МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра общей физики

Г.Г. КРЕЙМАН, А.Х. КУЛЕЕВА.

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 103

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения высшего профессионального
образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2008

УДК 531.382 (076.5)
ББК 22.251 я73
К 79

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор Н.А.Манаков

Крейман Г.Г.
К 79 Изучение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. [Текст]: методические указания к лабораторной работе. /Г.Г.Крейман, А.Х.Кулеева. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. - 14 с.

Методические указания включают теоретическое изложение материала, описание методики проведения опыта и контрольные вопросы для самоподготовки.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы №103 «Изучение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси» по дисциплине «Физика» для студентов всех специальностей.

ББК 22.251 я73

© Крейман Г.Г,
© Кулеева А.Х., 2008
© ГОУ ОГУ, 2008

Лабораторная работа №103. Изучение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Цель работы:

1 Изучить теорию вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.
2 Экспериментально проверить выполнимость уравнения $\grave{I}_z = J \cdot \varepsilon$.

Введение

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси очень часто встречающийся на практике вид движения: например, вращение шкивов, валов, шестерен, маховиков, ротора, колеса турбины и т.п.

При количественном описании этого вида движения используются специальные физические величины: угол поворота φ, число оборотов в единицу времени, угловая скорость ω, угловое ускорение ε, момент силы и момент инерции, взятые относительно оси вращения. Напомним физический смысл перечисленных величин и остановимся на основном уравнении динамики вращательного движения твердого тела.

Пусть некоторое твердое тело 1 вращается вокруг неподвижной оси 2 (смотри рисунок 1).

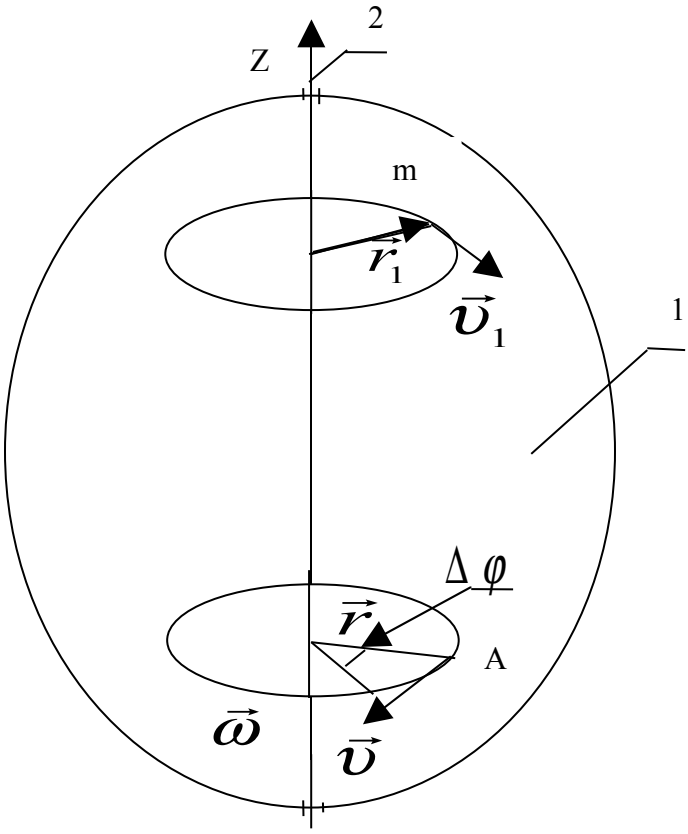


Рисунок 1

Каждая точка тела при этом движется по окружности. Выделим в теле произвольную точку А, она описывает окружность радиуса r. За время t радиус-вектор $\vec{r}$, соединяющий точку А с осью, повернется на угол $\Delta\varphi$ (рисунок 1). Так как тело твердое, то и все другие точки тела повернутся на такой же угол $\Delta\varphi$. Поэтому угол поворота выступает здесь как характеристика движения не одной точки, а всего тела. **Величина, равная пределу отношения изменения угла поворота $\Delta\varphi$ вращающегося тела к промежутку времени Δ t, на который поворот составил $\Delta\varphi$, называется угловой скоростью:**

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \left(\frac{\text{ðàä}}{\text{ñ}}\right). \qquad (1)$$

Угловая скорость векторная величина, направление которой определяется по правилу буравчика.

Если ω остается постоянной, то такое вращение называется **равномерным.** В противном случае – **переменным.** Переменное вращение характеризуется наряду с угловой скоростью еще угловым ускорением ε.

Определяется ε формулой:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \left(\frac{\text{ðàä}}{\text{ñ}}\right), \qquad (2)$$

где $\Delta\omega$ - изменение ω за время Δ t. Таким образом, **угловым ускорением называется величина, равная пределу отношения изменения угловой скорости к промежутку времени, за которое произошло это изменение.**

Выражение (2) можно записать, как

$$\varepsilon = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \left(\frac{\text{ðàä}}{\text{ñ}^2}\right),$$

если в него подставить ω из (1).

Напомним, что **твердым телом называется тело, форма и расстояния, между частями которого не изменяются**. Поэтому при вращении такого тела вокруг неподвижной оси все точки имеют одинаковую угловую скорость ω, одинаковое угловое ускорение ε. В то же время скорости вращения υ и тангенциальное и переменное ускорения a_τ и a_n точек будут различны, если они находятся на различных расстояниях r от оси вращения:

$$\upsilon = \omega \cdot r, \quad a_\tau = \varepsilon \cdot r, \quad a_n = \omega^2 \cdot r. \qquad (3)$$

Изменить угловую скорость тела можно лишь путем приложения к нему момента силы. В физике вводится два момента силы: момент силы относительно точки (полюса) и относительно оси. Поясним суть этих понятий, обратясь к рисунку 2. Там показана сила $\vec{F}$, приложенная в

некоторой точке А. Выберем произвольную точку О и определим понятие момента силы относительно этой точки. Точка, относительно которой определяется момент силы, называется **полюсом. Моментом силы относительно полюса О называется векторная величина** $\vec{M}_O$, **равная векторному произведению вектора** $\vec{r}$ **на силу** $\vec{F}$:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \cdot \vec{F} = \left[\vec{r}\vec{F}\right].$$

Заметим, что векторное произведение обозначается знаком умножения или квадратными скобками. Оно само является вектором. По правилу векторного произведения вектор момента силы относительно полюса перпендикулярен каждому из сомножителей. Следовательно, $\vec{M}_O$ перпендикулярно $\vec{r}$ и $\vec{F}$, или плоскости, в которой лежат сила $\vec{F}$, вектор $\vec{r}$, проведенной из полюса в точку приложения силы. Направление $\vec{M}_O$ определяется правилом буравчика, т.е. направление $\vec{M}_O$ совпадает с направлением поступательного движения буравчика при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$. Модуль векторного произведения, по определению, равен произведению модулей умножаемых векторов на синус угла между ними. Учитывая это, запишем:

$$M_O = r \cdot F \cdot \sin\alpha, \qquad h^* = r \cdot \sin\alpha, \tag{4}$$

где M_O, r, F - модули векторов $\vec{M}_O$, $\vec{r}$, $\vec{F}$, соответственно, α - наименьший угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а h^* - плечо силы $\vec{F}$ (относительно полюса О).

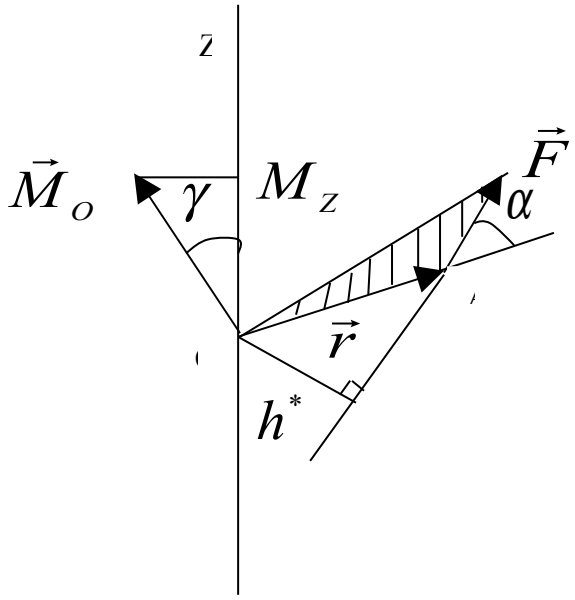


Рисунок 2

Из рисунка 2 видно, что по смыслу **плечо силы есть кратчайшее расстояние от полюса до линии, вдоль которой действует сила.**

Так как $\vec{M}_O$ вектор, то можно говорить о проекции $\vec{M}_O$ на ось. Такая проекция называется моментом силы относительно оси. Итак, **моментом силы относительно оси называется проекция на ось момента силы относительно полюса.** Такая проекция обозначается буквой М с добавлением индекса, обозначающего ось. Например, M_Z - момент силы относительно оси Z. Очень часто с осью вращения связывают именно ось Z координатной системы. Изображенная на рисунке 2 проекция $\vec{M}_O$ на ось Z, очевидно равна:

$$M_Z = M_O \cdot \cos\gamma ,$$

где γ - угол между M_O и осью Z.

Когда $\vec{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси Z, M_Z вычисляется особенно просто:

$$M_Z = F \cdot h ,$$

где h - кратчайшее расстояние от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила $\vec{F}$. Например, имеется шкив, насаженный на закрепленную ось. Он приводится во вращение силой натяжения $\vec{T}$ нити, на которой закреплен груз (смотри рисунок 3).

Здесь $\vec{T}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

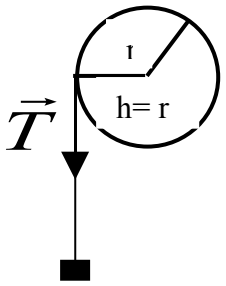


Рисунок 3

Действительно, ось вращения направлена горизонтально (перпендикулярно плоскости рисунка), а $\vec{T}$ - вертикально вниз. Более того, h = r. Поэтому для рассматриваемого примера:

$$M_Z = r \cdot T .$$

Строго установлено, что всегда при вращении любого твердого тела вокруг неподвижной оси (оси z), жестко связанной с телом, выполняется уравнение:

$$M_z = J \cdot \varepsilon \,, \qquad (5)$$

где J - момент инерции вращающегося тела относительно оси вращения. Уравнение (5) называется **основным уравнением динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, жестко связанной с телом.**

Замечание: Если на вращающееся тело действует несколько сил, создающих определенные моменты, то под M_z в уравнении (5) следует понимать алгебраическую сумму всех моментов сил относительно оси вращения. При составлении суммы знак «плюс» ставится перед теми моментами, которые вращали бы тело по часовой стрелке, знак «минус» - перед остальными, стремящимися повернуть тело против часовой стрелки.

Входящий в уравнение (5) момент инерции J тела относительно оси вращения выступает, как коэффициент пропорциональности между M_z и ε. Чтобы яснее понять физический смысл момента инерции, вспомним уравнение, выражающее второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \,,$$

где $\vec{a}$ - ускорение, приобретаемое телом массой m под действием силы $\vec{F}$.

В этом законе масса выступает как мера инертности тела. Чем больше масса, тем труднее изменить скорость поступательного движения тела, тем меньшее ускорение приобретает тело. Нечто подобное можно сказать о моменте инерции J. **Момент инерции тела количественно характеризует инертность тела при вращательном движении, то есть способность тела препятствовать изменению состояния вращения вокруг оси.** Чем больше J, тем труднее изменить ω, тем меньше будет ε при воздействии одного и того же момента M_z.

Кстати, интересно сопоставить формулы для кинетической энергии тела при поступательном и вращательном движениях:

$\frac{m\upsilon^2}{2}$ - кинетическая энергия поступательного движения,

$\frac{J\omega^2}{2}$ - кинетическая энергия вращающегося твердого тела.

Сказанное убеждает, что момент инерции J является важной физической характеристикой тела. Количественно J можно определить экспериментально и теоретически. Например, если опытным путем найти M_z и ε, то из (5) следует, что

$$J = \frac{M_z}{\varepsilon} \,.$$

Суть теоретического подхода к определению J основывается из двух положений.

Во-первых, доказывается, что момент инерции материальной точки равен произведению ее массы m на квадрат расстояния r от материальной точки до оси вращения:

$$J = mr^2 \quad (êã \cdot ì^2) \tag{6}$$

Во-вторых, момент инерции – аддитивная величина. Это значит, что момент инерции тела, равен сумме моментов инерции материальных точек этого тела.

Основываясь на этих положениях, строится теоретический способ вычисления J твердого тела произвольной формы. Тело мысленно расчленяется на очень маленькие кусочки, каждый из которых заменяется материальной точкой. Затем по (6) вычисляется момент инерции каждой из полученных точек, после чего находится сумма моментов инерции всех точек тела:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \quad (êã \cdot ì^2) \tag{7}$$

где m_i - масса $i^{ãî}$ кусочка, отстоящего от оси вращения на расстояния r_i, n - общее число кусочков $(i = 1,2,3...,n)$, на которое мысленно разделили тело.

Из (7) видно, что J зависит не только от общей массы тела. На численное значение J сильно влияет распределение массы тела около оси. Чем дальше отстоят отдельные части тела от оси вращения, тем больше момент инерции, тем труднее раскрутить тело.

Этот вывод следует из определения момента инерции и уравнения (5) – основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Он подлежит экспериментальной проверке в практической части лабораторной работы.

Экспериментальная установка

Установка для изучения вращательного движения (рисунок 4) состоит из основания (*1*), вертикальной колонны (*2*) с закрепленными на ней двумя кронштейнами (*3*, *4*), на которых крепятся оптические датчики положения. На колонне закреплены два неподвижных кронштейна (*5*, *6*).

На нижнем кронштейне (5) закреплен вал (*7*). На верхнем кронштейне (*6*) закреплен подшипниковый узел (*8*) и блок (*9*). Через блок перекинута нить (*10*), один конец которой намотан на вал (*7*), а на втором конце закреплен груз (*11*). На валу крепится тело маятника (*12*).

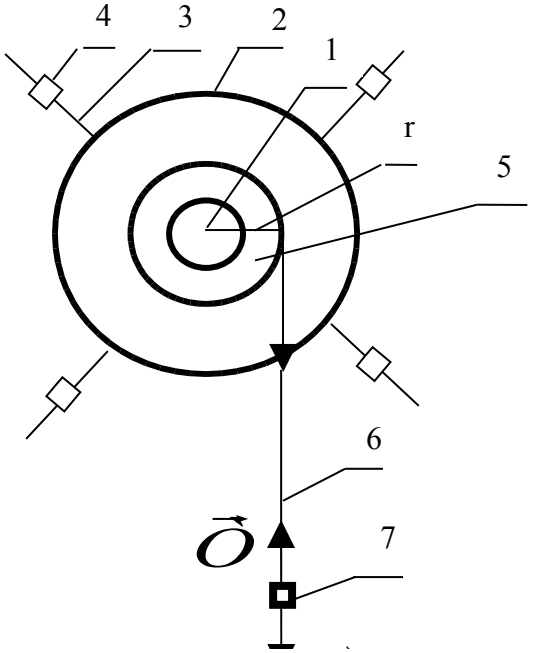
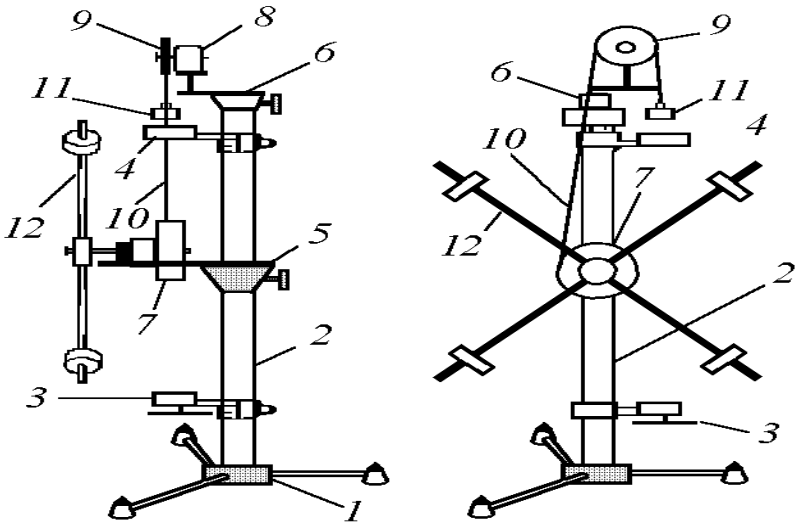


Рисунок 4 - Маятник Обербека

Рисунок 4а - Схема установки для изучения вращательного движения твердого тела



Работа выполняется на установке, включающей маятник Обербека, секундомер, штангенциркуль, метровую линейку и набор грузов различной массы. Маятник Обербека состоит из установленного в подшипники стального валика 1, на котором крепится маховик 2 (смотри рисунок 4а). В

ввинчены четыре стальные спицы 3. На каждой спице находится цилиндрик 4 со стопорным винтом. Массы цилиндриков одинаковы. С помощью стопорного винта цилиндрики можно закрепить на любом расстоянии от оси вращения. Кроме маховика, на валике установлен шкив 5. На него строго виток к витку наматывается тонкая прочная нить 6. Один конец нити крепится непосредственно к шкиву 2, другой к грузу 7. Груз, натягивая нить, создает момент силы M_z, раскручивая маховик.

Выведем формулы, выражающие M_z и ε через измеряемые на опыте величины: диаметр шкива d, массу груза m, высоту и время опускания груза.

Груз опускается с ускорением a. Поэтому за время t он опустится на высоту H:

$$H = \frac{at^2}{2} \tag{8}$$

Из (8) видим, что

$$a = \frac{2H}{t^2} \tag{9}$$

Момент силы M_z, создаваемый силой натяжения T нити под действием груза, составит:

$$M_z = r \cdot T = \frac{T \cdot d}{2}, \tag{10}$$

так как $d = 2r$.

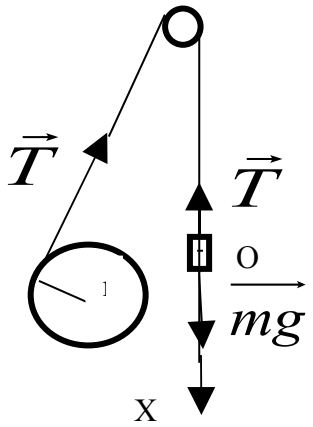


Рисунок 5

Для нахождения силы T применим второй закон Ньютона к опускающемуся грузу. На него действуют две силы, направленные в противоположные стороны: вниз – сила тяжести mg, вверх – сила натяжения нити T.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\overrightarrow{mg} + \vec{T} = \overrightarrow{ma}.$$

Возьмем ось X, направление которой совпадает с направлением ускорения, и запишем закон в проекциях на ось OX:

$$mg - T = ma,$$

Откуда

$$T = mg - ma = m \cdot (g - a)$$

Эта сила натяжения действует и на маятник Обербека, т.к. она во всех точках нити одинакова. Найдем момент силы натяжения, действующий на маятник. Подставим выражение a из уравнения (9):

$$T = m \cdot (g - \frac{2H}{t^2}),$$

Заменим в (10) T на полученное выражение, выносим за скобку g, получим:

$$M_Z = \frac{mgd}{2} \cdot (1 - \frac{2H}{gt^2}) \qquad (11)$$

Далее получим формулу для вычисления углового ускорения ε. Для этого учтем, что тангенциальное ускорение a_τ точек на внешней поверхности шкива равно ускорению опускания груза:

$$a_\tau = a = \frac{2H}{t^2}.$$

Затем в формуле

$$a_\tau = \varepsilon r$$

Заменим a_τ согласно (9) и

$$r = \frac{d}{2}$$

получаем:

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r} = \frac{4H}{t^2 \cdot d} \qquad (12)$$

Применим теперь к маятнику Обербека основной закон динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: *результирующий* момент силы относительно оси вращения равен произведению момента инерции на угловое ускорение:

$$M_Z - M_{\partial\partial} = J \cdot \varepsilon \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{1}{J} \cdot (M_Z - M_{\partial\partial}) \qquad (13)$$

Здесь мы учили, что на маятник действует два момента вращения: момент M_Z, созданной силой натяжения нити, и момент силы трения $M_{тр}$, препятствующий вращению. Поэтому $\grave{I}_{\partial\partial}$ вычитается из M_Z:

$$M_Z - M_{тр}.$$

Если $M_{тр}$ в процессе проведения опыта остается практически постоянным, то график зависимости ε от M_Z - прямая линия. Она пересекает ось в точке, равной $M_{тр}$, что непосредственно следует из (13). Из (13) следует так же, что линия тем круче, чем меньше момент инерции J. Действительно, чем меньше J,тем больше ε при одном и том же M_Z. Сказанное отражено на рисунке 6, где показана зависимость ε от M_Z для случая, когда цилиндрики расположены на концах спиц (линия J_1) и максимально приближены к оси вращения (линия J_2). Очевидно, что первому случаю соответствует больший момент инерции, чем второму, то есть $J_1 > J_2$. Из (13) следует, что

$$J = \frac{M_Z - M_{\partial\partial}}{\varepsilon} \qquad (14)$$

Уравнение (14) позволяет вычислить момент инерции маятника по экспериментально установленной зависимости ε от M_Z. Например, чтобы найти J_1 достаточно на линии графика, соответствующий J_1, выбрать произвольную точку А (смотри рисунок 6), найти ее координаты и подставить их вместе с $\grave{I}_{\partial\partial}$, так взятым из графика, в (14).

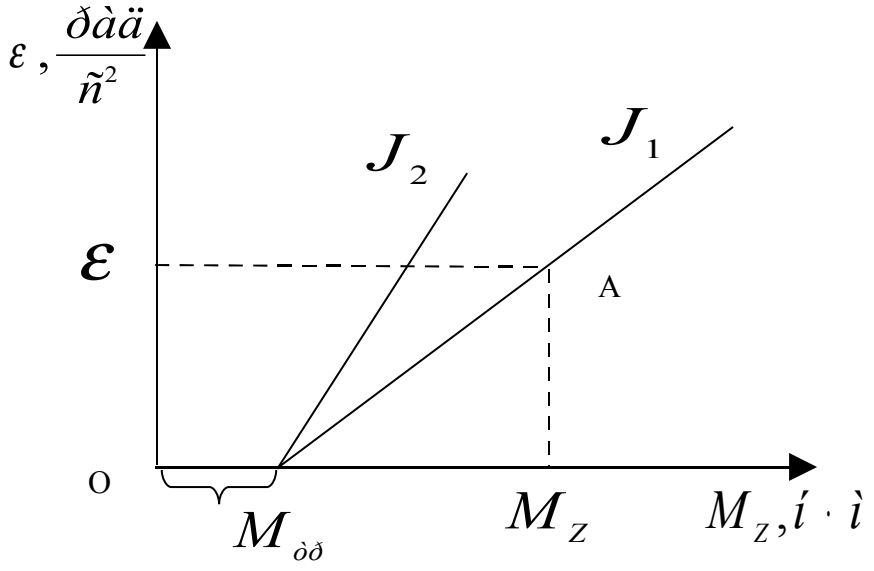


Рисунок 6

Экспериментальная часть

Устанавливается определенная высота опускания груза. Для пяти с различной массой грузов определяется время опускания t, по формулам (11) и (12) вычисляется M_Z и ε . Причем проводится две серии опытов. Первая, когда цилиндрики расположены на концах спиц, вторая, когда они придвинуты вплотную к маховику 2. С целью повышения точности определения времени опускания груза, каждый опыт с определенным грузом повторяют не менее двух раз, находят среднее время $\bar{t}$, которое и подставляют в расчетные формулы (11) и (12). Экспериментальные данные заносят в таблицу.

Таблица 1

Положение цилиндриков	Цилиндрики на концах спиц					Цилиндрики придвинуты к шкиву				
m, кг										
$\bar{t}$,с										
ε , ðàä/ñ²										
$M_Z \cdot 10^{-2}$,í · ì										
H = …м; d = …м; J_1 = …кг·м²; J_2 = … кг·м².										

Затем строят график зависимости ε от M_z и из графика определяют J_1 и J_2.

После этого делают общий вывод по лабораторной работе с учетом ее цели.

Контрольные вопросы

1. Какими физическими величинами описывается вращательное движение? Поясните физический смысл и единицы измерения этих величин.
2. Напишите основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, поясните его содержание.
3. Как определяется момент инерции тела? В каких единицах он измеряется, что характеризует, в какие уравнения входит?
4. Как в данной работе определяется момент инерции, момент силы натяжения нити, момент сил трения и угловое ускорение? Как связаны между собой эти величины?
5. Расскажите цель и порядок выполнения работы. Объясните полученные Вами результаты.

Список использованных источников

1.**Савельев И.В.** Курс общей физики [Текст] в 3т: учебное пособие / И.В.Савельев. – Т 1. Механика. Молекулярная физика. - М.: 1987. – 432с.