МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Кафедра сопротивления материалов

А.В. КОЛОТВИН, Р.В. РОМАШОВ

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ
РАБОТ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2008

УДК 620.1(07)

ББК 30.121я7

К 61

Рецензент

кандидат технических наук, доцент С.Н. Горелов

Колотвин А.В.

К 61 **Растяжение и сжатие стержней: методические указания к выполнению расчетно-проектировочных работ по сопротивлению материалов/ А.В. Колотвин, Р.В. Ромашов– Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. -40с.**

Методические указания предназначены для самостоятельной подготовки студентов при выполнении расчетно-проектировочных работ по первой части курса сопротивления материалов.

ББК 30.121я7

Содержание

1 Растяжение и сжатие

1.1 Продольные силы и их эпюры

Растяжение и сжатие часто встречается в элементах конструкций и машин. Например, растяжение возникает в тросах подъемников, в буксировочных тросах, в крепежных винтах; сжатие возникает в вытяжных трубах, мостовых опорах и колоннах от собственного веса и т.д.

Тела (брусья), работающие на растяжение или сжатие, называют **стержнями**. Растяжение или сжатие стержня вызывается силами, действующими вдоль его оси. В этом случае в поперечных сечениях стержня из шести внутренних силовых факторов возникает только один – **продольная (осевая) сила** N_z.

На рисунке 1.1 показаны случаи центрального растяжения (рисунок 1.1,а) и центрального сжатия (рисунок 1.1,б). При этом направление внешней силы F совпадает с осью z стержня. Используя метод сечений, можно показать внутренние распределенные по всему сечению силы, равнодействующая которых N_z является внутренней продольной силой.

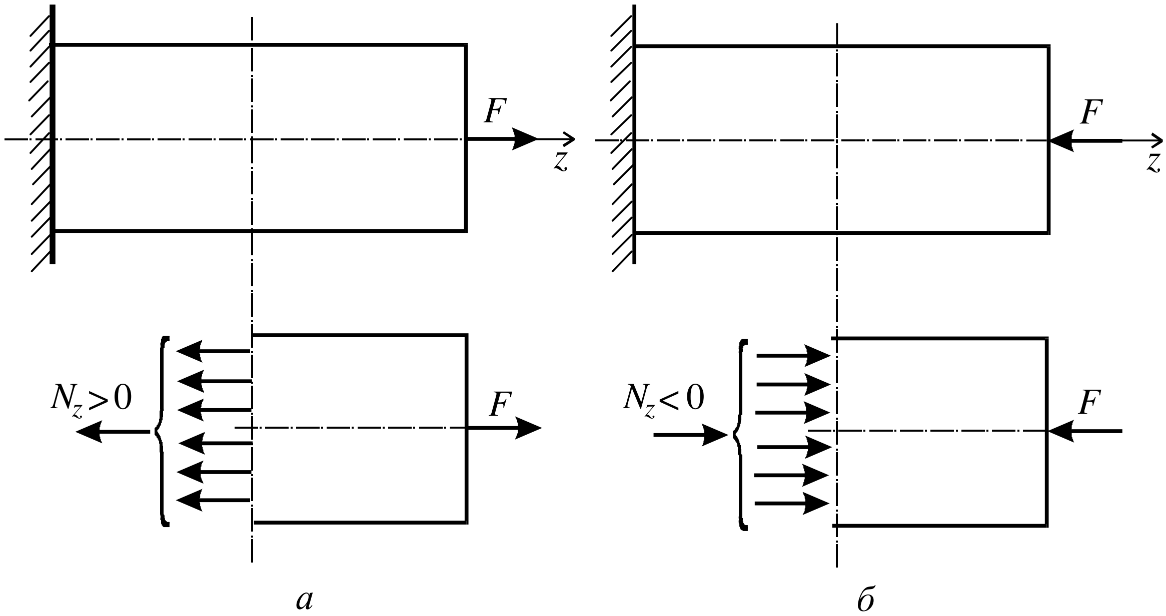


Рисунок 1.1

Правило знаков: принято продольную силу N_z считать положительной, если она вызывает растяжение (направлена от сечения), и отрицательной, если она вызывает сжатие (направлена к сечению).

В тех случаях, когда продольные силы в различных сечениях стержня неодинаковы, закон их изменения по длине стержня удобно представлять в виде графика, называемого эпюрой продольных сил. Эпюру строят в первую очередь для того, чтобы использовать ее при расчете стержня на прочность: она дает возможность найти наибольшие значения продольных сил и положение сечений, в которых они возникают.

Так, стержень, изображенный на рисунке 1.2, следует разбить на три участка и, применяя метод сечений, записать для каждого из участков очевидные выражения для продольной силы:

$$N_{z_1} = F_1 = 40 \text{ кН};$$

$$N_{z_2} = F_1 + F_2 = 40 + 20 = 60 \text{ кН};$$

$$N_{z_3} = F_1 + F_2 - F_3 = 40 + 20 - 90 = -30 \text{ кН}.$$

По полученным данным на рисунке 1.2 построена эпюра N_z путем отложения соответствующих ординат от базы (нулевой линии, которая проводится параллельно оси стержня).

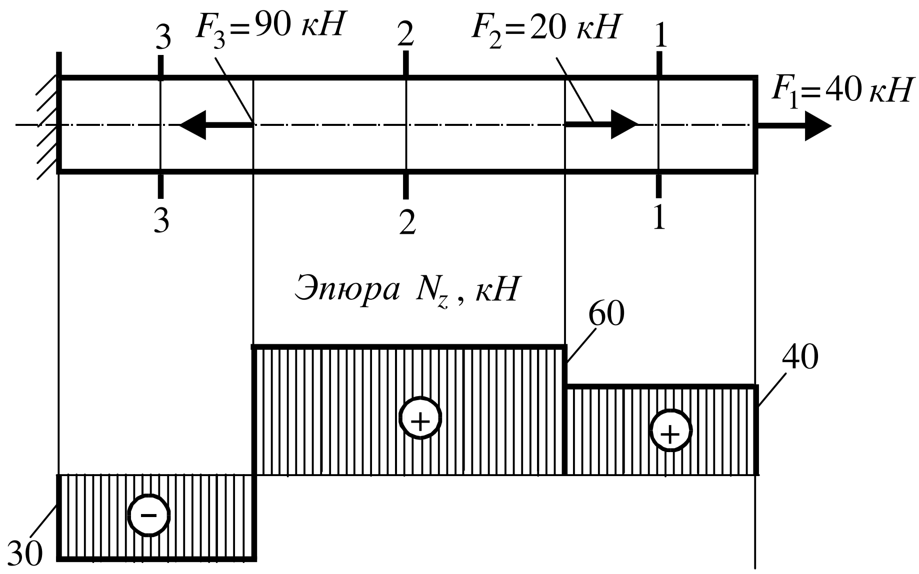


Рисунок 1.2

Построение эпюры усложняется, если внешняя нагрузка распределена вдоль оси стержня по некоторому закону: например, в расчетах с учетом собственного веса стержня, на участках с распределенной внешней нагрузкой интенсивностью q, $\left(\text{Н}/\text{м}\right)$ и др.

1.2 Напряжения в поперечных сечениях стержня

При растяжении (сжатии) стержня в его поперечных сечениях возникают только **нормальные напряжения**.

Для однородного стержня естественно предположить, что внутренние продольные силы распределены по сечению равномерно (рисунок 1.1). Тогда и нормальные напряжения при растяжении (сжатии) распределены по поперечному сечению стержня равномерно. При этом распределение напряжений не зависит от формы сечения.

Таким образом, нормальное напряжение для всех точек сечения будет одним и тем же, и равно:

$$\sigma = \frac{N_z}{A}, \tag{1.1}$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Для нормальных напряжений принимают то же **правило знаков**, что и для продольных сил, т.е. при растяжении считают напряжения положительными, а при сжатии – отрицательными.

Заметим, что для однородного, растянутого (или сжатого), нагруженного по концам стержня с постоянной по длине площадью поперечного сечения, напряжения остаются постоянными как по сечению, так и по длине, т.е. сохраняются неизменными для всех точек объема, занимаемого телом. Такое напряженное состояние называется однородным. При однородном напряженном состоянии все точки тела находятся в одинаковых условиях.

1.3 Деформации при растяжении (сжатии). Закон Гука

Размеры растянутого стержня меняются в зависимости от величины приложенных сил. Если до нагружения стержня его длина была равна l, то после нагружения она станет равной $l + \Delta l$ (рисунок 1.3). Величину Δl называют **абсолютным удлинением**, которое измеряется в единицах длины.

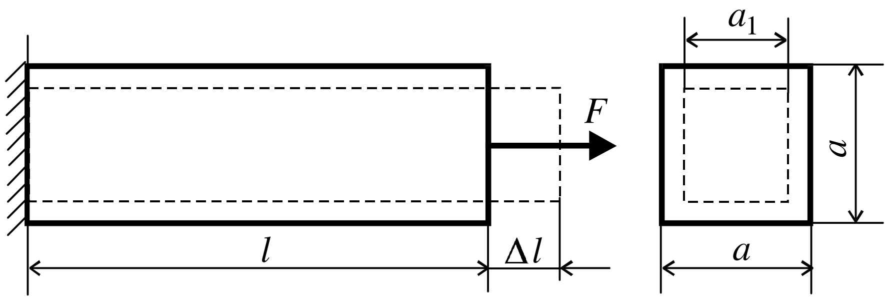


Рисунок 1.3

На рисунке 1.3 пунктиром показан деформированный вид растянутого стержня. Таким образом, при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются. При сжатии, наоборот, длина стержня уменьшается, а поперечные размеры увеличиваются.

Отношение абсолютного удлинения стержня к его первоначальной длине называется **относительным удлинением или относительной продольной деформацией**:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.2)$$

При растяжении продольную деформацию считают положительной, а при сжатии – отрицательной.

Отношение абсолютного изменения размера поперечного сечения к его первоначальному значению называется относительным поперечным сужением (расширением) или **относительной поперечной деформацией** (рисунок 1.3):

$$\varepsilon' = \frac{a - a_1}{a} = \frac{\Delta a}{a}. \quad (1.3)$$

При растяжении поперечные размеры уменьшаются, и ε' считают величиной отрицательной.

Деформации ε и ε' – безразмерные величины. В некоторых случаях их удобно выражать в процентах.

Отношение поперечной деформации к продольной, взятое по абсолютной величине при растяжении или сжатии, называют **коэффициентом Пуассона**:

$$\nu = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|} \quad (1.4)$$

Учитывая, что продольная и поперечная деформации всегда имеют противоположные знаки, получаем:

$$\varepsilon' = -\nu \cdot \varepsilon. \quad (1.5)$$

Коэффициент Пуассона (безразмерная величина) назван по имени французского ученого, впервые его изучившего. Коэффициент Пуассона определяется опытным путем, и он есть величина постоянная для данного материала в пределах упругих деформаций. Для различных материалов коэффициент лежит в пределах $0 \le \nu \le 0{,}5$. Для сталей различных марок коэффициент колеблется незначительно: $\nu = 0{,}26...0{,}33$ (иногда принимают в среднем $\nu = 0{,}3$).

При упругих деформациях между нормальным напряжением и соответствующей ему относительной продольной деформацией существует прямо пропорциональная (линейная) зависимость, известная под названием **закона Гука** (по имени установившего этот закон английского физика Роберта Гука):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (1.6)$$

Коэффициент пропорциональности *E* между напряжением σ и деформацией ε называется **модулем нормальной упругости** (или другие названия: **модуль упругости 1-го рода; модуль Юнга**). Величина *E* имеет ту же размерность, что и напряжение, т.е. Па или МПа.

Модуль Юнга является физической константой материала и определяется опытным путем. Для каждого материала он колеблется в узких пределах. Например, для стали $E=(1{,}9\ldots2{,}15)\cdot10^5$ МПа. При этом важно иметь в виду, что значение E для стали практически не зависит от ее химического состава и термической обработки (иногда принимают в среднем для стали $E=2\cdot10^5$ МПа).

Следует отметить, что закон Гука для некоторых материалов, таких как, например, сталь, соблюдается с большой степенью точности в широких пределах изменения напряжений. Однако, в некоторых случаях наблюдаются заметные отклонения от закона Гука. Например, для чугуна и некоторых строительных материалов даже при малых напряжениях закон Гука может быть принят только в первом приближении.

Подставив в формулу (1.2) значение ε из закона Гука и значение σ из формулы (1.1), получим выражение для абсолютного удлинения:

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EA}. \tag{1.7}$$

Произведение EA в знаменателе формулы называется **жесткостью** поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии). Жесткость зависит от материала и размеров поперечного сечения.

Если на рассматриваемом участке стержня продольная сила N_z и поперечное сечение A (или одна из этих величин) переменны, то полное удлинение участка длиной l определяется как:

$$\Delta l = \int_l \frac{N(z)dz}{EA(z)}.$$

В общем случае для стержня, состоящего из нескольких участков, когда законы изменения N_z и A (или одной из этих величин) не одинаковы для различных участков стержня, при определении суммарной абсолютной деформации стержня Δl_Σ интегрирование ведется в пределах каждого из участков, а затем результаты суммируются:

$$\Delta l_\Sigma = \sum_{i=1}^{k} \int_{l_i} \frac{N(z)dz}{EA(z)}, \tag{1.8}$$

где k – количество участков.

1.4 Условия прочности и жесткости. Виды расчетов

Основная задача сопротивления материалов – обеспечить надежные размеры деталей, подверженных тому или иному силовому воздействию. Такие размеры можно определить из расчетов на прочность или жесткость. В большинстве случаев основным является расчет на прочность.

Очевидно, что величины максимальных напряжений, возникающих в опасных (т.е. наиболее напряженных) точках сечения, из условия надежности работы детали необходимо ограничивать некоторыми допустимыми значениями. Их называют **допускаемыми напряжениями** и обозначают σ_{adm} (*admissible* – допускаемый).

Таким образом, при растяжении или сжатии стержня **условие прочности** записывается следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{z\max}}{A} \le \sigma_{adm}. \qquad (1.9)$$

В отдельных случаях незначительное превышение максимальных расчетных напряжений $\sigma_{\max}$ над допускаемыми σ_{adm} не опасно, так как допускаемое напряжение σ_{adm} составляет лишь некоторую часть от предельного напряжения. Обычно считают, что это превышение может составлять до (3 – 5) % от допускаемого напряжения. Если же, наоборот, расчетное значение значительно ниже допускаемого σ_{adm}, это является свидетельством перерасхода материала и нерациональности конструкции.

В зависимости от цели расчета (постановки задачи) различают **три вида расчетов на прочность**:

1) проверочный;

2) проектный;

3) определение допускаемой нагрузки.

Такая классификация видов расчета относится ко всем разделам курса (кручение, изгиб, устойчивость), а не только к растяжению (сжатию). Рассмотрим несколько подробнее каждый из трех указанных видов расчета.

1 **При проверочном расчете** известны нагрузка, действующая на стержень, его материал (а следовательно, допускаемое напряжение) и размеры. Определению подлежит максимальное расчетное напряжение $\sigma_{\max}$, которое сравнивают с допускаемым. Таким образом, проверочный расчет делается непосредственно по формуле (1.9). С проверочными расчетами встречаются, в частности, при экспертизе выполненных проектов.

2 **При проектном расчете** действующая нагрузка и материал (допускаемое напряжение) известны, и из формулы (1.9) определяется требуемая площадь сечения стержня, зная которую можно определить и размеры поперечного сечения:

$$A \ge \frac{N_{z\max}}{\sigma_{adm}}. \qquad (1.10)$$

3 Если известны размеры стержня и его материал (допускаемое напряжение), то на основе формулы (1.9) определяется **допускаемое значение про-**

дольной силы:

$$N_{z_{\max}} \le A \cdot \sigma_{adm}. \qquad (1.11)$$

По этому значению $N_{z_{\max}}$ можно определить и допускаемые значения внешних сил.

В некоторых случаях для обеспечения нормальной работы конструкций размеры их деталей нужно выбирать так, чтобы обеспечивалось **условие жесткости**, которое, на основе формулы (1.8), имеет следующий вид:

$$\Delta l_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{k} \int_{l_i} \frac{N(z)dz}{EA(z)} \le \Delta l_{adm}, \qquad (1.12)$$

где Δl_{adm} – допускаемая величина абсолютной деформации детали.

Расчет по условию жесткости всегда следует дополнять расчетом на прочность. Если условие жесткости выполняется, а условие прочности не удовлетворяется, то задачу необходимо решать из условия прочности.

1.5 Расчет стержней с учетом собственного веса

В тех случаях, когда собственный вес стержня незначителен по сравнению с внешней нагрузкой, им при расчете на прочность пренебрегают. Однако в ряде инженерных конструкций собственный вес – это одна из основных нагрузок. В случаях расчета канатов шахтных подъемников, штанг бурильных устройств, колонн, стен зданий и др. влияние собственного веса учитывать необходимо.

При этом можно спроектировать стержень такого переменного сечения, у которого во всех сечениях по длине стержня напряжения одинаковы и равны допускаемому. Такой стержень называется **стержнем равного сопротивления** растяжению и сжатию.

Так, для стержня, сжатого силой F (рисунок 1.4), необходимая площадь верхнего сечения с учетом формулы (1.10) равна:

$$A_0 = \frac{F}{\sigma_{adm}}. \qquad (1.13)$$

Чем ближе к основанию стержня будем брать сечение, тем больше будет усилие и тем большими придется брать размеры площади сечения.

Установим закон изменения площади A_z поперечного сечения стержня. Вырежем двумя бесконечно близкими сечениями элемент стержня длиной dz на произвольном расстоянии z от верхнего конца (рисунок 1.4). Площадь верхнего сечения элемента равна A_z, нижнего $A_z + dA_z$. Вес выделенного элемента равен

$\gamma A_z dz$ (где γ - вес единицы объема материала). Увеличение площади dA_z должно быть таким, чтобы напряжения от веса вырезанного элемента равнялись σ_{adm}, т.е.:

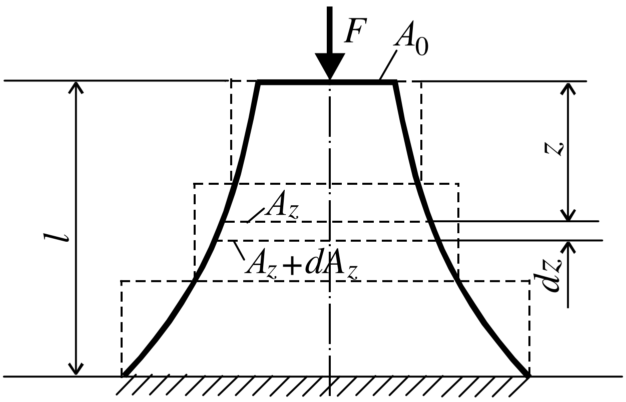


Рисунок 1.4

$$\frac{\gamma A_z dz}{dA_z} = \sigma_{adm}, \text{ или } \frac{dA_z}{A_z} = \frac{\gamma}{\sigma_{adm}} \cdot dz.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, окончательно получим:

$$A_z = A_0 \cdot e^{\gamma z / \sigma_{adm}}. \qquad (1.14)$$

Уравнение (1.14) определяет закономерность изменения по длине площади поперечного сечения стержня равного сопротивления, согласно которой такой стержень должен иметь сложную криволинейную форму. На практике вместо криволинейной формы вследствие сложной технологии ее изготовления применяют стержни, близкие к стержню равного сопротивления – например, конструкции с наклоненными боковыми гранями (опоры мостов), либо ступенчатые (штриховая линия на рисунке 1.4).

2 Расчетно-проектировочная работа (РПР) №2. Растяжение и сжатие

При выполнении РПР № 2 необходимо решить 3 задачи: в задаче № 1 рассматривается растяжение и сжатие статически определимого ступенчатого стержня; в задаче № 2 - растяжение и сжатие статически неопределимого стержня; в задаче № 3 - растяжение и сжатие стержня с учетом его собственного веса.

2.1 Задача № 1

Дано: $F_1 = 180$ кН; $F_2 = 120$ кН; $l_1 = 80$ см; $l_2 = 50$ см; $A_1 = 12$ см^2; $A_2 = 6$ см^2. Материал – сталь 3 $\left(E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \ \sigma_y = 250 \text{ МПа}\right)$ $n = 1{,}2$ (коэффициент запаса прочности).

Внешние силы F_1 и F_2 приложены по середине соответствующих участков стержней.

Требуется построить эпюры продольных сил, напряжений, перемещений и дать оценку прочности стержня.

Решение:

1 Определяются значения продольных сил N_z на каждом участке стержня и строится эпюра N_z.

В рассматриваемом примере стержень разбивается на 4 участка по длине, при этом за первый участок удобнее принять участок, наиболее удаленный от места заделки, так как реакция в заделке неизвестна. На схеме (рисунок 2.1) участки пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4; тогда длина 1-го и 2-го участков равна $l_2/2$, а 3-го и 4-го – $l_1/2$.

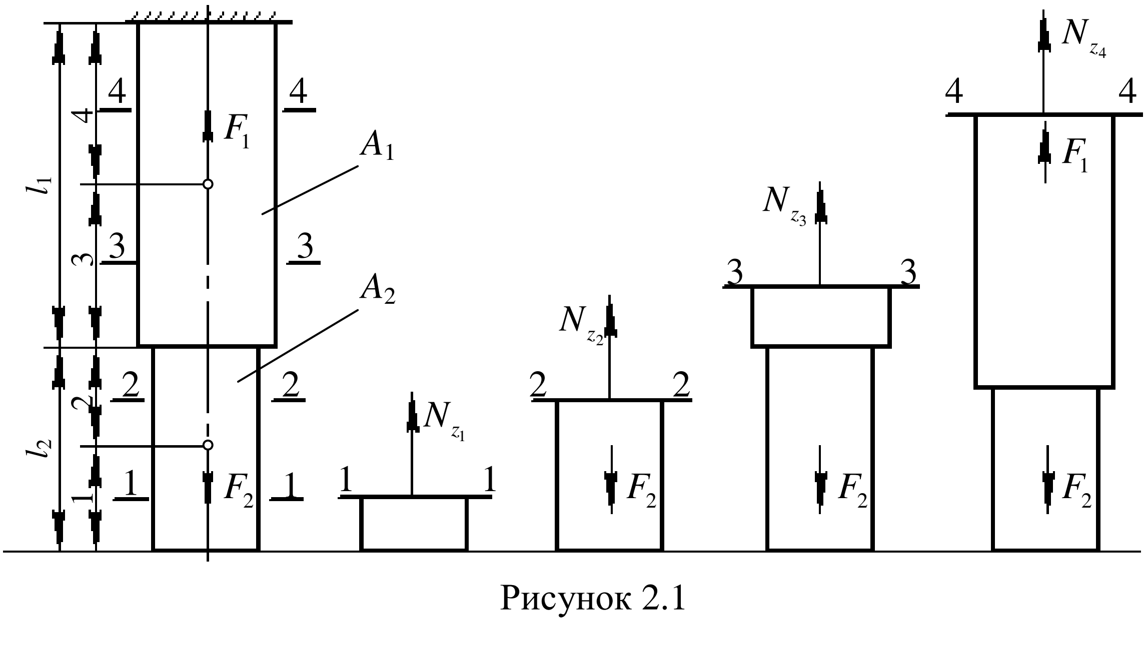


Рисунок 2.1

Для определения значений продольных сил N_z применяется метод сечений, т.е. на каждом из участков делаются сечения (1-1; 2-2; 3-3; 4-4) и отбрасывается часть стержня, прилежащая к заделке. Тогда:

$N_{z_1} = 0;$

$N_{z_2} = +F_2 = +120$ кН, (сила F_2 берется со знаком плюс, так как она растягивает стержень);

$N_{z_3} = F_2 = 120$ кН;

$N_{z_4} = F_2 - F_1 = 120 - 180 = -60$ кН, (сила F_1 берется со знаком минус, так как она сжимает стержень).

По найденным значениям строится эпюра продольных сил N_z (в произвольном масштабе – см. рисунок 2.2).

2 Вычисляются нормальные напряжения σ (с учетом знака) на каждом участке стержня, и строится эпюра σ. Дается оценка прочности стержня.

$\sigma_1 = 0$ (так как $N_{z_1} = 0$);

$$\sigma_2 = \frac{N_{z_2}}{A_2} = \frac{120 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} \ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 200 \cdot 10^6 \ \text{Па} = 200 \ \text{МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_{z_3}}{A_1} = \frac{120 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} \ \text{Н/м}^2 = 100 \cdot 10^6 \ \text{Па} = 100 \ \text{МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_{z_4}}{A_1} = \frac{-60 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} \ \text{Н/м}^2 = -50 \cdot 10^6 \ \text{Па} = -50 \ \text{МПа}.$$

По найденным значениям строится эпюра нормальных напряжений σ (в произвольном масштабе– см. рисунок 2.2).

Для оценки прочности стержня вычислим допускаемое нормальное напряжение:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{250}{1,2} = 210 \ \text{МПа}.$$

Из эпюры σ следует, что наибольшее напряжение – на втором участке: $\sigma_2 = \sigma_{\max} = 200$ МПа; условие прочности стержня выполняется, так как

$$\sigma_{\max} = 200 \ \text{МПа} < \sigma_{adm} = 210 \ \text{МПа}.$$

При этом недогрузка материала стержня составляет

$$\frac{210-200}{210}\cdot 100 = 4,8\ \%.$$

3 Вычисляются абсолютные деформации (удлинения или укорочения) отдельных участков стержня.

Расчет начинается с участка, прилегающего к месту заделки стержня, так как сечение в заделке неподвижно. В рассматриваемом примере - это 4-й участок.

Абсолютная деформация (укорочение) 4-го участка ($N_{z_4} = -60$ кН; длина $l_1/2 =$ $40\cdot 10^{-2}$ м; площадь сечения $A_1 = 12\cdot 10^{-4}$ м^2) равна:

$$\Delta l_4 = \frac{N_{z_4}\cdot \frac{l_1}{2}}{EA_1} = \frac{-60\cdot 10^3\cdot 40\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{11}\cdot 12\cdot 10^{-4}} = -0,1\cdot 10^{-3}\text{м} = -0,1 \text{ мм}.$$

Абсолютная деформация (удлинение) 3-го участка ($N_{z_3} = 120$ кН; длина $l_1/2 =$ $40\cdot 10^{-2}$ м; площадь сечения $A_1 = 12\cdot 10^{-4}$ м^2) равна:

$$\Delta l_3 = \frac{N_{z_3}\cdot \frac{l_1}{2}}{EA_1} = \frac{120\cdot 10^3\cdot 40\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{11}\cdot 12\cdot 10^{-4}} = 0,2\cdot 10^{-3}\text{м} = 0,2 \text{ мм}.$$

Абсолютная деформация (удлинение) 2-го участка ($N_{z_2} = 120$ кН; длина $l_2/2 =$ $25\cdot 10^{-2}$ м; площадь сечения $A_2 = 6\cdot 10^{-4}$ м^2) равна:

$$\Delta l_2 = \frac{N_{z_2}\cdot \frac{l_2}{2}}{EA_2} = \frac{120\cdot 10^3\cdot 25\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{11}\cdot 6\cdot 10^{-4}} = 0,25\cdot 10^{-3}\text{м} = 0,25 \text{ мм}.$$

Абсолютная деформация 1-го участка $\Delta l_1 = 0$ (так как $N_{z_1} = 0$).

4 Вычисляются перемещения граничных сечений участков стержня суммированием абсолютных деформаций отдельных участков, начиная от заделки, где $w_з = 0$. Тогда:

$$w_{a-a} = w_з + \Delta l_4 = 0 + (-0,1) = -0,1 \text{ мм};$$

$$w_{b-b} = w_{a-a} + \Delta l_3 = -0,1 + 0,2 = +0,1 \text{ мм};$$

$$w_{c-c} = w_{b-b} + \Delta l_2 = 0,1 + 0,25 = +0,35 \text{ мм};$$

$$w_{d-d} = w_{c-c} + \Delta l_1 = 0{,}35 + 0 = +0{,}35 \text{ мм}.$$

По найденным значениям строится эпюра перемещений w (в произвольном масштабе - рисунок 2.2).

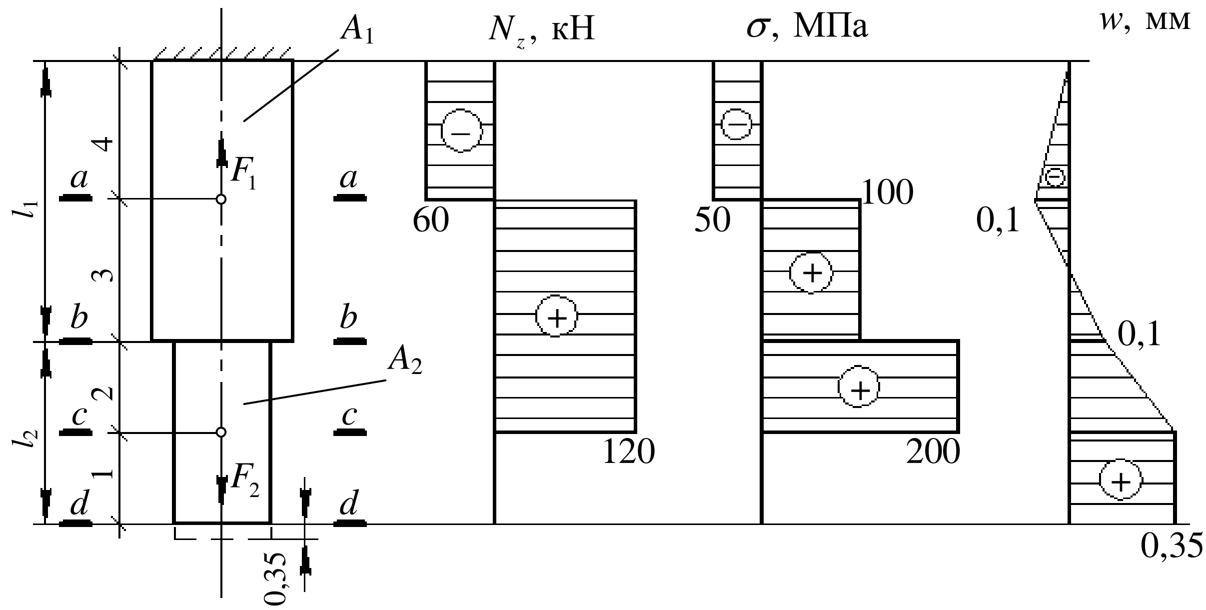


Рисунок 2.2

$w_{\Sigma} = w_{d-d} = +0{,}35$ мм. Таким образом, полное перемещение нижнего концевого сечения *d-d* стержня равно 0,35 мм (показано на рисунке), т.е. стержень удлиняется на 0,35 мм.

2.2 Задача №2

Дано: $F_1 = 120$ кН, $F_2 = 160$ кН, $l_1 = 60$ см; $l_2 = 80$ см; $A_1 = 10$ см^2; A_2=8 см^2. Материал - сталь 3 ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа $= 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\sigma_y = 250$ МПа) $n = 1,2$ (коэффициент запаса прочности).

Внешние силы F_1 и F_2 приложены по середине соответствующих участков стержней.

Требуется найти опорные реакции, построить эпюры продольных сил, напряжений, перемещений и дать оценку прочности стержня.

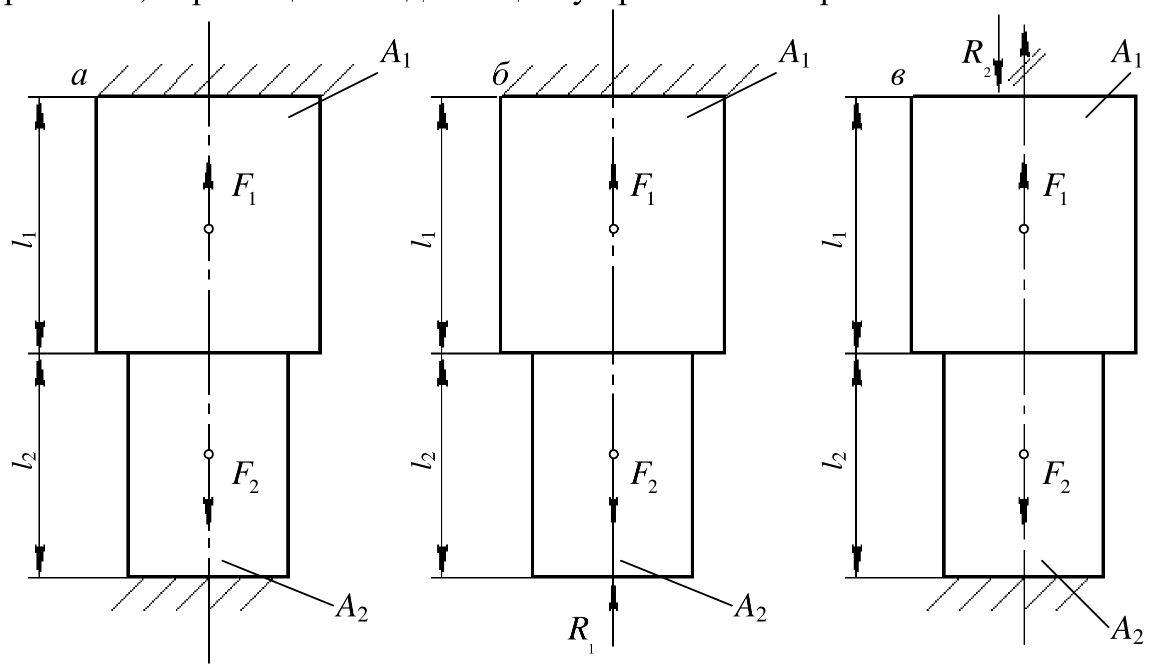


Рисунок 2.3

Решение:

Для решения задачи необходимо знать две реакции: R_1 и R_2 - см. схемы б и в на рисунке 2.3. Однако можно составить лишь одно уравнение статики - сумму проекций сил на вертикальную ось: $R_1 + R_2 + F_1 - F_2 = 0$.

Имеем одно уравнение с двумя неизвестными, т.е. задача один раз статически неопределима (2–1=1). Для раскрытия статической неопределимости требуется составить одно дополнительное уравнение - уравнение перемещений. В рассматриваемой задаче в качестве дополнительного уравнения перемещений необходимо принять равенство нулю суммарной абсолютной деформации стержня $(\Delta l = 0)$, так как перемещения верхнего и нижнего сечений равны нулю (они закреплены).

1 Определяется значение нижней опорной реакции R_1 (схема б), для чего условно отбрасывается нижняя заделка и заменяется ее действие неизвестной

реакцией R_1, направленной произвольно (в данном случае вверх).

Для составления дополнительного уравнения перемещений $(\Delta l = 0)$ рассмотрим деформацию стержня под действием сил F_1, F_2, R_1.

Из рисунка 2.3 (схема б) видно, что под действием силы F_1 сжимается участок стержня длиной $l_1/2$, расположенный выше точки приложения силы F_1. Под действием силы F_2 растягивается участок стержня длиной l_1 и участок длиной $l_2/2$, расположенные выше точки приложения силы F_2. И, наконец, под действием реакции R_1 сжимаются оба участка (длиной l_1 и l_2). Тогда уравнение перемещений (с учетом знака: плюс при растяжении и минус при сжатии) запишется следующим образом:

$$-\frac{F_1 \cdot l_1/2}{EA_1} + \frac{F_2 \cdot l_1}{EA_1} + \frac{F_2 \cdot l_2/2}{EA_2} - \frac{R_1 \cdot l_1}{EA_1} - \frac{R_1 \cdot l_2}{EA_2} = 0.$$

Подставляя численные значения (и сокращая на $1/E$), получаем:

$$\frac{-120 \cdot 30}{10} + \frac{160 \cdot 60}{10} + \frac{160 \cdot 40}{8} - \frac{R_1 \cdot 80}{10} - \frac{R_1 \cdot 80}{8} = 0.$$

Отсюда $R_1 =$ 87,5 кН.

Знак плюс означает, что направление R_1 (вверх) выбрано верно.

2 Аналогично определяется значение верхней опорной реакции R_2 (схема в), для чего условно отбрасывается верхняя заделка и заменяется ее действие неизвестной реакцией R_2, направленной произвольно (в данном случае вверх).

Для составления дополнительного уравнения перемещений $(\Delta l = 0)$ рассмотрим деформацию стержня под действием сил F_1, F_2 и R_2.

Из рисунка 2.3 (схема в) видно, что под действием силы F_1 растягивается участок стержня длиной $l_1/2$ и участок длиной l_2, расположенные ниже точки приложения силы F_1. Под действием силы F_2 сжимается участок стержня длиной $l_2/2$, расположенный ниже точки приложения силы F_2. И, наконец, под действием реакции R_2 растягиваются оба участка (длиной l_1 и l_2) Тогда уравнение перемещений запишется, как:

$$\frac{F_1 \cdot l_1/2}{EA_1} + \frac{F_1 \cdot l_2}{EA_2} - \frac{F_2 \cdot l_2/2}{EA_2} + \frac{R_2 \cdot l_1}{EA_1} + \frac{R_2 \cdot l_2}{EA_2} = 0.$$

Подставляя численные значения (и сокращая на $1/E$), получаем:

$$\frac{120\cdot 30}{10}+\frac{120\cdot 80}{8}-\frac{160\cdot 40}{8}+\frac{R_2\cdot 60}{10}+\frac{R_2\cdot 80}{8}=0\,.$$

Отсюда $R_2=-47{,}5$ кН.

Знак минус означает, что направление R_2 (вверх) выбрано неверно, и его надо изменить на противоположное, т.е. направить R_2 вниз (не верное показано на схеме в) зачеркнуто).

3 Выполняется проверка правильности определения реакций R_1 и R_2 с помощью уравнения статики:

$$R_1-R_2+F_1-F_2=0\,,$$

$$87{,}5-47{,}5\ 4+120-160=0\,,$$

40 – 40 = 0, т.е. реакции определены верно.

4 Определяются значения продольных сил N_z на каждом участке стержня, и строится эпюра N_z .

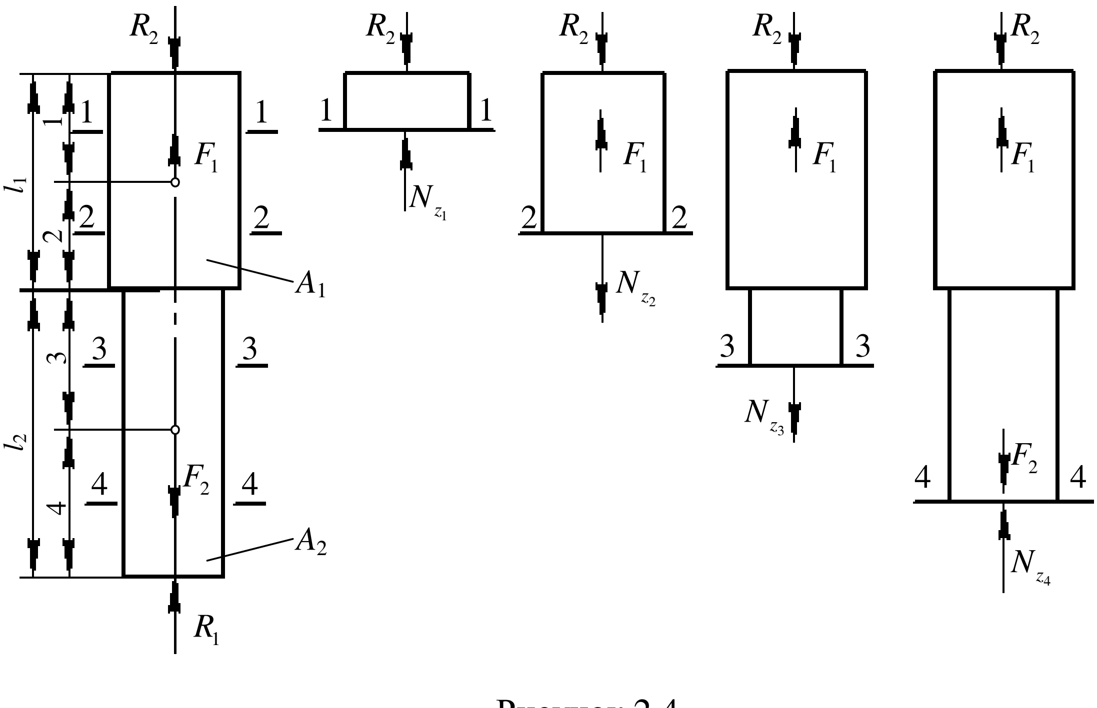


Рисунок 2.4

В рассматриваемом примере стержень разбивается на 4 участка по длине, при этом за первый участок можно брать крайний верхний или крайний нижний участок. На схеме участки пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4; тогда длина 1-го и 2-го участков равна $l_1/2$, а 3-го и 4-го -$l_2/2$ (рисунок 2.4).

Для определения значений продольных сил N_z применяется метод сечений, т.е. на каждом из участков делаются сечения (1–1; 2–2; 3–3; 4–4), и отбрасывается одна из частей стержня (в рассматриваемом примере отбрасывается нижняя часть, лежащая ниже сечений). Тогда:

$N_{z_1} = -R_2 = -47{,}5$ кН (знак минус, так как реакция R_2 сжимает стержень);

$$N_{z_2} = -R_2 + F_1 = -47{,}5 + 120 = 72{,}5 \text{ кН;}$$

$$N_{z_3} = N_{z_2} = -R_2 + F_1 = 72{,}5 \text{ кН;}$$

$$N_{z_4} = -R_2 + F_1 - F_2 = -47{,}5 + 120 - 160 = -87{,}5 \text{ кН.}$$

По найденным значениям строится эпюра продольных сил N_z (в произвольном масштабе - рисунок 2.5).

5 Вычисляются нормальные напряжения σ (с учетом знака) на каждом участке стержня, и строится эпюра σ. Дается оценка прочности стержня.

$$\sigma_1 = \frac{N_{z_1}}{A_1} = -\frac{47{,}5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} \text{Н}/\text{м}^2 = -47{,}5 \cdot 10^6 \text{Па} = -47{,}5 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_{z_2}}{A_1} = +\frac{72{,}5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} \text{Н}/\text{м}^2 = 72{,}5 \cdot 10^6 \text{Па} = 72{,}5 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_{z_3}}{A_2} = +\frac{72{,}5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} \text{Н}/\text{м}^2 = 90{,}6 \cdot 10^6 \text{Па} = 90{,}6 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_4 = \frac{Nz_4}{A_2} = -\frac{87{,}5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} \text{Н}/\text{м}^2 = -109{,}4 \cdot 10^6 \text{Па} = -109{,}4 \text{ МПа.}$$

По найденным значениям строится эпюра нормальных напряжений σ (в произвольном масштабе).

Допускаемое нормальное напряжение равно:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{250}{1,2} = 210\ \text{МПа}.$$

Из эпюры σ следует, что наибольшее напряжение - на четвертом участке: $|\sigma_4| = \sigma_{\max} = 109,4$ МПа; условие прочности стержня выполняется, так как

$$\sigma_{\max} = 109,4\ \text{МПа} < \sigma_{adm} = 210\ \text{МПа}.$$

При этом недогрузка материала стержня составляет

$$\frac{210 - 109,4}{210} \cdot 100\% = 48\ \%.$$

6 Вычисляются абсолютные деформации (удлинения или укорочения) отдельных участков стержня.

Абсолютная деформация (укорочение) 1-го участка ($N_{z_1} = -47,5$ кН; длина $l_1/2 = 30 \cdot 10^{-2}$ м; площадь сечения $A_1 = 10 \cdot 10^{-4}$ м^2) равна:

$$\Delta l_1 = \frac{N_{z_1} \cdot \frac{l_1}{2}}{EA_1} = \frac{-47,5 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -0,07 \cdot 10^{-3}\text{м} = -0,07\ \text{мм}.$$

Абсолютная деформация (удлинение) 2-го участка ($N_{z_2} = +72,5$ кН; длина $l_{1`}/2 = 30 \cdot 10^{-2}$м; площадь сечения; $A_1 = 10 \cdot 10^{-4}$м^2) равна:

$$\Delta l_2 = \frac{N_{z_2} \cdot \frac{l_1}{2}}{EA_1} = \frac{72,5 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,11 \cdot 10^{-3}\text{м} = 0,11\ \text{мм}.$$

Абсолютная деформация (удлинение) 3-го участка ($N_{z_3} = +72,5$ кН; длина $l_{2`}/2 = 40 \cdot 10^{-2}$м; площадь сечения $A_2 = 8 \cdot 10^{-4}$м^2) равна:

$$\Delta l_3 = \frac{N_{z_3} \cdot \frac{l_2}{2}}{EA_2} = \frac{72,5 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,18 \cdot 10^{-3}\text{м} = 0,18\ \text{мм}.$$

Абсолютная деформация (укорочение) 4-го участка ($N_{z_4} = -87,5$ кН; длина

$l_2/2 = 40\cdot 10^{-2}$м площадь сечения $A_2 = 8\cdot 10^{-4}$м^2) равна:

$$\Delta l_4 = \frac{N_{z_4}\cdot\frac{l_2}{2}}{EA_2} = \frac{-87{,}5\cdot 10^3\cdot 0{,}4}{2\cdot 10^{11}\cdot 8\cdot 10^{-4}} = -0{,}22\cdot 10^{-3}\text{м} = -0{,}22\ \text{мм}.$$

7 Вычисляются перемещения граничных сечений участков стержня суммированием абсолютных деформаций отдельных участков, начиная от верхней заделки, где $w_з$ =0. Тогда:

$$w_{a-a} = w_з + \Delta l_1 = 0 + (-0{,}07) = -0{,}07\ \text{мм};$$

$$w_{b-b} = w_{a-a} + \Delta l_2 = -0{,}07 + 0{,}11 = +0{,}04\ \text{мм};$$

$$w_{c-c} = w_{b-b} + \Delta l_3 = 0{,}04 + 0{,}18 = +0{,}22\ \text{мм};$$

$$w_{d-d} = w_{c-c} + \Delta l_4 = 0{,}22 + (-0{,}22) = 0\,.$$

По найденным значениям строится эпюра перемещений *w* (в произвольном масштабе рисунок 2.5).

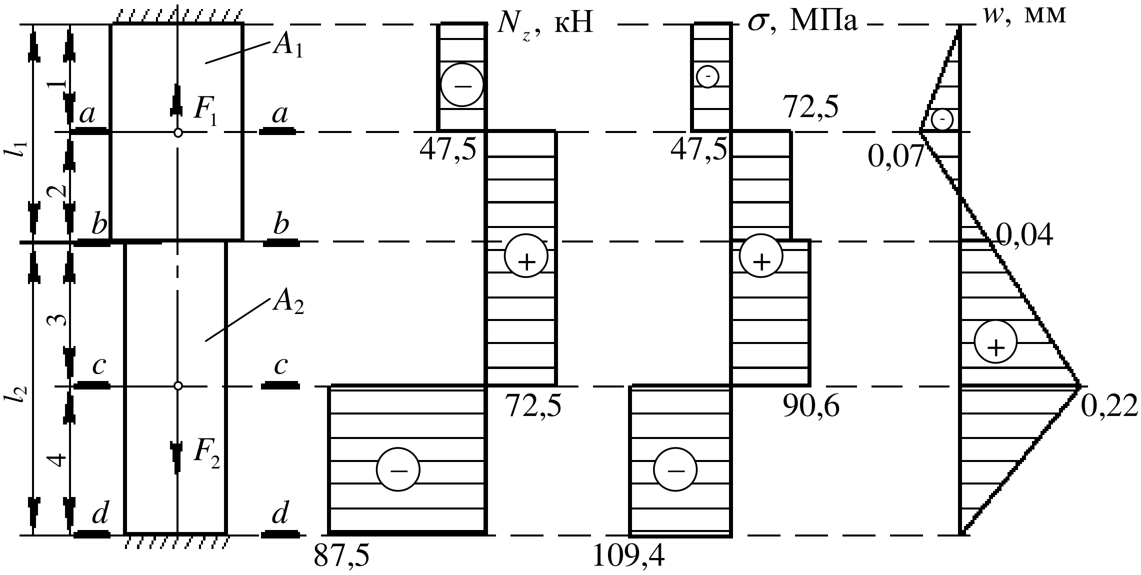


Рисунок 2.5

Из полученных данных следует, что перемещение нижнего концевого сечения *d–d* стержня (в нижней заделке) равно нулю $(w_{d-d} = 0)$, что верно, так как это сечение закреплено неподвижно.

Задача № 2-А

Дано: $F_1 = 60$ кН; $F_2 = 120$ кН; $l_1 = 80$ см; $l_2 = 50$ см; $A_1 = 12$ см^2; $A_2 = 6$ см^2. Материал – сталь 3 ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа $= 2 \cdot 10^{11}$ Па ; $\sigma_y = 250$ МПа) n = 1,2 (коэффициент запаса прочности), $\Delta = 0,2$ мм - зазор, который закрывается при монтаже (сборке) стержня в конструкции.

Внешние силы F_1 и F_2 приложены по середине соответствующих участков стержней.

Требуется найти опорные реакции, построить эпюры продольных сил, напряжений, перемещений и дать оценку прочности стержня.

Решение:

В результате деформации стержня при монтаже зазор Δ закрывается, и возникают реакции R_1 и R_2 в заделках (см. рисунок 2.6, схемы б и в). Для определения R_1 и R_2 можно составить лишь одно уравнение статики - сумму проекций сил на вертикальную ось:

$$R_1 - R_2 + F_1 - F_2 = 0$$

Имеем одно уравнение с двумя неизвестными, т.е. задача один раз статически неопределима (2 – 1=1). Для раскрытия статической неопределимости требуется составить одно дополнительное уравнение - уравнение перемещений. В данной задаче в качестве дополнительного уравнения перемещений необходимо принять следующее: суммарная абсолютная деформация стержня равна зазору $(\Delta l = \Delta)$, так как зазор закрывается при монтаже за счет деформации стержня.

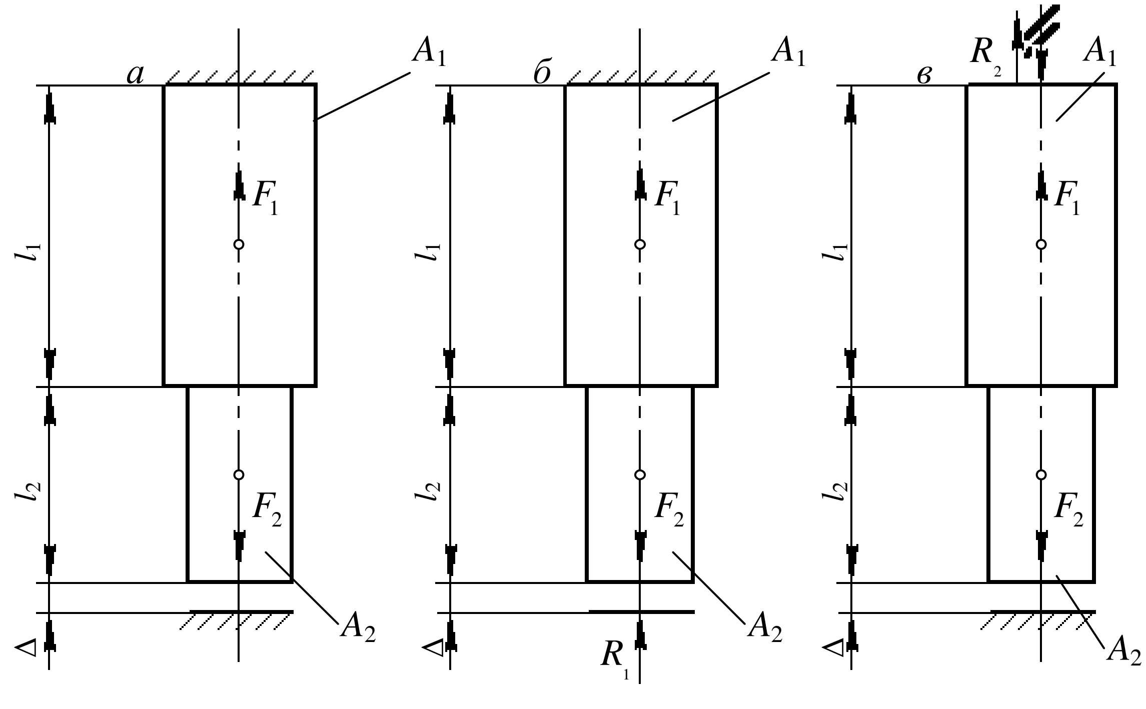


Рисунок 2.6

1 Определяется значение нижней опорной реакции R_1 (схема б), для чего условно отбрасывается нижняя заделка и заменяется ее действие неизвестной реакцией R_1, направленной произвольно (в данном случае вверх). Для составления дополнительного уравнения перемещений ($\Delta l = \Delta$) рассмотрим деформацию стержня под действием сил F_1, F_2 и R_1.

Из рисунка 2.6 (схема б) видно, что под действием силы F_1 сжимается участок стержня длиной $l_1/2$, расположенный выше точки приложения силы F_1. Под действием силы F_2 растягивается участок стержня длиной l_1 и участок длиной $l_2/2$ расположенные выше точки приложения силы F_2. И, наконец, под действием реакции R_1 сжимаются оба участка (длиной l_1 и l_2). Тогда уравнение перемещений (с учетом знака: плюс при растяжении и минус при сжатии) запишется следующим образом:

$$-\frac{F_1 \cdot l_1/2}{EA_1} + \frac{F_2 \cdot l_1}{EA_1} + \frac{F_2 \cdot l_2/2}{EA_2} - \frac{R_1 \cdot l_1}{EA_1} - \frac{R_1 \cdot l_2}{EA_2} = \Delta .$$

Подставляя численные данные (в ньютонах и метрах), получаем:

$$\frac{-60 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} - \frac{R_1 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} -$$

$$-\frac{R_1 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,2 \cdot 10^{-3} .$$

Решив уравнение, получаем $R_1 = 46,67 \cdot 10^3 \text{ Н} = 46,67 \text{ кН}$. Знак плюс означает, что направление R_1 (вверх) выбрано верно.

2 Аналогично определяется значение верхней опорной реакции R_2 (схема в), для чего условно отбрасывается верхняя заделка, и заменяется ее действие неизвестной реакцией R_2, направленной произвольно (в данном случае вниз). Для составления дополнительного уравнения перемещений $(\Delta l = \Delta)$ рассмотрим деформацию стержня под действием сил F_1, F_2 и R_2.

Из рисунка 2.6 (схема в) видно, что под действием силы F_1 растягивается участок стержня длиной $l_1/2$ и участок длиной l_2, расположенные ниже точки приложения силы F_1. Под действием силы F_2 сжимается участок стержня длиной $l_2/2$, расположенный ниже точки приложения силы F_2. И, наконец, под действием реакции R_2 сжимаются оба участка (длиной l_1 и l_2). Тогда уравнение перемещений запишется, как:

$$\frac{F_1 \cdot l_1/2}{EA_1} + \frac{F_1 \cdot l_2}{EA_2} - \frac{F_2 \cdot l_2/2}{EA_2} - \frac{R_2 \cdot l_1}{EA_1} - \frac{R_2 \cdot l_2}{EA_2} = \Delta .$$

Подставляя численные значения (в ньютонах и метрах), получаем:

$$\frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} + \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} - \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} - \frac{R_2 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} -$$
$$- \frac{R_2 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,2 \cdot 10^{-3} .$$

Решив уравнение, получаем $R_2 = -13,33 \cdot 10^3\,\text{Н} = -13,33$ кН. Знак минус означает, что направление R_2 (вниз) выбрано неверно, и его надо изменить на противоположное, т.е. направить R_2 вверх (неверное направление на схеме в) зачеркнуто).

3 Выполняется проверка правильности определения реакций R_1 и R_2 с помощью уравнения статики:

$$R_1 + R_2 + F_1 - F_2 = 0 ,$$

$$46,67 + 13,33 + 60 - 120 = 0 ,$$

120–120 =0, т.е. реакции определены верно.

4 Определяются значения продольных сил N_z на каждом участке стержня, и строится эпюра N_z.

В данном примере стержень разбивается на 4 участка по длине, при этом за первый участок удобнее брать крайний верхний участок, прилежащий к верхней заделке (без зазора). На схеме участки пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4; тогда длина 1-го и 2-го участков равна $l_1/2$, а 3-го и 4-го $l_2/2$ (рисунок 2.7).

Для определения значений продольных сил N_z применяется метод сечений, т.е. на каждом из участков делаются сечения (1–1; 2–2; 3–3; 4–4) и отбрасывается одна из частей стержня (в данном примере отбрасывается нижняя часть стержня, лежащая ниже сечений - рисунок 2.7).

Тогда:

$N_{z_1} = R_2 = 13,33$ кН (знак плюс, так как реакция R_2 растягивает стержень);

$N_{z_2} = R_2 + F_1 = 13,33 + 60 = 73,33$ кН;

$N_{z_3} = N_{z_2} = R_2 + F_1 = 73,33$ кН;

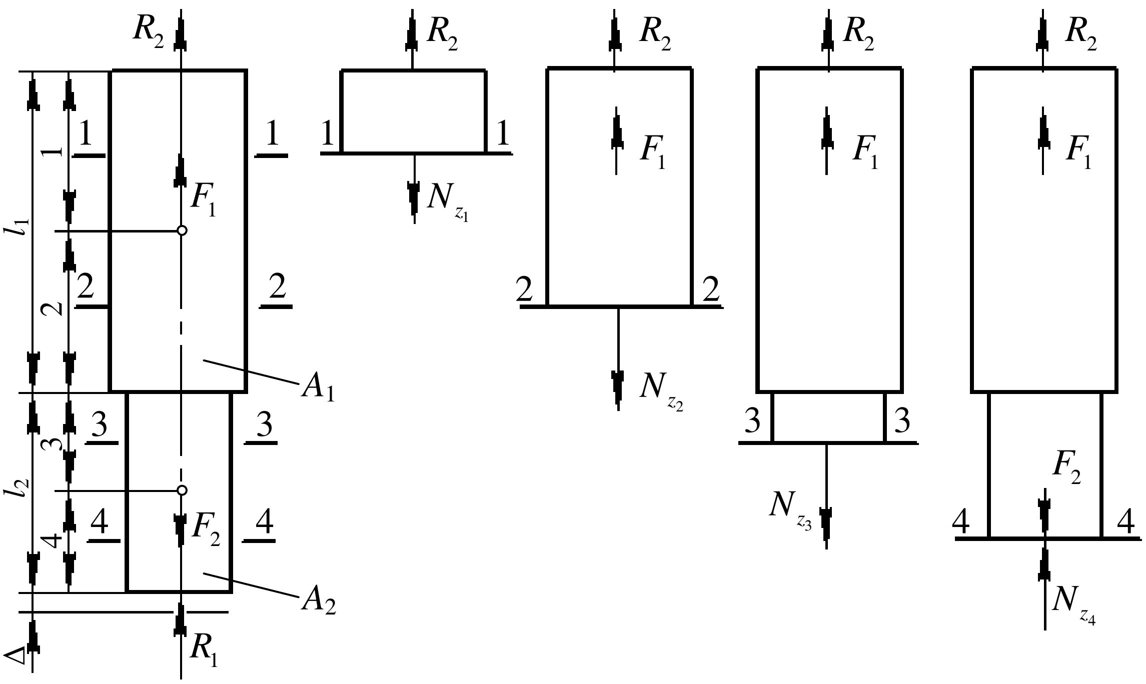


Рисунок 2.7

$$N_{z_4} = R_2 + F_1 - F_2 = 13{,}33 + 60 - 120 = -46{,}67 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строится эпюра продольных сил N_z в произвольном масштабе (рисунок 2.8).

5 Вычисляются нормальные напряжения σ (с учетом знака) на каждом участке стержня, и строится эпюра σ. Дается оценка прочности стержня.

$$\sigma_1 = \frac{N_{z_1}}{A_1} = +\frac{13{,}33 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 11{,}11 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11{,}11 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_{z_2}}{A_1} = \frac{73{,}33 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 61{,}11 \cdot 10^6 \text{ Па} = 61{,}11 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_{z_3}}{A_2} = \frac{73{,}33 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 122{,}22 \cdot 10^6 \text{ Па} = 122{,}22 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_{z_4}}{A_2} = \frac{-46{,}67 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -77{,}78 \cdot 10^6 \text{ Па} = -77{,}78 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям строится эпюра нормальных напряжений σ в произвольном масштабе (рисунок 2.8).

Допускаемое нормальное напряжение равно:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{250}{1,2} = 210 \text{ МПа.}$$

Из эпюры σ следует, что наибольшее напряжение - на третьем участке: $\sigma_3 = \sigma_{\max} = 122,22$ МПа . Условие прочности стержня выполняется, так как

$$\sigma_{\max} = 122,22\text{МПа} < \sigma_{adm} = 210 \text{ МПа.}$$

При этом недогрузка материала стержня составляет

$$\frac{210 - 122,22}{210} \cdot 100\% = 41,8\% .$$

6 Вычисляются абсолютные деформации (удлинения или укорочения) отдельных участков стержня, начиная с 1-го участка.

Абсолютная деформация (удлинение) 1-го участка ($N_{z_1} = 13,33$ кН; длина $l_1/2 = 40 \cdot 10^{-2}$ м; площадь сечения $A_1 = 12 \cdot 10^{-4}$ м^2) равна:

$$\Delta l_1 = \frac{N_{z_1} \cdot \frac{l_1}{2}}{EA_1} = \frac{13,33 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,02 \text{ мм.}$$

Абсолютная деформация (удлинение) 2-го участка ($N_{z_2} = +73,33$ кН; длина $l_1/2 = 40 \cdot 10^{-2}$ м; площадь сечения $A_1 = 12 \cdot 10^{-4}$ м^2) равна:

$$\Delta l_2 = \frac{N_{z_2} \cdot \frac{l_1}{2}}{EA_1} = \frac{73,33 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,12 \text{ мм.}$$

Абсолютная деформация (удлинение) 3-го участка ($N_{z_3} = +73,33$ кН; длина $l_2/2 = 25 \cdot 10^{-2}$ м; площадь сечения $A_2 = 6 \cdot 10^{-4}$ м^2) равна:

$$\Delta l_3 = \frac{N_{z_3} \cdot \frac{l_2}{2}}{EA_2} = \frac{73,33 \cdot 10^3 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,15 \text{ мм.}$$

Абсолютная деформация (укорочение) 4-го участка ($N_{z_4} = -46,67$ кН; длина $l_2/2 = 25 \cdot 10^{-2}$м ; площадь сечения $A_2 = 6 \cdot 10^{-4}$м^2) равна:

$$\Delta l_4 = \frac{N_{z_4} \cdot \frac{l_2}{2}}{EA_2} = \frac{-46,67 \cdot 10^3 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -0,09 \cdot 10^{-3}\text{м} = -0,09 \text{ мм.}$$

7 Вычисляются перемещения граничных сечений участков стержня суммированием абсолютных деформаций отдельных участков, начиная от верхней заделки, где $w_з = 0$. Тогда:

$$w_{a-a} = w_з + \Delta l_1 = 0 + 0,02 = 0,02 \text{ мм;}$$

$$w_{b-b} = w_{a-a} + \Delta l_2 = 0,02 + 0,12 = +0,14 \text{ мм;}$$

$$w_{c-c} = w_{b-b} + \Delta l_3 = 0,14 + 0,15 = 0,29 \text{ мм;}$$

$$w_{d-d} = w_{c-c} + \Delta l_4 = 0,29 + (-0,09) = 0,20 \text{ мм.}$$

По найденным значениям строится эпюра перемещений w (в произвольном масштабе).

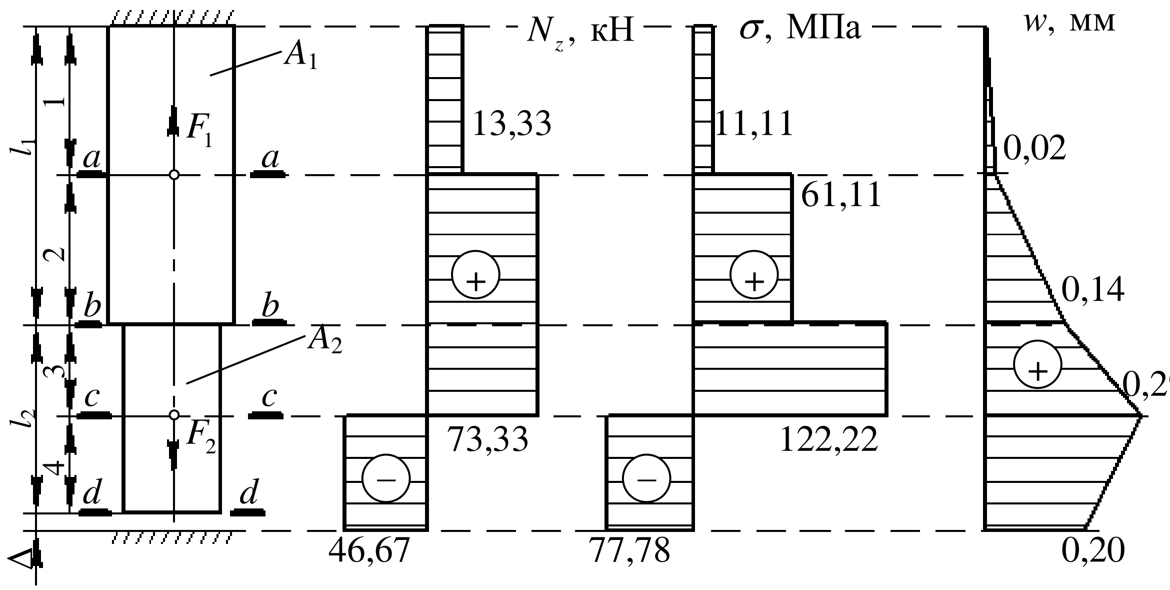


Рисунок 2.8

Из полученных данных следует, что перемещение нижнего концевого сечения d–d стержня равно зазору ($w_{d-d} = \Delta = 0,2$ мм), что верно, так как зазор закрывается за счет деформации стержня при его монтаже (сборке).

Задача №3

Дано: $F=1{,}2$ кН; $A_1=8$ см^2; $A_2=12$ см^2; $l=4$ м; $c=2$ м; $L=10$ м. Материал – сталь 3 ($E=2\cdot10^5$ МПа $=2\cdot10^{11}$ Па; $\gamma=78$ кН/м^3 - удельный вес).

Требуется построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений с учетом собственного веса стержня. Определить перемещение свободного концевого сечения *a-a* , а также сечения *b-b* отстоящего от свободного конца на расстоянии l (рисунок 2.9).

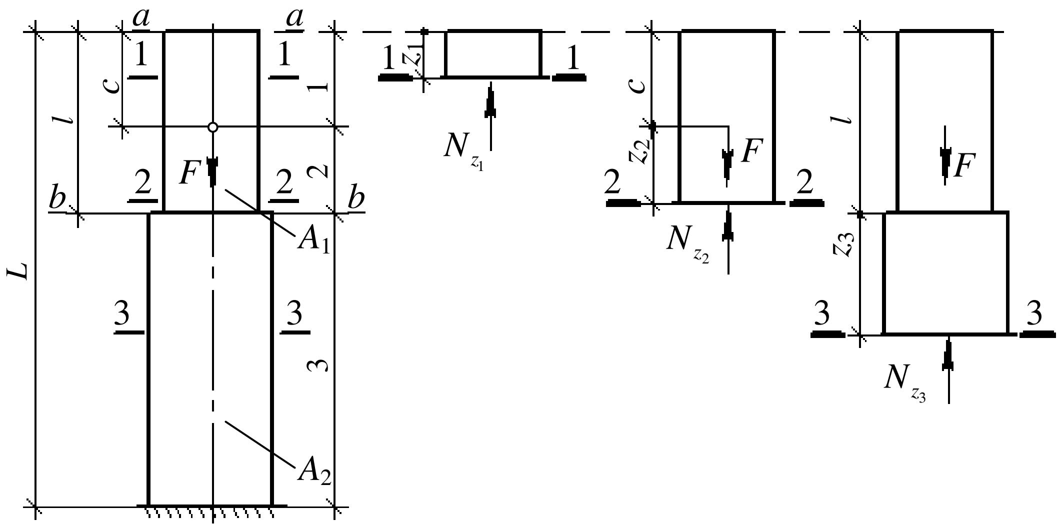


Рисунок 2.9

Решение:

1 Определяются значения продольных сил N_z на каждом участке стержня, и строится эпюра N_z.

В данном примере стержень разбивается на 3 участка по длине, при этом за первый участок удобнее принять участок, наиболее удаленный от места заделки, так как реакция в заделке неизвестна. На схеме (рисунок 2.9) участки пронумерованы цифрами 1, 2, 3; тогда длина 1-го и 2-го участков равна $l/2$, а 3-го - $(L-l)$

Для определения значений продольных сил N_z на каждом из участков делаются сечения (1–1; 2–2; 3–3) и отбрасывается часть стержня, прилежащая к заделке. Тогда:

$N_{z_1}=-\gamma\cdot A_1\cdot z_1$ (вес части стержня длиной z_1, лежащей выше сечения 1–1; берется со знаком минус, так как сила тяжести сжимает стержень).

$0\le z_1\le c=2$ м

При $z_1=0$ (в начале 1-го участка) N_{z_1}=0.

При $z_1=2$ м (в конце 1-го участка) $N_{z_1}=-78\cdot8\cdot10^{-4}\cdot2=-0{,}13$ кН.

$$N_{z_2} = -\gamma \cdot A_1 \cdot (c + z_2) - F,$$

где $A_1 \cdot (c + z_2)$ – вес части стержня длиной $(c + z_2)$, лежащей выше сечения 2–2.

$0 \le z_2 \le 2$ м.

При $z_2 = 0$ $\quad N_{z_2} = -\gamma \cdot A_1 \cdot c - F = -78 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 2 - 1{,}2 = -1{,}33$ кН.

При $z_2 = 2$м $\quad N_{z_2} = -\gamma \cdot A_1 \cdot (c + 2) - F = -78 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 4 - 1{,}2 = -1{,}46$ кН.

$$N_{z_3} = -\gamma \cdot A_1 \cdot l - \gamma \cdot A_2 \cdot z_3 - F,$$

где $\gamma \cdot A_1 \cdot l + \gamma \cdot A_2 \cdot z_3$ -вес части стержня длиной $(l + z_3)$, лежащей выше сечения 3–3.

$0 \le z_3 \le 6$ м.

При $z_3 = 0$ $\quad N_{z_3} = -\gamma \cdot A_1 \cdot l - F = -1{,}46$ кН.

При $z_3 = 6$ м $\quad N_{z_3} = -78 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 4 - 78 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 6 - 1{,}2 = -2{,}02$ кН.

По найденным значениям строится эпюра продольных сил N_z в произвольном масштабе (рисунок 2.10).

2 Вычисляются нормальные напряжения σ (с учетом знака) в начале и конце каждого участка стержня, и строится эпюра σ.

В начале 1-го участка (при $z_1 = 0$) $\quad \sigma_1 = 0$

В конце 1-го участка (при $z_1 = 2$ м):

$$\sigma_1 = \frac{N_{z_1}}{A_1} = \frac{-0{,}13 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = -0{,}16 \cdot 10^6 \text{ Па} = -0{,}16 \text{ МПа}.$$

В начале 2-го участка (при $z_2 = 0$):

$$\sigma_2 = \frac{N_{z_2}}{A_1} = \frac{-1{,}33 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = -1{,}67 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1{,}67 \text{ МПа}.$$

В конце 2-го участка (при $z_2 = 2$ м):

$$\sigma_2 = \frac{N_{z_2}}{A_1} = \frac{-1{,}46 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = -1{,}82 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1{,}82 \text{ МПа}.$$

В начале 3-го участка (при $z_3 = 0$):

$$\sigma_3 = \frac{N_{z_3}}{A_2} = \frac{-1,46 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = -1,22 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,22 \text{ МПа}.$$

В конце 3-го участка (при $z_3 = 6$ м):

$$\sigma_3 = \frac{N_{z_3}}{A_2} = \frac{-2,02 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = -1,68 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,68 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям строится эпюра нормальных напряжений σ в произвольном масштабе (рисунок 2.10).

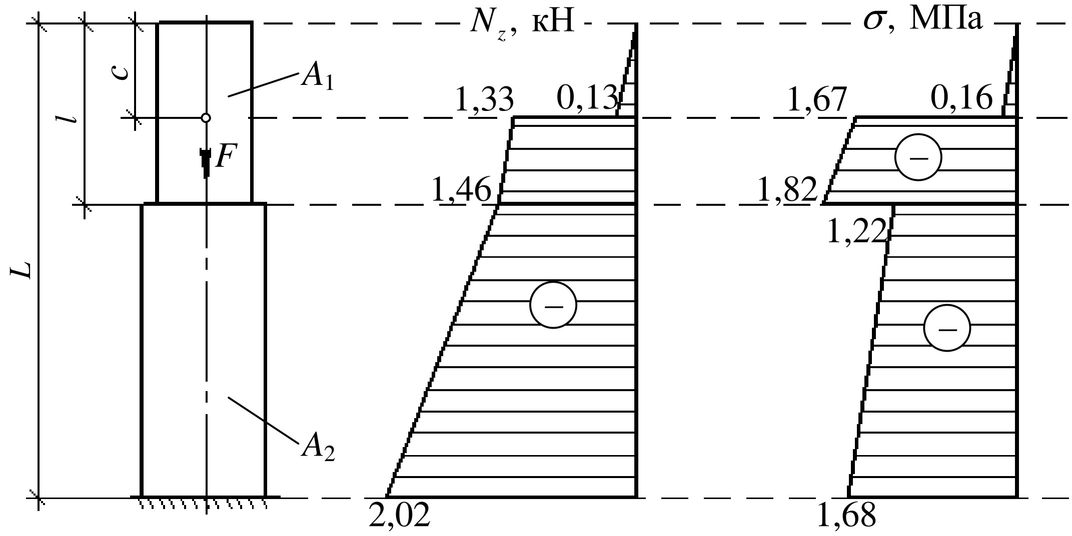


Рисунок 2.10

3 Вычисляются перемещения свободного концевого сечения *a–a*, а также сечения *b–b*, отстоящего от свободного конца на расстоянии l.

Перемещение сечения *b–b*, отстоящего от свободного конца на расстоянии l, определяется как сумма:

$$w_{b-b} = \Delta l'_F + \Delta l_{G(l)} + \Delta l_{G'},$$

где $\Delta l'_F$ - перемещение сечения *b–b* от действия сжимающей сосредоточенной внешней силы *F*, равное абсолютной деформации части стержня длиной $(L-l)$

$$\Delta l'_F = \frac{-F \cdot (L-l)}{E \cdot A_2} = \frac{-1,2 \cdot 10^3 \cdot 6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = -0,03 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,03 \text{ мм};$$

$\Delta l_{G(l)}$ - перемещение сечения $b-b$ от действия веса $G(l)$ части стержня длиной l, лежащей выше сечения $b-b$, то есть вес этой части рассматривается по отношению к сечению $b-b$ как внешняя сосредоточенная нагрузка. Значит, искомое перемещение равно абсолютной деформации части стержня длиной $(L-l)$ от действия веса $G(l)$:

$$\Delta l_{G(l)} = \frac{-G(l)\cdot(L-l)}{EA_L} = \frac{-\gamma A_1 l\cdot(L-l)}{EA_L} = \frac{-78\cdot10^3\cdot8\cdot10^{-4}\cdot4\cdot6}{2\cdot10^{11}\cdot12\cdot10^{-4}} =$$

$$= -0{,}006\cdot10^{-3}\text{м} = -0{,}006 \text{ мм};$$

$\Delta l_{G'}$ – перемещение сечения $b-b$ от действия собственного веса G' части стержня длиной $(L-l)$, лежащей ниже сечения $b-b$; при этом вес G' рассматривается как нагрузка, равномерно распределенная вдоль стержня на длине $(L-l)$. Для расчета $\Delta l_{G'}$ применим следующее правило: абсолютная деформация стержня постоянного сечения от собственной силы тяжести (веса), рассматриваемой как равномерно распределенная нагрузка, в два раза меньше деформации от действия силы, равной силе тяжести стержня и приложенной к его концу, то есть

$\Delta l_{G'} = \dfrac{-G'\cdot l}{2EA}$, тогда получаем:

$$\Delta l_{G'} = \frac{-G'\cdot(L-l)}{2EA_2} = \frac{-\gamma A_2\cdot(L-l)\cdot(L-l)}{2EA_2} = \frac{-\gamma\cdot(L-l)^2}{2E} =$$

$$= \frac{-78\cdot10^3\cdot6^2}{2\cdot2\cdot10^{11}} = -0{,}007\cdot10^{-3}\text{м} = -0{,}007 \text{ мм}.$$

Итак, перемещение сечения $b-b$, отстоящего от свободного конца на расстоянии l, равно:

$w_{b-b} = \Delta l'_F + \Delta l_{G(l)} + \Delta l_{G'} = -0{,}03 - 0{,}006 - 0{,}007 = -0{,}043$ мм – (перемещение вниз) Перемещение свободного концевого сечения *a-a* определяется как сумма:

$$w_{a-a} = w_{b-b} + \Delta l''_F + \Delta l_{G''},$$

где $\Delta l''_F$ - перемещение сечения *a-a* от действия сжимающей сосредоточенной внешней силы *F*, равное абсолютной деформации части стержня длиной $l/2$ (лежащей ниже точки приложения силы *F*):

$$\Delta l''_F = \frac{-F\cdot\frac{l}{2}}{EA_1} = \frac{-1,2\cdot10^3\cdot0,2}{2\cdot10^{11}\cdot8\cdot10^{-4}} = -0,015\cdot10^{-3}\ \text{м} = -0,015\ \text{мм},$$

$\Delta l_{G''}$ – перемещение сечения *a-a* от действия собственного веса G'' части стержня длиной l, лежащей ниже сечения *a-a*, то есть вес G'' рассматривается как нагрузка, равномерно распределенная вдоль стержня на длине *l*:

$$\Delta l_{G''} = \frac{-G''\cdot l}{2EA_1} = \frac{-\gamma A_1\cdot l\cdot l}{2EA_1} = -\frac{\gamma\cdot l^2}{2E} =$$

$$\frac{-78\cdot10^3\cdot4^2}{2\cdot2\cdot10^{11}} = -0,003\cdot10^{-3}\ \text{м} = -0,003\ \text{мм}.$$

Итак, перемещение свободного концевого сечения *a-a* равно:

$w_{a-a} = w_{b-b} + \Delta l''_F + \Delta l_{G''} = -0,043 - 0,015 - 0,003 = -0,061$ мм (перемещение вниз).

Список использованных источников

1 **Феодосьев, В.Н.** Сопротивление материалов./ В.Н. Феодосьев – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2007. - 592 с.

2 **Александров, А.В.** Сопротивление материалов./ А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.В. Державин. - М.: Высшая школа, 2003. – 560 с.

3 **Ромашов, Р.В.** Сопротивление материалов. Ч 1/ Р.В. Ромашов – Оренбург.: Изд-во ОГТУ, 1995 – 118 с.

4 **Ромашов, Р.В.** Методические указания к выполнению расчетно-проектировочных работ по сопротивлению материалов. Ч 1/ Р.В. Ромашов – Оренбург.: Изд-во ОрПИ, 1991 – 55 с.

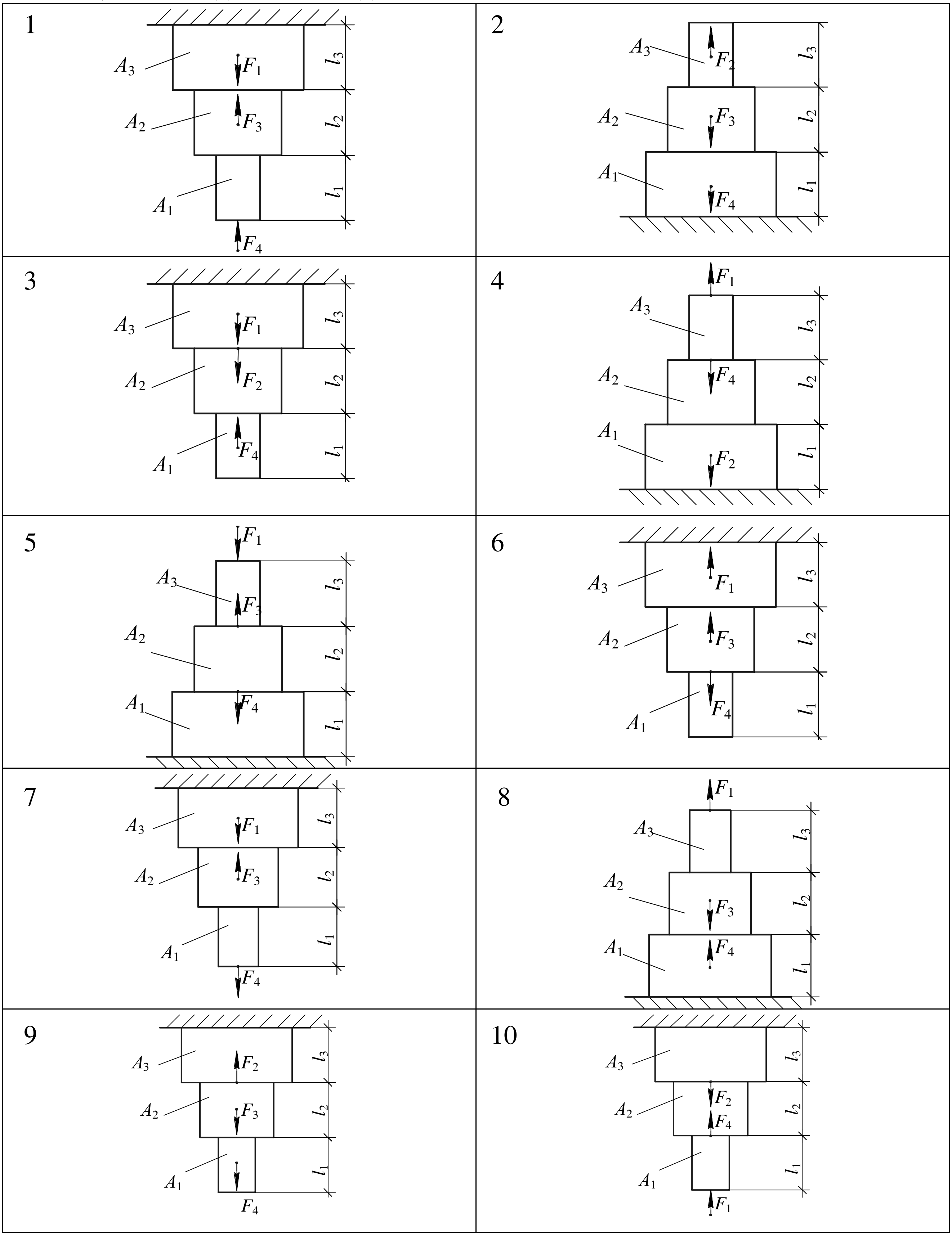
Приложения А
(обязательное)
Исходные данные к заданию 2

Таблица А.1 – Исходные данные к задаче № 1 и № 2

Номер вари-анта	Длина участка, см			Площадь поперечного сечения, см^2			Нагрузка, кН			
	l_1	l_1	l_3	A_1	A_2	A_3	F_1	F_2	F_3	F_4
1	40	80	50	8	4	6	60	180	160	140
2	50	46	70	10	4	4	120	80	200	160
3	80	40	30	14	4	8	80	140	160	60
4	42	60	80	12	8	6	100	140	100	120
5	52	42	62	12	6	8	60	120	160	80
6	78	50	60	8	8	16	120	80	140	100
7	30	80	42	10	12	6	80	100	120	80
8	42	63	50	6	12	4	120	140	100	60
9	60	30	48	10	4	8	140	80	60	100
10	70	50	60	6	8	4	100	120	100	140
11	62	36	72	12	6	6	120	100	80	60
12	64	40	64	10	4	4	140	100	120	80
13	74	48	62	6	8	6	40	120	80	160
14	54	68	48	4	8	12	180	200	140	100
15	40	64	72	8	12	8	60	40	140	160

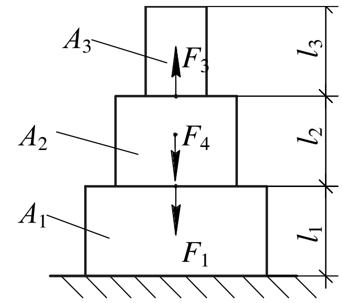
Приложение Б
(обязательное)
Схемы расчетно-проектировочных заданий

Таблица Б.1 – Задание 2 к задаче 1

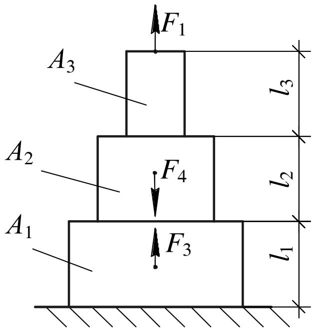


Продолжение таблицы Б.1

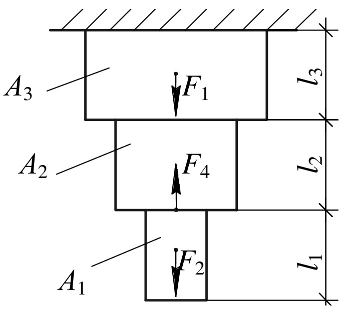
11



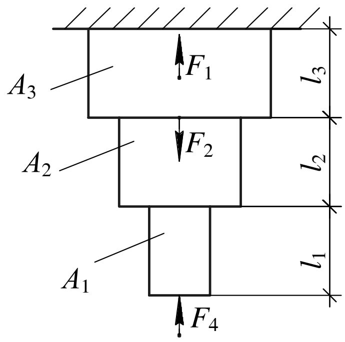
12



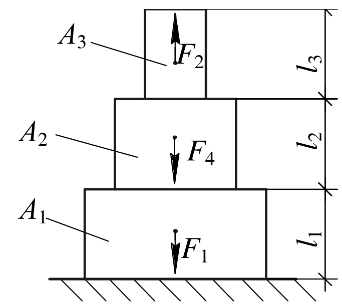
13



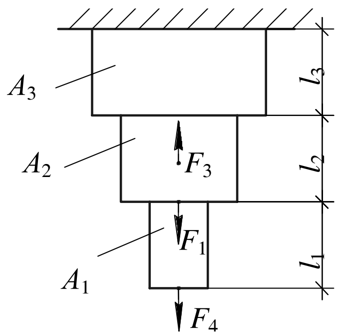
14



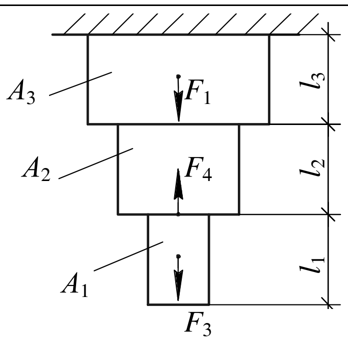
15



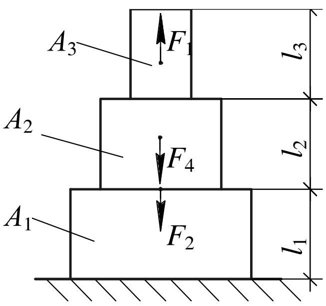
16



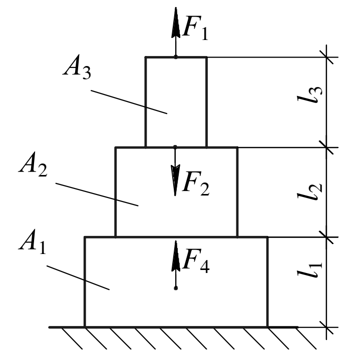
17



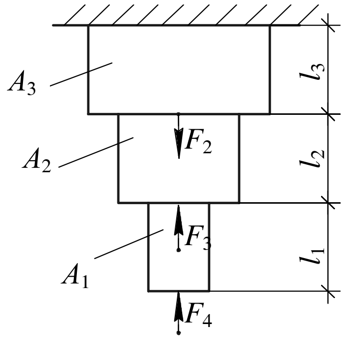
18



19

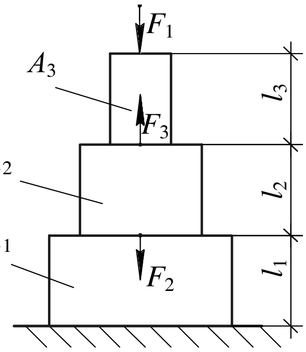


20

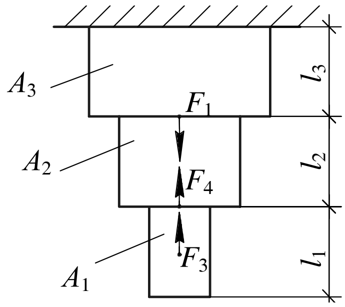


Продолжение таблицы Б.1

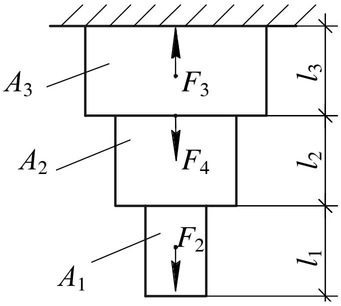
21



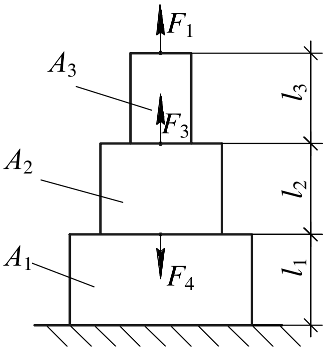
22



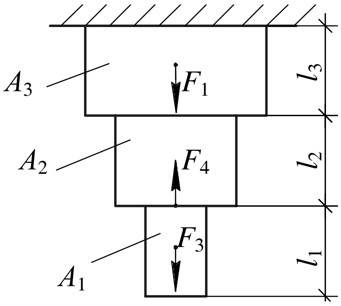
23



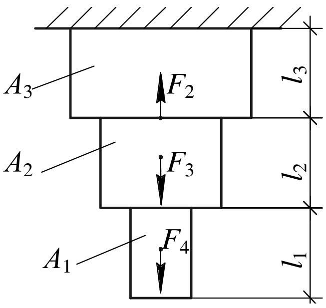
24



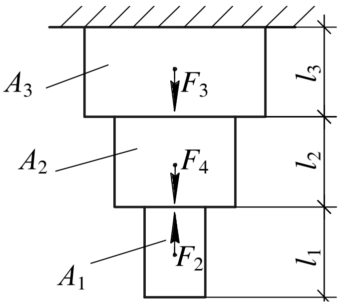
25



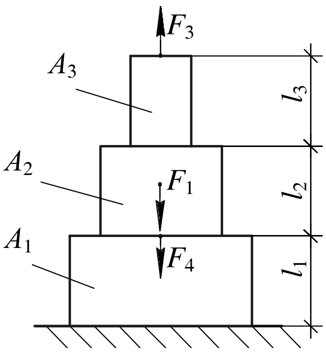
26



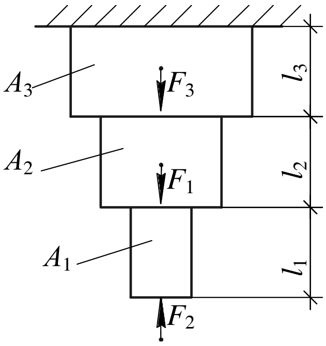
27



28



29



30

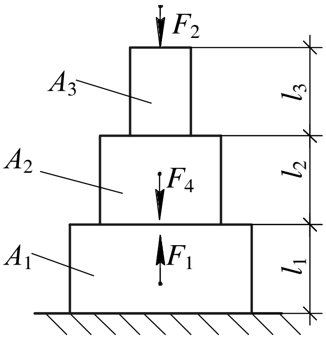
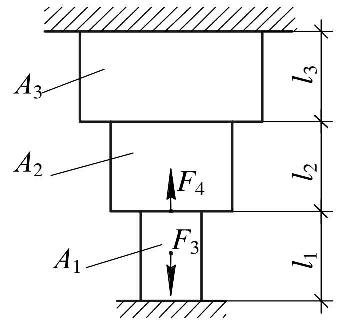
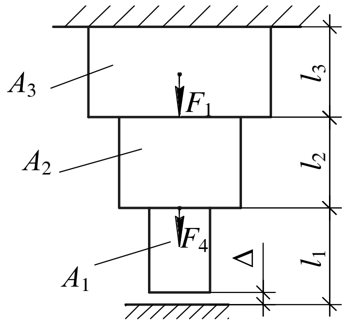


Таблица Б.2 – Задание 2 к задаче 2

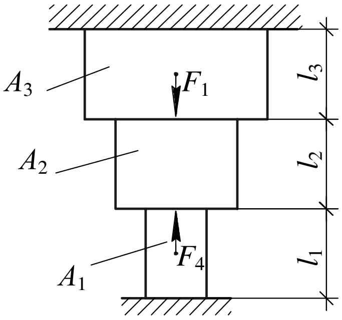
1



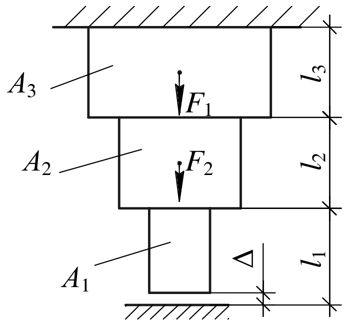
2



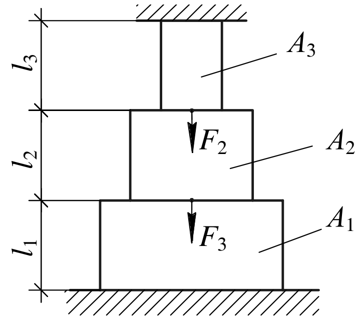
3



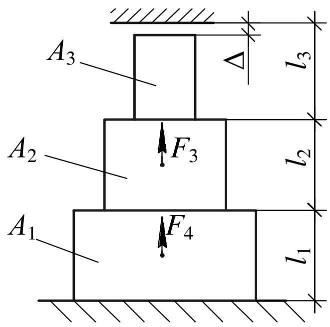
4



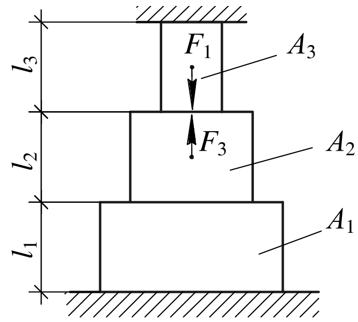
5



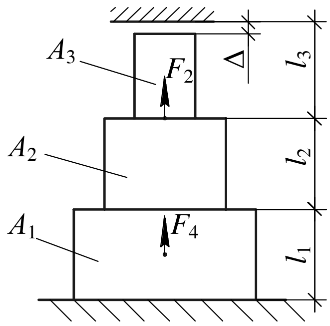
6



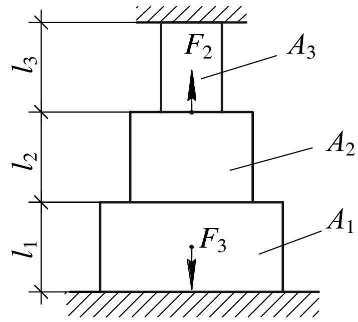
7



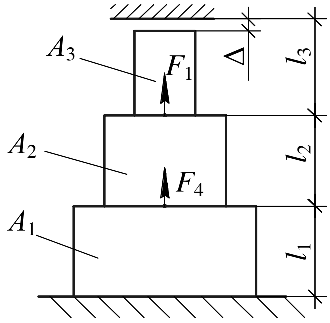
8



9

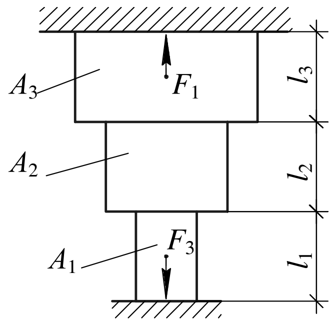


10

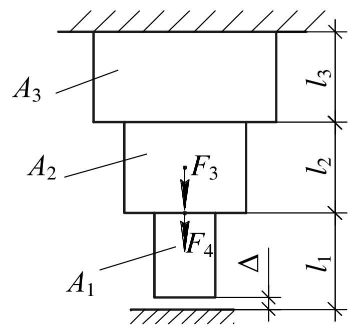


Продолжение таблицы Б.2

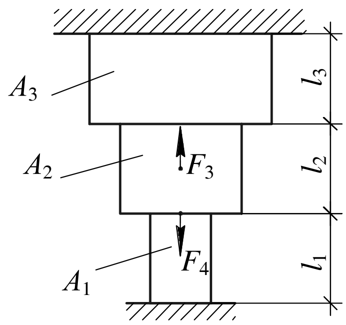
11



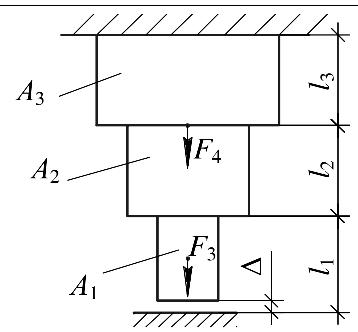
12



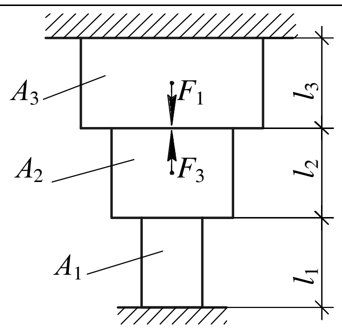
13



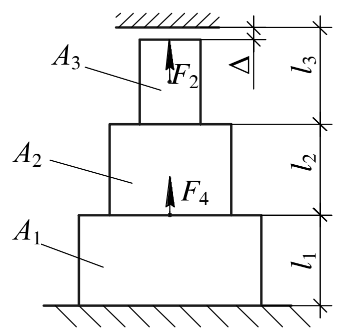
14



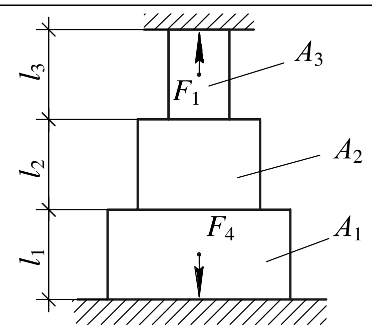
15



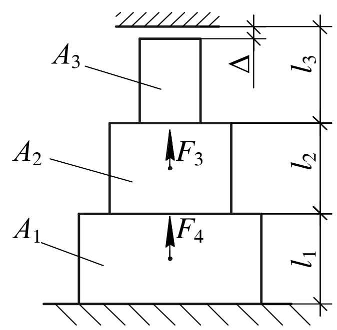
16



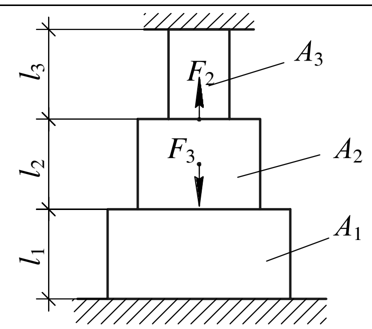
17



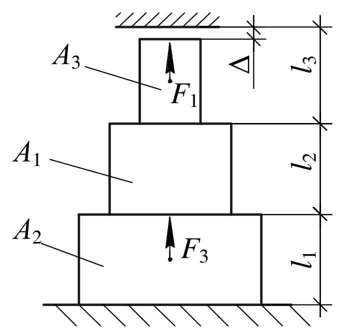
18



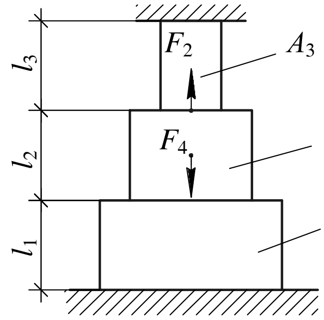
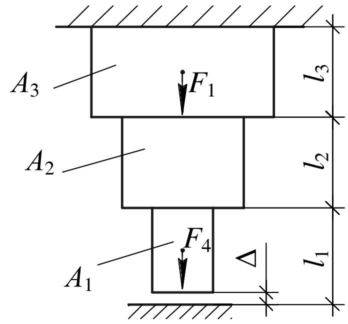
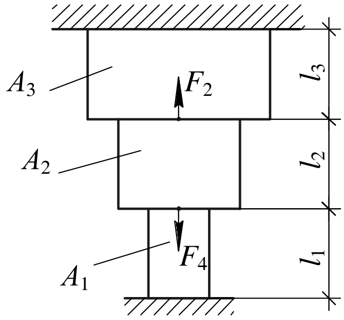
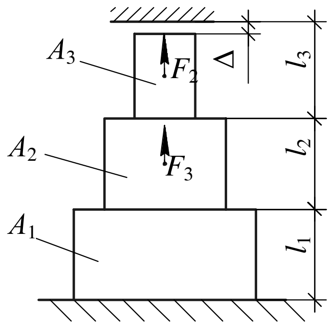
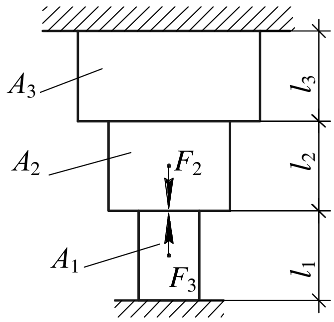
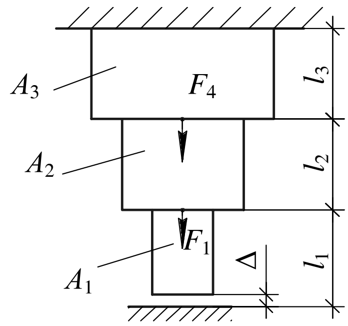
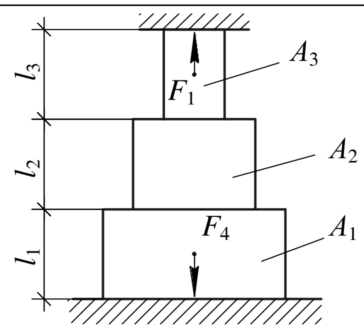
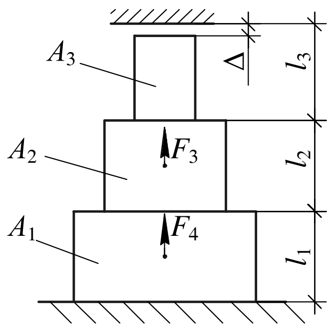
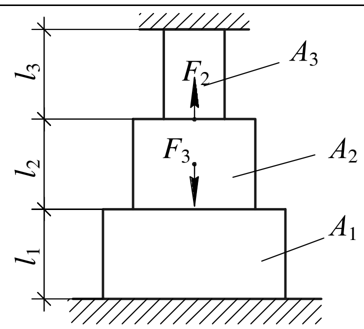
19



20



Продолжение таблицы Б.2

21 	22 
23 	24 
25 	26 
27 	28 
29 	30