МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ ВЫДЕЛЯТЬ ПОДЗАДАЧИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ

Уткина Т.И., д-р пед. наук, профессор,Шайханов Т.К.
Орский гуманитарно-технологический институт (филиал) ОГУ

Общая проблема данной статьи состоит в поиске путей усовершенствования методики обучения учащихся решению геометрических задач методом геометрических преобразований.

Один из подходов в методике обучения решению задач методом геометрических преобразований связан с понятием «подзадач». Суть этого подхода состоит в том, что производится исследование решаемой задачи относительно выделения множества подзадач, решение которых содержит в себе решение самой задачи. Подзадачами задачи называются более мелкие задачи, решение которых являются простейшими (элементарными, тривиальными) [1,2,3].

Геометрические преобразования плоскости широко используется в решении задач, главным образом, на доказательство и на построение [4,5,6].

Исходя из наличия определённых свойств каждого преобразования, можно выделить некоторые виды задач, к решению которых может быть применено то или иное геометрическое преобразование. Во-первых, каждое движение может быть использовано при решении задач на доказательство равенства фигур. В задачах на доказательство параллельности прямых могут быть полезными параллельный перенос; центральная симметрия и гомотетия (так как соответствующие прямые в этих преобразованиях параллельны). Центральная симметрия часто используется при доказательстве различных соотношений в параллелограмме, при доказательстве принадлежности трёх точек одной прямой, а также в конструктивных задачах, связанных с построением отрезков, серединой которых является данная точка.

С помощью осевой симметрии часто удаётся доказать некоторые соотношения в равнобедренном треугольнике, равностороннем треугольнике, равнобедренной трапеции, прямоугольнике, ромбе, окружности. Осевая симметрия используется в задачах на построение.

Использование поворота часто даёт желаемый результат при рассмотрении равностороннего треугольника, квадрата при нахождении углов между прямыми, а также в задачах на построение равнобедренных треугольников, у которых заданы вершина и величина угла при этой вершине.

Гомотетия нередко используется при доказательстве различных соотношений в двух окружностях разных радиусов, а также при доказательстве принадлежности трёх точек одной прямой.

С помощью подобия часто удаётся решить задачи на нахождение углов между прямыми или длин отрезков. Подобие используется в задачах на построение. Критерием выбора метода подобия для решения задач на построение может служить следующее обстоятельство. В этих задачах данные в условии можно разбить на две такие части, что одна определяет форму, а другая – размеры искомой фигуры. Для решения таких задач сначала строится фигура, подобная искомой, а затем, используя вторую часть условий, строится искомая фигура.

Аффинные преобразования могут быть использованы в решении многих геометрических задач евклидовой геометрии. Пусть, например, в задаче требуется доказать утверждение, относящееся к свойствам фигур, сохраняющимся при аффинном преобразовании (например, к свойствам прямолинейности отрезков, параллельности прямых, отношения длин параллельных отрезков или отношения площадей). В таком случае это предложение достаточно доказать лишь для одного какого-либо частного случая, получаемого из общего случая с помощью специально подобранного аффинного преобразования. В этом и состоит суть использования аффинных преобразований в решении задач евклидовой геометрии.

Приведём примеры.

Задача 1. В прямоугольном Δ *ABC*, угол C=90◦, проведена высота *CD*. Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы углов *CAD* и *DCB*, перпендикулярны [7].

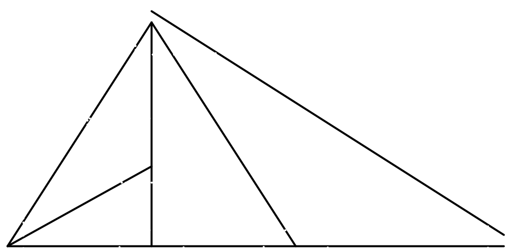

Рис. 1

Решение. Как уже отмечалось выше, необходимо обосновать выбор преобразования. Это можно произвести так. Выясняется, какие из преобразований могут быть полезными в нахождении угла между прямыми. Можно попытаться найти поворот или подобие, в которых прямые *AM* и *CN* будут соответствующими (рис. 1).

Отмечаем, если прямые *AM* и *CN* являются соответствующими либо в повороте, либо в подобии, то, так как *AM* – биссектриса Δ*CAD*, а *CN* – биссектриса Δ*BCD*, то приходим к необходимости рассмотрения Δ*ADC* и Δ*CDB*. Эти треугольники подобные. То есть существует подобие, отображающее Δ*ADC* на Δ*CDB*. Тогда прямая *AM* отобразилась в прямую *CD* (биссектриса треугольника в подобии переходит в биссектрису подобного треугольника), и, следовательно, угол между прямыми *AM* и *CN* будет равен углу между прямыми *DC* и *DB*. И значит $AM \perp CN$.

Замечание. Анализ решения задач на нахождение углов между прямыми с использованием подобия позволяет выделить следующие подзадачи.

Подзадача 1. Выделите два подобных треугольника, составляющие часть рассматриваемой фигуры, и в которых прямые, угол между которыми надо найти, будут соответствующими.

Подзадача 2. Задайте подобие с помощью двух найденных подобных треугольников и докажите, что прямые, угол между которыми надо найти, будут соответствующими в этом подобии.

Подзадача 3. Найдите искомый угол между прямыми как угол между другой парой соответствующих прямых в рассматриваемом подобии.

На основе только что рассмотренной задачи можно составить серию новых подзадач, выбирая в качестве прямых AM и CN любую пару прямых, лишь бы они были соответствующими в подобии, задаваемом ΔADC и ΔCDB.

Задача 2. В данный ΔABC вписан другой $\Delta A_1B_1C_1$, вершины которого делят стороны данного в одном и том же отношении:

$(A, B, C_1) = (B, C, A_1) = (C, A, B_1)$.

Докажите, что точка пересечения медиан ΔABC совпадает с точкой пересечения медиан $\Delta A_1B_1C_1$.

Решение. Так как в задаче требуется доказать свойство, сохраняющееся при аффинных преобразованиях, то достаточно, как было отмечено выше, доказать его для наиболее простой фигуры, получаемой из данной фигуры с помощью некоторого аффинного преобразования. Преобразуем данный ΔABC аффинным преобразованием A в равносторонний $\Delta A'B'C'$ (рис. 2).

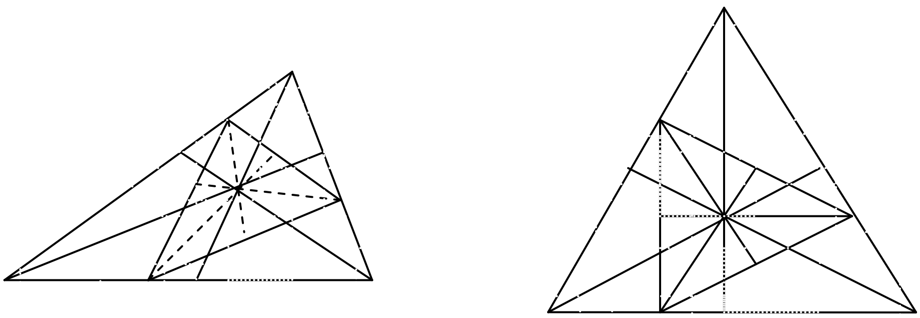

Рис. 2

Для равностороннего треугольника утверждение обосновывается довольно просто с помощью поворота вокруг центра $\Delta A'B'C'$ на угол, равный 120^0. Действительно, в повороте $R_{M'}^{120^\circ}$ точка A_1' переходит в точку C_1', точка B_1' – в точку A_1', а точка C_1' – в точку B_1'. То есть $\Delta A'_1B'_1C'_1$ в повороте $R_{M'}^{120^\circ}$ отображается на себя, а, значит, он тоже равносторонний и центром его является точка M'. А теперь рассмотрим преобразование, обратное для аффинного преобразования A. Обозначим его A^{-1}. В преобразовании A^{-1} конфигурация, связанная с $\Delta A'B'C'$, перейдёт в данные фигуры, связанные с ΔABC. Преобразование A^{-1} аффинное, и в преобразовании A^{-1} медианы $\Delta A'B'C'$ и $\Delta A'_1B'_1C'_1$ переходят в медианы ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ соответственно. А так как медианы $\Delta A'B'C'$ и $\Delta A'_1B'_1C'_1$ пересекаются в одной точке M', то медианы ΔABC

и $\Delta A_1B_1C_1$ пересекаются в точке М, являющейся образом точки М' в преобразовании A^{-1}.

В процессе решения задач методом геометрических преобразований можно выделить два вида подзадач:

Подзадача 1. Выбор геометрического преобразования;

Подзадача 2. Доказательство того, что фигуры, указанные в условии задачи, являются соответствующими при выбранном геометрическом преобразовании.

Задача 3. Дан квадрат ABCD. Через центр этого квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, отличные от прямых AC и BD. Докажите, что отрезки секущих, заключенные внутри квадрата, равны.

Решение. Пусть $l_1 \cap [BC]=M$, $l_1 \cap [AD]=N$, $l_2 \cap [AB]=K$, $l_2 \cap [CD]=L$. Решение задачи сводится к доказательству равенства отрезков MN и KL (рис. 3). Доказать равенство фигур F_1 и F_2 на языке геометрических преобразований означает, что достаточно найти движение, отображающее фигуру F_1 на фигуру F_2. Таким образом, как это отмечалось выше, необходимо обосновать выбор геометрического преобразования (решить Подзадачу 1).

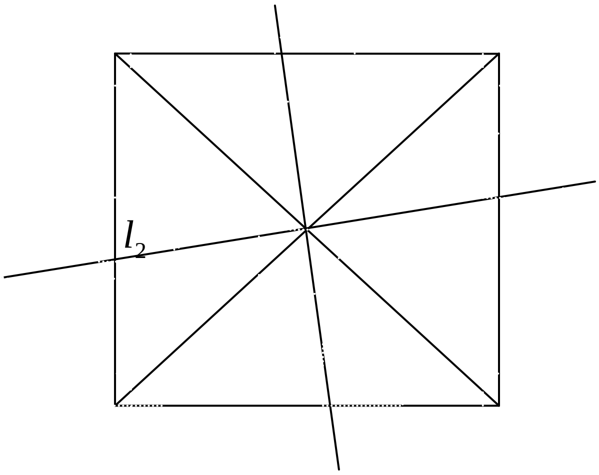

Рис. 3

Так как угол между прямыми l_1 и l_2 равен 90^0, то естественно рассмотреть поворот вокруг точки О на 90^0 ($R_O^{90^\circ}$). Итак, приходим к целесообразности рассмотрения поворота ($R_O^{90^\circ}$).

Второй этап решения этой задачи будет состоять в доказательстве того, что отрезки MN и KL являются соответствующими в данном преобразовании (решение Подзадачи 2).

Действительно, точка $M = l_1 \cap [BC]$. Значит,

$R_O^{90^\circ}(M)=R_O^{90^\circ}(l_1 \cap [BC]=R_O^{90^\circ}(l_1) \cap R_O^{90^\circ}([BC])=l_2[AB]=K$.

Рассуждая аналогично, находим образ точки N:

$R_O^{90^\circ}(N)=R_O^{90^\circ}(l_1 \cap [AD]=R_O^{90^\circ}(l_1) \cap R_O^{90^\circ}([AD])=l_2[CD]=L$. Итак,

$R_O^{90^\circ}([MN])=([KL])$. Последнее означает, что $[MN]=[KL]$.

Задача 4. Окружности $\omega_1(O_1,r_1)$ и $\omega_2(O_2,r_2)$,($r_1 \neq r_2$) касаются внешним образом в точке S. Через центр O_1 окружности ω_1 проведены два луча h_1 и h_2, которые пересекают окружность ω_1 в точках A и B соответственно. Через центр O_2 окружности ω_2 проведены два луча h'_1 и h'_2, противоположно направленные с h_1 и h_2 соответственно. Лучи h'_1 и h'_2 пересекают окружность ω_2 в точках C и D соответственно. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

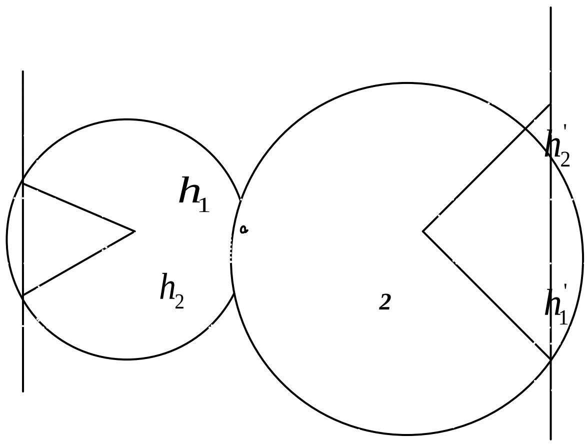

Рис. 4

Решение. На первом этапе решения задачи выясним возможность её решения с помощью геометрических преобразований (решение Подзадачи 1). Для этого переводим утверждение задачи на язык преобразований.

Утверждение задачи на языке геометрических преобразований означает, что надо найти либо параллельный перенос, либо центральную симметрию, либо гомотетию (так как эти преобразования переводят прямую в параллельную ей прямую), отображающие прямую *AB* на прямую *CD*.

Но так как точки A и B, C и D принадлежат окружностям ω_1 и ω_2 (рис. 4), радиусы которых не равны, то не будет существовать ни параллельного переноса, ни центральной симметрии, которые отображали бы окружность ω_1 на окружность ω_2. А вот гомотетия с центром в точке S и коэффициентом $k = \frac{-r_2}{r_1}$ переводит окружность ω_1 в окружность ω_2. Значит, если мы покажем, что точки A и B гомотетичны точкам C и D, то утверждение задачи будет обосновано. Итак, мы приходим к целесообразности рассмотрения гомотетии с центром в точке S и коэффициентом $k = \frac{-r_2}{r_1} : H_S^k$.

Второй этап решения этой задачи будет состоять в доказательстве того, что прямые AB и CD являются соответствующими в выбранной гомотетии (решить Подзадачу 1).

При рассматриваемой гомотетии $\omega_1 \to \omega_2$, $h_1 \to h'_1$, $h_2 \to h'_2$.

Точка $A=h_1 \cap \omega_1$. Значит, H_S^k (A) = H_S^k $(h_1 \cap \omega_1)$= H_S^k $(h_1) \cap H_S^k$ $(\omega_1)=h'_1 \cap \omega_2$=C.

Рассуждая аналогично, находим образ точки B:

H_S^k (B)= H_S^k ($h_2 \cap \omega_1$)= H_S^k (h_2)∩ H_S^k (ω_1)=$h'_2 \cap \omega_2$=D.

Таким образом, H_S^k (AB)=CD Что означает: прямые AB и CD параллельны.

Рассмотрим задачи на геометрические преобразования плоскости двух видов:

Задачи, в которых надо выяснить вид геометрического преобразования, представляющего композицию двух и более преобразований.

Задачи на доказательство равенства между композициями геометрических преобразований и нахождение условий выполнения равенства между композициями геометрических преобразований.

В решении этих двух видов задач можно использовать координатные формулы преобразований. Метод координат позволяет выделить общие подзадачи в их решении. Так при решении задач первого вида координатным методом выделяются четыре последовательные подзадачи:

Подзадача 1. Выбор системы координат.

Подзадача 2. Нахождение координатных формул геометрических преобразований, входящих в композицию.

Подзадача 3. Нахождение координатных формул композиции геометрических преобразований.

Подзадача 4. Определение вида геометрического преобразования по полученным формулам.

Методика решения задач первого вида:

1) выберите “удобную” систему координат (решить Подзадачу 1);

2) запишите координатные формулы каждого преобразования, входящего в композицию (решить Подзадачу 2);

3) найдите координатные формулы композиции (решить Подзадачу 3);

4) определите вид преобразования (решить Подзадачу 4, используя таблицу 1).

Методика решения задач второго вида:

1) выберите “удобную” систему координат (решить Подзадачу 1);

2) запишите координатные формулы композиции, стоящей справа (затем слева) в равенстве (решить Подзадачу 2 и Подзадачу 3));

3) сравните найденные формулы (Подзадача 5).

Таблица 1. Координатные формулы основных преобразований плоскости

№ п/п	**Вид преобразования**	**Координатные формулы**
	2	3
	Поворот R_O^α, O(0;0)	x_1=x cosα– y sinα y_1= x sinα+y cosα
2	Параллельный перенос $T_{\vec{a}}$, $\vec{a}=(a_1;a_2)$	$x_1=x+a_1$, $y_1=y+a_2$

3	Центральная симметрия Z_O, O=$(c_1;c_2)$	x_1= -x+ 2c_1, y1= -y+ 2c_2
4	Осевая симметрия S_l, l: ax+bx+c=0	x_1=x-$\frac{2a}{a^2+b^2}$ (ax+bx+c) y_1=y-$\frac{2b}{a^2+b^2}$ (ax+bx+c)
5	Гомотетия H_O^k , O (x_0;y_0)	x_1=kx+x_0(1-k) y_1=yx+y_0(1-k)

Приведём образец рассуждений по решению задач каждого вида.

Задача (первого вида). Выясните вид преобразования, представляющего композицию гомотетии H_O^k (k $\neq$1) и параллельного переноса.

Решение

1 этап. Следуя первому пункту методической схемы решения задач первого вида, выбираем систему координат так, чтобы координатные формулы преобразований, входящих в композицию, имели наиболее простой вид (решение Подзадачи 1). Выбираем прямоугольную систему координат так, чтобы началом координат являлся центр гомотетии O, а вектор переноса $\vec{a}$ был параллелен оси OX.

В выбранной системе координат центр гомотетии O имеет координаты (0;0), а вектор переноса $\vec{a}$ - (a,0).

2 этап (решение Подзадачи 2). Нахождение координатных формул преобразований, входящих в композицию.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Находим M_1=$T_{\vec{a}} \circ H_o^k(M)$; $T_{\vec{a}} \circ H_o^k(M)$=$T_{\vec{a}}$ (M′) = M_1 (рис.5), где M(x, y), M(x_1, y_1) , M(x_1', y_1').

Координатные формулы гомотетии H_0^k находим в пятой строке таблицы 1.

$$H_0^k:\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

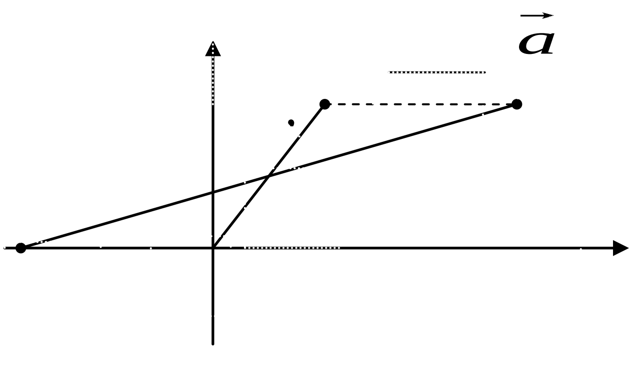

Рис. 5

Координатные формулы параллельного переноса $T_{\vec a}$, $\vec a = (a;0)$, находим во второй строке таблицы 1:

$$T_{\vec a}:\begin{cases} x' = a \\ y' \end{cases}$$

3 этап (решение Подзадачи 3). Запись формул композиции

Используя формулы таблицы 1, находим зависимость между координатами точек M и M_1, то есть координатные формулы композиции $T_{\vec a} \circ H_0^k$.

$$T_{\vec a} \circ H_0^k:\begin{cases} x_1 = kx + a \\ y_1 = ky. \end{cases}$$

4 этап (решение Подзадачи 4). Определение вида преобразования

Преобразование, задаваемое найденными формулами, является гомотетией с центром $S\left(\dfrac{a}{1-k};0\right)$ и коэффициентом k (пятая строка таблицы 1).

Поскольку точка S принадлежит оси OX, то вектор $\overrightarrow{OS}$ коллинеарен вектору $\vec a$. Таким образом, точка S находится построением $S=(MM_1)\cap(OX)$ (рис.5).

Задача (второго вида). Докажите: композиция осевой симметрии S_l и параллельного переноса $T_{\vec a}$ перестановочна (коммутативна), если вектор переноса параллелен оси симметрии.

Решение

1 этап (решение Подзадачи 1). Следуя первому пункту методической схемы решения задач второго вида, выбираем систему координат так, чтобы ось симметрии *a* совпадала, например, с осью *OX* (формулы осевой симметрии будут простыми при указанном выборе системы координат). Координаты вектора $\vec a$ параллельного переноса будут следующими: (*a*, 0).

2 этап (решение Подзадачи 2 и решение Подзадачи 3). Нахождение координатных формул композиций.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Находим:

$M_2 = T_{\vec a} \circ S_l(M); T_{\vec a} \circ S_l(M) = T_{\vec a}(M_1) = M_2$,

$M'' = S_l \circ T_{\vec a}(M); S_l \circ T_{\vec a}(M) = S_l(M') = M''$

Где M(x,y), $M(x_1,y_1)$, $M(x_2,y_2)$, $M'(x',y')$, $M''(x'',y'')$

Из второй строки и четвёртой строки таблицы 1 находим нужные формулы:

$$T_{\vec a} \circ S_l:\begin{cases} x_2 = x_1 + a = x + a \\ y_2 = y_1 = y \end{cases}$$

$$S_l \circ T_{\vec a}:\begin{cases} x'' = x' = x + a \\ y'' = -y' = -y \end{cases}$$

3 этап (решение Подзадачи 5). Следуя третьему пункту схемы решения задач второго вида, сравним полученные формулы. Так как найденные формулы одинаковые, то: $T_{\bar{a}} \circ S_l = S_l \circ T_{\bar{a}}$.

Суть рассмотренной методики состоит в том, что она ориентирована на формирование у обучающихся обобщенного подхода к решению планиметрических задач метом геометрических преобразований. Теоретически обоснована и посредством внедрения в практику математического образования подтверждена эффективность этой методики,

Список литературы

1. Уткина, Т.И. О задачах на построение в теме: «Преобразования фигур» / Т.И. Уткина // Математика в школе. – 1986. - № 4. – С. 36-38.

2. Уткина, Т.И. Формирование обобщенных способов действия при изучении геометрических преобразований плоскости и пространства / Т.И. Уткина // Сборник «Преподавание математики в инновационных средних учебных заведениях. – Орск: изд-во ОГПИ, 1996. - С. 51-56.

3. Уткина, Т.И. К вопросу о развитии методологической культуры учителя математики в процессе профессиональной подготовки / Т.И. Уткина // Профессионально-педагогическая культура как основополагающий фактор технологии обучения: Материалы межвузовской научно-методической конференции. – Оренбург: изд-во ОГУ, 1999. - С. 127-129.

4. Уткина, Т.И. Подготовка учителя к реализации моделей развивающего обучения / Т.И. Уткина // Единство аксиологических основ культуры, филологии и педагогики: Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Орск: изд-во ОГТИ, 2001. - С. 51-52.

5. Уткина, Т.И. Реализация компетентностного подхода в процессе развития общеучебных умений учащихся в условиях общеобразовательной школы: программа и концепция педагогического исследования / Т.И. Уткина. - Орск: изд-во ОГТИ, 2001.

6. Уткина, Т.И. Преобразования плоскости / Т.И. Уткина, Д.Ф. Изаак. – Куйбышев, 1980.

7. Уткина, Т.И. Геометрия: Векторное пространство. Геометрия плоскости и пространства. Геометрические преобразования и построения / Т.И. Уткина, А.А. Уткин. – Орск, 2017.