеаризованному уравнению системы?

- 22 Если при определении устойчивости линеаризованной системы по алгебраическому или частотному критерию возник «критический случай», то как определить устойчивость такой системы?
- 23 Если по алгебраическому или частотному критерию линеаризованная система неустойчива, то нужна ли дополнительная проверка по 2-му методу Ляпунова исходной нелинейной системы?
- 24 Если по алгебраическому или частотному критерию линеаризованная система устойчива, то нужна ли дополнительная проверка по 2-му методу Ляпунова исходной нелинейной системы?

### Задачи для самоконтроля к подразделу 4.3

- 1 Определить устойчивость системы по 1-му и по 2-му методу Ляпунова.

$$\frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 2x_2x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - 2x_3 + 4x_1^2x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -2x_3 - 4x_1x_2$$

Указание. В качестве функции Ляпунова принять  $V = 2x_1^2 + x_3^2$

- 2 Определить по 2-му методу Ляпунова: будет ли данная система асимптотически устойчива? Функцию Ляпунова выбрать самостоятельно в виде квадратичной.

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1^3 + x_1x_2^2 - x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_1^2x_2 + x_2^3 - x_2$$

- 3 Определить по 2-му методу Ляпунова устойчивость системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 + x_2x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1^2 - x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1^2 - x_3$$

Указание. В качестве функции Ляпунова принять

$$V = x_2^2 + x_3^2$$

Ответ Система будет устойчивая при  $x_1 < 1$ ,  $x_2 > 1$ ,  $x_3 > 1$ .

#### 4.4 Критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова

*Абсолютная устойчивость – это устойчивость системы “в целом” с одним безинерционным нелинейным элементом, характеристика которого находится в пределах заданного угла между осью абсцисс и прямой, проведённой из начала координат.*

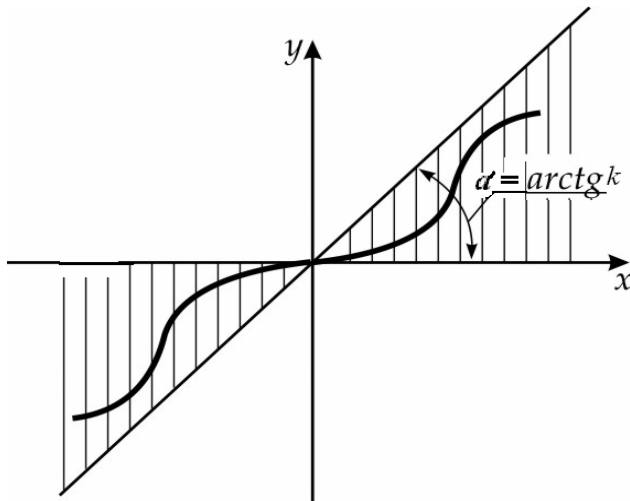


Рисунок 4.3 – К понятию абсолютной устойчивости

При этом конкретная форма характеристики безинерционного нелинейного элемента может быть любая, в том числе нестабильная, с изменяющимися параметрами, но заданная в пределах угла  $(0, \alpha)$ . Здесь  $0$  и  $k$  – тангенс угла наклона линий, ограничивающих этот угол. При этом нуль соответствует оси абсцисс.

Исследования устойчивости системы при таком неконкретном задании нелинейности имеет практический смысл в тех случаях, когда вид нелинейной характеристики неизвестен, но известны пределы её изменения [4,5].

Румынский математик В.М. Попов в 1959 году предложил простой и наглядный метод определения абсолютной устойчивости. Для этого нелинейную систему приводят к расчётному виду (рисунок 4.6). Она состоит из нелинейного безинерционного звена и линейной части системы. Этот метод основан на критерии устойчивости Найквиста.

Рассмотрим случай, когда нелинейное звено заменено линейным с коэффициентом  $k$ . При этом получаем полностью линейную систему с частотной передаточной функцией (ЧПФ) в разомкнутом виде  $kW(j\omega)$ . Согласно критерию Найквиста замкнутая система будет устойчивой, если годограф разомкнутой устойчивой системы  $kW(j\omega)$  при  $\varphi = -180^\circ$  не охватывает точку  $(-1; j0)$

$$kW(j\omega) \Big|_{\varphi = -180^\circ} < -1 \quad \text{или} \quad W(j\omega) \Big|_{\varphi = -180^\circ} < -\frac{1}{k}$$

Для случая, когда безинерционное звено нелинейное, тогда к критерию устойчивости Найквиста добавляются следующие условия, учитывающие возможные изменения нелинейного звена в пределах угла  $\alpha = \arctg k$ .

*Замкнутая система будет абсолютно устойчива, если устойчива линейная часть разомкнутой системы и через точку  $(-1/k; j0)$  можно провести прямую линию так, чтобы вся модифицированная частотная характеристика  $W^*(j\omega)$  находилась от неё справа.*

Модифицированная частотная характеристика  $W^*(j\omega)$  получается из частотной характеристики линейной части системы  $W(j\omega)$  путём умножения её мнимой части на частоту  $\omega$ . Вещественная часть характеристики остаётся без изменения.

$$W^*(j\omega) = U(\omega) + \omega jV(\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega)$$

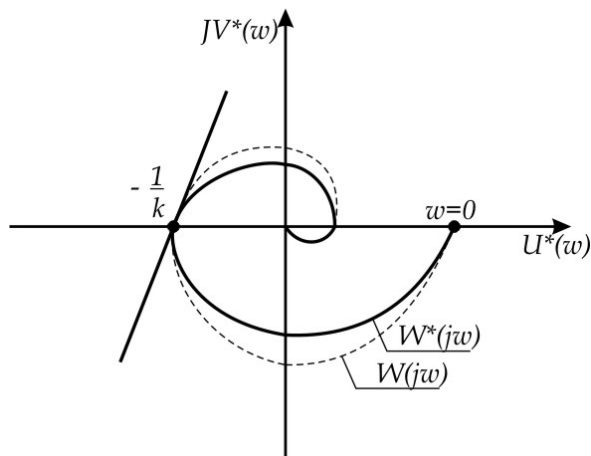


Рисунок 4.4 – Проверка абсолютной устойчивости по В.М. Попову

Прямая, проведённая через точку  $(-1/k; j0)$  называется *линией Попова*. На рисунке 4.4 показан модифицированный годограф Найквиста и линия Попова абсолютно устойчивой системы. Там же пунктирной линией показан не модифицированный годограф Найквиста. Эти годографы имеют одинаковые действительные части и, следовательно, пересекают действительную ось в одних и тех же точках. Мнимая часть этих годографов разная и модифицированный годограф пересекает мнимую ось при большем значении частоты, и поэтому при меньшем абсолютном значении.

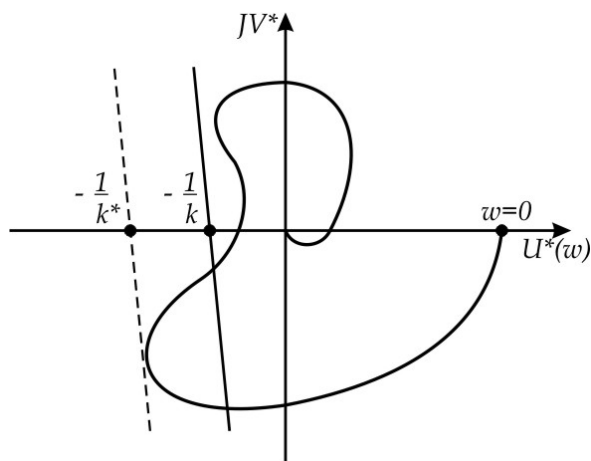


Рисунок 4.5 – Модифицированный вогнутый годограф системы

На рисунке 4.5 показан случай, когда условия абсолютной устойчивости В.М. Попова не выполняется. Через точку  $(-1/k; j0)$  нельзя провести линию Попова так, чтобы она не пересекала модифицированный годограф Найквиста. Через точку  $(-1/k^*; j0)$  можно провести прямую Попова. Такая система устойчивая.

Сравним условие абсолютной устойчивости В.М. Попова с условием устойчивости линейной системы по критерию Найквиста.

Условия абсолютной устойчивости нелинейной системы с *модифицированным выпуклым годографом* и условия линейной системы по критерию Найквиста совпадают. Пересечение оси абсцисс происходит в одних и тех же точках. Через точку пересечения  $(-1/k; j0)$  всегда можно провести прямую Попова так, чтобы годограф был справа от неё (смотри рисунок 4.4)

Условия абсолютной устойчивости нелинейной системы с *модифицированным вогнутым годографом* и условия устойчивости линейной системы по критерию Найквиста не совпадают. Точка  $(-1/k; j0)$  может находиться внутри вогнутости и годограф Найквиста её не охватывает. Линейная замкнутая система устойчива (смотри рисунок 4.5). Но через неё нельзя провести прямую Попова так, чтобы она не пересекала годограф. Нелинейная система может быть неустойчива. Почему может быть?

**Критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова является достаточным, но он не является необходимым условием устойчивости.**

При его невыполнении (когда линия Попова не проводится) ещё нельзя окончательно утверждать, что нелинейная система действительно неустойчива. Для такого утверждения нужны дополнительные исследования. Но очевидно, что если точка  $(-1/k; j0)$  находится внутри годографа, то замкнутая система при устойчивой разомкнутой системы однозначно неустойчива.

Рассмотрим случай, когда разомкнутая система неустойчива, но её с помощью отрицательной обратной связи с коэффициентом  $K_{oc}$  можно сделать устойчивой. Тогда условия абсолютной устойчивости по В.М. Попову.

**Замкнутая система абсолютно устойчива, если через точку  $(-1/j0)$  можно провести прямую Попова, проходящую слева от модифицированной частотной характеристики устойчивой линейной системы с коэффициентом обратной связи  $K_{oc}$ .**

где  $k$  – определяет  $tg\alpha$ , в пределах которого задано максимальное значение нелинейная статическая характеристика (рисунок 4.3);

$K_{oc}$  – коэффициент обратной связи, с помощью которого неустойчивая линейная часть системы стала устойчивой.

Но, если с помощью коэффициента обратной связи  $K_{oc}$  неустойчивую линейную часть системы нельзя сделать устойчивой, тогда нельзя получить абсолютную устойчивость нелинейной системы.

**Пример 4.5** – Система состоит из нелинейного элемента (Н.Э.) и двух линейных звеньев с передаточной функцией  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  (рисунок 4.6). Определить при каком значении коэффициента  $k$  данная система будет устойчива. Передаточные функции линейной части системы

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1} ; \quad W_2 = \frac{K_2}{T_2 p + 1}$$

Значения коэффициентов

$$K_1 = 1 ; \quad K_2 = 1 ; \quad T_1 = 1c ; \quad \xi = 0,05 ; \quad T_2 = 5c$$

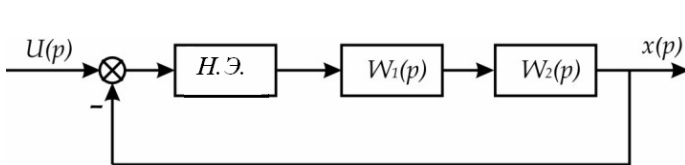


Рисунок 4.6 – Структурная схема нелинейной системы к примеру 4.5 - 4.6

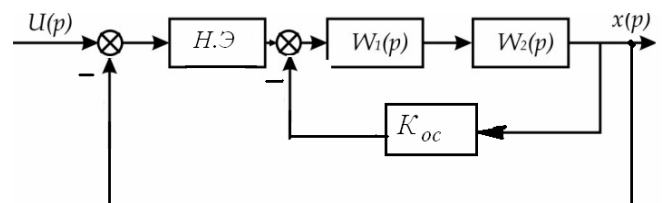


Рисунок 4.7 – Структурная схема нелинейной системы к примеру 4.9 – 4.10

## РЕШЕНИЕ

Решение этого примера сводится к определению допустимого значения коэффициента  $k$ , в пределах которого может находиться нелинейное звено согласно рисунку 4.3. Для этого строим модифицированный годограф Найквиста и по критерию абсолютной устойчивости В.М. Попова определим значение точки  $(-1/k; j0)$ .

1 Передаточная функция линейной части системы

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2 p + 1} = \frac{K_1 \cdot K_2}{T_1^2 T_2 p^3 + (2\xi T_1 T_2 + T_1^2) p^2 + (2\xi T_1 + T_2) p + 1}$$

2 После подстановки численных значений коэффициентов

$$W(p) = \frac{1}{5p^3 + 1,5p^2 + 5,1p + 1}$$

3 Частотная передаточная функция

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{(1-1,5\omega^2) + j\omega(5,1-5\omega^2)} \cdot \frac{(1-1,5\omega^2) - j\omega(5,1-5\omega^2)}{(1-1,5\omega^2) - j\omega(5,1-5\omega^2)} = \\ &= \frac{(1-1,5\omega^2)}{(1-1,5\omega^2)^2 + \omega^2(5,1-5\omega^2)^2} - j \frac{\omega(5,1-5\omega^2)}{(1-1,5\omega^2)^2 + \omega^2(5,1-5\omega^2)^2} = U(\omega) + jV(\omega) \end{aligned}$$

4 Модифицированная вещественная и мнимая часть частотной передаточной функции

$$\begin{aligned} U^*(p) &= \frac{1-1,5\omega^2}{(1-1,5\omega^2)^2 + \omega^2(5,1-5\omega^2)^2} \\ V^*(p) &= \frac{\omega^2(5,1-5\omega^2)}{(1-1,5\omega^2)^2 + \omega^2(5,1-5\omega^2)^2} \end{aligned}$$

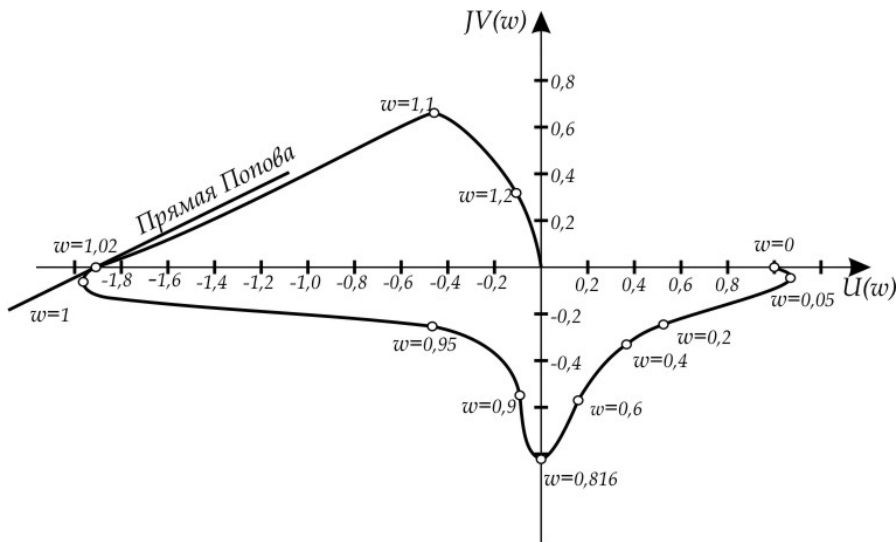
5 Изменяя частоту от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  строим модифицированный годограф Найквиста. Результаты вычислений показаны в таблице 4.1. График показан на рисунке 4.8.

Таблица 4.1 – Расчёт модифицированного годографа Найквиста.

$\omega$	0	0,05	0,2	0,4	0,6	0,816	0,9	0,95	0,0	0,02	0,1	0,2
$U^*(\omega)$	1,0	0,02	0,50	0,24	0,18	0	0,08	0,43	0,192	1,88	0,42	0,13
$V^*(\omega)$	0,0	0,001	-0,026	0,36	0,54	0,71	0,56	0,26	0,04	0,0	0,63	0,32

*Обратите внимание.* Модифицированный годограф Найквиста с коэффициентом демпфирования колебательного звена  $\xi = 0,05$  имеет необычную форму. Если  $\xi$  уменьшить до 0,005, то он ещё больше “растянется” вдоль оси абсцисс.





6 Полученный выпуклый годограф при  $\omega = 1,02$  пересекает отрицательную ось абсцисс в точке  $(-1/k; j0)$  или  $(-1,88; j0)$ . Через эту точку можно провести прямую Попова. Значит  $1/k > |-1,88|$  и  $k \leq 0,53$ .

ОТВЕТ При значении  $k \leq 0,53$  данная система будет устойчива.

Рисунок 4.8 – Модифицированный годограф Найквиста к примеру 4.5

Примечание – Учитывая, что данный годограф получился выпуклым, то значение коэффициента  $k$ , можно определить по алгебраическим критериям устойчивости.

**Пример 4.6** – Определить значение коэффициента  $k$  по примеру 4.5 с помощью критерия устойчивости разработанного В.Н. Евсюковым [16].

#### РЕШЕНИЕ

1 Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$L(p) = 5p^3 + 1,5p^2 + 5,1p + (1 + k \cdot K_2 K_1) = 0$$

2 Необходимое условие устойчивости В.Н. Евсюкова, которое для системы третьего порядка является достаточным условием

$$K_1 > K_3, \quad 1,5/5 > (1 + k \cdot K_2 K_1)/5,1; \quad 1,53 > 1 + k \cdot K_2 K_1, \quad 0,53 > k$$

ОТВЕТ Получено такое же значение коэффициента усиления.

Для случая, когда модифицированный годограф Найквиста окажется *вогнутым*, то значение коэффициента  $k$  по условию абсолютной устойчивости В.М. Попова будет меньше, чем для линейной системы по критерию Найквиста. Покажем это на следующем примере.

**Пример 4.7** – Определить при каком значении коэффициента  $k$  нелинейная система (рисунок 4.7) будет абсолютно устойчивой по критерию В.М. Попова при других передаточных функциях линейной части системы

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi_1 T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{K_2}{T_2^2 p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1}$$

Значение коэффициентов

$$K_1=1, K_2=1, T_1=1,25c, T_2=5c, \xi_1=0,05, \xi_2=0,5$$

РЕШЕНИЕ

1 Передаточная функция линейной части системы

$$W_{общ}(p) = \frac{K_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi_1 T_1 p + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2^2 p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1} =$$

$$= \frac{K_1 \cdot K_2}{T_1^2 T_2^2 p^4 + 2(T_1^2 T_2 \xi_2 + T_1 T_2^2 \xi_1) p^3 + (T_1^2 + T_2^2 + 4T_1 T_2 \xi_1 \xi_2) p^2 + 2(T_1 \xi_1 + T_2 \xi_2) p + 1}$$

2 Подставим численные значения коэффициентов в передаточную функцию разомкнутой системы линейной части системы

$$W_{общ}(p) = \frac{1}{39p^4 + 10,92p^3 + 27,18p^2 + 5,12p + 1}$$

3 Частотная передаточная функция

$$W_{общ}(j\omega) = \frac{1 + 39\omega^4 - 27,18\omega^2}{(1 + 39\omega^4 - 27,18\omega^2)^2 + \omega^2(5,12 - 10,92\omega^2)^2} +$$

$$+ \frac{j\omega(5,12 - 10,92\omega^2)}{(1 + 39\omega^4 - 27,18\omega^2)^2 + \omega^2(5,12 - 10,92\omega^2)^2}$$

4 Модифицированная вещественная и мнимая части частотной передаточной функции

$$U^*(\omega) = \frac{1 + 39\omega^4 - 27,18\omega^2}{(1 + 39\omega^4 - 27,18\omega^2)^2 + \omega^2(5,12 - 10,92\omega^2)^2}$$

$$V^*(\omega) = \frac{\omega^2(5,12 - 10,92\omega^2)}{(1 + 39\omega^4 - 27,18\omega^2)^2 + \omega^2(5,12 - 10,92\omega^2)^2}$$

5 Изменяя частоту от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  строим модифицированный годограф Найквиста. Результаты вычисления показаны в таблице 4.2. График показан на рисунке 4.9.

Таблица 4.2 – Расчёт модифицированного годографа Найквиста к примеру 4.7

$\omega$	0	0,1	0,25	0,3	0,5	0,684	0,75	0,8	0,9	1,0
$U^*(\omega)$	1	0,82	-0,34	-0,40	-0,26	-0,318	-0,44	-0,39	0,14	0,06
$V^*(\omega)$	1	-0,09	-0,18	-0,13	-0,47	0	0,14	0,45	0,26	0,03

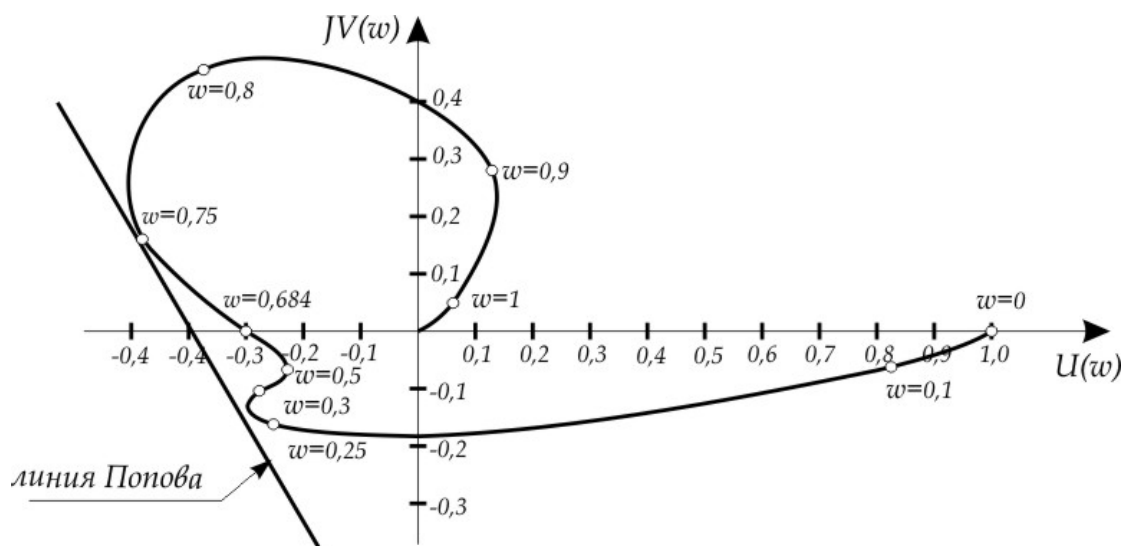


Рисунок 4.9 – Модифицированный годограф Найквиста к примеру 4.7

*Обратите внимание.* Модифицированный годограф Найквиста получился *вогнутым*. Поэтому действительное значение коэффициента  $k$  по алгебраическим критериям не определяется. Для его определения необходимо проводить прямую Попова и по её пересечению с осью абсцисс определяется значение коэффициента  $k$ .

6 Проводим прямую Попова так, чтобы модифицированный годограф Найквиста располагался вправо от неё. Получаем точку пересечения  $(-1/k; j0)$  при значении  $(-0,4; j0)$ . Значит  $1/k > |0,4|$  и  $k \leq 2,5$ .

Примечание – С помощью алгебраического критерия устойчивости можно определить максимальное значение коэффициента  $k$ , если вместо нелинейного звена находится *линейное звено*.

**Пример 4.8** – Определить значение  $k$  для линейной системы звена по упрощённому критерию устойчивости В.Н. Евсюкова [16,17].

РЕШЕНИЕ

1 Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$L(p) = 39p^4 + 10,92p^3 + 27,18p^2 + 5,12p + 1 + k \cdot K_1K_2 = 0$$

2 Определяем параметр  $K$  по критерию В.Н. Евсюкова

$$\begin{aligned} K_1 &= 10,92 / 39 = 0,28; & K_2 &= 27,18 / 10,92 = 2,48; \\ K_3 &= 5,12 / 27,18 = 0,18 & K_4 &= (1 + k \cdot K_1K_2) / 5,12 \end{aligned}$$

3 Определяем коэффициенты  $n$

$$n_3 = K_3 / K_1 = 0,18 / 0,28 = 0,64; \quad n_4 = (K_4 / K_2) = (1 + k \cdot K_1K_2) / 12,06$$

4 Достаточное условие устойчивости по В.Н. Евсюкову

$$1 > n_3 + n_4; \quad 1 > 0,64 + (1 + k \cdot 1 \cdot 1) / 12,66; \quad k < 3,53$$

ОТВЕТ Если данную нелинейную зависимость можно было бы линеаризовать прямой линией, то абсолютная устойчивость будет при  $k \leq 3,53$ . В данном случае, когда имеется нелинейное звено, то  $k \leq 2,5$ .

**Пример 4.9** – Определить значение  $k$  по критерию абсолютной устойчивости В. Попова для нелинейной системы с неустойчивой линейной частью, которая описывается следующими передаточными функциями

$$W_{раз} = \frac{K_1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2^2 p^2 + T_3 p - 1} = \frac{K_1 \cdot K_2}{T_1 T_2 p^3 + 2(T_2 + T_1 T_3) p^2 + (T_3 - T_1) p - 1}$$

Параметры системы :  $T_1 = 1c; T_2 = 1c; T_3 = 3c; K_1 = 0,5; K_2 = 1$

РЕШЕНИЕ

1 Если разомкнутая система имеет один положительный вещественный корень, то замкнутая система *структурно неустойчивая*. Для получения устойчивой системы необходимо эти звенья охватить местной отрицательной обратной связью и определить коэффициент передачи в цепи обратной связи  $K_{oc}$ . Его величина должна быть такая, чтобы свободный член в характеристическом полиноме был положителен (рисунок 4.7).

$$W_{зам} = \frac{K_1 \cdot K_2}{T_1 T_2 p^3 + (T_2 + T_1 T_3) p^2 + (T_3 - T_1) p + (K_1 K_2 K_{oc} - 1)} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 1}{p^3 + (1 + 1 \cdot 3) p^2 + (3 - 1) p + (0,5 \cdot 1 \cdot K_{oc} - 1)} = \frac{0,5}{p^3 + 4 p^2 + 2 p + (0,5 \cdot 1 \cdot K_{oc} - 1)}$$

Необходимые условия устойчивости – все коэффициенты характеристического полинома должны быть положительные. Коэффициент при  $p$  определяется  $(T_3 - T_1) = (3 - 1) = 2 > 0$ . Свободный коэффициент  $K_0 = (K_1 K_2 K_{oc} - 1) = (0,5 \cdot 1 \cdot K_{oc} - 1) > 0$ . При  $K_{oc} = 2,2$ , тогда  $K_0 = (0,5 \cdot 1 \cdot 2,2 - 1) = 0,1$ . Согласно критерию Гурвица  $4 \cdot 2 > 1 \cdot 0,1$ . Значит при  $K_{oc} = 2,2$  *линейная система с местной обратной связью будет устойчива*.

2 Определим устойчивость *нелинейной замкнутой системы*. Для этого построим модифицированный годограф Найквиста с полученной устойчивой линейной частью системы.

$$W(j\omega) = \frac{0,5}{(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 0,1} = \frac{0,5(0,1 - 4\omega^2)}{(0,1 - 4\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2} -$$

$$- j \frac{0,5\omega^2(2 - \omega^2)}{(0,1 - 4\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2}$$

Результаты расчета показаны в таблице 4.3. Модифицированный годограф Найквиста на рисунке 4.10.

Таблица 4.3 – Расчет модификационного годографа Найквиста к примеру 4.9

$\omega$	0	0,5	0,8	1,0	1,2	1,3	1,41	1,6	2
$U^*(\omega)$	0,5	0,28	-0,16	-0,12	-0,087	-0,075	-0,063	-0,052	-0,028
$V^*(\omega)$	0	-0,27	-0,12	-0,06	-0,024	0,021	0	-0,058	-0,016

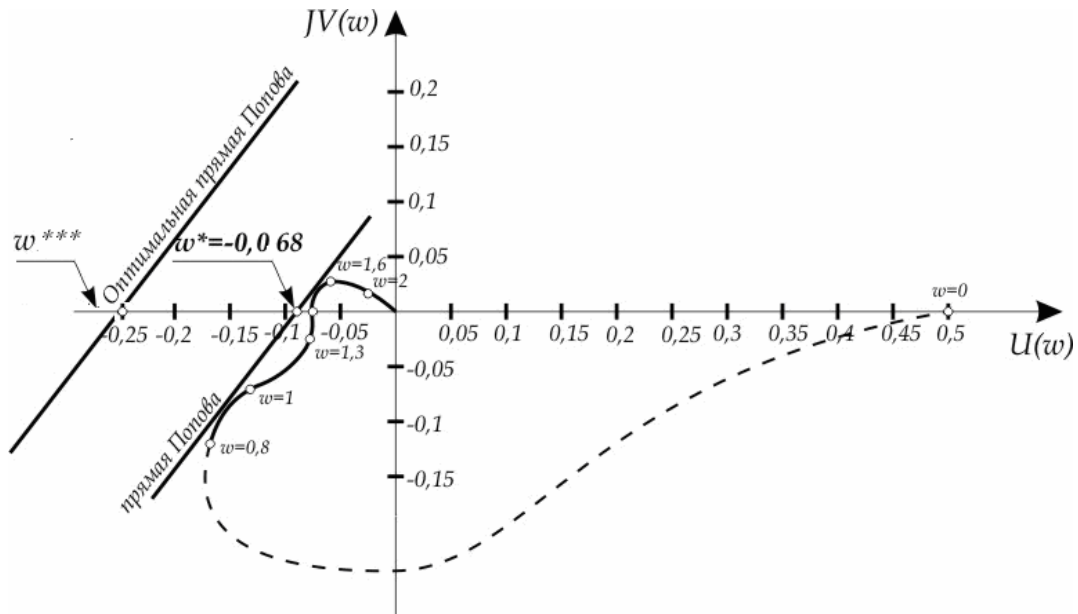


Рисунок 4.10 – Модифицированный годограф Найквиста к примеру 4.9

3 Проводим прямую Попова, которая располагается слева от модифицированного годографа (рисунок 4.10). Она пересекает ось абсцисс в точке  $\omega^* = -0,068$

4 Определяем максимальное значение коэффициента  $k$  при  $\omega^* = -0,068$

$$\omega^* = |0,068| = 1/k, \quad k = 14,7$$

5 Определяем значение свободного коэффициента  $K_0^*$  в замкнутой нелинейной системе

$$K_0^* = (K_0 + k \cdot K_2 K_1 - 1) = (0,1 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 14,7 - 1) = 7,45$$

6 Минимальное значение  $K_{oc.min} = 2,2$  по условию устойчивости замкнутой системы при наличии одного положительного корня. Напоминаем, что при  $K_{oc.min} = 2,2$ , то  $K_0 = 0,1$ . Определим  $\omega^{**}_{min}$

$$\omega^{**} = 1/2,2 = |0,456| \text{ или } \omega^{**} = -0,456$$

ОТВЕТ Прямая Попова может проходить через частоты в пределах

$$\omega_{max} > \omega > \omega_{min}; \quad -0,068 > \omega > -\infty$$

Примечание - Определяем приближенные значения показателей качества регулирования при разных значениях  $k_{max}$  корневым методом

$$\text{При } \omega^* = |0,068|; \quad k_{max} = 14,7, \quad K_0^* = 7,41$$

характеристическое уравнение  $p^3 + 4p^2 + 2p + (0,5 \cdot 14,7 - 1) = 0$

корни  $\lambda_1 = -3,97$ ;  $\lambda_{2,3} = -0,014 \pm j1,37$ ;  $\xi = 0,01$ ;

$t_p = 3/0,014 = 214,3$  с;  $\sigma\% = e^{-\pi/97,8} \cdot 100\% = 96\%$

При  $\omega^{**} = |-\infty|$ ;  $k_{min} = 0$  тогда  $K_0^* = 0,1$ .

характеристическое уравнение  $p^3 + 4p^2 + 2p + 0,1 = 0$

корни  $\lambda_1 = -3,419$ ;  $\lambda_2 = -0,554$ ;  $\lambda_3 = -0,026$ ;

$t_p = 3/0,026 = 115$  с;  $\sigma\% = 0$

**Пример 4.10** Определить оптимальное значение  $k_{.onn}$  (и соответственно  $\omega^{***}_{.onn}$ ) по критерию апериодического регулирования разработанного В. Н. Евсюковым [17], учитывая, что  $K_0 \geq 0,1$  при  $K_{oc} = 2,2$ .

## РЕШЕНИЕ

1 Согласно критерию апериодического регулирования

$$\frac{K_{.onn}}{4 \cdot 2,1} < 0,3; \quad 0,1 \leq K_{.onn} < 2,5, \quad \text{Принимаем } K_{.onn}^* = 2,1$$

2 Определим  $K_{oc.onn}$  по критерию апериодического регулирования ( $K_{.onn} = 1$ ).

$(K_1 K_2 k_{.onn} + 0,1) = K_{.onn}$ ,  $(0,5 \cdot k_{.onn} + 0,1) = 2,1$ ,  $k_{.onn} = 4$ ,

$\omega^{***} = 1/4 = | -0,25 |$

Определим приближённое значение показателей качества регулирования

при  $\omega^{***} = |0,25|$ ;  $k_{.onn} = 4$ , тогда  $K_0^* = 2,1$

Характеристическое уравнение  $p^3 + 4p^2 + 2p + 2,1 = 0$

корни  $\lambda_1 = -3,51$ ;  $\lambda_{2,3} = -0,244 \pm j0,474$ ;  $\xi = 0,51$ ;

$t_p = 3/0,244 \cdot 0,51 = 24,1$  с;  $\sigma\% = e^{-\pi/1,61} \cdot 100\% = 19,6\%$

## ВЫВОДЫ

1 Согласно построенному модифицированному годографу Найквиста (рис. 4.10) прямая Попова проходит через точку, где максимальное значение  $\omega^* = -0,068$ . При этом  $k_{max} = 14,7$ . Согласно корневому методу анализа система устойчива, но  $t_p = 214,3$  с и  $\sigma\% = 96\%$ . Фактически система имеет почти незатухающие колебания.

2 По условию устойчивости минимальное значение  $\omega^{**} = -\infty$ . Согласно корневому методу анализа системы тоже устойчива  $t_p = 115$  с  $\sigma\% = 0$ .

3 По критерию апериодического регулирования В. Евсюкова  $\omega^{***} = -0,25$  Согласно корневому методу анализа  $t_p < 25$  с и  $\sigma\% < 20\%$ .

#### 4.5 Определение границ абсолютной устойчивости через параметры линейной части системы

*В нелинейной системе может существовать такая область параметров линейной части, которая обеспечивает абсолютную устойчивость в независимости от конкретной формы нелинейной характеристики.*

Рассмотрим случай, когда нечётно-симметричная нелинейная характеристика расположена во всем первом и третьем квадранте. Характеристическое уравнение системы при гармонической линеаризации нелинейной зависимости имеет вид

$$Q(p) + q(A)R(p) = 0$$

Границы абсолютной устойчивости будут определяться как такая область параметров линейной части системы, при которой переходной процесс затухает при любых начальных условиях и периодических решений в характеристическом уравнении нет. Напомним, что периодические решения возникают, если среди корней характеристического уравнения есть два сопряжённых мнимых корня. Это можно определить по критерию Гурвица. При их наличии последний определитель Гурвица  $H_{n-1} = 0$ , а остальные определители положительные при любых возможных значениях  $q(A)$ . Таким образом, условие абсолютной устойчивости

$$H_{n-1}(q) > 0,$$

где  $q$  - коэффициент гармонической линеаризации нелинейного элемента.

Граница этой области устойчивости определяется как такая совокупность параметров линейной части системы, при которой в нуль обращается значение определителя  $H_{n-1}(q)$ , а его наименьшее значение имеет характер минимума функции. В результате получаем два уравнения

$$H_{n-1}(q) = 0; \quad \partial H_{n-1}(q) / \partial q = 0$$

Исключив из этих двух уравнений величину  $q(A)$ , можно найти границу области абсолютной устойчивости, которая будет зависеть только от параметров линейной части системы. Рассмотрим такой метод определения абсолютной устойчивости на конкретном примере.

**Пример 4.11** – Дана структурная схема системы (рисунок 4.11). Определить взаимосвязь параметров  $K_1, K_{oc}$  для обеспечения абсолютной устойчивости системы с нелинейным элементом  $F(x)$ , расположенном во всем первом и третьем квадранте или  $q(A) = qx$ .

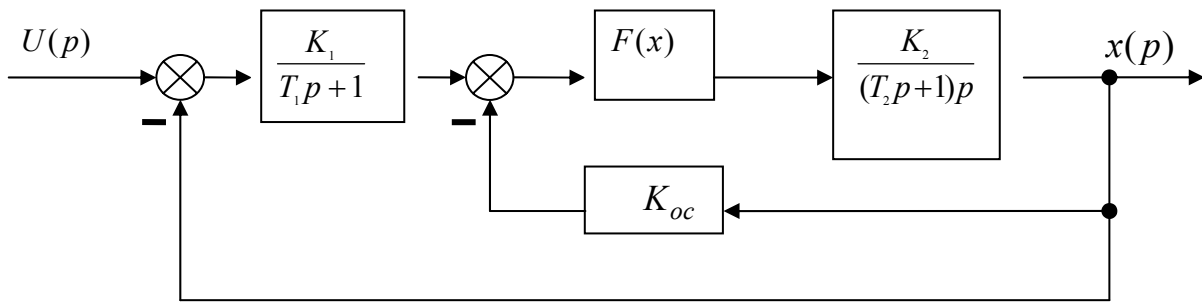


Рисунок 4.11– Структурная схема к примеру 4.11

## РЕШЕНИЕ

1 Определим передаточную функцию части системы с коэффициентом обратной связи  $K_{oc}$ .

$$W_{oc}(p) = \frac{\frac{F(x) \cdot K_2}{(T_2 p + 1)p}}{1 + \frac{F(x) \cdot K_2 \cdot K_{oc}}{(T_2 p + 1)p}} = \frac{F(x) \cdot K_2}{(T_2 p + 1)p + F(x)K_2 K_{oc}}$$

2 Определим передаточную функцию всей системы

$$W_{общ}(p) = \frac{\frac{K_1}{T_1 p + 1} \cdot W_{oc}(p)}{1 + \frac{K_1}{T_1 p + 1} \cdot W_{oc}(p)} = \frac{\frac{K_1}{(T_1 p + 1)} \cdot \frac{F(x) \cdot K_2}{(T_2 p + 1)p + F(x) \cdot K_2 \cdot K_{oc}}}{1 + \frac{K_1}{(T_1 p + 1)} \cdot \frac{F(x) \cdot K_2}{(T_1 p + 1)p + F(x) \cdot K_2 \cdot K_{oc}}} =$$

$$= \frac{K_1 \cdot F(x) \cdot K_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + p + F(x)K_2 K_{oc}) + K_1 F(x)K_2}$$

3 Характеристическое уравнение системы при  $q(A) = qx$

$$L(p) = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + (1 + qK_2 K_{oc} T_1)p + qK_2(K_{oc} + K_1) = 0$$

4 Граница области абсолютной устойчивости по критерию Гурвица для характеристического уравнения третьего порядка. ( $H_{n-1}(q) = 0$ )

$$H_{n-1}(q) = (T_1 + T_2)(1 + qK_2 K_{oc} T_1) - T_1 T_2 q K_2 (K_1 + K_{oc}) =$$

$$= T_1 + T_2 + T_1 K_2 (T_1 K_{oc} - T_2 K_1) q = 0$$

5 Наименьшее значение предпоследнего определителя Гурвица

$$\frac{\partial H_{n-1}(q)}{\partial q} = T_1 K_2 (T_1 K_{oc} - T_2 K_1) = 0$$



6 Параметр, характеризующий нелинейную зависимость  $q(A) = qx$ , не вошёл в последнее уравнение. Граница абсолютной устойчивости определяем по параметрам линейной части системы (по выражению в скобках).

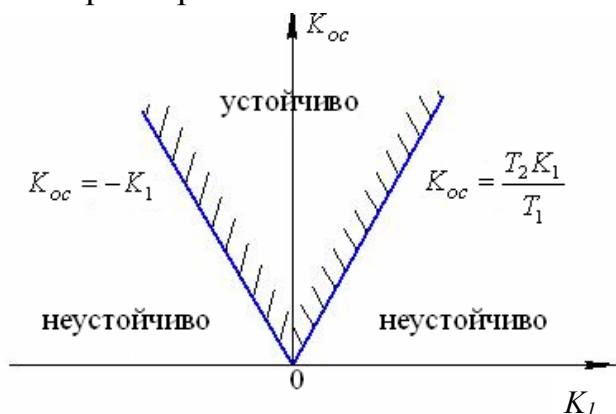


Рисунок 4.12 Область абсолютной устойчивости через параметры системы к примеру 4.11

$$(T_1 K_{oc} - T_2 K_1) = 0; \quad K_{oc} = \frac{T_2 K_1}{T_1}$$

Дополнительно необходимо проверить положительность остальных определителей Гурвица. Для системы третьего порядка положительность остальных определителей ( $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ ) сводится к положительности коэффициентов характеристического уравнения.

$$T_1 + T_2 > 0; \quad K_{oc} > -K_1$$

ОТВЕТ: Область абсолютной устойчивости через параметры линейной части системы (рисунок 4.12)

$$K_{oc} > \frac{T_2 K_1}{T_1}; \quad K_{oc} > -K_1$$

#### 4.6 Определение границ дополнительной области устойчивости

Рассмотрим нелинейные системы, в которых факт устойчивости может быть установлен, если удовлетворяется критерий устойчивости линейной части систем, а возможные значения  $r_0$  при нечетно-симметричной нелинейной характеристике  $y = f(x)$  могут содержаться в интервале угла ограниченного прямыми  $r_1x$  и  $r_2x$  (смотри рисунок 4.13).

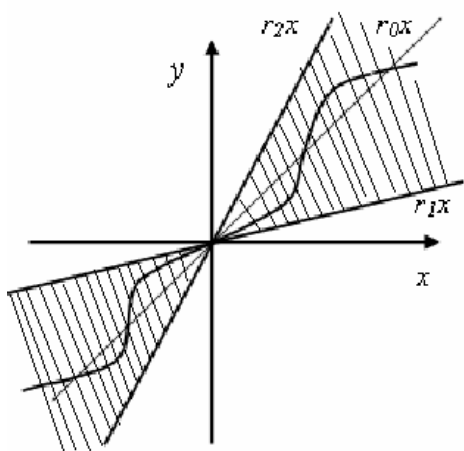


Рисунок 4.13 – Расположение нелинейного элемента в интервале  $r_1x - r_2x$

Дополнительная область устойчивости определяется в зависимости от максимального и минимального значения коэффициента гармонической линеаризации для каждого вида нелинейной характеристики. Так интервал значений  $0 \leq q(A) \leq \infty$  в действительности имеет место только для идеального реле. Для других видов нелинейной характеристики значение  $q$  заключено в пределах

$$q_{нм} \leq q(A) \leq q_{нб},$$

где  $q_{нм}$  – наименьшее значение  $q$ ;  
 $q_{нб}$  – наибольшее значение  $q$ .

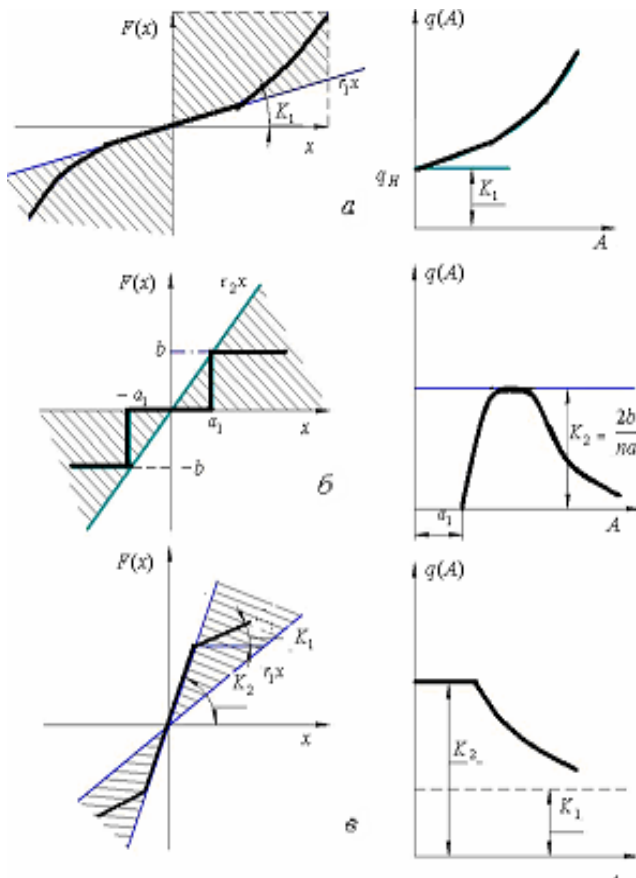


Рисунок 4.14 – Графики нелинейных характеристик внутри сектора  $r_1x$  и  $r_2x$  и соответствующие им графики изменения коэффициентов гармонической линейаризации

Рассмотрим наиболее характерные графики изменения коэффициентов гармонической линейаризации в зависимости от расположения нелинейной характеристики  $F(x)$  внутри сектора  $r_1x$  и  $r_2x$  (рисунок 4.14)

На рисунке 4.14 а показана нелинейная характеристика с возрастающим коэффициентом усиления, расположенная в секторе

$$r_1x \leq F(x) \leq \infty$$

Соответствующий коэффициент гармонической линейаризации изменяется в пределах

$$q_{нм} = K_1^* \leq q(A) \leq \infty$$

На рисунке 4.14 б показана характеристика реле с зоной нечувствительности расположенная в секторе

$$0 \leq F(x) \leq r_2x$$

Соответствующий коэффициент гармонической линейаризации изменяется в пределах

$$0 \leq q(A) \leq q_{нб} = K_2^*$$

На рисунке 4.14 в показана нелинейная характеристика усилителя с зоной насыщения, в которой коэффициент усиления уменьшается. Эта характеристика аппроксимирована кусочно-линейной зависимостью с коэффициентами усиления  $K_1$  и  $K_2$ , и расположена в секторе

$$r_1x \leq F(x) \leq r_2x$$

Соответствующий коэффициент гармонической линейаризации изменяется в пределах

$$q_{нм} = K_1^* \leq q(A) \leq q_{нб}^* = K_2^*$$

Таким образом, каждый вид нелинейной характеристики имеет свой сектор расположения и свои предельные значения коэффициента линейаризации, что позволяет более точно определить условия устойчивости нелинейной системы. Е. П. Попов рекомендует этот расчет провести в следующем порядке [4].

*Первый шаг.* Границу области абсолютной устойчивости определять при  $0 \leq q(A) \leq \infty$  путем исключения гармонического коэффициента  $q(A)$  из уравнений

$$H_{n-1}(q) = 0; \quad \partial H_{n-1}(q) / \partial H = 0$$

Это решение дает *достаточные условия устойчивости при любой форме однозначной нелинейной характеристики* и при любом интервале изменения коэффициента гармонической линеаризации.

*Второй шаг.* Получение дополнительной области устойчивости за счёт ограничения интервала фактически возможного изменения коэффициента гармонической линеаризации. Для этого в уравнение  $H_{n-1}(q) = 0$  надо подставить значения  $q_{nm}$  (наименьшее) и  $q_{нб}$  (наибольшее). Эти значения выражены через параметры коэффициентов гармонической линеаризации (рисунок 4.14). Такое решение дает *необходимые и достаточные условия устойчивости при заданной форме однозначной нелинейной характеристики*.

Таким образом, по первому шагу определяется устойчивость нелинейной системы с некоторым запасом, когда не учитывается действительная граница нелинейности в секторе  $r_1 x \leq F(x) \leq r_2 x$ .

По второму шагу проводится учет границ нелинейности. И чем более узкий сектор, где разместилась вся нелинейная характеристика, тем больше будет область дополнительной границы абсолютной устойчивости. Кроме этого, по условию  $H_{n-1}(q) = 0$  при различных варьируемых параметрах линейной части можно определить область периодических решений (режим автоколебаний). Рассмотрим этот метод на конкретном примере.

**Пример 4.12** – Определить дополнительную область устойчивости в зависимости от  $K_1$  с учётом различного расположения нелинейной характеристики внутри сектора  $r_1 x$  и  $r_2 x$  по данным примера 4.11.

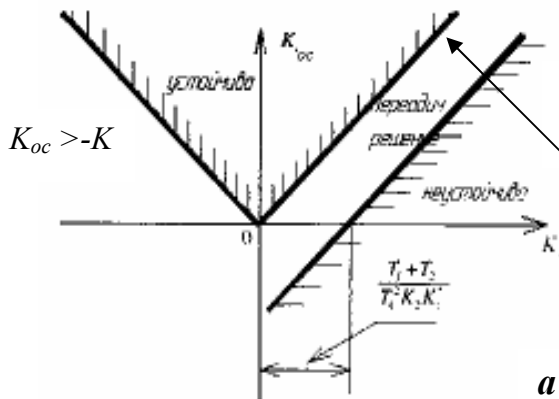
## РЕШЕНИЕ

1 Определим значение  $K_{oc}$  по уравнению границы области абсолютной устойчивости по критерию Гурвица  $H_{n-1}(q) = 0$ .

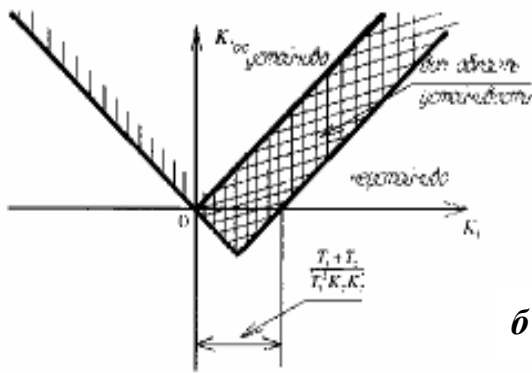
$$\begin{aligned} H_{n-1}(q) &= T_1 + T_2 + T_1 K_2 (T_1 K_{oc} - T_2 K_1) q = 0 \\ T_1^2 K_2 K_{oc} q &= -(T_1 + T_2) + T_1 T_2 K_1 K_2 q \\ K_{oc} &= \frac{T_1 T_2 K_1 K_2 q}{T_1^2 K_2 q} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 K_2 q} = \frac{T_2 K_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 K_2 q} \end{aligned}$$

В общем случае значение  $K_{oc}$  в зависимости от ограничения интервала изменения  $q(A)$  от  $q_{нб}$  до  $q_{nm}$  определяется соотношением

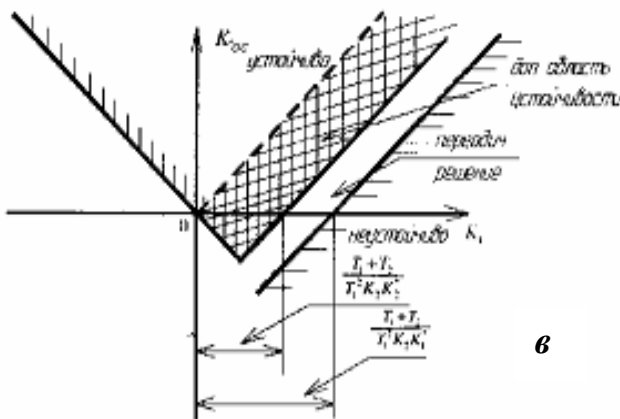
$$\frac{T_2 K_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 K_2 q_{нм}} > K_{ос} > \frac{T_2 K_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 K_2 q_{нб}}$$



**a**



**б**



**в**

Первый шаг по определению устойчивости выполнен.

2 Для нелинейной характеристики с возрастающим коэффициентом усиления (рисунок 4.14 а) имеется ограничение по  $q$  наименьшему ( $q_{нм} = K_1^*$ ), а  $q_{нб} = \infty$ . Тогда значение  $K_{ос}$  определяется

$$\frac{T_2 K_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 K_2 \cdot K_1^*} > K_{ос} > \frac{T_2 K_1}{T_1};$$

Устойчивость системы при непериодических решениях остается в тех же пределах

$$K_{ос} > \frac{T_2 K_1}{T_1}; \quad K_{ос} > -K_1$$

Но при  $q_{нм} = K_1^*$  возникают периодические решения в пределах

$$\frac{T_2 K_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 K_2 \cdot K_1^*} > K_{ос}$$

Это показано на рисунке 4.15 а

3 Для характеристики реле с зоной нечувствительности (рисунок 4.14 б) имеется ограничение по  $q$  наибольшему ( $q_{нб} = K_2^*$ ), а  $q_{нм} = 0$ .

Тогда значение  $K_{ос}$  определяется

$$K_{ос} > \frac{T_2 K_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 K_2 \cdot K_2^*}$$

Рисунок 4.15 – Определение дополнительной области устойчивости к примеру 4.12

Ограничение нелинейной характеристики по  $q_{нб}$  увеличивает область непериодического решения. Области периодического решения нет. Это показано на рисунке 4.15 б.

4 Для нелинейной характеристики расположенной в секторе  $r_1x \leq F(x) \leq r_2x$  (рисунок 4.14 в) имеются ограничения по наибольшему  $q$  и наименьшему  $q$  ( $q_{нб} = K_2^*$ ,  $q_{нм} = K_1^*$ ). Тогда в рассматриваемой нелинейной системе одновременно увеличивается область устойчивости и будет область периодического решения. Это показано на рисунке 4.15 в.

Примечание - При других схемах включения нелинейного звена дополнительная область устойчивого непериодического решения может зависеть от  $q_{нм}$ , а возникновения области периодического решения зависит от  $q_{нб}$ . Возможны и другие более сложные соотношения между  $q_{нм}$  и  $q_{нб}$ , другое расширение областей устойчивости.

### Вопросы для самоконтроля к подразделу 4.5 - 4.6

- 1 Как определяется условие абсолютной устойчивости через параметры линейной системы?
- 2 В зависимости от каких параметров нелинейные характеристики определяют дополнительные области устойчивости?
- 3 Как определяются достаточные условия абсолютной устойчивости через параметры системы?
- 4 Как определяются необходимые и достаточные условия дополнительной области устойчивости?
- 5 Всегда ли учет  $q_{нб}$  или  $q_{нм}$  увеличивает область устойчивости?
- 6 Может ли учет  $q_{нб}$  или  $q_{нм}$  обеспечить в системе автоколебательный режим работы?

### 4.7 Область рабочего автоколебательного режима

В подразделе 4.6 были определены границы области абсолютной устойчивости для любой нечётно-симметричной нелинейной характеристики расположенной в интервале  $(0 \geq r_0 \geq \infty)$ . При этом в подразделе 4.6 выделялась область существования периодических решений, при которых в системе возникают колебания.

Можно ли считать нелинейную систему *практически работоспособной в автоколебательном режиме работы*? Да, такое может быть. На практике встречаются замкнутые нелинейные системы, работающие в автоколебательном режиме. Например, вибрационные регуляторы напряжения, которые используются для стабилизации напряжения в генераторе автомашины при значительном изменении его скорости вращения и нагрузки; гидростабилизаторы с релейным управлением; вибрационные измерители ускорения и т. п. [4,5]

***Область рабочего автоколебательного режима работы системы – это такая область, при которой амплитуда автоколебаний не превосходит допустимого значения.***

Необходимо отметить, что в линейных системах устойчивого автоколебательного режима работы нет. Если предпоследний определитель Гурвица  $H_{n-1} < 0$ , то линейная система однозначно неустойчивая. Нелинейная система при  $H_{n-1} < 0$  в определённых условиях самостоятельно может перейти к устойчивому автоколебательному режиму работы ( $H_{n-1} = 0$ ).

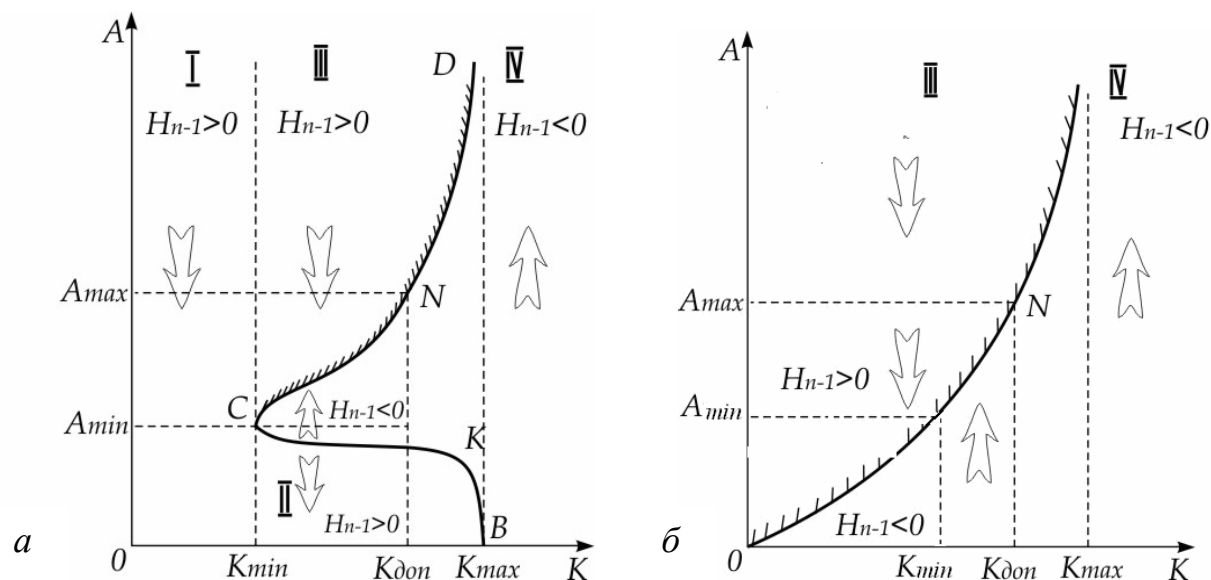


Рисунок 4.16 – График зависимости устойчивости системы от коэффициента  $K$  и начальной амплитуды  $A$

В общем случае в нелинейной системе в зависимости от изменения коэффициента усиления  $K$  и начальных значений амплитуды колебания  $A$  (рисунок 4.16 а) может быть три области устойчивости:

-область устойчивости “в общем” (I) при  $K < K_{min}$  и при любых начальных значениях  $A$ ;

-область устойчивости “в малом” (II) при  $K_{min} < K < K_{max}$  и при  $A < A_{min}(K)$  (ниже кривой СКВ);

-область устойчивости “в большем” (III) при  $K_{min} < K < K_{max}$  и при  $A > A_{min}(K)$  (выше СКВ);

-область неустойчивого движения (IV) при  $K > K_{max}$  и при любых начальных условиях  $A$ .

Линия  $CND$  соответствует  $K_i$  и  $A_i$  при которых в системе возникают устойчивые колебания. При случайном отклонении от этой линии в сторону увеличения  $A$  или в сторону уменьшения  $A$  попадаем в зону притяжения к режиму устойчивости автоколебаний (к линии  $CND$ ). Это показано стрелками.

На линии СКВ тоже могут возникнуть автоколебания, но они неустойчивые, так как относительно линии СКВ нет зоны притяжения, а есть зона отталкивания от СКВ. В зоне II система устойчива “в малом” и при  $t \rightarrow \infty$  амплитуда  $A \rightarrow 0$  (устойчивое равновесие).

Если согласно технологических требований система управления должна обеспечить автоколебательный режим с амплитудой  $A_{min} < A_{раб} < A_{max}$  (на участке CN), то для этого должны быть ограничения по коэффициенту усиления  $K_{min} < K < K_{don}$  и так же ограничения по начальному значению амплитуды  $A > A_{min}$  (выше кривой СКВ). Иначе возникает опасность, что амплитуда пересечет линию СК и система попадает в область устойчивости “в малом” (II), где амплитуда уменьшится до  $A = 0$ . Автоколебаний нет. Возникает парадокс: система устойчивая “в малом” (область II), а так же устойчива “в общем” (область I), но не обеспечивает автоколебательный режим работы исполнительного механизма и в данном случае не пригодна для такого управления.

Если в нелинейной системе, необходимо обеспечить только автоколебательный режим, тогда желательно в системе не иметь область устойчивости “в общем” и устойчивости “в малом”, а иметь область устойчивости “в большом”, при котором устойчивое состояние может быть только в автоколебательном режиме (рисунок 4.16 б). Для такой системы достаточно ограничить коэффициент усиления значением  $K_{min} < K < K_{don}$  и это позволит более просто и надежно обеспечить устойчивый автоколебательный режим. Очевидно, что в обоих случаях (рисунок 4.16 а и б) нельзя увеличивать коэффициент усиления более чем  $K_{max}$ , иначе можно попасть в область неустойчивого движения, где при любых начальных условиях по  $A$  амплитуда возрастает  $A \rightarrow \infty$

Расположение областей рабочего устойчивого автоколебательного режима зависит:

- от параметров заданного автоколебательного режима работы;
- от вида нелинейной характеристики звена;
- от способа его подключения;
- от параметров линейной части системы.

В *линейных системах* область устойчивости в зависимости от её параметров определяется четко и однозначно.

В *нелинейных системах* также можно определить область устойчивости в зависимости от параметров линейной части системы и вида нелинейности. Но полученная область устойчивости – это область притяжения к состоянию устойчивого равновесия или к установившемуся автоколебательному режиму. Если нелинейная система попадает на такую область притяжения, то дальше она уже «самостоятельно» переходит на свой «выбранный» режим работы. Причём, область притяжения может соответствовать как устойчивой линейной части системы, а так же неустойчивой линейной части системы. При этом установившейся режим работы системы может быть одинаков.

Вторая особенность нелинейной системы в том, что границы областей притяжения могут быть безопасные, когда система возвращается в устойчивый режим, и опасные, когда система не возвращается в устойчивый режим, когда амплитуда колебательного режима работы неограниченно возрастает.

## 5 Качество регулирования нелинейных систем

### 5.1 Общие положения

Анализ и синтез качества процесса регулирования в нелинейной системе является такой же важной задачей, как и в линейной. Основными показателями качества являются: время регулирования  $t_p$ , перерегулирования  $\sigma$ , колебательность  $\mu$ , а так же амплитуда  $A$  и частота  $\omega$  автоколебаний. Определить эти показатели качества наиболее точными методами можно *по кривой переходного процесса*. Но это достаточно трудоемкий расчет с использованием вычислительной техники. *Метод припасовывания* позволяет провести построение переходного процесса по отдельным линеаризованным участкам нелинейной зависимости и затем проводить их “сшивание”. При этом конечное значение предыдущего решения являются начальными условиями для следующего решения. Для системы высокого порядка это трудоемкий процесс расчета. Проведение анализа и синтеза системы *по фазовому портрету* является достаточно простым и наглядным методом. Но получить фазовый портрет можно только для системы второго порядка. Поэтому этот метод позволяет по упрощенному дифференциальному управлению дать приближенную оценку динамическим свойствам нелинейной системы. Для системы высокого порядка он мало эффективен.

Для анализа качества переходного процесса с любым видом нелинейности наиболее эффективным методом является *метод гармонической линеаризации*. По этому методу принимается, что на вход нелинейного звена поступает гармонический синусоидальный сигнал. На выходе – тоже гармонические сигналы различной частоты. Эти сигналы разлагаются в ряд Фурье и расчёт ведётся по первой гармонике. При этом нелинейный элемент заменяется таким линейным элементом, в котором два первых члена ряда Фурье совпадают.

### 5.2 Анализ симметричных автоколебаний

Симметричные собственные автоколебания относительно оси времени могут быть исследованы различными методами.

*Алгебраический способ* определения  $A_0$  и  $\omega_0$  базируется на том, что при наличии пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении предпоследний определитель Гурвица равен нулю [4].

$$H_{n-1} = 0$$

Все остальные определители Гурвица положительны. Второе уравнение получается из равенства нулю вещественной или мнимой части характеристического уравнения.



**Частотный способ** определения  $A_0$  и  $\omega_0$  базируется на использовании характеристического уравнения системы, которая после гармонической линеаризации нелинейного элемента и подстановки  $p = j\omega$  принимает вид

$$A(j\omega) + B(j\omega)[q(A, \omega) + jq'(A, \omega)] = 0$$

После выделения вещественной и мнимой части и приравнивания их к нулю получаем два уравнения для определения двух искомым параметров  $A_0$  и  $\omega_0$ . В дальнейшем рассмотрим анализ симметричных автоколебаний частотным способом при гармонической линеаризации нелинейной зависимости.

### 5.2.1 Анализ симметричных автоколебаний одноконтурной САУ по диаграмме качества

Одноконтурный САУ имеют одну главную обратную связь и нет местных связей. Симметричные колебания относительно оси времени в таких нелинейных системах могут быть описаны методом гармонической линеаризации приближенно ( по первой гармонике) в виде затухающих или расходящихся синусоид с медленно изменяющимся во времени показателем затухания и частотой.

Пусть нелинейная система описывается уравнением

$$D(p) = A(p) + F(A) \cdot B(p) = 0.$$

Решение этого уравнения при возникновении устойчивых автоколебаний

$$x(t) = A_0 \sin \omega_0 t,$$

где  $A_0$  – амплитуда автоколебаний;

$\omega_0$  – частота автоколебаний .

Для возникновения колебаний в системе необходимо в характеристическом уравнении иметь пару чисто мнимых корней  $p = \pm j\omega$ . Это значение  $p = j\omega$  подставим в уравнение системы

$$A(j\omega) + F(A)B(j\omega) = 0$$

Выделим вещественную и мнимую части системы

$$U(A, \omega) + jV(A, \omega) = 0.$$

Такое равенство возможно, если вещественная и мнимая части равны нулю

$$U(A, \omega) = 0;$$

$$V(A, \omega) = 0.$$

Согласно критерию устойчивости Михайлова в системе может возникнуть автоколебательный режим, если годограф Михайлова при  $A_0$  и  $\omega_0$  проходит через начало координат (рисунок 5.1).

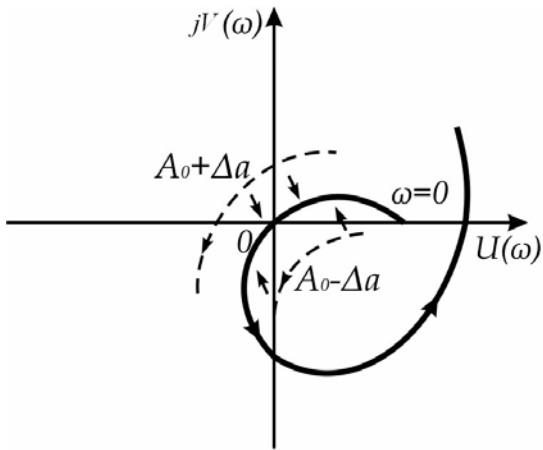


Рисунок 5.1 – Годограф Михайлова при наличии чисто мнимых корней

Для определения устойчивости этого автоколебательного режима дадим малое положительное приращение амплитуде  $A_0 + \Delta\alpha$ . Тогда коэффициенты уравнения изменятся и годограф Михайлова пройдет через II квадрант и последовательно пересечет все квадранты. Система при  $A_0 + \Delta\alpha$  устойчива и при  $t \rightarrow \infty \Delta A \rightarrow 0$ .

Дадим другое, малое отрицательное приращение амплитуде  $A = A_0 - \Delta\alpha$ . Тогда годограф Михайлова после I квадранта попадает в IV квадрант. Система неустойчива и при  $t \rightarrow \infty A$  будет увеличиваться и  $A \rightarrow A_0$ . Кроме этого в

устойчивой нелинейной системе под действием нелинейного звена с увеличением частоты амплитуда может уменьшаться и переходить к  $A_0$ . В неустойчивой нелинейной системе с увеличением частоты амплитуда может увеличиваться и тоже переходить к  $A_0$ . Таким образом при малых отклонениях  $\pm \Delta\alpha$  и  $\pm \Delta\omega$  в нелинейной системе будет происходить притяжение к этому автоколебательному режиму. Область изменения  $\pm \Delta\alpha$  и  $\pm \Delta\omega$ , при которых система возвращается к устойчивому автоколебательному режиму называется *областью притяжения* [3,4].

*Обратите внимание!* В линейных системах таких областей притяжения нет. Там вопрос устойчивости решается однозначно. Если годограф Михайлова последовательно проходит через все квадранты, то система устойчива и автоколебаний нет. Если годограф Михайлова не проходит последовательно через все квадранты, то система неустойчива.

Пусть нелинейная система попала в зону притяжения и возникает колебательный переходной процесс. Значит в системе есть пара доминирующих комплексных корней характеристического уравнения  $p = \alpha \pm j\omega$ . Подставим эту пару корней в уравнение замкнутой системе

$$D(\alpha + j\omega) = A(\alpha + j\omega) + B(\alpha + j\omega)[q(A) + jq'(A)] = 0$$

При высокой степени характеристического уравнения это выражение целесообразно преобразовать путем разложения в ряд по степеням  $j\omega$ .

$$D(\alpha + j\omega) = D(\alpha) + \left(\frac{dD}{dp}\right)_\alpha (j\omega) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2D}{dp^2}\right)_\alpha (j\omega)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3D}{dp^3}\right)_\alpha (j\omega)^3 + \dots,$$

где  $\alpha$  - означает, что в полученные производные надо подставить вещественную часть корня вместо  $p$ .

В полученных уравнениях имеется три неизвестных  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $A$  ( $A$ - амплитуда входного воздействия, которая входит в  $q(A)$  и  $q'(A)$ ). Выделим вещественную и мнимую часть характеристического уравнения. В результате получим два уравнения

$$U(\alpha, \omega, A) = 0;$$

$$V(\alpha, \omega, A) = 0.$$

По этим уравнениям можно построить *диаграмму качества нелинейной системы*. Эта диаграмма строится относительно какого либо коэффициента характеристического уравнения, например, коэффициента усиления  $k$ . Для этого во втором уравнении  $V(\alpha, \omega, A, k) = 0$  выразим частоту  $\omega$  через  $A$ ,  $\alpha$ ,  $k$

$$\omega = f_1(A, \alpha, k)$$

Значение частоты подставим в первое уравнение  $U(\alpha, \omega, A, k) = 0$  и определим величину  $k$

$$k = f_2(A, \alpha)$$

Придавая величине  $\alpha$  различные постоянные значения, получим семейство линий, в которых  $\alpha = const$ . Аналогично в первом уравнении  $U(\alpha, \omega, A, k) = 0$  выразим показатель колебательности  $\alpha$

$$\alpha = f_3(A, \omega, k)$$

Значение показателя колебательности подставим во второе уравнение  $U(\alpha, \omega, A, k) = 0$  и определим  $k$

$$k = f_4(A, \omega)$$

Придавая величине  $\omega$  различные постоянные значения, получим семейство линий, в которых  $\omega = const$ . Полученные зависимости  $k = f_2(A, \alpha)$  и  $k = f_4(A, \omega)$  называются *диаграммами качества* [4].

Примечание – Для однозначной нелинейной характеристики зависимости  $k = f_2(A, \alpha)$  и  $k = f_4(A, \omega)$  могут совпадать.

Построение диаграммы качества затухания в нелинейной системе покажем на конкретном примере.

**Пример 5.1** - Дана передаточная функция гармонически линеаризованной разомкнутой следящей системы с нелинейным звеном в виде реле с зоной нечувствительности

$$W(p, A) = \frac{k \cdot q(A)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad q(A) = \frac{4b}{\pi \cdot A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}, \quad q'(A) = 0,$$

где  $b$  - выходной сигнал реле;

$a$  - зона нечувствительности;

$A$  - амплитуда входного сигнала.

Параметры системы  $T_1 = 0,05$ ,  $T_2 = 0,2$

Параметры реле  $a = 1$ ,  $b = 100$

Задание. Построить диаграмму качества переходного процесса и определить амплитуду и частоту установившегося режима, если начальное значение амплитуды  $A = 14$  при  $k = 1,3$  и  $\alpha = -1$ . А так же при начальном значении амплитуды  $A = 11$  при  $k = 5,8$  и  $\alpha = 2$ .

## РЕШЕНИЕ

1 Характеристический полином замкнутой нелинейной системы

$$D(p, A) = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + kq(A)$$

2 Разложим этот полином в ряд по степеням  $j\omega$

$$D(\alpha + j\omega) = D(\alpha) + \left( \frac{dD}{dp} \right)_{\alpha} (j\omega) + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 D}{dp^2} \right)_{\alpha} (j\omega)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 D}{dp^3} \right)_{\alpha} (j\omega)^3 + \dots$$

где  $D(\alpha) = T_1 T_2 \alpha^3 + (T_1 + T_2) \alpha^2 + \alpha + kq(A)$

$$\frac{dD}{dp} = 3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2) \alpha + 1$$

$$\frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2 D}{dp^2} = 3T_1 T_2 \alpha + (T_1 + T_2)$$

$$\frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3 D}{dp^3} = T_1 T_2$$

*Обратите внимание!* Первый и третий член этого ряда являются вещественной частью этого разложения по  $j\omega$ . Второй и четвертый член являются мнимой частью разложения по  $j\omega$ , так как сохраняется значение  $j$ .

3 Выделим вещественную часть  $U(\alpha, \omega, A, k)$  и мнимую часть  $V(\alpha, \omega)$  в полученных производных в ряд разложения. При этом вместо  $p$  подставим  $\alpha$ .

$$U(\alpha, A, \omega) = T_1 T_2 \alpha^3 + (T_1 + T_2) \alpha^2 + \alpha + kq(A) - [3T_1 T_2 \alpha + (T_1 + T_2)] \omega^2 = 0$$

$$V(\alpha, \omega) = [3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2) \alpha + 1 - T_1 T_2 \omega^2] \omega = 0$$

4, Определим значение  $\omega$  из уравнения мнимой части  $V(\alpha, \omega)$ . Точнее, из уравнения в квадратных скобках, учитывая, что  $\omega \neq 0$

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2) \alpha + 1]$$

5 Полученное значение  $\omega^2$  подставляем в уравнения вещественной части  $U(\alpha, \omega, A, k)$

$$U(\alpha, A, \omega, k) = T_1 T_2 \alpha^3 + (T_1 + T_2) \alpha^2 + \alpha + kq(A) - \\ - [3T_1 T_2 \alpha + 2(T_1 + T_2)] \cdot l / T_1 T_2 \cdot [3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2) \alpha + 1]$$

Из этого уравнения определяем значение  $k$

$$k = \frac{l}{q(A)} \left\{ \frac{l}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2) \alpha + 1] \cdot [3T_1 T_2 \alpha + (T_1 + T_2)] - T_1 T_2 \alpha^3 - (T_1 + T_2) \alpha^2 - \alpha \right\}$$

Подставим численное значение системы  $T_1 = 0,05$ ;  $T_2 = 0,2$  и реле  $a=1$ ;  $b = 100$ .

$$k = \frac{\pi A^2}{400 \sqrt{A^2 - 1}} \left( 0,021 \alpha^3 + 2,0 \alpha^2 + 15,25 \alpha + 25 \right) = \frac{\pi A^2}{400 \sqrt{A^2 - 1}} \cdot (C_i)$$

Выражение в скобках обозначим  $C_i$ . Тогда при  $\alpha = 2$   $C_1 = 63,66$ ; при  $\alpha = 0$   $C_2 = 25$ ; при  $\alpha = -1$   $C_3 = 12$ . Результат вычисления коэффициента  $k$  при разных значениях  $\alpha$  и  $A$  показаны в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Определение коэффициента  $k = f(A, \alpha)$

A	2	4	6	8	12	14	16
$\frac{\pi A^2}{400 \sqrt{A^2 - 1}}$	0,018	0,032	0,048	0,063	0,094	0,110	0,126
$k = f(A, \alpha = 2)$ $C_1 = 63,66$	1,145	2,037	3,055	4,010	5,984	7,004	8,021
$k = f(A, \alpha = 0)$ $C_2 = 25$	0,45	0,8	1,2	1,57	2,35	2,75	3,15
$k = f(A, \alpha = -1)$ $C_3 = 12$	0,22	0,38	0,58	0,76	1,13	1,32	1,52

6 Определим частоту колебаний  $\omega$  при разных значениях  $\alpha$  по формуле

$$\omega^2 = \frac{l}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2) \alpha + 1]$$

$$\text{при } \alpha = 2 \quad \omega^2 = \frac{l}{0,01} [3 \cdot 0,01 \cdot 2^2 + 2(0,05 + 0,2) \cdot 2 + 1] = 212 \quad \omega = 14,5 \text{ c}^{-1}$$

$$\text{при } \alpha = 0 \quad \omega^2 = \frac{l}{0,01} [0 + 0 + 1] = 100 \quad \omega = 10 \text{ c}^{-1}$$

$$\text{при } \alpha = -1 \quad \omega^2 = \frac{l}{0,01} [3 \cdot 0,01 \cdot 1^2 - 2 \cdot (0,25) \cdot 1 + 1] = 53 \quad \omega = 7,3 \text{ c}^{-1}$$

Примечание – Полученная частота колебаний не зависит от коэффициента усиления  $k$ , а зависит только от значения  $\alpha$ .

По полученным результатам расчета построена диаграмма качества переходного процесса (рисунок 5.2).

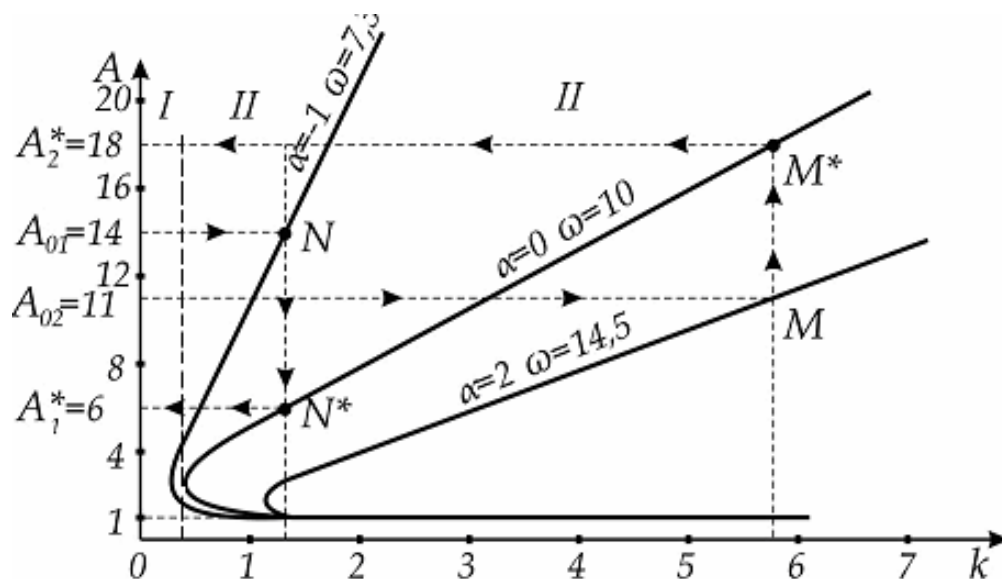


Рисунок 5.2 – Диафрагма качества переходного процесса к примеру 5.1

По диаграмме качества определим амплитуду и частоту автоколебаний.

При  $A_{01} = 14$  и  $k = 1,3$  начальное значение частоты  $\omega = 7,3 \text{ c}^{-1}$  (точка N). Этот режим работы находится в области притяжения и в результате амплитуда уменьшается до  $A_1^* = 6$ , а частота увеличивается до  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$  (точка N\*).

При  $A_{02} = 11$  и  $k = 5,8$  начальное значение частоты  $\omega = 14,5 \text{ c}^{-1}$  (точка M). Этот режим тоже находится в области притяжения. В результате амплитуда увеличивается до  $A_2^* = 18$ , а частота уменьшается до  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$  (точка M\*).

По диаграмме качества видно, что установившееся значение частоты не зависит от коэффициента усиления.

## ВЫВОДЫ

1 Частота колебаний для каждого  $\alpha$  значение  $\omega = \text{const}$ .

2 Задаваясь другими значениями коэффициента затухания  $\alpha = 10, 8, 6, 4, 3, 2, -2, -4, -6$  и т.д. можно получить более полную диаграмму качества.

3 При заданном коэффициенте усиления реле ( $b = 100, a = 1$ ) система фактически имеет один установившийся колебательный режим работы с частотой колебания  $\omega = 10$  и вещественной части корня  $a = 0$ .

4 Область притяжения к этому автоколебательному режиму при  $K > 0,5$ . На рисунке 5.2 она обозначена как область II (устойчивость в «большом»).

5 При  $K < 0,5$  система имеет область абсолютной устойчивости или устойчивости «в общем». Она обозначена как область I.

## 5.2.2 Анализ симметричных автоколебаний в многоконтурной САУ по диаграмме качества

Многоконтурные САУ кроме главной обратной связи имеют ещё дополнительные (местные) прямые или обратные связи. Если дополнительная отрицательная обратная связь охватывает нелинейное звено (совместно с каким-либо линейным) или только одно нелинейное, то нелинейность характеристики резко уменьшается, зависимость вход-выход нелинейного звена частично линеаризуется, но при этом уменьшается коэффициент передачи.

*Поставим такую задачу.* В системе, рассмотренной в примере 5.1, путём введения корректирующего звена в виде отрицательной обратной связи относительно нелинейного звена совместно с одним линейным (смотри рисунок 5.3) уменьшить нелинейность релейного звена. Цель такой коррекции: увеличить область устойчивости «в общем» относительно коэффициента усиления. В примере 5.1 область устойчивости «в общем» была в пределах  $K < 0,5$ . Необходимо после подключения местной обратной связи и при тех же параметрах системы как в примере 5.1, увеличить область устойчивости «в общем» в 8 раз. Решение поставленной задачи показано в примере 5.2.

**Пример 5.2** – Дана системы с нелинейным звеном в виде реле с зоной нечувствительности и линейным звеном, которые охвачены местной обратной связью. Структурная схема системы изображена на рисунке 5.3.

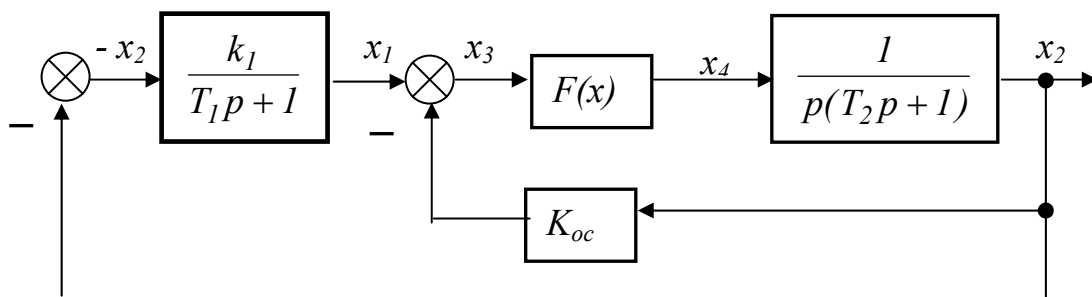


Рисунок 5.3 – Структурная схема к примеру 5.2

Параметры системы  $T_1 = 0,05 \text{ с}; T_2 = 0,2 \text{ с}; K_{oc} = 1$

Параметры реле  $q(A) = \frac{4 \cdot 100}{\pi \cdot A^2} \sqrt{A^2 - 1}$  при  $b=100; \alpha = 1$

Определить: какой будет установившейся режим работы системы при коэффициенте усиления в первом звене  $k_1 = 3,8$  при  $a = -1$  (коэффициент затухания) и а так же с коэффициентом усиления  $k_1 = 7,5$  при  $a = +2$ , если по начальным условиям амплитуда колебания одинакова и равна  $A_{01} = 6$ .

### РЕШЕНИЕ

1 Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(p, A) = \frac{k_1 q(A)}{(T_1 p + 1)[p(T_2 p + 1) + K_{oc} q(A)]}$$

2 Характеристический полином замкнутой системы

$$D(p, A) = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + (1 + K_{oc} q(A)T_1)p + q(A)(k_1 + K_{oc})$$

3 Разложим этот полином в ряд по степени  $j\omega$

$$D(p, A) = D(\alpha) + \left( \frac{\partial D}{\partial p} \right)_{\alpha} (j\omega) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial p^2} \right)_{\alpha} (j\omega)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 D}{\partial p^3} \right)_{\alpha} (j\omega)^3 + \dots,$$

$$\text{где } D(\alpha) = T_1 T_2 \alpha^3 + (T_1 + T_2)\alpha^2 + (1 + K_{oc} q(A)T_1)\alpha + q(A)(k_1 + K_{oc})$$

$$\frac{\partial D}{\partial p} = 3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2)\alpha + (1 + K_{oc} q(A)T_1)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial p^2} = 3T_1 T_2 \alpha + (T_1 + T_2)$$

$$\frac{\partial^3 D}{\partial p^3} = T_1 T_2$$

*Обратите внимание!* В отличие от примера 5.1 второй член разложения имеет нелинейный элемент зависящий от амплитуды входного сигнала и коэффициента обратной связи  $K_{oc} = 1$ .

4 Выделим вещественную часть  $U(\alpha, \omega, A, k_1)$  и мнимую часть  $V(\alpha, \omega, A)$  в полученных производных в ряд разложения

$$U(\alpha, \omega, A, k) = T_1 T_2 \alpha^3 + (T_1 + T_2)\alpha^2 + (1 + K_{oc} q(A)T_1)\alpha + q(A)(k_1 + K_{oc}) - [3T_1 T_2 \alpha + (T_1 + T_2)]\omega^2 = 0$$

$$V(\alpha, \omega, A) = [3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2)\alpha + (1 + K_{oc} q(A)T_1) - T_1 T_2 \omega^2] \omega = 0$$

5 Определим значение  $\omega$  из уравнения мнимой части  $V(\alpha, \omega, A)$

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2)\alpha + (1 + K_{oc} q(A)T_1)]$$

6 Полученное значение  $\omega^2$  подставим в уравнение  $U(\alpha, \omega, A, k)$

$$U(\alpha, \omega, A, k) = T_1 T_2 \alpha^3 + (T_1 + T_2)\alpha^2 + (1 + K_{oc} q(A)T_1)\alpha + q(A)k_1 + q(A)K_{oc} - [3T_1 T_2 \alpha + (T_1 + T_2)] \frac{1}{T_1 T_2} [3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2)\alpha + (1 + K_{oc} q(A)T_1)]$$

7 Из этого уравнения определим значение  $k_1$



$$k_1 = \frac{1}{q(A)} \left\{ \frac{1}{T_1 T_2} \left[ 3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2) \alpha + (1 + K_{oc} q(A) T_2) \right] \cdot [3T_1 T_2 \alpha + (T_1 + T_2)] - \left[ T_1 T_2 \alpha^3 + (T_1 + T_2) \alpha^2 + (1 + K_{oc} q(A) T_1) \alpha + q(A) K_{oc} \right] \right\}$$

8 Подставим численное значение параметров системы ( $T_1 = 0,05$  с;  $T_2 = 0,2$  с;  $K_{oc} = 1$ ) и параметров реле ( $b=100$ ;  $\alpha = 1$ )

$$k_1 = \frac{\pi A^2}{400\sqrt{A^2 - 1}} \left\{ \frac{1}{0,01} \left[ 3 \cdot 0,01 \alpha^2 + 0,5 \alpha + \left( 1 + \frac{1 \cdot 400\sqrt{A^2 - 1} \cdot 0,2}{\pi A^2} \right) \right] [3 \cdot 0,01 \alpha + 0,25] - \left[ 0,01 \alpha^3 + 0,5 \alpha^2 + \left( 1 + \frac{1 \cdot 400\sqrt{A^2 - 1} \cdot 0,2}{\pi A^2} \right) \alpha + \frac{1 \cdot 400\sqrt{A^2 - 1}}{\pi A^2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{\pi A^2}{400\sqrt{A^2 - 1}} \left\{ 0,08 \alpha^3 + 1,75 \alpha^2 + \left[ 2 \left( 1 + \frac{80\sqrt{A^2 - 1}}{A^2} \right) + 12,5 \right] \alpha + 24 \left( 1 + \frac{80\sqrt{A^2 - 1}}{A^2} \right) - \left( 1 + \frac{400\sqrt{A^2 - 1}}{A^2} \right) \right\} = \frac{\pi A^2}{400\sqrt{A^2 + 1}} [C_i(\alpha, A)]$$

**Обратите внимание!** Коэффициент  $C_i$  в отличие от примера 5.1 зависит от двух параметров: от коэффициента затухания  $\alpha$  ещё и от амплитуды входного сигнала  $A$ .

Результаты вычисления коэффициента  $k_1$  в зависимости от  $\alpha$  и  $A$  показаны в таблице 5.2

Таблица 5.2 – Определение коэффициента  $k_1$  к примеру 5.2

A	1,41	2	8	12	16	20
$\frac{\pi A^2}{400\sqrt{A^2 - 1}}$	0,0157	0,018	0,063	0,094	0,126	0,157
$C_1(2, A)$	362	322	141	117	108	97
$k_1 = f(\alpha = 2)$	5,7	5,8	8,9	11,0	13,2	15,4
$C_2(0, A)$	267	238	88	69	57	53
$k_2 = f(\alpha = 0)$	4,2	4,3	5,6	6,5	7,3	8,4
$C_3(-1, A)$	210	184	65	50	42	37
$k_3 = f(\alpha = -1)$	3,3	3,32	4,1	4,7	5,3	5,9

Частота колебательного режима работы системы тоже зависит от двух параметров: от коэффициента затухания  $\alpha$  и дополнительно от амплитуды колебания, которая зависит от коэффициента усиления  $k_1$  (смотри таблицу 5.2) и ещё от коэффициента обратной связи  $K_{oc}$ . Получается сложная взаимосвязанная зависимость

$$\omega^2 = \frac{I}{T_1 T_2} \left[ 3T_1 T_2 \alpha^2 + 2(T_1 + T_2) \alpha + (k_1 + K_{oc} q(A) T_1) \right]$$

Определить эту зависимость частоты колебаний от  $A$ ,  $k_1$ ,  $K_{oc}$  достаточно сложно. В сборнике задач по теории автоматического регулирования и управления [13] предложена упрощенная формула определения  $\omega$  по соотношению коэффициентов характеристического уравнения .

$$\omega^2 \approx \frac{q(A)(k_1 + K_{oc})}{T_1 T_2}$$

Расчёт по этой формуле при  $k_1 = 2$  и  $k_1 = 12$  (с учётом  $K_{oc} = 1$ ) показан в таблице 5.3.

Таблица 5.3 - Определение частоты  $\omega$  к примеру 5.2

A	2	4	8	10	12	14	16	20	24	28
$q(A)$	55,5	31,2	20,8	15,8	12,8	10,6	7,93	6,36	5,31	4,4
$\omega(k_1 = 2)$	25	19,6	15,8	13,8	12,3	11,3	-	-	-	-
$\omega(k_1 = 12)$	59,6	40,2	32,8	28,5	25,8	23,4	20,3	18,2	16,6	14,1

Построение диаграммы качества показано на рисунке 5.4. При значении  $A < 1$  релейной элемент не срабатывает (зона нечувствительности). Зависимость амплитуды колебания от коэффициента усиления  $k$  при  $\alpha = -1$ , ;  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = +2$  показаны жирными линиями. Для построения зависимости частоты колебания  $\omega$  при  $k = 2$  определены значения частот при различных амплитудах, согласно таблице 5.3 (вертикальный ряд значений при  $k = 2$  ). Затем показан такой же вертикальный ряд при  $k = 12$ . Точки с равными значениями частот соединяются пунктирными линиями. Если определить значения частот при других коэффициентах усиления, (например, при  $k = 6, 8, 10$ ) то они будут находиться на этой пунктирной прямой.

Примечание - На диаграмме качества показаны округлённые значения частот

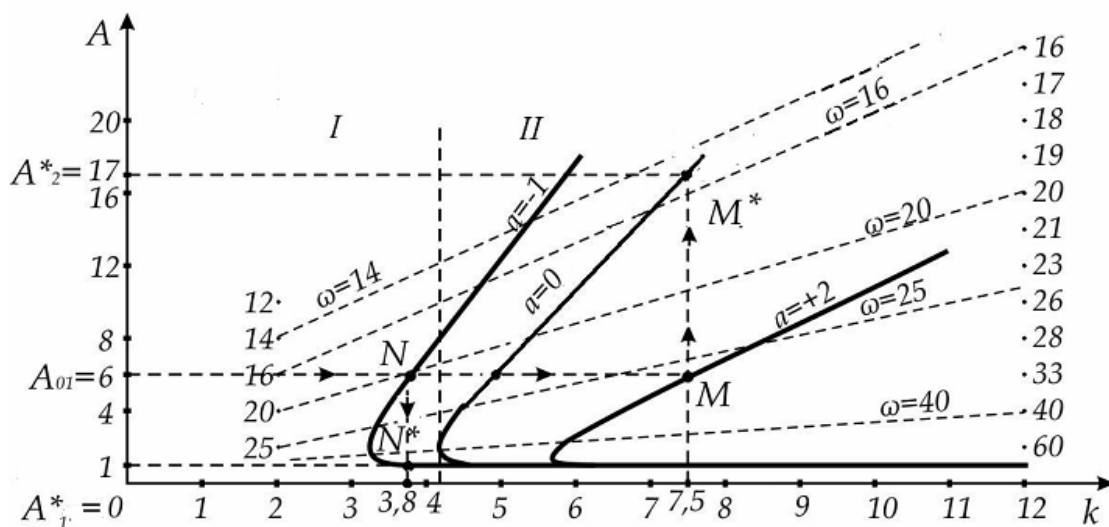


Рисунок 5.4 – Диаграмма качества переходного процесса к примеру 5.2

По полученной диаграмме качества определим установившейся режим работы системы по заданному начальному условию  $A_{01} = 6$ .

При  $k_1 = 3,8$  и  $A_{01} = 6$  начальное значение системы – колебательный процесс с частотой  $\omega_{01} = 20 \text{ с}^{-1}$  (точка  $N$ ). Затем за счёт нелинейного звена *амплитуда уменьшается*, а частота колебаний увеличивается до  $\omega = 40 \text{ с}^{-1}$ , до  $\omega = 60 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ . Одновременно амплитуда колебания резко падает и  $A_1^* = 0$  (точка  $N^*$ ). Установившейся режим: устойчивое равновесие. Система при  $K < 4$  имеет область притяжения в устойчивое равновесное состояние (область I) или устойчивость «в общем».

*Обратите внимание!* В результате охвата нелинейного звена местной отрицательной обратной связью (рисунок 5.3) область устойчивости «в общем» увеличилась с  $k < 0,5$  до  $k < 4$ , то есть в 8 раз. При  $k > 4$  установившийся процесс колебательный.

Так при  $k = 7,5$  и  $A_{01} = 6$  начальное значение системы – колебательный процесс с частотой  $\omega_{01} = 27 \text{ с}^{-1}$  (точка  $M$ ). Затем за счет нелинейного звена *амплитуда увеличивается* до  $A^* = 17$ , а частота колебаний уменьшается до  $\omega^* = 15 \text{ с}^{-1}$  (точка  $M^*$ ). Установившейся режим устойчивый колебательный процесс (автоколебания). Система при  $K > 4$  имеет область притяжения II в автоколебательный режим работы или система устойчива «в большом».

Важно отметить, что в *устойчивом автоколебательном режиме* уменьшается частота колебаний с увеличением амплитуды колебания. Так при  $k = 4,7$ ,  $\omega = 25 \text{ с}^{-1}$ ; при  $k = 5,2$ ,  $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$ , при  $k = 7,5$ ,  $\omega = 15 \text{ с}^{-1}$ . Одновременно с увеличением коэффициента усиления  $k$  увеличивается амплитуда колебательного процесса с  $A = 6$  при  $k = 3,8$  до  $A = 17$  при  $k = 7,5$ .

### 5.2.3 Построение графика переходного процесса по диаграмме качества

График переходного процесса наиболее наглядно характеризует динамические свойства системы. По этому графику можно определить время регулирования  $t_p$  (или время переходного процесса), перерегулирование  $\sigma$ , статическую ошибку  $\delta$ . Все эти показатели качества регулирования достаточно просто определяются в линейных системах. В нелинейных системах при построении графика переходного процесса делается ряд серьёзных допущений [5,13].

Во-первых, принимается, что график строится по - первой гармонике ряда Фурье, которая без искажения имеет вид синусоиды.

Во-вторых, при затухающих колебаниях время переходного процесса дополнительно уменьшается, так как нелинейное звено дополнительно гасит колебания. При возрастающей амплитуде время переходного процесса дополнительно увеличивается за счёт нелинейного звена.

В-третьих, понятие «перерегулирование» в таком колебательном переходном процессе имеет другой физический смысл по сравнению с линейной системой. Это подробнее будет рассмотрено на конкретном примере.

В результате полученный график переходного процесса является приближенно - идеализированным графиком для наглядного и предварительного анализа нелинейной системы. Рассмотрим методику его построение на конкретных примерах.

**Пример 5.3** – Построить график переходного процесса по диаграмме качества регулирования (пример 5.1, рисунок 5.2) при начальных условий

$$k = 1,3; A_{01} = 14; \alpha_{01} = -1;$$

#### РЕШЕНИЕ

1 По диаграмме качества переходного процесса (рисунок 5.2) видно, что при заданном значении коэффициента  $k$  и коэффициент затухания  $\alpha_{01}$  амплитуда колебаний во время переходного процесса изменяют свои значения по уравнению

$$A^* = A_{01} \exp\left(\int_0^t \alpha dt\right).$$

Начальное значение амплитуды  $A_{01} = 14$ , установившееся значение амплитуды (при  $\alpha = 0$ ) равно  $A_1^* = 6$ . Если это движение системы рассмотреть по фазовому портрету, то такое изменение амплитуды соответствует *устойчивому фокусу*.

2 Время переходного процесса в зависимости от изменения амплитуды с  $A_{01}$  до  $A_1^*$  определяется по формуле

$$t_p = \int_{A_{01}}^{A_1^*} \frac{dA}{A \cdot \alpha(A)},$$

где  $\alpha(A)$  – аналитическая зависимость коэффициента затухания от амплитуды колебания  $A$ .

Приближенно время переходного процесса  $t_p$  можно определить следующим образом [11]

$$t_p \approx \frac{1}{\alpha_{cp}} \ln \frac{A_1^*}{A_{01}},$$

где  $\alpha_{cp}$  - среднее значение коэффициента затухания на интервале изменения амплитуды от  $A = A_{01}$  (точка  $N$ ) до  $A = A_1^*$  (точка  $N^*$ ). В точке  $N$  коэффициент затухания  $\alpha_{01} = -1$ ; в точке  $N^*$   $\alpha^* = 0$ . Тогда время регулирования

$$\alpha_{cp} = \frac{-1+0}{2} = -0,5, \quad t_p = \frac{1}{-0,5} \ln \frac{A_1^*}{A_{01}} = \frac{1}{-0,5} \ln \frac{6}{14} = 1,69c.$$

3 Величину перерегулирования можно определить по формуле

$$\left| \frac{A_{cp}}{A_{01}} \right| \approx e^{\frac{\pi \cdot \alpha_{cp}}{\omega_{cp}}},$$

где  $\alpha_{cp}$  и  $\omega_{cp}$  - среднее значение  $\alpha$  и  $\omega$  на участке  $N - N^*$ ;

$A_{cp}$  - среднее значение амплитуды на участке  $N - N^*$ ;

$A_{01}$  - начальное значение амплитуды, в точке  $N$

По этой формуле определим среднее значение амплитуды  $A_{cp}$  при следующих средних значениях  $\alpha_{cp}$  и  $\omega_{cp}$ .

Среднее значение коэффициента затухания  $\alpha_{cp} = -0,5$ .

Среднее значение частоты  $\omega_{cp} = 0,5(7,3+10) = 8,7$ .

Среднее значение амплитуды при переходном процессе

$$\left| \frac{A_{cp}}{14} \right| \approx e^{\frac{-3,14 \cdot 0,5}{8,7}} = 0,83 \quad A_{cp} = 14 \cdot 0,83 = 11,7$$

Примечание – Понятие перерегулирования в линейной системе характеризуется максимальное отклонение амплитуды при переходном процессе. В нелинейной системе, которая находится в зоне притяжения, и исходный колебательный процесс переходит к устойчивому колебательному процессу (автоколебания), то понятие перерегулирования целесообразно определять через понятие *среднее значение переходного колебательного процесса*.

***Среднее значение переходного колебательного процесса нелинейной системы определяется по среднему значению амплитуды и частоты во время  $t = 0,5 t_{pez}$ .***

В данном примере это среднее значение амплитуды характеризуется её уменьшением с  $A_{01} = 14$  до  $A_{cp} = 11,7$  и возрастанием частоты колебания с  $\omega_{01} = 7,3$  до  $\omega_{cp} = 8,7$ .

**Обратите внимание!** Формула для определения среднего значения переходного колебательного процесса аналогична формуле определения перерегулирования в линейной системе (только без процентов). Содержание полученного результата совершенно другое.

4 Число колебаний  $m$ , за время переходного процесса приближенно можно определить по формуле

$$m = \frac{t_p}{T_{cp}} = \frac{1,69}{0,72} = 2,3, \quad \text{где} \quad T_{cp} = \frac{2\pi}{\omega_{cp}} = \frac{2 \cdot 3,14}{8,7} = 0,72.$$

В результате расчёта получаем:

- начальные параметры (точка  $N$ ):  $A_{01} = 14$ ;  $T_{01} = 2\pi/\omega_{01} = 0,86$  с;
- параметры переходного процесса:  $A_{cp} = 11,7$ ;  $T_{cp} = 0,72$  с;  $m = 2,3$ ;
- параметры автоколебаний (точка  $N^*$ ):  $A^*_1 = 6$ ;  $T^*_1 = 2 \cdot 3,14/10 = 0,62$  с;

График этого переходного процесса показан на рисунке 5.5.

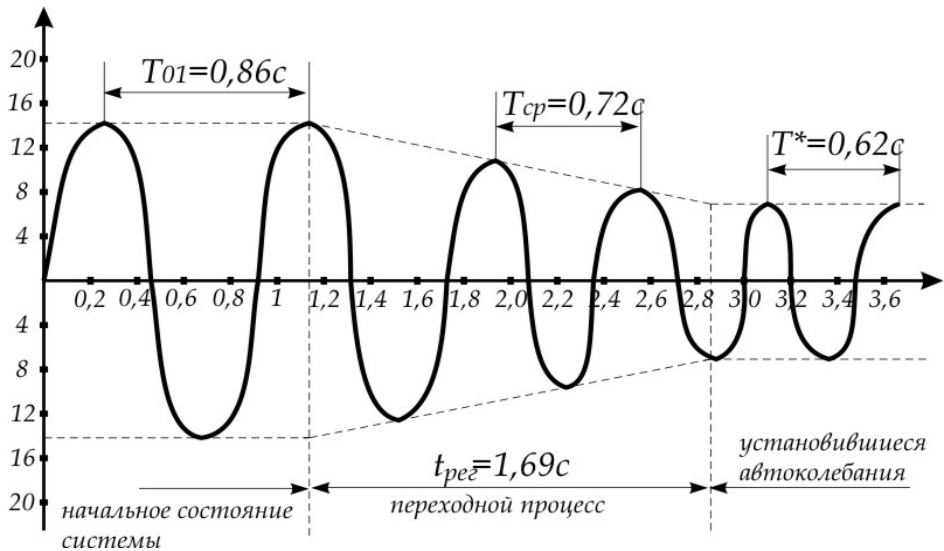


Рисунок 5.5 - График переходного процесса к примеру 5.3

**Пример 5.4** – Определить приближённое значение время переходного процесса  $t_p$ , величину перерегулирования и число колебаний по диаграмме качества регулирования по примеру 5.1( рисунок 5.2) при начальных условиях:

$$k = 5,6; \quad A_{01} = 11; \quad \alpha_{01} = 2$$

РЕШЕНИЕ

1 Согласно рисунку 5.2 начальное значение амплитуды  $A_{02} = 11$  при  $\omega_{02} = 14,5$  (при  $k = 5,6$ ). Конечное значение  $A_2^* = 18$  при  $\omega_2^* = 10$ . Если это движение системы рассматривать по фазовому портрету, то такое увеличение амплитуды соответствует *неустойчивому фокусу*, который сходится к предельному автоколебательному режиму ( $\alpha = 0$ ) с увеличением амплитуды колебаний.

2 Приближенное значение времени переходного процесса  $t_p$  (по  $\alpha_{cp}$ ).

$$\alpha_{cp} = 0,5(\alpha_{01} + \alpha^*) = 0,5(2 + 0) = 1;$$

$$t_p \approx \frac{1}{\alpha_{cp}} \ln \frac{A^*}{A_{01}} = \frac{1}{1} \ln \frac{18}{11} = 0,49 \text{ с}.$$

3 Величина перерегулирования (или  $A_{cp}$ ) при  $\omega_{cp} = 0,5(10 + 14,5) = 12,25$

$$\left| \frac{A_{cp}}{A_{01}} \right| \approx e^{\frac{\pi \cdot \alpha_{cp}}{\omega_{cp}}}, \quad \left| \frac{A_{cp}}{11} \right| \approx e^{\frac{3,14 \cdot 1}{12,25}} = 1,3, \quad A_{cp} = 11 \cdot 1,3 = 14,2$$

4 Число колебаний  $m$

$$m = \frac{t_p}{T_{02}} = \frac{0,49}{0,51} = 0,95 \approx 1, \quad \text{где} \quad T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_{cp}} = \frac{2 \cdot 3,14}{12,25} = 0,51$$

ОТВЕТ: - время регулирования	$t_p = 0,49c;$
- перерегулирования	$A_{cp} = 14,2;$
- число колебаний	$m = 1;$
- период колебаний	$T_{02} = 0,5c;$
- частота колебаний	$\omega_{cp} = 12,25 c^{-1}.$

*Обратите внимание!* При разных значениях коэффициента усиления получили разные значения амплитуд автоколебательного режима. Но значения частоты автоколебаний одинаковое ( $\omega = 10 c^{-1}$ ). При однозначной характеристики нелинейного звена частота колебаний в установившемся режиме не зависит изменении от амплитуды.

## 5.3 Коррекция нелинейных систем

### 5.3.1 Способы коррекции

Наличие нелинейностей может существенно ухудшить качество регулирования. Поэтому при проектировании таких систем возникает задача уменьшить влияние нелинейности на динамику регулирования за счёт введения корректирующих устройств [3, 5, 12].

***Коррекция нелинейных систем служит для формирования заданных динамических качеств системы управления.***

*Задачи, решаемые при коррекции:*

- компенсация влияния нелинейной статической характеристики в виде люфта, зазора, зоны нечувствительности, зона насыщения и т.д.
- вибрационная линеаризация существенно нелинейной зависимости;
- уменьшение амплитуды автоколебаний или полное их устранение;
- уменьшение инерционности системы с помощью псевдолинейного корректирующего звена;
- изменение режима работы в зависимости от изменения состояния системы.

*Методы коррекции нелинейных систем:*

- изменение структуры и параметров линейной части системы;
- применение компенсирующих форсирующих устройств;
- введение дополнительных обратных связей;
- обеспечение заданного закона управления с помощью логических корректирующих устройств;

Коррекция нелинейных систем может быть осуществлена с помощью линейных или нелинейных корректирующих устройств. Отличие нелинейных корректирующих устройств в *выполнении конкретных задач по улучшению качества регулирования*, которые решаются проще и надежнее.

Но, чем шире диапазон внешних воздействий тем труднее выбрать нелинейное корректирующее устройство. Может получиться, что нелинейная коррекция, выбранная для определенного режима работы может оказаться далеко не эффективной при других неучтенных условиях работы системы. В этом случае линейное корректирующее устройство, которое имеет широкий диапазон воздействия, обеспечивает более надежную коррекцию системы. Все это усугубляется еще и тем, что нет общей методики выбора нелинейных корректирующих устройств. Приходится прибегать к методу проб и ошибок, используя различные рекомендации и индивидуальные приемы расчета.

### 5.3.2 Компенсация влияния нелинейности в виде зоны нечувствительности

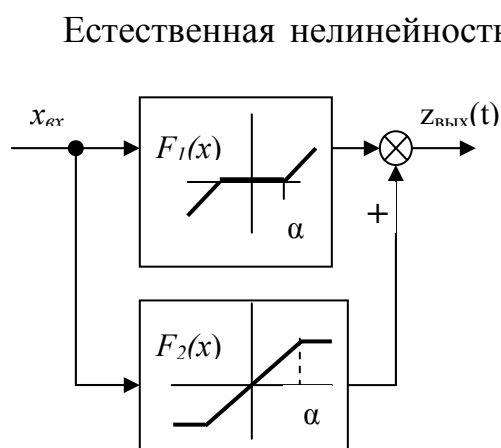


Рисунок 5.6 – Схема параллельной компенсации нелинейной характеристики  $F_1(x)$

Естественная нелинейность в виде зоны нечувствительности, вносит дополнительные статические и динамические ошибки в работу системы. Поэтому необходимо компенсировать влияние такой нелинейности. Пусть нелинейное усилительное звено  $F_1(x)$  имеет зону нечувствительности  $|\alpha|$ . Для компенсации ее влияния параллельно с заданным нелинейным звеном  $F_1(x)$  включают нелинейное звено  $F_2(x)$  с такими же коэффициентом усиления в пределах  $\alpha$  и без зоны нечувствительности, но с зоной насыщения после значения  $\alpha$ , (рисунок 5.6)

Выходной сигнал  $Z_{вых}(t)$  будет складываться из двух параллельных сигналов. В пределах зоны нечувствительности  $|\alpha|$  входной сигнал будет проходить через нелинейное звено  $F_2(x)$ . После зоны нечувствительности характеристика  $F_2(x)$  не изменяется (она в зоне насыщения) и сигнал будет проходить через звено  $F_1(x)$ . Аналогично можно рассмотреть сложение характеристик  $F_2(x)$  и  $F_1(x)$  при входном отрицательном сигнале. Таким образом, с помощью параллельных нелинейных характеристик получена одна общая линейная характеристика. Главная трудность такой коррекции нелинейного звена  $F_1(x)$  в подборе второго нелинейного звена  $F_2(x)$ , которое по всем другим показателям совпадала со звеном  $F_1(x)$ , кроме вида нелинейности.



### 5.3.3 Компенсация влияния нелинейности путем включения в цепь местной связи звена с желаемой характеристикой

Рассмотрим систему с отрицательной главной обратной связью и с существенно нелинейным звеном  $F_1(x)$  в главной цепи. Для компенсации нелинейности в  $F_1(x)$  параллельно ему включена модель линейного элемента  $K_{л.э.}(p)$  с желаемой характеристикой в этом нелинейном звене  $F_1(x)$ . Сигналы с  $F_1(x)$  и  $K_{л.э.}(p)$  сравниваются и их разность подается через форсирующее звено  $W_\phi(p)$  на вход системы (рисунок 5.7). Если  $x_2 > x_1$ , то на вход системы поступает отрицательный сигнал, который уменьшает значение  $x_2$ . Если  $x_2 < x_1$ , то на вход системы поступает положительный сигнал и увеличивает  $x_2$ . За счет такого компенсирующего контура достигается равенство  $x_2 = x_1$  и устраняется влияние нелинейности в звене  $F_1(x)$ . Использование форсирующего звена ускоряет процесс компенсации нелинейности  $F_1(x)$ .

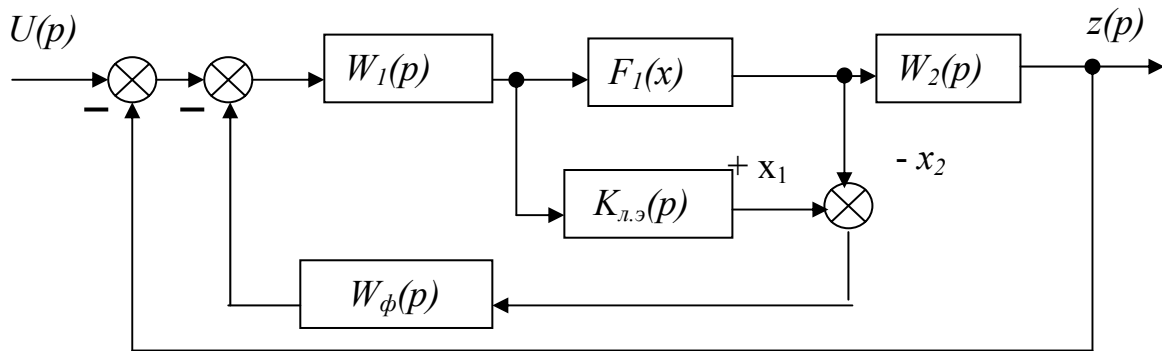


Рисунок 5.7 – Схема компенсации нелинейности с помощью звена с желаемой характеристикой

Определим передаточную функцию компенсирующего контура  $W_{ком}(p)$ .

$$W_{ком}(p) = \frac{W_1(p)F_1(x)}{1 - K_{л.э.}(p)W_\phi(p)W_1(p) + W_1(p)F_1(x)W_\phi(p)}$$

Значение переданной функции компенсирующего контура при условии, что линейная модель имеет желаемую характеристику  $K_{л.э.}(p)$

$$K_{л.э.}(p) = \frac{1}{W_\phi(p)W_1(p)}$$

$$W_{ком}(p) = \frac{W_1(p)F_1(p)}{1 - \frac{W_\phi(p)W_1(p)}{W_\phi(p)W_1(p)} + W_1(p)F_1(p)W_\phi(p)} = \frac{1}{W_\phi(p)}$$

В результате нелинейная характеристика элемента  $F_1(x)$  не оказывает влияние на характеристику системы. При включении в обратную связь форсирующего звена, компенсирующий контур с помощью форсирующего звена становится устойчивым апериодическим звеном.

### 5.3.4 Компенсация влияния нелинейности с помощью дополнительной обратной связи

Для компенсации нелинейности используются дополнительные обратные связи различного вида: жесткие, гибкие, смешанные.

*Если коэффициент обратной связи не зависит от изменения выходного сигнала, то такая обратная связь называется жесткой.*

*Если коэффициент обратной связи зависит от изменения выходного сигнала, а при постоянном выходном сигнале равен нулю, то такая обратная связь называется гибкой.*

*Если коэффициент обратной связи зависит от изменения выходного сигнала, но при постоянном выходном сигнале не равен нулю, то такая обратная связь называется смешанной.*

Рассмотрим схему компенсации нелинейной характеристики с помощью жесткой обратной связи (рисунок 5.8).

Пусть нелинейный элемент  $F_1(x)$  с линейной частью системы  $W_1(p)$  охвачен жесткой обратной связью с коэффициентом  $K_{o.c.}$  ( $W_{o.c.}(p) = K_{o.c.}$ ). Частотная передаточная функция скорректированного участка системы

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)F(x)}{1 + W_1(j\omega)F(x)K_{o.c.}}$$

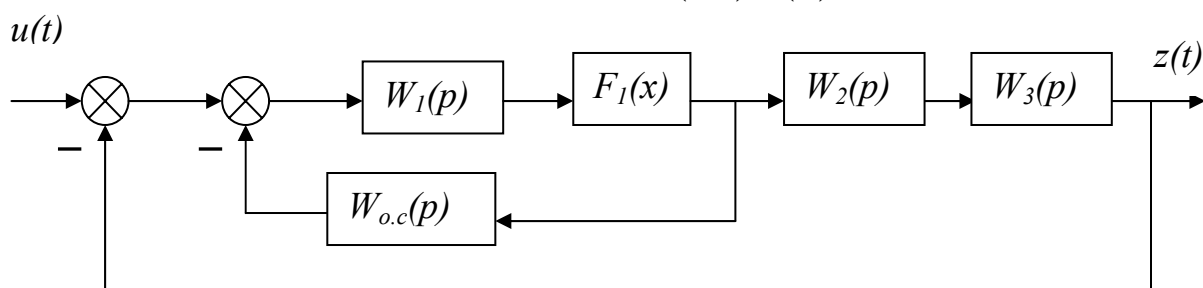


Рисунок 5.8 – Схема компенсации нелинейной характеристики с помощью обратной связи

Выберем коэффициент обратной связи такой, чтобы в области существенных частот работы системы выполнялось соотношение

$$1 \ll W_1(j\omega)F(x)K_{o.c.}, \text{ тогда } W(j\omega) \approx \frac{W_1(j\omega)F(x)}{W_1(j\omega)F(x)K_{o.c.}} \approx \frac{1}{K_{o.c.}}$$

Таким образом, характеристика этого участка системы практически не зависит от свойств нелинейного элемента и полностью определяется коэффициентом обратной связи  $K_{o.c.}$ . В некоторых случаях можно охватывать жесткой обратной связью только нелинейный элемент и существенно линеаризовать его характеристику. Но при этом необходимо помнить, что выходной сигнал такого линеаризованного нелинейного элемента значительно ослабнет и придется использовать усилительное звено.

*Поставим такую задачу.* Максимально увеличить коэффициент усиления  $K_1$  в первом звене  $W_1(p)$  для уменьшения статической ошибки системы (рисунок 5.8). Для этого охватим нелинейное звено  $F_1(x)$  вместе с аperiodическим звеном  $W_1(p)$  с гибкой обратной связью  $W_{o.c.} = T_4 p$ . Для упрощения расчета примем, что все линейные звенья в прямой цепи аperiodические.

Передаточная функция скорректированного участка системы  $W_{кор}(p)$

$$W_{кор}(p) = \frac{K_1 F(x) / (T_1 p + 1)}{1 + \frac{K_1 F(x) T_4 p}{T_1 p + 1}} = \frac{K_1 F(x)}{(T_1 p + 1) + K_1 F(x) T_4 p}$$

Передаточная функция всей системы  $W_{сисм}(p)$

$$W_{сисм}(p) = \frac{W_{кор}(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_{кор}(p)W_2(p)W_3(p)} = \frac{K_1 F(x) K_2 K_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + K_1 F(x) T_4 p (T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + K_1 K_2 K_3 F(x)}$$

Поделим числитель и знаменатель на  $K_1$  и предположим, что  $m = 1/K_1$  достаточно малая величина. Тогда получим

$$W_{сисм}(p) = \frac{F(x) K_2 K_3}{m(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + F(x) T_4 p (T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + K_2 K_3 F(x)}$$

Если  $K_1 \rightarrow \infty$ , то  $m \rightarrow 0$  и характеристическое уравнение вырождается в уравнение

$$\begin{aligned} A(p) &= F(x) T_4 p (T_2 + 1)(T_3 + 1) + K_2 K_3 F(x) = \\ &= F(x) T_2 T_3 T_4 p^3 + F(x) T_4 (T_2 + T_3) p^2 + F(x) T_4 p + K_2 K_3 F(x) = 0 \end{aligned}$$

На основании теоремы о непрерывной зависимости корней алгебраического уравнения (в данном случае характеристического уравнения) от его коэффициентов можно утверждать, что три корня системы при  $m \rightarrow 0$  будут стремиться к трем корням вырожденного уравнения и устойчивость системы

будет определяться полученным вырожденным характеристическим уравнением. Условие устойчивости по критерию Гурвица для системы третьего порядка

$$F(x)T_4(T_2 + T_3) \cdot F(x)T_4 - F(x)T_2T_3T_4 \cdot K_2K_3F(x) > 0$$

Упростим это неравенство  $T_4(T_2 + T_3) - T_2T_3K_2K_3 > 0$  или  $T_4 > \frac{T_2T_3K_2K_3}{T_2 + T_3}$

ОТВЕТ При полученном значении постоянной времени дифференцирующего звена система будет устойчива при любом  $F_1(x)$  и допускает увеличение коэффициента усиления в охваченном обратной связью апериодическом звене  $K_1 \rightarrow \infty$ .

Способ максимального увеличения коэффициента усиления за счет гибкой обратной связи называется «метод Меерова».

Показатели качества регулирования автоматической системы взаимосвязаны. Если в результате коррекции нелинейного звена «методом Меерова» статическая ошибка  $\delta(t)$  существенно уменьшилась и при  $K_1 \rightarrow \infty$  значение  $\delta(t) \rightarrow 0$ , то какой показатель качества регулирования ухудшился? Представим скорректированный участок системы в следующем виде

$$W_{кор} = \frac{K_1F(x)}{(T_1p + 1) + K_1F(x)T_4p} = \frac{K_1F(x)}{[T_1 + K_1F(x)T_4]p + 1}$$

При  $K_1 \rightarrow \infty$  постоянная времени этого скорректированного участка  $[T_1 + K_1F(x)T_4] \rightarrow \infty$  и, соответственно, время регулирования  $t_p \rightarrow \infty$ . Таким образом, чем больше увеличиваем коэффициент усиления в апериодическом звене, тем продолжительнее будет время регулирования. Для реальной системы надо искать компромиссное решение между  $\delta(t)$  и  $t_p$ .

### Вопросы для самоконтроля к подразделу 5.3.1 - 5.3.4

- 1 Задачи, решаемые при коррекции нелинейных систем.
- 2 Методы коррекции нелинейных систем.
- 3 Преимущества и недостатки нелинейных корректирующих устройств.
- 4 Какой вид нелинейного звена включается параллельно заданному нелинейному звену при параллельной компенсации зоны нечувствительности?
- 5 При охвате нелинейного звена совместно с апериодическим звеном гибкой обратной связью может ли устойчивость системы не зависеть от нелинейного звена?
- 6 При охвате нелинейного звена совместно с апериодическим звеном гибкой обратной связью можно ли существенно увеличивать коэффициент усиления апериодического звена без потери устойчивости системы?
- 7 Как измениться при этом статическая ошибка системы?

### 5.3.5 Псевдолинейные корректирующие устройства

Среди нелинейных корректирующих устройств можно выделить такие устройства, в которых амплитудо-фазовые характеристики не зависят от амплитуды входного сигнала, а являются только функциями частоты входного сигнала. У таких устройств отсутствует жесткая взаимосвязь между амплитудой и фазой. Поэтому такие корректирующие устройства можно рассматривать как *псевдолинейные* [3,5,9,12].

***Псевдолинейным корректирующим устройством (ПКУ) называется такое нелинейное устройство, у которого частотная передаточная функция не зависит от амплитуды, а зависит только от частоты.***

Причем, эта зависимость от частоты нелинейная и в общем случае может быть такая, которая обеспечивает изменение частотной характеристики САУ в желаемом направлении. Очевидно, что это дает такие дополнительные возможности по улучшению динамической характеристики системы, которые невозможно получить в линейных системах.

Рассмотрим применение псевдолинейного корректирующего устройства

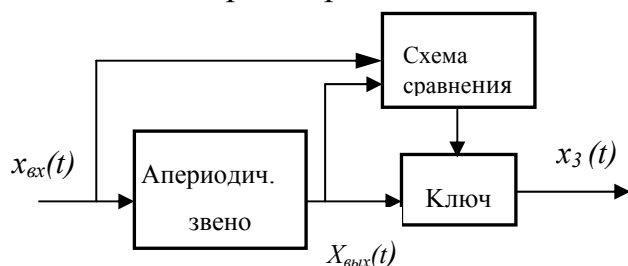


Рисунок 5.9 – Схема коррекции апериодического звена с помощью ПКУ

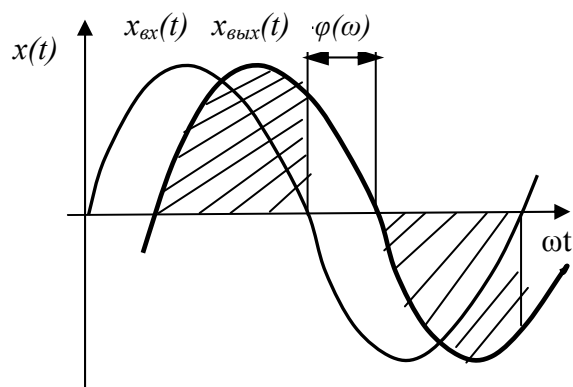


Рисунок 5.10 – Преобразование выходного сигнала в ключе

для уменьшения постоянной времени апериодического звена, то есть уменьшение его инерционности. Одна из возможных схем такой коррекции апериодического звена с помощью ПКУ показана на рисунке 5.9. На схему сравнения подаются два сигнала: входной синусоидальный сигнал  $x_{вх}(t) = A_{вх} \sin \omega t$  и выходной сигнал апериодического звена  $x_{вых}(t) = A_{вых} \sin[\omega t - \varphi(\omega)]$ . В схеме сравнения эти два сигнала накладываются друг на друга (рисунок 5.10). Ключ в схеме на рисунке 5.9 пропускает сигналы, полученные в схеме сравнения при совпадении по знаку  $x_{вх}(t)$  и  $x_{вых}(t)$ . Эта часть сигнала на рисунке 5.10 заштрихована. В результате и фаза, и амплитуда выходного сигнала из ключа  $x_3(t)$  уменьшается. На графике (рисунок 5.11) показано изменение коэффициента усиления и

постоянной времени сигнала при выходе из ключа в относительных единицах ( $T^* = T_{вых} / T_{вх}$ ,  $K^* = K_{вых} / K_{вх}$ ). Так при  $\omega = \omega_0 = 1/T$  значение постоянной времени изменилось до  $T^* = 0,72$ , а  $K^* = 0,74^*$ . Фактически эти изменения происходят пропорционально. Эффекта от такой коррекции нет.

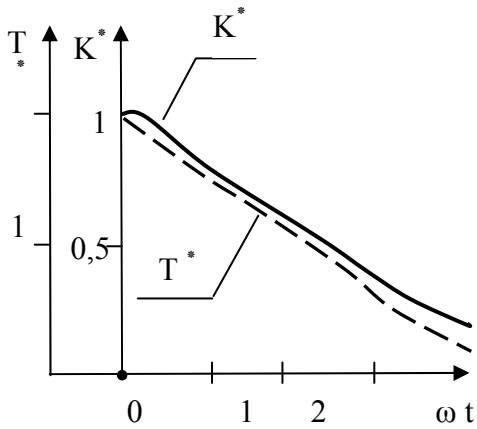


Рисунок 5.11 – Изменение коэффициента усиления и постоянной времени апериодического

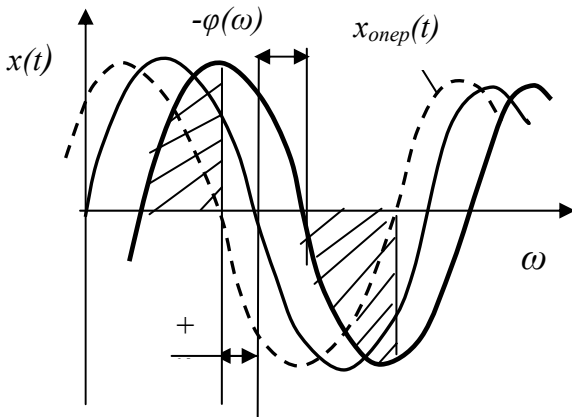


Рисунок 5.12 – Преобразование входного сигнала в ключе при подаче опережающего по фазе входного сигнала

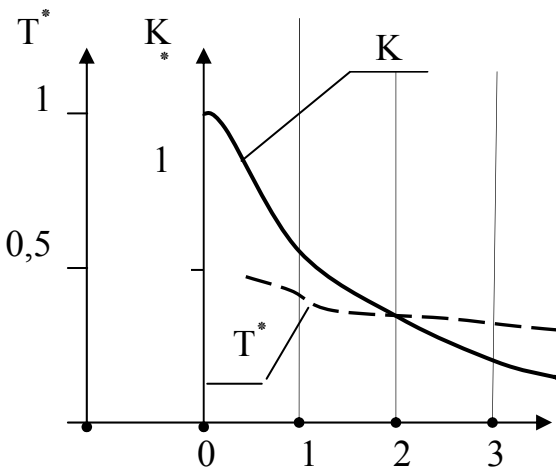


Рисунок 5.13 – Изменение коэффициента усиления и постоянной времени при подаче опережающего по фазе сигнала на блок сравнения

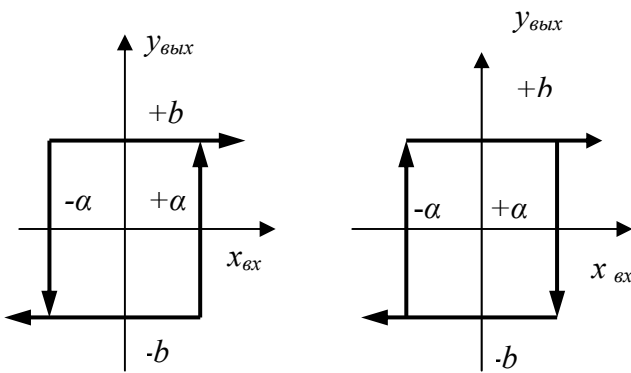
Для получения большего уменьшения постоянной времени апериодического звена по сравнению с уменьшением коэффициента усиления вводится опережающей (по фазе) синусоидальный сигнал в схему сравнения. Тогда ключ в схеме на рисунке 5.9 пропускает разницу, полученную в схеме сравнения между  $x_{\text{вых}}(t)$  и  $x_{\text{опер}}(t)$  (а не  $x_{\text{вх}}(t)$ ). Такое преобразование выходного сигнала в ключе показано на рисунке 5.12. Эта часть сигнала заштрихована. На выходе из ключа коэффициент усиления уменьшится, так как часть совпадающего по знаку сигнала  $x_{\text{опер}}(t)$  и  $x_{\text{вых}}(t)$  будет меньше. Это видно по рисунку 5.12. Но при этом добавляется фазовый угол опережения ( $+\gamma$ ) и отставание по фазе апериодического звена уменьшится. Это можно рассматривать как уменьшение постоянной времени апериодического звена. В таком ПКУ какая величина изменилась больше: постоянная времени или коэффициент передачи? На графике (рисунок 5.13) показано, что при небольших частотах больше уменьшается постоянная времени  $T^*$ , чем коэффициент усиления  $K^*$ . Так при  $\omega = \omega_0 = 1/T$  значение постоянной времени уменьшилась до  $T^* = 0,41$ , а  $K^* = 0,53$ .

С увеличением частоты может возникнуть обратный эффект: больше уменьшится  $K^*$  чем  $T^*$  (рисунок 5.13).

Очевиден и следующий вопрос: как получить сигнал с опережающей первой гармоникой? Для этого используется специальное реле.

У реле с нормальной петлевой характеристикой при положительном возрастании входного сигнала выходная величина изменяется по правой ветви петли, а при убывании входного сигнала – по левой ветви петли (рисунок 5.14 а).

Передаточная функция реле  $W(A)$  с нормальной (положительной) петлей гистерезиса имеет вид:



а - реле с нормальной петлевой характеристикой

б - реле с опережающей петлевой характеристикой

Рисунок 5.14 – Реле с петлевой характеристикой без зоны нечувствительности

$$W(A) = q(A) + jq'(A)$$

Или в полярных координатах

$$K(A) = N(A) \cdot e^{j\varphi_0(A)},$$

где  $q(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{A^2}};$

$$q'(A) = -\frac{4B\alpha}{\pi A^2};$$

$$N(A) = \sqrt{q^2(A) + (q')^2(A)}$$

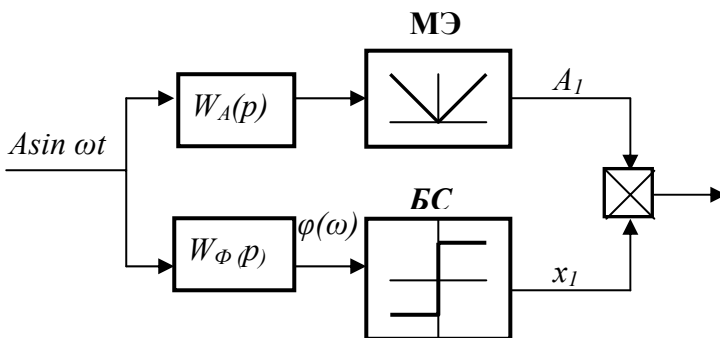
$$\varphi_0(A) = \arctg \frac{q'(A)}{q(A)} = \arctg \frac{-\alpha}{A\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{A^2}}}$$

Таким образом, реле с нормальной петлей гистерезиса вносит *запаздывание по фазе*. В реле с опережающей петлей гистерезис (рисунок 5.14 б) мнимая часть коэффициента гармонической линеаризации положительная. Такое реле вносит на выходе *опережение по фазе*

$$q'(A) = +\frac{4B\alpha}{\pi A^2}$$

Максимальное значение угла опережения при  $\alpha = A$ .

$$\varphi_0\left(\frac{A}{\alpha}\right)_{\max} = \arctg \frac{+\alpha}{A\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{A^2}}} = \arctg \frac{+\alpha}{A\sqrt{1-1}} = \arctg \frac{+\alpha}{A \cdot 0} = +90^\circ$$



Очевидно, что с увеличением амплитуды входного сигнала ( $A > a$ ) угол опережения в таком реле будет уменьшаться. В зависимости от диапазона изменения входного сигнала ПКУ рассчитывают при

$$\varphi_0(A) = +15^\circ; \quad +30^\circ; \quad +50^\circ.$$

Рисунок 5.15 – Двухканальный ПКУ

Рассмотренное ПКУ считается одноканальное, в котором изменение фазы и амплитуды происходит в одном канале – в схеме сравнения. В результате при изменении фазы амплитуда тоже уменьшится. В промышленности чаще используют двухканальное ПКУ, где входной сигнал разветвляется и проходит по двум каналам (рисунок 5.15).

Первый канал служит для формирования амплитудной характеристики и включает в себя элемент ослабляющий высокие частоты, например, в виде, апериодического звена  $W_A(p) = K / (Tp_2 + 1)$ . Для исключения прохождения информации о фазе последовательно включен модульный элемент (МЭ). Это может быть двухполупроводниковый выпрямитель. На выходе МЭ значение только амплитуды  $A_1$ .

Второй канал формирует заданную фазовую характеристику с положительным сдвигом по фазе. Например, с помощью линейного интегро-дифференцирующего звена

$$W_\phi(p) = \frac{K(T_1p + 1)}{(T_2p + 1)}$$

Опережение по фазе  $\varphi_{анер}(\omega)$  относительно входного сигнала при  $T_1 > T_2$

$$\varphi_{анер}(\omega) = \text{arctg}T_1\omega - \text{arctg}T_2\omega$$

Этот сигнал поступает на блок сигнатуры (БС), который выполняет функцию  $\text{sign}[\varphi_{анер}(\omega)]$ . Это может быть идеальный релейный элемент, который формирует напряжение в виде прямоугольной волны  $x_1$ . Амплитуда этой прямоугольной волны не зависит от амплитуды входного сигнала и равна единицы, а фаза (то есть моменты переключения) сдвинуты в сторону опережения за счет  $W_\phi(p)$ . В результате после блока перемножения сигналов  $A$  и  $x_1$  выходное напряжение ПКУ будет в виде сдвинутых по фазе прямоугольных импульсов.

Приведенная структурная схема двухканального ПКУ является довольно общей. Для обеспечения более полной независимости амплитудной характеристики от фазовой характеристики используется трехканальный ПКУ.

### Вопросы для самоконтроля к подразделу 5.3.5

- 1 Что называется псевдолинейным корректирующим устройством (ПКУ)?
- 2 Отличие ПКУ от нелинейного корректирующего устройства?
- 3 Как обеспечивается уменьшение постоянной времени апериодического звена в одноканальном ПКУ?
- 4 В чем недостаток такого ПКУ?
- 5 В чем отличие двухканального ПКУ от одноканального ПКУ?
- 6 Как обеспечивается отсутствие влияния фазы на изменение амплитуды в двухканальном ПКУ?
- 7 Как обеспечивается отсутствие влияния амплитуды на изменение фазы в двухканальном ПКУ?



## 6 Случайные процессы в нелинейных системах

### 6.1 Введение

При анализе автоматических систем, когда на вход подается заранее известный сигнал в виде единичного скачка или единичного импульса, то её состояние в любой момент времени можно определить однозначно. Такие системы с предсказуемым поведением регулируемой величины называются *детерминированные*. Они обладают полной определенностью поведения, то есть ведут себя всегда одинаково в одинаковых условиях.

Но есть такие автоматические системы, для которых характерна некоторая неопределенность поведения; работая в совершенно одинаковых условиях они ведут себя не адекватно. Возникает разброс регулируемой величины при одном и том же входном сигнале. Состояние таких систем может быть определено с некоторой вероятностью. Такие системы называются *стохастические*. В дальнейшем будем рассматривать только детерминированные системы.

В реальных условиях любая автоматическая система работает под действием случайных возмущений. Если в простейших системах регулирования случайные сигналы возмущения малы и не оказывают существенного влияния, то в сложных системах эти случайные возмущения могут полностью определять весь процесс работы системы управления. Так самолет при полете в реальных атмосферных условиях постоянно находится под непрерывным воздействием случайных сил и моментов, вызванных движением атмосферы. Необходимо правильно оценить эти случайные воздействия и обеспечить надежное управление самолетом [4,7,10].

Любая промышленная автоматическая система имеет внутренние помехи. Кроме этого, она работает не изолированно, а совместно с другими системами, которые своими электромагнитными полями наводят помехи в работе датчиков, что приводит к искажению информации. Устранить влияние этих случайных возмущений (шумов и помех) на работу автоматических систем принципиально невозможно. Они порождены теми же физическими явлениями, которые используются для управления системой. Необходимо свести это влияние к минимуму. А для этого надо научиться правильно их оценивать и на этой основе определять действительную точность работы автоматической системы.

***Анализ работы автоматической системы под действием случайных воздействий является предметом статистической (вероятностной) теории управления.***

Случайные возмущения обычно накладываются на полезный сигнал. В результате полезный сигнал становится случайной функцией времени. Вследствие этого и регулируемая величина так же становится случайной функцией времени. При этом математическое ожидание регулируемой величины пред-

ставляет собой выходной полезный сигнал, а случайные колебания (флуктуация) выходного полезного сигнала становится *случайной ошибкой системы*. Задача исследования работы такой автоматической системы состоит в определении вероятностных характеристик случайной ошибки при работе системы.

## 6.2 Основные характеристики случайного процесса

Для расчета систем управления при случайных воздействиях используется математический аппарат теории случайных функций.

***Случайная функция, изменяющаяся во времени, называется случайным процессом.***

Конкретный вид случайного процесса называется *реализацией случайного процесса*. Совокупность всех возможных реализаций образуют *ансамбль случайного процесса*. Вероятностный метод исследования случайных процессов не ставит задачу изучения каждой реализации; его задача в изучении свойств всего множества случайных процессов в целом с помощью усреднения свойств ансамбля. При фиксированном значении времени получаем сечение ансамбля случайных процессов и *усредненное значение по множеству*. При рассмотрении одного случайного процесса при  $t \rightarrow \infty$  определяем *усредненное значение по времени*.

***Случайные процессы считаются эргодическими, если среднее значение по множеству соответствует среднему значению по времени.***

Свойство эргодичности случайного процесса имеет важное практическое значение. Для большинства систем экспериментально получить множество всех возможных реализаций случайного процесса в один и тот же момент времени сложно. Получить конкретный вид одного случайного процесса за достаточно большой промежуток времени – намного проще. Тогда по этой характеристике можно оценить параметры всей совокупности случайных процессов.

Случайные процессы подразделяются на стационарные и нестационарные.

***В стационарном случайном процессе его вероятностные характеристики не изменяются во времени.***

***В нестационарном случайном процессе его вероятностные характеристики изменяются с течением времени.***

Можно считать, что стационарный случайный процесс – это установившийся процесс, а нестационарный процесс – это динамический процесс. В дальнейшем будем рассматривать стационарные процессы.

Вероятность возникновения случайного процесса (события) по Колмогорову определяется совокупностью аксиом:

- каждому событию  $x$  из  $n$  возможных соответствует неотрицательное действительное число  $P(x)$ , называемое вероятностью;

- вероятность достоверного события равно единице; вероятность невозможного события равна нулю;
- вероятность случайного события  $0 \leq P(x) \leq 1$ ;
- вероятность несовместимых событий, образующих полную группу, равна единице  $P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) = 1$ .

Для описания случайного процесса надо знать его закон распределения вероятности. Таким типовым законом распределения для анализа автоматических систем принимается нормальное распределение или распределение Гаусса. Практически можно считать, что всякая непрерывная случайная величина при достаточно большом числе независимых случайных воздействий имеет нормальное распределение.

Количественными характеристиками (оценками) случайных процессов являются: математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция.

**Математическое ожидание**  $\tilde{x}$  – усредненная величина, относительно которой располагаются возможные реализации случайного процесса.

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) P(x) \cdot dx,$$

где  $x(t)$  - реализация случайного процесса;

$P(x)$  - вероятность данной случайной реализации.

В результате получили *усредненное значение по множеству* или статистическое среднее значение. В свою очередь, *среднее значение по времени* определяется

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

Для эргодического стационарного случайного процесса всякое среднее по множеству равно среднему по времени и эти величины постоянные, не зависят от времени  $t$ , значит  $\tilde{x} = \bar{x}$ . В дальнейшем математическое ожидание будем обозначать  $m_x$ . Если математическое ожидание равно нулю, то такой случайный процесс называется *центрированным* ( $m_x = 0$ ).

**Дисперсия** ( $D_x$ ) является мерой отклонения случайной величины  $x(t)$  от математического ожидания  $m_x$ .

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_x)^2 dt$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия определяют некоторый «коридор», в котором с определенной вероятностью располагается случайный процесс. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины.

Кроме дисперсии для оценки отклонения случайной величины используют *среднеквадратичное отклонение* (СКО)  $\sigma_x$ .

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

Эта величина удобна тем, что имеет такую же размерность, что и сама случайная величина. Поставим следующий вопрос: какова изменчивость случайного

процесса в пределах этого «коридора» в котором располагается случайный процесс. Какова статистическая зависимость в случайном процессе между двумя произвольно выбранными сечениями по времени? (рисунок 6.1). Это определяется с помощью *корреляционной функции*.

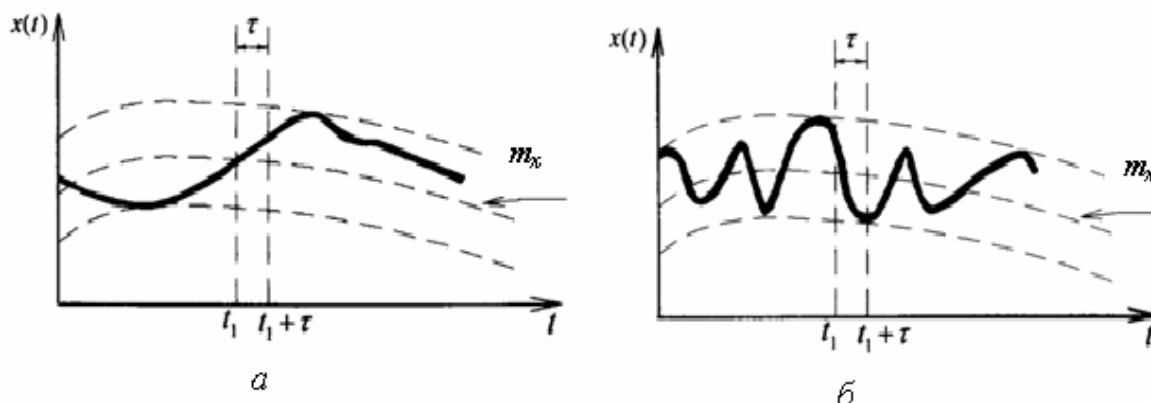


Рисунок 6.1 – Реализация двух случайных процессов с одинаковым математическим ожиданием и дисперсией

**Корреляционная (автокорреляционная) функция  $R(\tau)$**  является количественной оценкой взаимосвязи между предыдущим и последующим значением случайного процесса, через промежутки времени  $\tau$ .

$$R(\tau) = [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt$$

Для стационарного эргодического случайного процесса корреляционная функция не будет зависеть от текущего значения времени  $t$  и будет определяться только временным сдвигом между временем  $t_1$  и  $t_1 + \tau$ , то есть от  $\tau$ .

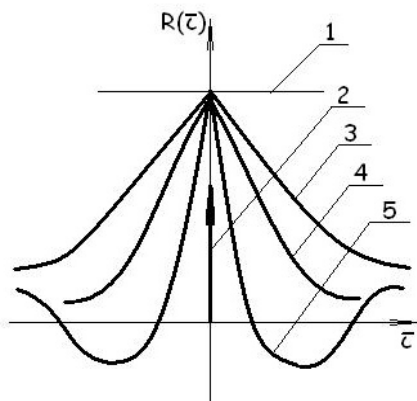


Рисунок 6.2 – График корреляционной функции

Для более наглядного анализа вероятностной взаимосвязи случайного процесса при увеличении времени сдвига  $\tau$ , то есть при  $1\tau, 2\tau, 3\tau, \dots, n\tau$  строится график зависимости корреляционной функции от  $\tau$  или график  $R(t)$  (рисунок 6.2). Если случайный процесс является фактически постоянной величиной на всем протяжении времени  $t$ , то и корреляционная функция является постоянной величиной при любом значении  $\tau$  или  $R(\tau) = a^2$  (прямая 1).

Если в исследуемом процессе нет никакой связи между предыдущим и последующим его значением, то фактически нет взаимосвязи в изменения корреляционной функции. Она при любом значении  $\tau \neq 0$  равна нулю и называется  $\delta$ -функцией (прямая 2 по оси ординат).

$$R(\tau) = C^2 \cdot \delta(\tau),$$

где  $C^2$  - интенсивность случайного процесса.

Такой случайный процесс называется *белый шум* или *абсолютно случайный процесс*. Это свойство определяет его особую роль как простейшей модели случайного процесса. Значение  $R(\tau) = C^2 \cdot \delta(\tau)$  принимается, если о случайном процессе ничего не известно.

Таким образом, чем меньше вероятностная взаимосвязь между  $x(t)$  и  $x(t+n\cdot\tau)$ , тем меньше значение  $R(\tau)$  и тем быстрее изменяется случайный процесс. На рисунке 6.1 изображена реализация двух случайных процессов с одинаковым математическим ожиданием и дисперсией. Случайный процесс на рисунке 6.1 а) изменяется медленнее, поэтому вероятностная взаимосвязь при увеличении  $\tau$  более заметная. Соответственно и корреляционная функция изменяется медленно (кривая 3). Случайный процесс на рисунке 6.1 б) изменяется быстрее, поэтому вероятностная взаимосвязь слабая. Поэтому корреляционная функция быстро уменьшается (кривая 4). Математически такая корреляционная функция описывается уравнением

$$R(\tau) = R(0)e^{-\alpha|\tau|} = D_x e^{-\alpha|\tau|}$$

Если случайный процесс имеет периодическую составляющую, то корреляционная функция тоже имеет периодическую составляющую (кривая 5) и описывается уравнением

$$R(\tau) = R(0)e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$$

Если случайная величина изменяется как гармонический процесс, то корреляционная функция тоже в виде гармонической функции.

$$R(\tau) = R(0) \cdot \cos \omega\tau$$

Покажем основные свойства корреляционных функций, которые будут использованы при расчете автоматических систем:

1) начальное значение корреляционной функции при  $\tau = 0$  максимальное и равно квадрату СКО

$$R(0) = D_x = \sigma^2;$$

2) с увеличением  $\tau$  взаимосвязь между  $x(t)$  и  $x(t+\tau)$  ослабевает и  $R_x(\tau)$  уменьшается

$$|R_x(\tau)| \leq D_x;$$

3) в стационарном случайном процесс  $R(\tau)$  симметричная относительно оси ординат

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau);$$

4) при рассмотрении двух случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  и для оценки статистической связи между ними (корреляции между ними) применяется *взаимная корреляционная функция*

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt.$$

Взаимная корреляционная функция обладает теми же свойствами, что и корреляционная (точнее, автокорреляционная) функция. Если эти два случай-

ных процесса друг с другом никак не связаны (статистически независимы), то  $R_{xy}(\tau) = 0$

### 6.3 Спектральная плотность случайного процесса

Понятие о спектральной плотности связано с разложением стационарного случайного процесса на гармонические составляющие, подобные обычному разложению в ряд Фурье. Это позволяет при расчете автоматических систем, использовать частотные методы анализа.

**Спектральная плотность**  $S_x(\omega)$  случайного процесса  $x(t)$  характеризует спектральный (частотный) состав случайной величины и представляет собой частотную функцию для средних значений квадратов амплитуд гармоник, на которые может быть разложен случайный процесс.

Для стационарного случайного процесса спектральная плотность  $S_x(\omega)$  может быть получена как изображение Фурье корреляционной функции  $R_x(\tau)$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

С помощью обратного преобразования Фурье можно определить корреляционную функцию через спектральную плотность

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

На рисунке 6.3 показаны графики корреляционной функции  $R_x(\tau)$  (смотри рисунок 6.2) и соответствующие им графики спектральной плотности  $S(\omega)$ . Это соотношение аналогично соотношению между переходной и частотной характеристикой системы: чем продолжительнее переходный процесс, тем уже его частотная характеристика. При рассмотрении случайных процессов: чем шире график корреляционной функции (кривые 3, 4), тем уже график спектральной плотности и наоборот.

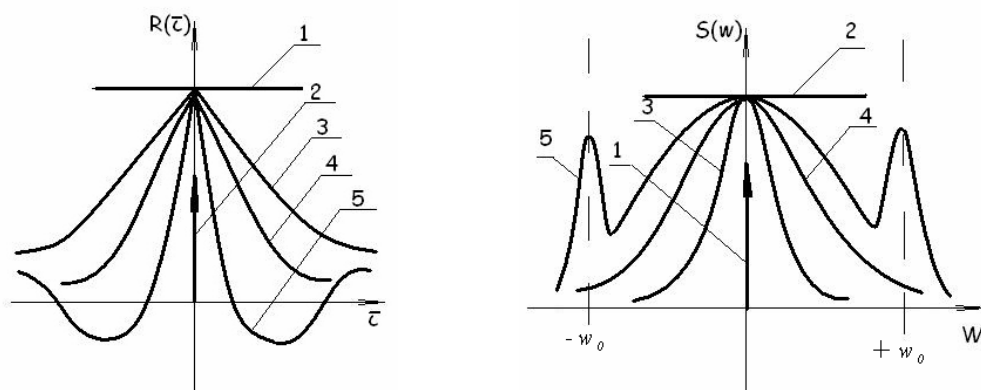


Рисунок 6. 3 – Корреляционные функции и соответствующие спектральные плотности центрированных стационарных процессов

В предельном случае, когда случайная величина  $x(t)$  является постоянной величиной и корреляционная функция тоже постоянная и равна  $D_x = a^2$

(прямая 1), то спектральная плотность существует только при нулевой частоте и равна

$$S_x(\omega) = 2\pi a^2 \delta(\omega)$$

В другом предельном случае, когда случайная величина  $x(t)$  является абсолютно случайным процессом (белый шум), то корреляционная функция существует только при  $\tau = 0$  (прямая 2). Спектральная плотность такого случайного процесса равномерно распределена по всем частотам и равна

$$S_x(\omega) = C^2$$

Для непериодического случайного процесса (кривые 3, 4) корреляционная функция аппроксимируется  $R(\tau) = D_x \cdot a^{-\alpha|\tau|}$ , тогда спектральная плотность определяется

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Если случайная величина  $x(t)$  имеет периодическую составляющую при  $\omega = \omega_0$ , то спектральная плотность при частотах  $\omega = +\omega_0$  и  $\omega = -\omega_0$  будет иметь соответствующие пики (кривая 5). Корреляционная функция такого случайного процесса аппроксимируется  $R(\tau) = D_x \cdot a^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$ . Спектральная плотность определяется

$$S_x(\omega) = \frac{D_x\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{D_x\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2}$$

Одним из основных параметров работы системы при случайных воздействиях является среднеквадратичное отклонение, которое характеризует отклонение случайной величины от его среднего значения. Если известна спектральная плотность сигнала  $S(\omega)$ , то при  $\tau = 0$  можно определить дисперсию

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) a^{j\omega 0} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cdot d\omega$$

Тогда среднеквадратичное отклонение (СКО)

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{R_x(0)}$$

По полученным основным характеристикам случайного процесса исследование автоматической системы на статистическую точность работы проводят в следующей последовательности:

- по заданному случайному процессу определяют его корреляционную функцию  $R_x(\tau)$ ;
- по корреляционной функции  $R_x(\tau)$  определяют спектральную плотность сигнала на входе системы  $S_x(\omega)$ ;
- по известной частотной передаточной функции системы  $W(j\omega)$  определяют спектральную плотность на выходе системы  $S_y(\omega)$ ;
- по полученной спектральной плотности на выходе системы  $S_y(\omega)$  определяют корреляционную функцию выходного сигнала  $R_y(\tau)$ ;

- по корреляционной функции выходного сигнала  $R_y(\tau)$  определяют дисперсию  $D_y = R_y(0)$  и среднеквадратичное отклонение регулируемой величины.

#### **6.4 Анализ точности работы линейной системы при случайном воздействии**

Если входное воздействие, приложенное к линейной системе, является случайным стационарным процессом  $x(t)$ , то выходная величина  $y(t)$  тоже будет случайным стационарным процессом. При этом предполагается, что рассматриваемая система устойчива. Ясно, что в этих условиях судить о точности работы системы нужно не по мгновенным значениям выходной величины, а по некоторым средним значениям, которые вычисляются по спектральной плотности выходного сигнала  $S_y(\omega)$ .

Пусть спектральная плотность входного сигнала  $S_x(\omega)$ , тогда спектральная плотность выходного сигнала  $S_y(\omega)$  определяется (без вывода) [5, 9, 10]

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega)$$

***Спектральная плотность выходного сигнала автоматической системы равна спектральной плотности входного сигнала умноженного на квадрат модуля частотной характеристики исследуемой системы.***

Закон распределения случайной величины при прохождении ее через автоматическую систему в общем случае может меняться. Но если на входе линейной системы закон распределения нормальный, то и на выходе системы можно принять нормальное распределение.

Пусть математическое ожидание  $m_x$  стационарного процесса  $x(t)$ , на входе линейной системы не равно нулю, тогда на основании принципа суперпозиции для линейных систем этот случайный процесс на входе системы можно представить

$$x_I(t) = m_x + x^{\circ}(t),$$

где  $x^{\circ}(t)$  - центрированный случайный процесс на входе системы.

В этом случае математическое ожидание на выходе системы  $m_y$  определяется, если  $m_x$  умножить на частотную передаточную функцию при  $\omega = 0$

$$m_y = W(0) \cdot m_x$$

Когда на систему одновременно действует случайный сигнал управления  $x_a(t)$  и случайный сигнал возмущения  $x_n(t)$ , то спектральная плотность ошибки регулирования  $S_{\text{ош}}(\omega)$  определяется

$$S_{\text{ош}}(\omega) = |W_a(j\omega)|^2 S_a(\omega) + |W_n(j\omega)|^2 S_n(\omega),$$

где  $S_a(\omega)$  - спектральная плотность сигнала управления;  
 $S_n(\omega)$  - спектральная плотность сигнала возмущения;  
 $W_a(j\omega)$  - передаточная функция по ошибке регулирования;  
 $W_n(j\omega)$  - передаточная функция по возмущению.



Дисперсия ошибки регулирования  $D_y$  и общее среднеквадратичное ее значение  $\sigma_y$  определяется по формулам

$$D_y = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |W_a(j\omega)|^2 S_a(\omega) + |W_n(j\omega)|^2 S_n(\omega) \right] d\omega,$$

или  $D_y = D_a + D_n$ , или  $\sigma_y = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_n^2}$ .

**При подаче на вход системы случайных сигналов управления и возмущения общая среднеквадратичная ошибка определяется по теореме Пифагора по СКО управления и СКО возмущения**

Отметим преимущества и недостатки оценки точности работы системы по среднеквадратичной ошибке регулирования (СКО). С помощью СКО можно оценить вероятность появления ошибки сверху. Так оценивает усредненное, статистическое значение ошибки, а не величина мгновенного значения ошибки. Поэтому для систем, где недопустимы большие ошибки (хотя и кратковременные) применяется другой метод расчета. Кроме этого, полученное СКО справедливо для больших промежутков времени (при  $T \rightarrow \infty$ ), а ошибки, связанные с кратковременным переходным процессом, практически не учитываются.

Если спектральные плотности и частотные передаточные функции заданы в виде дробно-рациональных функций от  $\omega$ , то можно сразу определить дисперсию выходного сигнала  $D_y$ , образно говоря, минуя определения  $S_y(\omega)$  выходного сигнала и  $R_y(\tau)$  выходного сигнала. Значение дисперсии выходного сигнала определяется по табличному интегралу  $J_n$  в зависимости от порядка характеристического уравнения системы. Для этого подинтегральное выражение приводится к табличному виду

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{|H(j\omega)|^2},$$

где  $G(\omega) = b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$ ;

$$H(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n.$$

Покажем формулы вычисления табличного интеграла по коэффициентам передаточной функции

$$n = 1 \quad J_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1}; \quad n = 2 \quad J_2 = \frac{-b_0a_2 + b_1a_0}{2a_0a_1a_2};$$

$$n = 3 \quad J_3 = \frac{-b_0a_2a_3 + b_1a_0a_3 - b_2a_0a_1}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}.$$

Для более высокой степени характеристического уравнения вычисления этих табличных интегралов становится громоздким. Поэтому используются другие методы статистического анализа.

Параметры системы, выбранные по критерию минимизации СКО необходимо оценить по возможности их технической реализации и, кроме этого, оценить изменившиеся динамические характеристики системы.

**Пример 6.1** – По критерию минимизации СКО Определить оптимальное значение коэффициента усиления  $K_y$  для заданной линейной следящей системы (рисунок 6.4). На вход системы поступает случайный сигнал, управляющая спектральная плотность которого  $S_\alpha = \frac{2D_\gamma \cdot \alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)}$ . Одновременно на вход поступают случайные помехи в виде белого шума со спектральной плотностью  $S_n(\omega) = C^2$

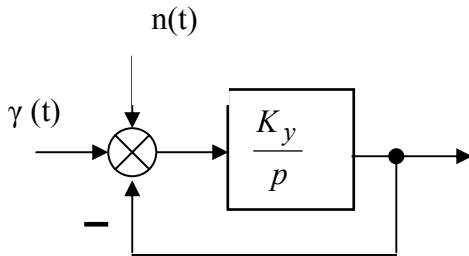


Рисунок 6.4 – Структурная схема системы к примеру 6.1

### РЕШЕНИЕ

1 Определяем частотную передаточную функцию по ошибке управления

$$W_{i\omega}(j\omega) = \frac{1}{1 + K_y / j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + K_y}$$

2 Частотная передаточная функция замкнутой системы

$$W_{i\omega}(j\omega) = \frac{K_y / j\omega}{1 + K_y / j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + K_y}$$

3 Дисперсия ошибки регулирования по управлению

$$\begin{aligned} D_{i\omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega}{j\omega + K_y} \right|^2 \frac{2D_\gamma \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2D_\gamma \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{|(j\omega + K_y)(\alpha + j\omega)|^2} = \\ &= \frac{2D_\gamma \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{|(j\omega)^2 + (K_y + \alpha)j\omega + K_y \alpha|^2} = 2D_\gamma \alpha \cdot J_2 \end{aligned}$$

4 Полученное подинтегральное выражение соответствует табличному интегралу  $J_2$

$$G(\omega) = \omega^2, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 0,$$

$$H(\omega) = (j\omega)^2 + (K_y + \alpha)j\omega + K_y \alpha, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = K_y + \alpha, \quad a_2 = K_y \alpha$$

$$J_2 = \frac{-b_0 a_2 + b_1 a_0}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{K_y \alpha}{2(K_y + \alpha)K_y \alpha} = \frac{1}{2(K_y + \alpha)}$$

5 Это значение  $J_2$  подставим в формулу  $D_{ou}$

$$D_{i\omega} = \frac{2D_\gamma \alpha}{2(K_y + \alpha)} = \frac{D_\gamma \alpha}{K_y + \alpha}$$

6 Дисперсия ошибки регулирования от случайных помех в виде белого шума

$$D_{пом} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K_y}{j\omega + K_y} \right|^2 \cdot C^2 d\omega = \frac{C^2 K_y^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|j\omega + K_y|^2} = C^2 K_y^2 J_1$$

7 Полученное подынтегральное выражение соответствует табличному интегралу  $J_1$

$$G(\omega) = 1, \quad b = 1$$

$$H(\omega) = j\omega + K_y, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = K_y$$

$$J_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1} = \frac{1}{2K_y}$$

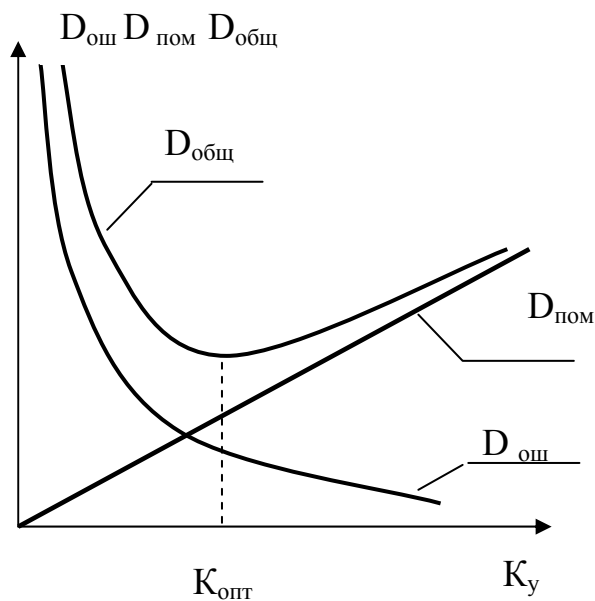
8 Это значение  $J_1$  подставим в формулу  $D_{iii}$

$$D_{пом} = \frac{C^2 K_y^2}{2K_y} = \frac{C^2 K_y}{2}$$

9 Дисперсия суммарной ошибки  $D_{общ}$

$$D_{общ} = D_{ош} + D_{пом} = \frac{D_\alpha \alpha}{K_y + \alpha} + \frac{C^2 K_y}{2}; \quad \sigma_{ош} = \sqrt{D_{ош} + D_{пом}}$$

10 Для определения оптимального значения  $K_y$ , при котором суммарная ошибка минимальная, построим графики  $D_{ош}$ ,  $D_{пом}$ ,  $D_{общ}$  в зависимости от  $K_y$  (рисунок 6.5).

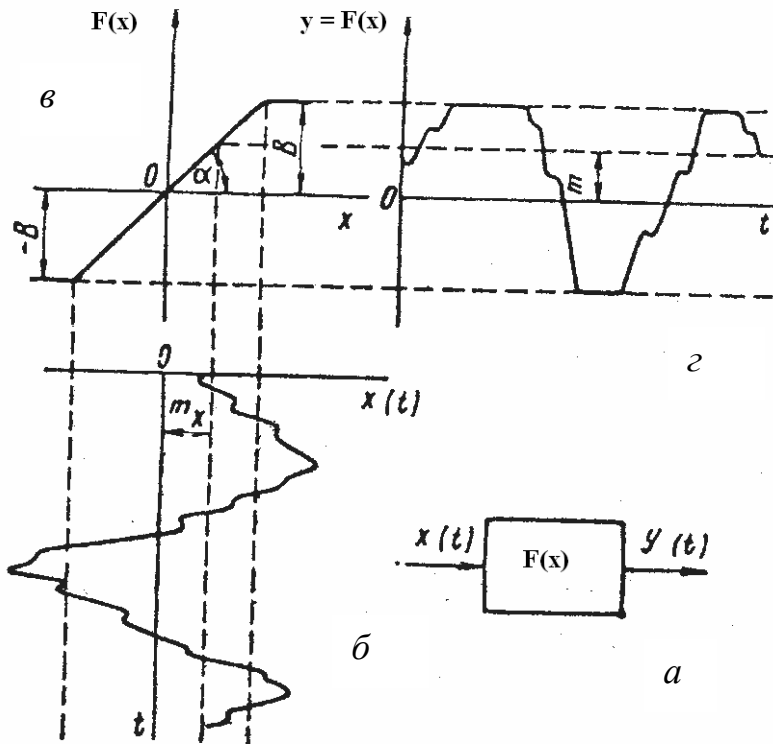


По графикам видно, что с увеличением  $K_y$  дисперсия ошибки по управлению  $D_{ош}$  уменьшается, а дисперсия ошибки от помех  $D_{пом}$  увеличивается. При большем коэффициенте усиления помехи свободнее проходят через систему. В зависимости от степени неопределенности сигнала управления (коэффициент  $\alpha$ ) и от интенсивности помех (коэффициент  $C^2$ ) можно получить разное оптимальное значение  $K_y$ .

Рисунок 6.5 – Графическое определение оптимального значения  $K_y$  к примеру 6.1

## 6.5 Особенности расчета случайного процесса в нелинейной системе

Если случайный сигнал проходит нелинейное звено, то расчет такой системы существенно усложняется по сравнению с расчетом прохождения случайного сигнала через линейное звено. На рисунке 6.6 показано прохождение случайного сигнала через нелинейный элемент с насыщением  $F(x)$ .



*a* - прохождение случайного сигнала через нелинейный элемент;

*б* - случайный входной сигнал;

*в* - нелинейный элемент с насыщением;

*г* - выходной сигнал после нелинейного элемента

Рисунок 6.6 – Прохождение случайного сигнала через нелинейный элемент

В данном примере за счет участка насыщения случайный сигнал не полностью проходит через нелинейный элемент и в результате дисперсия выходного сигнала или «коридор», в пределах которого размещаются выходной сигнал, будет меньше. На рисунке 6.6 показано, что часть случайного входного сигнала попала на зону насыщения и не прошла через нелинейное звено. Это привело к изменению дисперсии выходного сигнала (она уменьшается) и к уменьшению его среднего значения. Уточняем, уменьшение этих параметров выходного случайного сигнала произошло не за счет коэффициента усиления, а из-за нелинейности характеристики элемента в виде зоны насыщения.

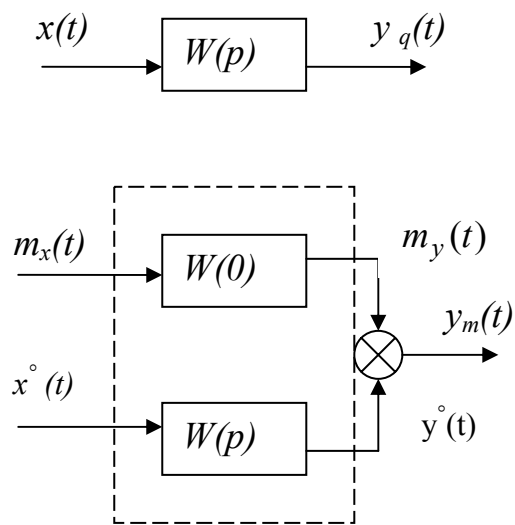
Рассмотрим вначале структурную схему *линейной системы управления* (рисунок 6.7), на вход которой подается случайный сигнал

$$x(t) = m_x(t) + x^\circ(t)$$

где  $m_x$  - математическое ожидание входного сигнала;

$x^\circ(t)$  - помехи и шумы входного сигнала, которые характеризуются дисперсией ( $D_x$ ).

В этой линейной системе, используя принцип суперпозиции, можно отдельно и независимо друг от друга определить математическое ожидание выходного сигнала  $m_y(t)$  и дисперсию случайной выходной величины  $y^\circ(t)$  (рисунк 6.7). Этот расчет показан в подразделе 6.4 и в примере 6.1.



$y_q(t)$  - действительный выходной сигнал

$y_m(t)$  - теоретически рассчитанный выходной сигнал

Рисунок 6.7 – Прохождение случайного сигнала через линейную систему управления

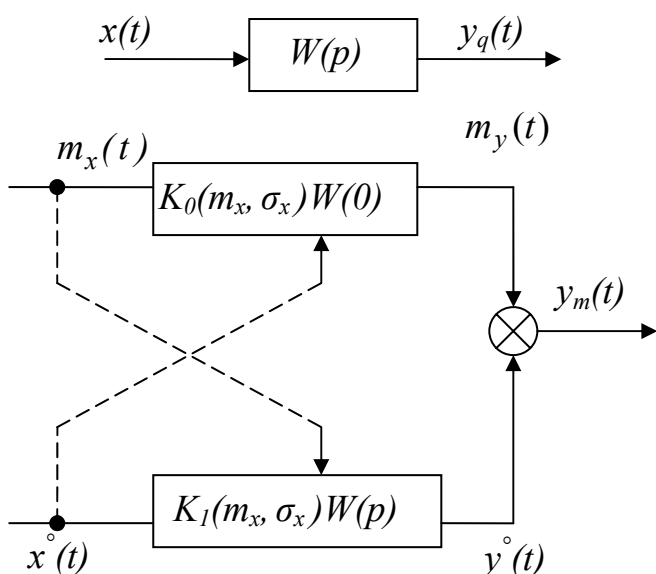


Рисунок 6.8 – Прохождение случайного сигнала через нелинейное звено

Если такой же случайный сигнал будет подан на нелинейную систему управления (рисунок 6.8), то математическое ожидание на выходе системы зависит от изменения дисперсии, а изменение дисперсии зависит от изменения математического ожидания. Эти две характеристики случайного процесса становятся взаимно связанными. Обозначим через  $K_0 (m_x, \sigma_x)$  эту взаимозависимость математического ожидания от дисперсии входного сигнала  $D_x$ . При расчете удобнее вместо дисперсии  $D_x$  использовать среднее квадратичное отклонение  $\sigma_x$ .

Соответственно обозначим через  $K_1 (m_x, \sigma_x)$  взаимосвязь среднего квадратичного отклонения от математического ожидания. Тогда

$$y_m(t) = m_y + y^\circ(t) = K_0 m_x + K_1 x^\circ(t)$$

Для нахождения этих коэффициентов  $K_0$  и  $K_1$  при расчете прохождения сигнала через нелинейное звено используется метод статистической линеаризации нелинейного элемента

**Метод статистической линеаризации основан на замене нелинейного элемента статистически эквивалентным линеаризованным элементом.**

Этот метод статистической линеаризации по общей идее (аналогичен методу гармонической линеаризации).

При гармонической линейаризации нелинейная характеристика элемента заменялась линейной, при которой в этой линейной зависимости постоянная составляющая и первая гармоника совпадала с постоянной составляющей и первой гармоникой данной нелинейной характеристики. Это осуществлялось с помощью разложения нелинейной характеристики в ряд Фурье и учитывалось только два первых члена ряда. Остальные гармоники, которые возникали на выходе данного нелинейного элемента не учитываются. Соответственно, не учитывались остальные члены ряда Фурье. Таким образом коэффициент гармонической линейаризации  $q_1(A)$  и  $q_2(A)$  зависит от амплитуды входного сигнала и от вида нелинейной характеристики.

При статистической линейаризации нелинейная характеристика элемента тоже заменяется на линейную, но по другим показателям. При этом среднее значение (или математическое ожидание) и дисперсия в полученной линейной характеристике совпадает со средним значением и дисперсией данной нелинейной характеристики. Таким образом, учитывается только два первых вероятностных момента случайного процесса (среднее значение и дисперсия), а остальные параметры случайного процесса не учитываются. Таким образом, коэффициенты статистической линейаризации  $K_0(m_x, \sigma_x)$ , и  $K_1(m_x, \sigma_x)$  зависят от закона распределения случайного процесса и от вида нелинейной характеристики.

## 6.6 Определение коэффициентов статистической линейаризации

Существуют два способа определения коэффициентов статистической линейаризации:

- *первый способ* – по равенству математического ожидания и дисперсии на выходе действительной нелинейной характеристики элемента  $m_{\text{дей}} , D_{\text{дей}}(y)$  и линейаризованной, то есть теоретически рассчитанной характеристикой  $m_{\tilde{y}}$  и  $D_{\text{теор}}(y)$

$$m_{\text{дей}} = m_{\tilde{y}}, \quad D_{\text{дей}}(y) = D_{\text{теор}}(y)$$

- *второй способ* – по минимуму среднеквадратической ошибки при замене действительной нелинейной характеристики линейаризованной характеристикой

$$\bar{\varepsilon}^2 = M \left\{ \left[ \sigma_{\text{дей}}(t) - \sigma_{\tilde{y}}(t) \right]^2 \right\} \rightarrow \min$$

Оба способа позволяют произвести приближенную статистическую линейаризацию, то есть без учета моментов распределения случайной величины третьего и более высокого порядка.

Математическое ожидание случайного стационарного процесса на выходе нелинейного элемента определено этими двумя способами практически совпадает. Пусть нам известна характеристика нелинейного элемента  $F(x)$  и плотность распределения случайного процесса. Тогда математическое ожидание на выходе нелинейного элемента

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \omega_1(x) \cdot dx,$$

Коэффициент статистической линеаризации по математическому ожиданию  $K_0(m_x, \sigma_x)$  можно определить, если известно математическое ожидание случайного стационарного процесса на входе  $m_x$ .

$$K_0(m_x, \sigma_x) = \frac{m_y}{m_x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \omega_1(x) \cdot dx}{m_x}$$

Значение этого коэффициента  $K_0(m_x, \sigma_x)$  для трех видов нелинейной характеристики при нормальном законе распределения показаны на графиках рисунков 6.9, 6.10, 6.11. Для удобства пользования этим графиками зависимости  $m_y = \varphi(m_x)$  даны в относительных значениях.

Для идеального реле

$$\frac{m_y K_0}{b} = f\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right),$$

где  $b$  - выходная величина реле;

$m_y$  - математическое ожидание выходной случайной величины;

$m_x$  - математическое ожидание входной случайной величины;

$\sigma_x$  - СКО входной величины.

Для реле с зоной нечувствительности

$$\frac{m_y K_0}{b} = f\left(\frac{m_x}{a}\right),$$

где  $a$  - зона нечувствительности реле

Для нелинейного элемента с зоной насыщения

$$\frac{m_y K_0}{b} = f\left(\frac{m_x}{a}\right),$$

где  $a$  - линейная часть характеристики

В графиках на рисунках 6.10 и 6.11 значение  $m_y K_0 / b$  дополнительно зависит от  $\sigma_x$ , которое тоже берется в относительных значениях  $\sigma_1 = \sigma_x / a$

Коэффициента статистической линеаризации по дисперсии выходного сигнала  $K_1(m_x, \sigma_x)$  можно определить разными способами и получаем различные значения  $K_1(m_x, \sigma_x)$ .

По первому способу для определения  $K_1^{(1)}(m_x, \sigma_x)$  в качестве критерия эквивалентности принимается, что среднее значение дисперсий действительного процесса  $[D_q(y)]$  и теоретически определенного  $[D_m(y)]$  должны быть равны

$$M[D_q(y)] = M[D_\delta(y)],$$

где  $M$  - знак усреднения

Дисперсия стационарного выходного сигнала определяется

$$D_m(y) = \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [y(t) - m_y]^2 \omega_l(y) \cdot dy$$

При заданной нелинейности элемента  $F(x)$  и заданной плотности распределения случайного процесса  $\omega_l(x)$  дисперсия стационарного выходного сигнала

$$D_m(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) \omega_l(x) \cdot dx - m_x^2$$

Тогда по заданному значению СКО входного случайного процесса  $\sigma_x$  и СКО выходного процесса  $\sigma_y$  определяем  $K_1^{(1)}(m_x, \sigma_x)$

$$K_1^{(1)}(m_x, \sigma_x) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) \omega_l(x) dt - m_x^2}}{\sigma_x}$$

Значения этого коэффициента  $K_1^{(1)}(m_x, \sigma_x)$  для трех видов нелинейной характеристики при нормальном законе распределения показаны на графиках рисунков 6.9, 6.10, 6.11. Они показаны в таких же относительных единицах, как для коэффициентов  $K_0(m_x, \sigma_x)$ .

По второму способу для определения  $K_1^{(2)}$  в качестве критерия эквивалентности принимается минимум квадрата разницы между действительным и теоретически определенном значением дисперсии выходного сигнала.

$$M[D_q(y) - D_m(y)]^2 \rightarrow \min$$

Этот минимум определяется с помощью нахождения производных по  $K_0$  и  $K_1^{(2)}$  и в результате получаем

$$K_1^{(2)}(m_x, \sigma_x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(x)(x - m_x) \omega_l(x) dt}{\sigma_x^2}$$

Полученное значение  $K_1^{(2)}$  по второму способу обычно меньше  $K_1^{(1)}$  по первому способу. В дальнейшем при расчете будем использовать  $K_1^{(1)}$

**Пример 6.2** – Определить коэффициенты статистической линеаризации по математическому ожиданию и по дисперсии выходного сигнала для идеального реле  $z_{\text{äüö}}(x) = b \cdot \text{sign } x$  при нормальной плотности распределения входного сигнала, то есть

$$\omega_l(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$



## РЕШЕНИЕ

1 Определяем математическое ожидание выходной величины для идеального реле

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \omega_1(x) dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} b \cdot \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx - \int_{-\infty}^0 b \cdot \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx \right\} =$$

$$= 2b \Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right),$$

где  $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  - интеграл вероятности для нормального закона распределения

2 Получаем коэффициент передачи по математическому ожиданию

$$K_0(m_x, \sigma_x) = \frac{m_y}{m_x} = \frac{2b}{m_x} \Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)$$

3 Коэффициент передачи по дисперсии выходного сигнала  $K_I^{(1)}(m_x, \sigma_x)$  (по первому способу вычисления)

$$K_I^{(1)}(m_x, \sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) \cdot \omega_1(x) dx - m_y^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} b^2 \omega_1(x) \cdot dx - \left[ 2b \Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\sigma_x} \left\{ 1 - 4\Phi^2\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где  $b$  - выходная величина идеального реле;

$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 dx = 1$  - при нормальной плотности распределения;

$m_y$  - получено в пункте 1 этого примера.

5 Коэффициент передачи дисперсии выходного сигнала (по второму способу вычисления)

$$K_I^{(2)} = \frac{1}{\sigma_x^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(x)(x-m_x)\omega_1(x) dx \right] = \frac{1}{\sigma_x^2 \sqrt{2\pi}} \left\{ - \int_{-\infty}^0 b(x-m_x) \exp\left(\frac{-m_x}{2\sigma_x}\right) dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} b(x-m_x) \exp\left(\frac{-m_x}{2\sigma_x}\right) dx \right\} = \frac{2b}{\sigma_x^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2\right]$$

Для различных видов нелинейных характеристик имеются графики для определения коэффициентов  $K_0$ ,  $K_1^{(1)}$ ,  $K_1^{(2)}$ . Графики статистической линейризации для  $K_0$ ,  $K_1^{(1)}$  идеального реле показаны на рисунке 6.9; для реле с зоной нечувствительности на рисунке 6.10; для усилителя с насыщением на рисунке 6.11.

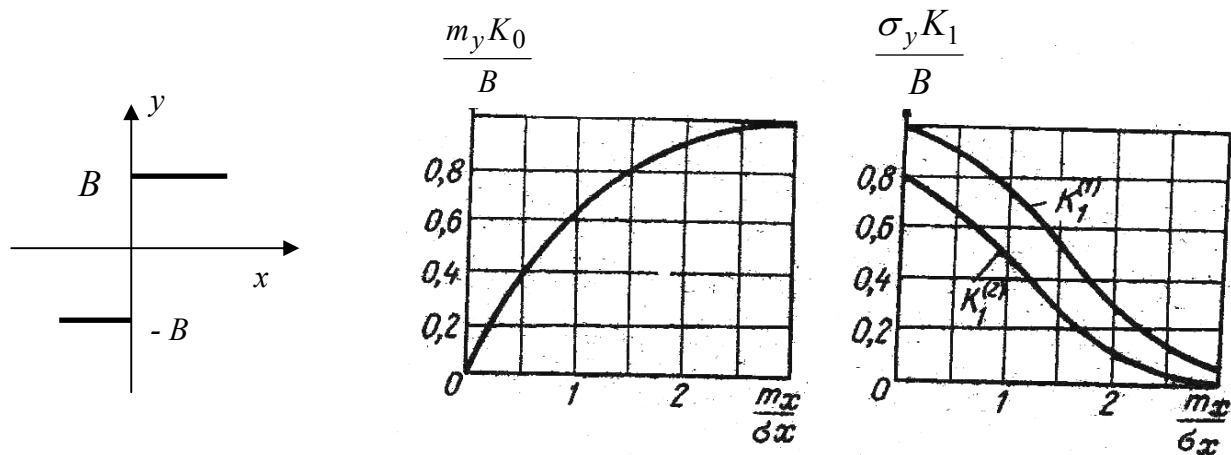


Рисунок 6.9 – Графики для определения коэффициентов статистической линейризации идеального реле

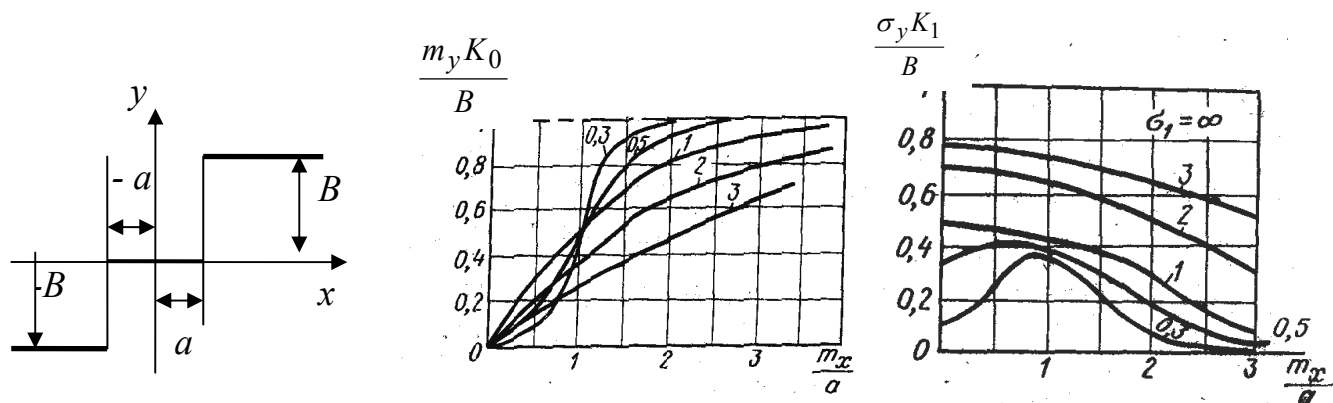


Рисунок 6.10 – Графики для определения коэффициентов статистической линейризации реле с зоной нечувствительности

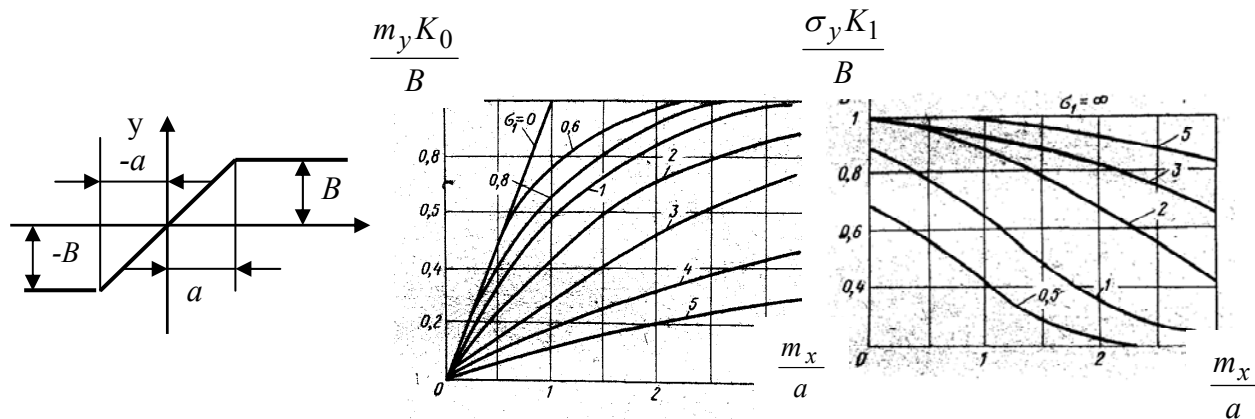


Рисунок 6.11 – Графики для определения коэффициентов статистической линейризации нелинейных элементов

## 6.7 Анализ нелинейных разомкнутых систем методом статистической линеаризации

Задача анализа нелинейных разомкнутых систем заключается в определении статистических характеристик выходного сигнала по известным статистическим характеристикам входного случайного сигнала.

Пусть на вход разомкнутой системы с нелинейным элементом  $F(x)$  и линейной частью с передаточной функцией  $W(p)$  действует стационарный случайный процесс  $x(t)$  с нормальным законом распределения (рисунок 6.12 а).

$$x(t) = m_x + x^\circ(t),$$

где  $m_x$  - математическое ожидание входного сигнала;  
 $x^\circ(t)$  - центрированная составляющая случайного процесса

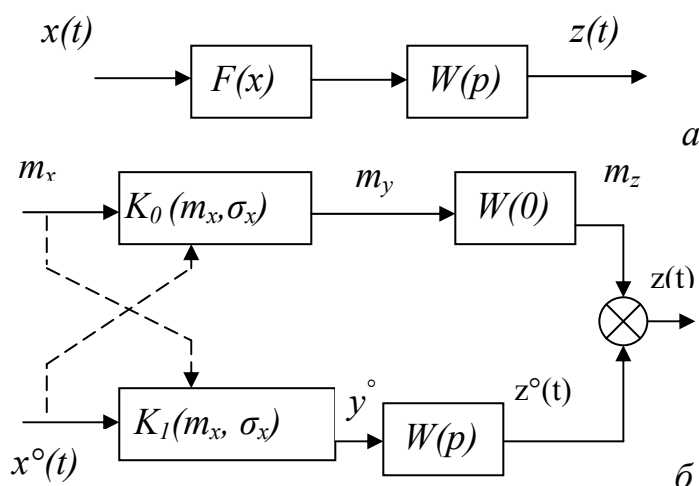


Рисунок 6.12 – Преобразование структурной схемы для определения  $m_y$  и  $y^\circ(t)$

Выходная величина этой разомкнутой системы тоже будет стационарным процессом

$$z(t) = m_z + z^\circ(t)$$

С помощью метода статистической линеаризации эту нелинейную систему при заданном значении входного случайного процесса  $m_x$  и  $\sigma_x$  можно считать линейной системой и представить в виде двух эквивалентных схем: для расчета математического ожидания выходной величины  $m_y$  (рисунок 6.12.б) и для расчета дисперсии составляющего случайного процесса  $y^\circ(t)$

В результате математическое ожидание случайного процесса выходного сигнала  $m_z$

$$m_z = K_0(m_x, \sigma_x) \cdot b \cdot W(0)$$

Составляющая случайного процесса выходного сигнала

$$z^\circ(t) = K_1(m_x, \sigma_x) \cdot b \cdot W(p),$$

где  $K_0(m_x, \sigma_x)$  - статистический коэффициент для данного нелинейного звена по математическому ожиданию, который зависит от  $m_x$  и  $\sigma_x$  входного сигнала;

$K_1(m_x, \sigma_x)$  - статистический коэффициент по случайной составляющей,  
 $b$  - коэффициент усиления нелинейного элемента звена;

$W(0) = W(p)|_{p=0}$  - коэффициент передачи линейной части системы.

Если центрированная составляющая случайного процесса на входе системы задана спектральной плотностью  $S_x(\omega)$ , то спектральная плотность выходного

сигнала  $S_z(\omega)$  определяется

$$S_z(\omega) = |W(j\omega)|^2 \cdot |K_I(m_x, \sigma_x) \cdot b|^2 \cdot S_x(\omega)$$

Дисперсию выходного сигнала можно определить с помощью стандартного интеграла, учитывая, что с помощью коэффициента гармонической нелинейная зависимость стала линеаризованной.

$$D_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 |K_I(m_x, \sigma_x) \cdot b|^2 \cdot S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) \cdot d\omega}{|H(j\omega)|^2}$$

**Пример 6.3** – Определить  $m_z$  и  $\sigma_z$  на выходе разомкнутой нелинейной системе (рисунок 6.12). На вход системы поступает стационарный случайный процесс, спектральная плотность которого  $S_x(\omega) = D_x \cdot a / (a^2 + \omega^2)$ . Математическое ожидание случайного процесса  $m_x$ . Нелинейный элемент в виде усилительного звена с зоной насыщения (рисунок 6.11) Линейная часть системы в виде аperiodического звена  $W(p) = K / (p + d)$ .

Числовые параметры:

- случайного процесса  $m_x = 6; D_x = 16 \text{ c}^{-2}; \alpha = 0,2;$
- нелинейного элемента  $b = 4; \alpha = 4;$
- аperiodического звена:  $K = 1; d = 2.$

## РЕШЕНИЕ

1 Определение  $m_y$  проводим с помощью графика зависимости  $K_0(m_x, \sigma_x)$  от  $m_x / a$  при заданных значениях  $D_x$  и  $\alpha$

$$m_x / \alpha = 6 / 4 = 1,5; \quad \sigma_1 = \sigma_x / \alpha = \sqrt{16} / 4 = 1$$

Тогда согласно графику (рисунок 6.11)  $K_0(m_x, \sigma_x) = 0,75$

2 Коэффициент усиления линейной части системы

$$W(0) = \frac{1}{p + 2} \Big|_{p=0} = 0,5$$

3 Математическое ожидание на выходе системы с учетом коэффициента усиления передаточной функции

$$m_z = K_0(m_x, \sigma_x) \cdot b \cdot W(0) = 0,75 \cdot 4 \cdot 0,5 = 1,5$$

4 Определение  $K_I(m_x, \sigma_x)$  проведем с помощью графика (рисунок 6.11)

$$\text{при } m_x / \alpha = 1,5 \text{ и } \sigma_1 = 1, \text{ тогда } K_I^{(1)} = 0,45$$

5 Дисперсия выходного сигнала определим с помощью стандартного интеграла  $J_2$ . Учитывая, что с помощью коэффициента статической линеаризации

нелинейный элемент можно рассматривать как линеаризованный при заданных  $m_x$  и  $\sigma_x$ .

$$D_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(j\omega)|^2 |K_1(m_x, \sigma_x) b|^2 S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 2} \right|^2 |0,45 \cdot 4|^2 \frac{16 \cdot 0,2 d\omega}{(\omega^2 + 0,2^2)}$$

$$= \frac{10,4}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{|(j\omega)^2 + 2,2j\omega + 0,4|^2} = 10,4 \cdot J_2$$

6 Определяем значение стандартного интеграла  $J_2$

$$G(\omega) = 1 \qquad b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

$$H(\omega) = (j\omega)^2 + 2,2j\omega + 0,4 \qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 2,2, \quad a_2 = 0,4$$

$$J_2 = \frac{-b_0 a_2 + b_1 a_1}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{0 + 1 \cdot 2,2}{2 \cdot 1 \cdot 2,2 \cdot 0,4} = 1,25$$

7 Средняя квадратичная ошибка выходного сигнала

$$D_z = 10,4 \cdot 1,25 = 13,0 \quad \sigma_z = \sqrt{D_z} = 3,6$$

ОТВЕТ На выходе этой системы математическое ожидание уменьшилось с  $m_x = 6$  до  $m_z = 1,5$ . СКО уменьшилось с  $\sigma_x = 4$  до  $\sigma_z = 3,6$ .

## 6.8 Анализ нелинейных замкнутых систем методом статистической линеаризации

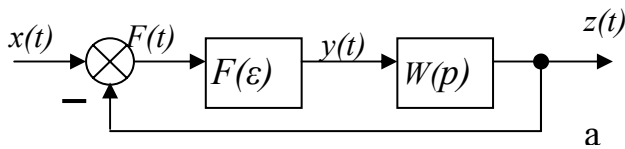
Задача анализа нелинейной замкнутой системы чаще всего заключается в определении статистической характеристики ошибки регулирования, которую в общем виде можно представить в виде

$$F(t) = m_\varepsilon + E^\circ(t),$$

где  $m_\varepsilon$  - среднее значение ошибки;  
 $E^\circ(t)$  - центрированная составляющая случайной ошибки.

Структурная схема замкнутой системы с одним нелинейным безинерционным звеном может быть приведена к виду, показанному на рисунке 6.13 а.

Для определения ошибки регулирования заданная структурная схема преобразуется с помощью коэффициентов статистической линеаризации на две замкнутые взаимосвязанные линеаризованные схемы, в которых нелинейное звено заменено двумя линейными звеньями. Одна схема с коэффициентом статистической линеаризации  $K_0(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ . Вторая схема с коэффициентом статистической линеаризации  $K_1(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ . Пусть на вход системы действует стационарный случайный сигнал  $x(t)$ .



$$x(t) = m_x + x^\circ(t)$$

Рассматривая преобразованную структурную схему нелинейной системы как линеаризованную систему определяем математическое ожидание ошибки регулирования  $m_\varepsilon$  при заданном математическом ожидании входного процесса  $m_x$  и передаточной функции ошибке регулирования  $W_{ou}(0)$

$$m_\varepsilon = W_{ou}(0) \cdot m_x = \frac{1 \cdot m_x}{1 + K_0(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \cdot W(0)},$$

где  $W(0)$  - коэффициент усиления линейной части системы.

При определении дисперсии ошибки регулирования  $D_\varepsilon$  необходимо учесть динамическую характеристику системы. В данном случае это частотная передаточная функция ошибки регулирования линейной части системы  $W_{ou}(j\omega)$ .

По известной спектральной плотности входного случайного сигнала  $S_x(\omega)$ , дисперсия ошибки регулирования определяется

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [W_{i0}(j\omega)]^2 S_x(\omega) d\omega$$

На основании этих двух уравнений по определению  $m_\varepsilon$  и  $D_\varepsilon$  можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} m_\varepsilon - \frac{m_x}{1 + K_0(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \cdot W(0)} = 0 \\ D_\varepsilon - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + K_1(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) W(j\omega)} \right|^2 \cdot S_x(\omega) d\omega = 0 \end{cases}$$

Эта система уравнений для определения  $m_\varepsilon$  и  $D_\varepsilon$  содержит два неизвестных коэффициента статистической линеаризации  $K_0(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  и  $K_1(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ , которые как раз и зависят от искомым значений  $m_\varepsilon$  и  $D_\varepsilon$ . Причем, определение  $K_0(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  в первом уравнении зависит от  $D_\varepsilon$  второго уравнения, а определение  $K_1(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  - от значения  $m_\varepsilon$  первого уравнения. Решение этой системы уравнения можно провести методом последовательных приближений. Для это-

го предварительно задаваясь возможным значением  $m_{\varepsilon 0}$  и  $D_{\varepsilon 0}$  определяем значение коэффициентом  $K_0^{\circ}$  и  $K_1^{\circ}$ . По этим коэффициентам находим  $m_{\varepsilon 1}$  и  $D_{\varepsilon 1}$  первого приближения. И по этим данным снова определяем  $K_0^*$  и  $K_1^*$ . По этим коэффициентам находим  $m_{\varepsilon 2}$  и  $D_{\varepsilon 2}$  второго приближения, затем третьего приближения и так далее, пока при  $n$ -ом приближении значения  $m_{\varepsilon n}$  и  $D_{\varepsilon n}$  в этих двух уравнения не совпадут с предыдущим значением с достаточной точностью.

**Пример 6.4** – Определить статистические параметры ошибки регулирования  $m_{\varepsilon}$  и  $D_{\varepsilon}$  замкнутой системы (рисунок 6.13) с нелинейным элементом с зоной насыщения (рисунок 6.11). Параметры стационарного случайного процесса такие же, как в примере 6.3. Параметры апериодического звена  $K = 1$ ,  $d = 1$

### РЕШЕНИЕ

1 В предварительном (нулевом) приближении принимаем, что на входе обычное линейное звено с коэффициентом усиления  $b = 4$ . При этом принимаем, что зоны насыщения нет. Передаточная функция ошибки регулирования при таком предварительном приближении при  $p = 0$

$$W_{\text{ош}}(0) = \frac{1}{1 + bW(0)} = \frac{1}{1 + 4 \cdot 1} = 0,2$$

Тогда по передаточной функции ошибки регулирования определяем математическое ожидание  $m_{\varepsilon 0}$  ошибки регулирования

$$m_{\varepsilon 0} = W_{\text{ош}}(0) \cdot m_x = 0,2 \cdot 6 = 1,2$$

Таким образом, в первом приближении определяем дисперсию  $D_{\varepsilon 0}$  ошибки регулирования и СКО

$$D_{\varepsilon 0} = W_{\text{ош}}(0) D_x = 0,2 \cdot 16 = 3,2, \quad \sigma_{\varepsilon 0} = 1,8$$

2 Определяем коэффициенты линеаризации при предварительном (нулевом) приближении

$$m_{\varepsilon 0} / \alpha = 1,2 / 4 = 0,3, \quad \sigma_1 = \sigma_{\varepsilon 0} / \alpha = 1,8 / 4 = 0,45$$

Согласно графикам (рисунок 6.11 б) определяем  $K_0^*$  и  $K_1^*$ .

$$K_0^* = m_{\varepsilon 1} / b = 0,22; \quad K_1^* = 0,45,$$

где  $K_0^*$  и  $K_1^*$  – коэффициенты статистической линеаризации первого приближения

3 Передаточная функция ошибки регулирования по математическому ожиданию с учетом полученного  $K_0^*(m_{\varepsilon 0}, \sigma_{\varepsilon 0}) = 0,22$

$$W_{\text{ш}}(0) = \frac{1}{1 + K_0^* \cdot b \cdot W(0)} = \frac{1}{1 + 0,22 \cdot 4 \cdot 1} = 0,52$$

4 Математическое ожидание ошибки регулирования в первом приближении

$$m_{\varepsilon 1} = K_0^*(m_{\varepsilon 0}, \sigma_{\varepsilon 0}) \cdot b \cdot W_{\text{ш}}(0) = 0,22 \cdot 4 \cdot 0,52 = 0,456$$

5 Передаточная функция и частотная передаточная функция ошибки регулирования с учетом коэффициента статистической линеаризации по дисперсии в первом приближении ( $K_1^*$ ).

$$W_{ou}(p) = \frac{1}{1 + K_1^* W(p)} = \frac{1}{1 + \frac{K_1^* \cdot 1}{(p+1)}} = \frac{p+1}{p+1 + K_1^*}$$

$$W_{ou}(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 1 + K_1^*} = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 1 + 0,45}$$

6 Дисперсия ошибки регулирования определим с помощью стандартного интеграла  $J_2$

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{ocu}(j\omega)|^2 |K_1^*(m_\varepsilon \sigma_\varepsilon) \cdot b|^2 \cdot S_x(\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega + 1}{j\omega + 1 + 0,45} \right|^2 |0,45 \cdot 4|^2 \frac{16 \cdot 0,2 \cdot d\omega}{(\omega^2 + 0,2^2)} = \frac{9,1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + 1)d\omega}{(j\omega)^2 + 1,66\omega + 0,29} = 9,1J_2$$

Определяем значение стандартного интеграла  $J_2$

$$\sigma(\omega) = \omega^2 + 1 \quad b_0 = 1, b_1 = 1$$

$$H(\omega) = (j\omega)^2 + 1,66j\omega + 0,29 \quad a_0 = 1, a_1 = 1,66, a_2 = j,29$$

$$J_2 = \frac{-b_0 \cdot a_2 + b_1 a_1}{2 \cdot a_0 a_1 a_2} = \frac{-1 \cdot 0,29 + 1 \cdot 1,66}{2 \cdot 1 \cdot 1,66 \cdot 0,29} = \frac{1,37}{0,96} = 1,42$$

Дисперсия ошибки регулирования и СКО в первом приближении

$$D_{\varepsilon 1} = 9,1 J_2 = 9,1 \cdot 1,42 = 12,9; \quad \text{СКО } \sigma_{\varepsilon 1} = \sqrt{D_{\varepsilon 1}} = 3,59$$

В результате по предварительному приближению  $m_{\varepsilon 0} = 1,2, \quad \sigma_{\varepsilon 0} = 0,89$

По первому приближению  $m_{\varepsilon 1} = 0,456, \quad \sigma_{\varepsilon 1} = 3,59$

7 Определяем коэффициенты линеаризации второго приближения

$$m_{\varepsilon 1} / a = 0,456 / 4 = 0,11, \quad \sigma_1 = \sigma_{\varepsilon 1} / a = 3,59 / 4 = 0,88$$

Согласно графикам (рисунок 6.11)

$$K_0^{**} = 0,18, \quad K_1^{**} = 0,4$$

8 Математическое ожидание при втором приближении

$$m_{\varepsilon 2} = K_0^{**} \cdot b \cdot W_{ou}(0) = \frac{0,18 \cdot 4 \cdot 1}{1 + 0,18 \cdot 4 \cdot 1} = \frac{0,72}{1,72} = 0,42$$

9 Частотная передаточная функция ошибки регулирования с учетом коэффициента  $K_1^{**}$



$$W_{ou}(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 1 + K_I^{**}} = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 1,4}$$

$$D_{ou} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega + 1}{j\omega + 1,4} \right|^2 |0,4 \cdot 4|^2 \frac{16 \cdot 0,2 \cdot d\omega}{\omega^2 + 0,2^2} = \frac{8,2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + 1)d\omega}{|(j\omega)^2 + 1,6j\omega + 0,28|^2} = 8,2J_2$$

$$J_2 = \frac{-1 \cdot 0,28 + 1 \cdot 1,6}{2 \cdot 1 \cdot 1,6 \cdot 0,28} = \frac{1,32}{0,89} = 1,47, \quad D_{\varepsilon_2} = 8,2 \cdot 1,47 = 12,1, \quad \sigma_{\varepsilon_2} = 3,4$$

10 Определяем коэффициенты линеаризации третьего приближения

$$m_{\varepsilon_2} / a = 0,42 / 4 = 0,1, \quad \sigma_1 = \sigma_{\varepsilon_2} / a = 3,4 / 4 = 0,85$$

$$K_0^{***} = 0,17, \quad K_1^{***} = 0,38$$

11 При этих значениях  $K_0^{***}$ , и  $K_1^{***}$  определяем значение  $m_{\varepsilon_3}$  и  $D_{\varepsilon_3}$

$$m_{\varepsilon_3} = \frac{0,17 \cdot 4 \cdot 1}{1 + 0,17 \cdot 4} = 0,4$$

$$D_{\varepsilon_3} = \frac{7,4}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + 1)d\omega}{|(j\omega)^2 + 1,58j\omega + 2,8|^2} = 7,4 \cdot 1,46 = 10,8, \quad \sigma_{\varepsilon_3} = 3,28$$

12 Проверка точности вычисления по второму и третьему приближению

$$\Delta m_{\varepsilon} = m_{\varepsilon_2} - m_{\varepsilon_3} = 0,42 - 0,4 = 0,02 \quad (5\%)$$

$$\Delta \sigma_{\varepsilon} = \sigma_{\varepsilon_2} - \sigma_{\varepsilon_3} = 3,4 - 3,28 = 0,12 \quad (4\%)$$

Считается, что точность вычисления  $m_{\varepsilon}$  и  $\sigma_{\varepsilon}$  в пределах 5 % вполне допустимая. Поэтому по следующему (четвёртому) приближению можно не рассчитывать.

ОТВЕТ Математическое ожидание ошибки регулирования  $m_{\varepsilon} = 0,4$ ,

Среднеквадратическая ошибка регулирования  $\sigma_{\varepsilon} = 3,28$

Примечание – В реальных системах управления на вход поступают сигнал управления и случайный сигнал помех (обычно высокочастотный). Каждый из них «по своему» изменяет характеристику нелинейного элемента, которая может измениться так, что система станет неустойчивой. Но с другой стороны, высокочастотный сигнал помех может частично линеаризовать нелинейную характеристику элемента и улучшить динамические качества системы. О таком свойстве высокочастотного сигнала на входе нелинейного элемента подробнее показано в разделе 5.

## Вопросы для самоконтроля к подразделам 6.7 – 6.8

- 1 Что означает статистическая линеаризация?
- 2 По каким параметрам случайного процесса определяются коэффициенты статистической линеаризации?
- 3 Как влияет СКО случайного сигнала ( $\sigma_x$ ) на величину математического ожидания полезного сигнала на выходе нелинейного элемента?
- 4 На выходе нелинейного звена СКО случайного сигнала ( $\sigma_x$ ) увеличивается или уменьшается при увеличении математического ожидания?
- 5 Как определяется математическое ожидание выходного случайного процесса?
- 6 Как определяется спектральная плотность выходного случайного процесса?
- 7 Как учитывается нелинейность статистической характеристики при определении дисперсии выходного случайного процесса?
- 8 Почему при определении статистических параметров выходного случайного процесса нелинейной системы можно использовать стандартный интеграл, который применяется только для линейных систем?
- 9 При определении ошибки регулирования в замкнутой нелинейной системе можно ли использовать те же коэффициенты статистической линеаризации, что и для разомкнутой системы?
- 10 Почему при расчете замкнутой нелинейной системы нельзя сразу определить коэффициенты статистической линеаризации, а их значение определяется методом последовательного приближения?

## Задачи для самоконтроля к подразделам 6.7 – 6.8

- 1 По заданным параметрам системы примера 6.3 определить  $m_z$  и  $D_z$ , если нелинейное звено в виде идеального реле.  
Примечание – Значение коэффициентов статистической линеаризации определять по рисунку 6.9.
- 2 По заданным параметрам системы примера 6.4 определить  $m_\varepsilon$  и  $D_\varepsilon$ , если нелинейное звено в виде реле с зоной нечувствительности.  
Примечание – значение коэффициентов статистической линеаризации определять по рисунку 6.10.

## Список использованных источников

- 1 **Евсюков, В.Н.** Системность процесса управления: учебное пособие для студентов вузов / В.Н. Евсюков. – Оренбург: ИПК Оренбургского гос. ун-та., 2000. – 64 с.
- 2 **Теория** автоматического управления: учебник для студентов вузов по направлению бакалавров и магистров /С.Г. Душин [и др.]; под ред. В.Б. Яковлева. – М.: Высш. шк., 2003. – 567 с.
- 3 **Ерофеев, А.А.** Теория автоматического управления: учебник для студентов вузов / А.А. Ерофеев. - 2-е изд. перераб. и доп. – СПб.: Политехника, 2002. – 301 с.
- 4 **Попов, Е.П.** Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах /Е.П. Попов. – М.: Наука, 1973. – 584 с.
- 5 **Попов, Е.П.** Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие./ Е.П. Попов. – 2-е изд. стер – М.: Наука, 1988. – 256 с.
- 6 **Теория** автоматического управления: учебник для вузов /В.Н. Брюханов [и др].; под ред. Ю.М. Соломенцева. – М.: Высш. шк., 2000. – 268 с.
- 7 **Теория** автоматического управления: учебник для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика: в 2-х ч. Часть 1. Теория линейных систем автоматического управления. / Н.А. Бабаков [и др.]; под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 367 с.
- 8 **Евсюков, В.Н.** Методические указания по выполнению практических заданий по теории управления: учебное пособие для студентов вузов / В.Н. Евсюков. – Оренбург: ИПК Оренбургского гос. ун-та., 2001. – 74 с.
- 9 **Куропаткин, П.В.** Теория автоматического управления: учебное пособие для студентов электротехнических специальностей вузов / П.В. Куропаткин. – М.: Высш. шк., 1973. – 527 с.
- 10 **Иващенко, Н.Н.** Автоматическое регулирование. Теория и элементы системы: учебник для вузов / Н.Н. Иващенко. -4-е изд. перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1978. – 736 с.
- 11 **Семенов, В.В.** Математическая теория управления в примерах и задачах: учебное пособие для студентов вузов / В.В. Семенов, [и др.] – М.: Изд-во МАИ, 1997. – 261 с.
- 12 **Зайцев, Г.Ф.** Теория автоматического управления и регулирования: учебное пособие для студентов вузов / Г.Ф. Зайцев. - 2-е изд. перераб. и доп. – Киев: Выща шк., 1988. – 431 с.
- 13 **Сборник** задач по теории автоматического регулирования и управления: учебное пособие для вузов / под ред. В.А. Бесекерского.- М.: Энергия, 1978. - 510 с.

14 **Топчеев, Ю.И.** Задачник по теории автоматического регулирования: учебное пособие для вузов / Ю.И. Топчеев, А.П. Ципляков. – М.: Машиностроение, 1977. – 592 с.

15 **Ципкин, Я.З.** Теория релейных систем автоматического регулирования / Я.З. Ципкин.- М.: Тех. теорет. литер. 1955. – 456 с.

16 **Евсюков, В.Н.** Предварительный анализ и синтез САУ по характеристическому уравнению / В.Н. Евсюков, // Известие вузов. Электромеханика. – Новочеркасск: Новочеркасский политех. ин-т., 1984. - № 4.– С. 43-48.

17 **Евсюков, В.Н.** Синтез линейных систем автоматического управления с помощью условий устойчивости / В.Н. Евсюков, // Известие вузов. Электромеханика. – Новочеркасск: Новочеркасский политех. инст., 1992.- № 1 – С.73-81.