МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра общей физики

Е.В.ЦВЕТКОВА, Е.В.ШАБУНИО, О.Г.НАУМОВА

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 130

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет».

Оренбург 2008

УДК531.15
ББК 22.213 я7
Ц 27

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, доцент Юрк О.Д.

Цветкова Е.В., Шабунио Е.В., Наумова О.Г.
Ц.27 Изучение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси: методические указания к лабораторной работе № 130 - / Е.В. Цветкова, Е.В. Шабунио, О.Г. Наумова. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. – 12 с

Методические указания предназначены для студентов дневного, вечернего и заочного факультетов технических специальностей для выполнения лабораторной работы №130 «Изучение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси».

ББК **22.213 я7**

Лабораторная работа № 130

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Цель работы:

1 Познакомиться с теоретическим описанием вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.
2 Экспериментально проверить выполнимость основного закона вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Введение

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса *R* (рисунок 1). Ее положение через промежуток времени Δt зададим углом $\Delta\varphi$. Элементарные (бесконечно малые) углы поворота рассматривают как векторы. Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т. е. подчиняется **правилу правого винта** (рисунок 1). Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются **псевдовекторами** или **аксиальными векторами (они условны).** Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени, она характеризует быстроту вращения твердого тела:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ (рад/с)} \qquad (1)$$

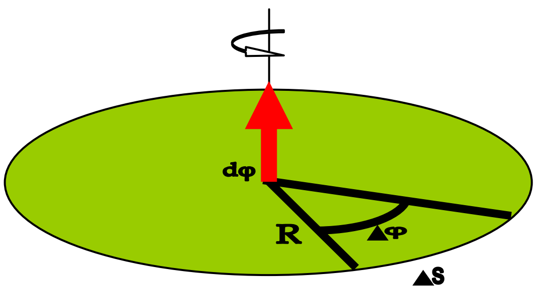


Рисунок 1

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т. е. так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$ (рисунок 2). Размерность угловой скорости $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, а ее единица – радиан в секунду (рад/с).

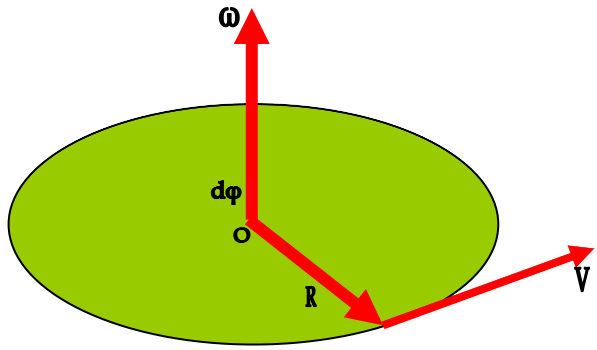


Рисунок 2

Линейная скорость точки (см. рисунок 2):

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega, \qquad (2)$$

т.е. $v = \omega R$.

В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right] \qquad (3)$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен $\omega R\sin\alpha$ (α – угол между $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$), а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\omega}$ к $\vec{R}$.

Если ω = const, то вращение равномерное и его можно характеризовать **периодом вращения** T — временем, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол 2π. Так как промежутку времени $\Delta t=T$ соответствует $\Delta\varphi = 2\pi$, то $\omega = 2\pi / T$, откуда:

$$T = 2\pi / \omega \qquad (4)$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени называется **частотой вращения:**

$$n = 1/T = \omega/(2\pi), \quad \text{т.е. } \omega = 2\pi n \qquad (5)$$

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени и второй производной от угла поворота по времени и характеризует быстроту изменения угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \ (\text{рад/с}^2) \qquad (6)$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$ (рисунок 3), при замедленном – противонаправлен ему (рисунок 4).

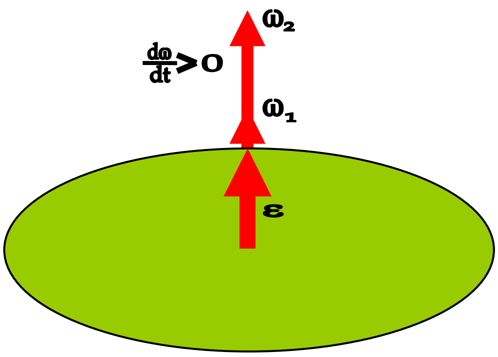


Рисунок 3

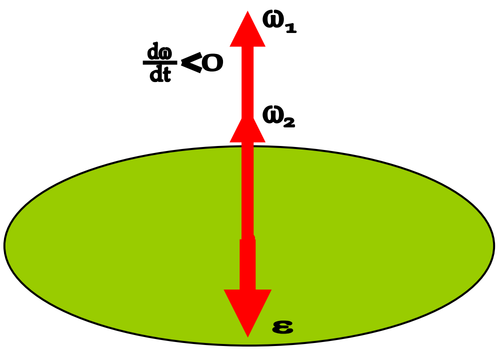


Рисунок 4

При неравномерном вращении твердого тела полное угловое ускорение имеет две составляющие: тангенциальную и нормальную.

Тангенциальная составляющая ускорения: $a_\tau = \frac{dv}{dt}, v = \omega R$ и

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon \qquad (7)$$

Нормальная составляющая ускорения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R \qquad (8)$$

Таким образом, связь между линейными и угловыми величинами в скалярной форме выражается следующими формулами:

$$S = R\varphi,\ v = R\omega,\ a_\tau = R\varepsilon,\ a_n = \omega^2 R \qquad (9)$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности (ε = const)

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,\ \ \varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2 \qquad (10)$$

где ω_0 — начальная угловая скорость (знак «минус» означает замедленное движение).

Основные динамические характеристики: момент инерции и момент сил

Динамическими характеристиками вращающегося твердого тела являются момент инерции и момент сил. **Моментом инерции материальной точки** относительно оси вращения называется физическая величина, равная произведению массы этой точки на квадрат расстояния от точки до оси вращения (см.рисунок 5): $I = mr^2$**. Момент инерции твердого тела** – величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела, состоящего из большого числа точек, вместе взятых равен сумме моментов инерции всех точек. Основываясь на этом, строится теоретический способ вычисления момента инерции твердого тела произвольной формы. Тело мысленно разбивается на мелкие части, каждая из которых заменяется материальной точкой, вычисляется момент инерции каждой точки, после чего находится сумма.

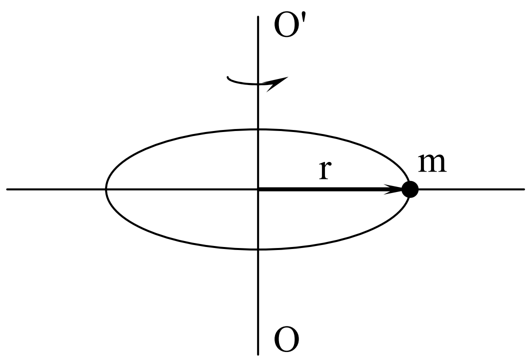


Рисунок 5

Таким образом, моментом инерции тела относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек на квадраты их расстояний до оси:

$$I_m = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (11)$$

отсюда видно, что момент инерции зависит не только от массы, но и от распределения ее относительно оси. Чем дальше отстоят отдельные части тела от оси вращения, тем больше момент инерции, тем труднее раскрутить тело.

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу, где интегрирование производится по всему объему тела:

$$I = \int_V r^2 dm \tag{12}$$

Производя интегрирование, можно получить следующие формулы:

1) момент инерции сплошного однородного цилиндра (диска) относительно оси цилиндра:

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \tag{13}$$

где R – радиус цилиндра и m – его масса;

2) момент инерции полого цилиндра (обруча) с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 относительно оси цилиндра:

$$I = m\frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \tag{14}$$

для тонкостенного полого цилиндра $R_1 \cong R_2 = R$:

$$I \cong mR^2 \tag{15}$$

3) момент инерции однородного шара радиуса R относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \tag{16}$$

4) момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно его длине L,

$$I = \frac{1}{12} mL^2 \tag{17}$$

Если для какого-либо тела известен момент инерции I_0 относительно оси, проходящей через его центр тяжести, то момент инерции относительно любой оси, параллельной первой, может быть найден по формуле Штейнера:

$$I = I_0 + md^2, \tag{18}$$

где m – масса тела и d – расстояние от центра тяжести тела до оси вращения. Таким образом, момент инерции I тела количественно характеризует инертность тела при вращательном движении,

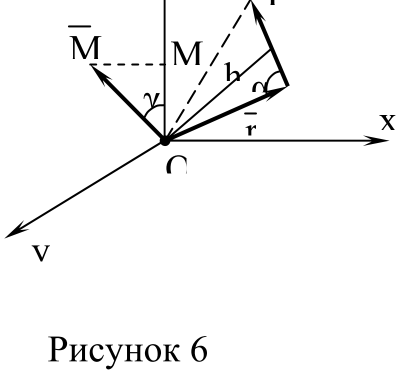


Рисунок 6

т.е. способность тела препятствовать вращению вокруг оси.

В физике вводятся два момента силы: момент силы **относительно полюса M_0** и **момент силы относительно оси M_Z**. Точка О, относительно которой определяется момент силы, называется полюсом (см. рисунок 6).

Момент силы $\overline{M}_0$ относительно полюса – это векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$:

$$\overline{M}_0 = \bar{r} \times \overline{F} = [\bar{r} \cdot \overline{F}] \tag{19}$$

$\overline{M}_0$ – вектор. При векторном произведении двух векторов, третий вектор всегда перпендикулярен плоскости, в которой лежат эти два вектора (т.е. $\bar{r}$ и $\overline{F}$) и его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\bar{r}$ к $\overline{F}$, т.е. если смотреть с конца вектора $\overline{M}_0$ (рисунок 6), то вращение $\vec{r}$ к $\vec{F}$ должно происходить против часовой стрелки.

Модуль момента сил равен произведению модулей умножаемых векторов на синус угла между ними:

$$M_0 = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot h \tag{20}$$

где $h = r \cdot \sin\alpha$ – плечо силы – кратчайшее расстояние между линией действия силы и полюсом О.

Момент силы относительно оси – это проекция на ось момента силы относительно полюса. Например, M_z – момент силы относительно оси z.

$$M_z = M_0 \cdot \cos\gamma \tag{21}$$

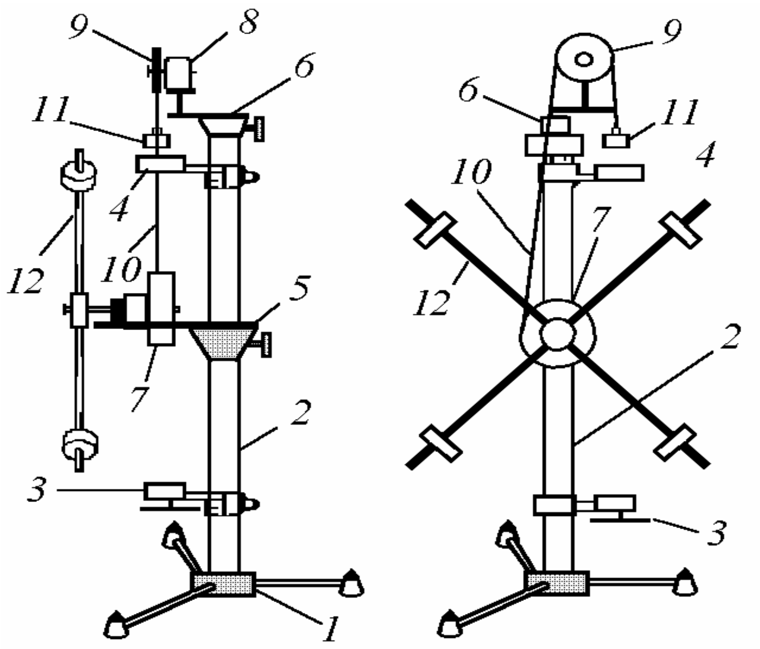
Основное уравнение динамики вращательного движения

Момент силы относительно оси M_z и момент инерции тела I связаны соотношением:

$$\overline{M}_z = I \cdot \bar{\varepsilon} \tag{22}$$

Это уравнение называют **основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела**. Если сравнить его с уравнением второго закона Ньютона $\overline{F} = m\bar{a}$, то нетрудно видеть, что уравнение $\overline{M}_z = I \cdot \bar{\varepsilon}$ является вторым законом Ньютона для вращательного движения. Действительно, роль линейного ускорения $\bar{a}$ играет угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$, силы $\overline{F}$ – момент силы $\overline{M}_z$. Момент инерции I является мерой инертности тела при вращательном движении, точно так же, как масса (она является мерой инертности) при поступательном движении.

Экспериментальная установка



Установка для изучения вращательного движения состоит из основания (*1*), вертикальной колонны (*2*) с закрепленными на ней двумя подвижными кронштейнами (*3*, *4*), на которых крепятся оптические датчики положения. На колонне закреплены два неподвижных кронштейна (*5*, *6*).

На нижнем кронштейне (5) закреплен двухступенчатый вал (*7*). На верхнем кронштейне (*6*) закреплен подшипниковый узел (*8*) и блок (*9*). Через блок перекинута нить (*10*), один конец которой намотан на двухступенчатый вал (*7*), а на втором конце закреплен груз (*11*). На двухступенчатом валу крепятся тело маятника (*12*).

Кронштейны с фотодатчиками могут крепиться на разной высоте. Расстояние между этими кронштейнами измеряется по шкале, нанесенной на колонне. Время движения грузов определяют с помощью электронного таймера. Подготовка таймера к измерению осуществляется нажатием кнопки «Пуск», после перекрытия луча в первом фотодатчике таймер начинает измерение времени, после перекрытия луча во втором фотодатчике останавливается. При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих измерений убираются с табло таймера нажатием кнопки «Сброс».

Порядок выполнения работы

1 Измерьте расстояние (Н) между кронштейнами с фотодатчиками.

2 Установите цилиндрики на концах стержней, разместив их на равном расстоянии от оси таким образом, чтобы маятник находился в положении равновесия. Начало движения платформы всегда осуществляют от одного и того же положения. Нить наматывают на шкив виток к витку.

3 Произведите измерения времени прохождения между фотодатчиками сначала пустой платформы (m = 0,13 кг), потом наращивая массу, платформы с грузами. Измерения повторить не менее трех раз. В таблицу записать средние значения времени ($\bar{t}$) опускания пустой платформы и платформы с грузами.

4 Придвиньте цилиндрики на 5 делений от шкива и проведите новую серию измерений согласно пункту 3. Данные запишите в таблицу.

5 Вычислите для каждого груза создаваемый им момент силы M_z и угловое ускорение ε по формулам:

$$M_z = \frac{mgd}{2}\left(1 - \frac{2H}{g \cdot t^2}\right) \qquad \varepsilon = \frac{a_\tau}{r} = \frac{4H}{t^2 \cdot d}$$

Где m – масса платформы с грузами, g – ускорение свободного падения, d - диаметр шкива, (для большого $d = 3 \cdot 10^{-2}$ м и для малого $d = 2 \cdot 10^{-2}$ м), $\bar{t}$ - среднее время опускания платформы с грузами, Н – расстояние между фотодатчиками.

Заполните таблицу 1.

Таблица 1

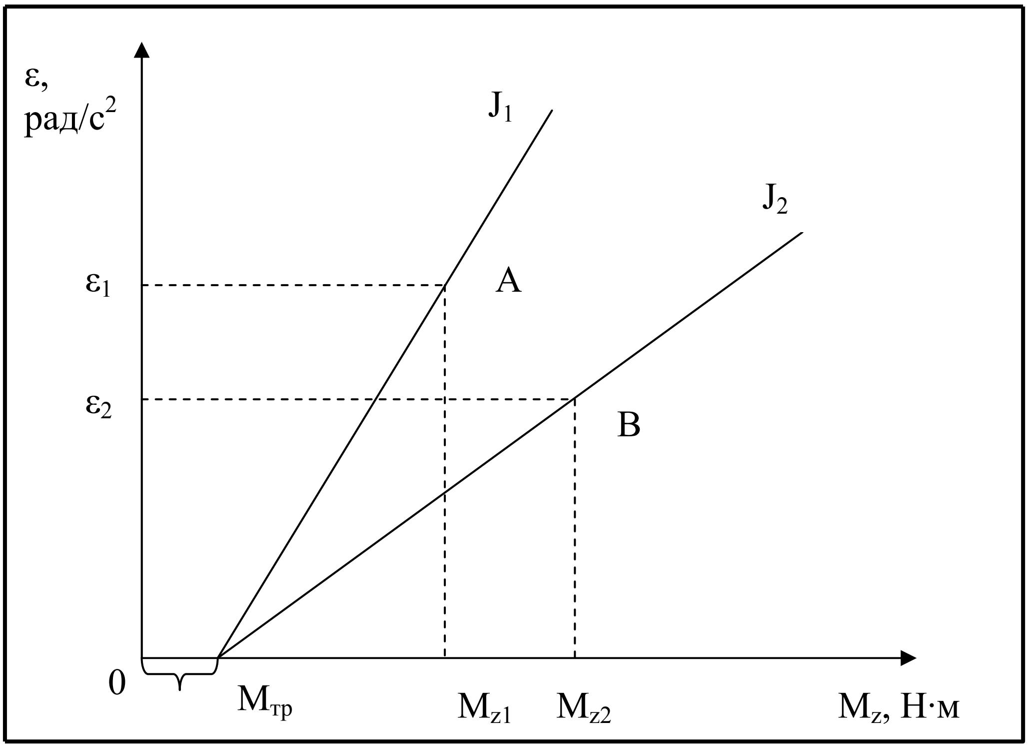
Положение цилиндриков	Цилиндрики на концах стержней					Цилиндрики придвинуты к шкиву				
m, кг										
$\bar{t}$, с										
ε, рад/с^2										
$M_z \cdot 10^{-2}$, Н·м										

6 Постройте график зависимости ε от M_z на миллиметровой бумаге и из графика определите момент сил трения $M_{тр}$.

7 Определите моменты инерции I_1 и I_2 маятника для каждого положения цилиндриков по формулам:

$$I_1 = \frac{M_{z1} - M_{тр}}{\varepsilon_1} \qquad I_2 = \frac{M_{z2} - M_{тр}}{\varepsilon_2}$$

8 Исследуйте полученный график и определите подтверждает ли его ход выполнимость основного закона вращательного движения.



Контрольные вопросы

1 Дать определения основных характеристик вращательного движения: угловая скорость, угловое ускорение, период и частота вращения.
2 Что означает момент инерции материальной точки и твердого тела и что он характеризует?
3 Запишите основное уравнение динамики вращательного движения и объясните его смысл. Что выражается формулой Штейнера?
4 Дайте определения момента сил относительно полюса и момента сил относительно оси. В чем их разница?
5 Как экспериментально (в данной работе) определяется момент инерции?
6 Как изменяется момент инерции тела при удалении его от оси вращения?
7 Какое тело, длинное или короткое, быстрее опрокидывается?
8 Что надо делать с телом, чтобы заставить его быстрее вращаться?

Список использованных источников

1 **Савельев И.В.** Курс физики: учебник / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1992. – 304 с.
2 **Трофимова Т.И.** Курс физики: учебник / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1990. – 478 с.
3 **Яворский Б.М.** Справочное руководство по физике / Б.М. Яворский, Ю.А. Селезнев.– М.: Наука, 1989. – 576 с.