АЛГОРИТМ ЭЙЛЕРА ПОИСКА ГАМИЛЬТОНОВЫХ ПУТЕЙ

Шухман Е.В.
Оренбургский государственный педагогический университет, г. Оренбург

Великий математик XVIII в. Леонард Эйлер заслуженно признан одним из создателей теории графов. Эйлеру принадлежит самый ранний результат в теории графов [1, с.94] – полное решение задачи о поиске пути в графе, включающего каждое ребро в точности один раз. Такие пути в современной теории графов носят название эйлеровых.

В работе 1736 г. «Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis» (Решение задачи, связанной с геометрией положения) [2] Эйлер рассматривает задачу о прогулке по мостам города Кенигсберга, соединяющим различные части города. Эйлер обосновал необходимое и достаточное условие для осуществления такой прогулки: количество частей, в которые ведет нечетное количество мостов, не должно превышать двух. Ученый также приводит основную идею алгоритма для построения искомого пути: «…мысленно удалять так часто, как это возможно, пару мостов, ведущих из одной области в другую. Это будет существенно уменьшать в большинстве случаев число мостов. После этого желаемый путь по оставшимся мостам построить легко» (цит. по [3, с.32]). Идея Эйлера удаления ребер в графе при поиске пути лежит в основе современного эффективного алгоритма построения эйлеровых путей, который является линейным относительно количества ребер в графе [4].

Значительный интерес представляет вклад Эйлера в решение другой классической задачи теории графов – задачи о поиске пути, проходящего в точности один раз через каждую вершину графа. Такие пути в современной теории графов называются гамильтоновыми. Эйлеру принадлежит первый опубликованный алгоритм решения задачи о поиске маршрута коня на шахматной доске, проходящего через все клетки один раз. Эта известная с древних времен задача представляет собой частный случай общей задачи построения гамильтонового пути.

Задача об обходе конем шахматной доски в течение прошедших веков исследовалась в сотнях публикаций, не исчерпывающий список которых приведен на страницах интернет-ресурса Дж. Джелисса [5]. Однако алгоритм Эйлера для решения этой задачи очень редко становился объектом изучения. В отечественных исследованиях комбинаторного наследия Эйлера К.А. Рыбникова [1], А.М. Зубкова [6] и А.Е. Малых [7] алгоритм для обхода шахматной доски конем подробно не описывался. В работах Ж. Сезиано [8] и Э. Сандифира [9] алгоритм Эйлера изложен подробно, но не рассмотрена возможность его применения для решения общей задачи поиска гамильтонова пути.

Впервые Эйлер упоминает задачу обхода конем шахматной доски в письме к Х.Гольбаху от 26 апреля 1757 г. [10], приводит один конкретный обход, но не описывает метод, которым он был получен. В том же 1757 году Эйлер представил свой метод в работе «Solution d'une question curieuse que ne paroit soumise à aucune analyse» (Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не подчиняется никакому анализу) [11].

Метод Эйлера основан на определенной процедуре добавления непройденного поля шахматной доски к маршруту коня, который изначально строится произвольным образом. Пусть текущий маршрут коня включает последовательность полей $a_1, a_2, ..., a_m$. Эйлер пытается выбрать такую последовательную пару полей в маршруте a_k и a_{k+1}, что поле a_{k+1} будет связано ходом коня с непройденным полем *x*, и при этом a_k окажется связанным ходом коня с конечным полем маршрута a_m. В этом случае после поля a_k можно выполнить обход полей от a_m до a_{k+1} в обратном порядке, после чего пойти на поле *x*, тем самым увеличив длину маршрута на одно поле. Эйлер сопоставляет список номеров полей, связанных с конечным полем маршрута, со списком номеров полей, связанных с непройденными полями, после чего выбирает пару последовательных номеров для удлинения маршрута. Понятно, что возможность удлинить маршрут будет не во всех случаях, поэтому метод Эйлера не исключает перебор вариантов, но позволяет его значительно сократить.

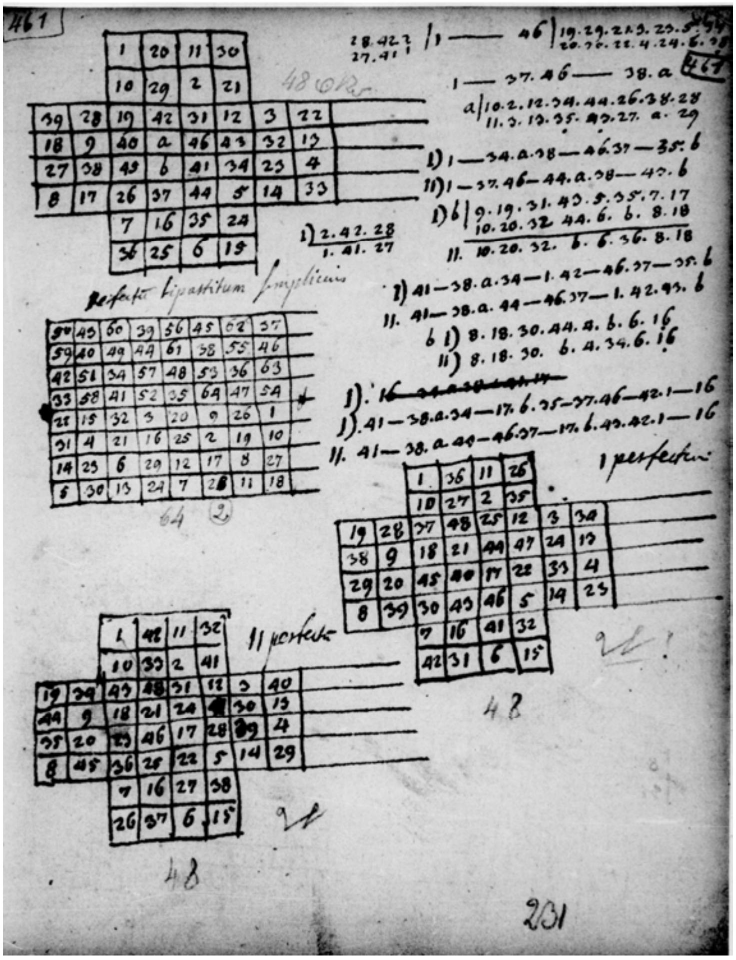

Рис. 1 – Заметки на л. 231 записной книжки № 134 (1757 г.)

Также Эйлер рассмотрел задачу обхода конем шахматной доски для прямоугольных, крестообразных и ромбовидных досок. Многочисленные примеры решения этой задачи обнаружены на листах л. 229 – 239 об. в записной книжке Эйлера № 134 (датированной 1749-1757 г.) из Санкт-

Петербургского филиала Архива РАН [12]. Пример заметок Эйлера приведен на рис. 1

Отметим, что метод Эйлера применим для сокращения перебора в общей задаче построения гамильтонова пути. Эта задача является NP-полной и эффективные алгоритмы ее решения до сих пор неизвестны. В современной биоинформатике гамильтоновы пути применяются при решении задачи секвенирования – определения аминокислотной или нуклеотидной последовательности биополимеров (белков и нуклеиновых кислот — ДНК и РНК) [13]. Основной метод секвенирования – метод дробовика, предусматривающий многократное считывание коротких участков полимера, а затем восстановление полной последовательности по массиву коротких цепочек x_i. Если рассмотреть ориентированный граф G: каждая его вершина v_i соответствует цепочке x_i, каждое ребро (v_i, v_j) — перекрытию между цепочками x_i и x_j, то задача секвенирования сводится к поиску гамильтонова пути в графе G [13]. Алгоритм Эйлера может быть адаптирован для решения этой задачи с учетом ориентации ребер графа. Экспериментальное исследование алгоритма Эйлера для задачи секвенирования биополимеров показывает, что можно эффективно восстанавливать последовательности из массива до 100 цепочек, что значительно превышает возможности традиционного перебора вариантов.

Таким образом, алгоритм Эйлера поиска гамильтонова пути может применяться в настоящее время для решения задач секвенирования биополимеров.

Список литературы

1. ***Рыбников, К.А.*** *Комбинаторный анализ. Очерки истории / К.А. Рыбников – М.: Изд-во мехмата МГУ, 1996. – 125 с.*
2. ***Euler, L.*** *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. / L.Euler // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1741. – Vol. 8 – p. 128-140.*
3. ***Фляйшнер, Г.*** *Эйлеровы графы и смежные вопросы. / Г. Фляйшнер– М.: Мир, 2002. – 335 с.*
4. ***Липский, В.*** *Комбинаторика для програмистов./ В.Липский –М.:Мир, 1988. –212 с.*
5. ***Jellis, G.*** *Knight's tour notes. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.mayhematics.com/t/t.htm*
6. ***Зубков, А.М.*** *Эйлер и комбинаторика./А.М. Зубков // Леонард Эйлер и современная математика, Сборник докладов, – Совр. пробл. матем.–2008–№11– С.5–18.*
7. ***Малых, А.Е.*** *Из комбинаторного наследия Леонарда Эйлера / А.Е. Малых // История и методология естественных наук. – М.: Наука, 1989. – Вып. XXXVI. – С. 66-74.*
8. ***Sesiano, J.*** *Solution du problème du cavalier par Euler./ J. Sesiano // Bulletin de la Société vaudoise des Sciences naturelles – 2012 – vol. 93 – pp. 47–65.*
9. ***Sandifier, C.*** *Ed. Knight's Tour / C. Ed Sandifier / How Euler Did It.– MAA, 2007. – pp.95-102.*

10. ***Juskevic A. P., Winter E.*** *Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729-1764, – Akademie Verlag, Berlin, –1965.*

11. ***Euler L.*** *Solution d'une question curieuse que ne paroit soumise à aucune analyse, // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 15(1759) 1766, – p. 310-337.*

12. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН (ПФА РАН). Ф. 136. Оп.1. № 134.

13. ***Гасфилд, Д.*** *Строки, деревья и последовательности в алгоритмах. Информатика и вычислительная биология. / Д. Гасфилд. – СПб.: Невский Диалект, 2003.– 656 с.*