УДК 531

Беридзе С.П.
ГОУ ВПО «Оренбургский государственный университет»
e-mail: detm@mail.osu.ru

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ

Статья посвящена описанию модели колебания тонких прямоугольных пластинок со свободным краем. Приведена методика численного расчета процесса.
Ключевые слова: колебания тонких прямоугольных пластинок

Имеем тонкую прямоугольную пластинку размером *a* x *b*. Начало координат возьмем в углу пластинки на середине высоты. Ось *Ox* направлена вдоль стороны длиной *a*, ось *Oy* направлена вдоль стороны длиной *b*, а ось *Oz* направим вниз.

В работе [1] было получено уравнение свободных колебаний тонкой пластинки

$$\nabla^2\nabla^2 w - A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 w + B\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \qquad (1)$$

где
$$A = \frac{(\lambda + 3\mu)\cdot\rho}{\mu(\lambda + 2\mu)}; \quad B = \frac{\rho^2}{\mu(\lambda + 2\mu)}. \qquad (2)$$

Будем рассматривать пластинку, у которой края при *x=0* и *x=a* оперты, тогда граничные условия по этим краям будут

$$w\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = w''_{x^2}\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0 \qquad (3)$$

Края пластинки при *y=0* и *y=b* будут свободными. В работе [2] показано, что в этом случае для тонкой пластинки три граничных условия Пуассона на край сводятся к двум, а задача о колебаниях пластинки со свободным краем перестает быть переопределенной.

Следовательно, для краев *y=0* и *y=b* будут равны нулю изгибающий и крутящий моменты.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,\\ &\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

здесь $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ – коэффициент Пуассона.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Y_m(y) \mathrm{Sin}(\omega_{nm}t + \delta_{nm}). \qquad (5)$$

Из работы [3] следует, что при условиях (3)

$$X_n = \mathrm{Sin}\frac{n\pi x}{a}. \qquad (6)$$

Считаем, что каждое слагаемое (5) является решением уравнения (1), и, подставив (5) и (6) в (1), получим

$$Y_m^{IV} + \alpha_m Y_m^{II} + Y_m\cdot\beta_{nm} = 0, \qquad (7)$$

где
$$\alpha_{nm} = A\omega_{nm}^2 - 2\frac{n^2\pi^2}{a^2},$$
$$\beta_{nm} = \frac{n^4\pi^4}{a^4} - A\frac{n^2\pi^2}{a^2} + B\omega_{nm}^4.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (7), имеет четыре корня, два из которых всегда действительные, а два других могут быть и мнимыми

$$k_{im} = \pm\sqrt{\frac{-\alpha_{nm} \pm \sqrt{\alpha_{nm}^2 - 4\beta_{nm}}}{2}}, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (8)$$

k_{1m} и k_{2m} также, как и k_{3m} и k_{4m}, будут отличаться только знаками, а потому

$$Y_m = F_m \mathrm{Ch}k_{1m}y + C_{1m}\mathrm{Sh}k_{1m}y + H_m\mathrm{Cos}k_{3m}y + T_m\mathrm{Sin}k_{3m}y. \qquad (9)$$

Постоянные F_m, C_{1m}, H_m и T_m находим из граничных условий (4), которые для нашего случая имеют вид:

При *y=0* и *y=b*

$$\left.\begin{aligned} &Y_m^{II} - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_m = 0\\ &Y_m^{I} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Подставив (9) в (10), получим

$$\left.\begin{aligned} &F_m\left(k_{1m}^2 - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right) + O - H_m\left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right) - O = 0\\ &F_m\left(k_{1m}^2 - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\mathrm{Ch}k_{1m}b + C_{1m}\left(k_{1m}^2 - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\mathrm{Sh}k_{1m}b -\\ &-H_m\left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\mathrm{Cos}k_{3m}b -\\ &-T_m\left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\mathrm{Sin}k_{3m}b = 0\\ &O + C_{1m}k_{1m} - O + T_m k_{3m} = 0\\ &F_m k_{1m}\mathrm{Sh}k_{1m}b + C_{1m}k_{1m}\mathrm{Ch}k_{1m}b -\\ &-H_m k_{3m}\mathrm{Sin}k_{3m}b + T_m k_{3m}\mathrm{Cos}k_{3m}b = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Из первого и третьего уравнений системы (11) имеем

$$F_m = \frac{k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}}{k_{1m}^2 - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}} H_m, \quad C_{1m} = -\frac{k_{3m}}{k_{1m}} T_m.$$

Подставим их в оставшееся (2) уравнение, получим

$$\left.\begin{aligned}
&H_m[k_{1m}\frac{\left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)}{\left(k_{1m}^2 - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)} Shk_{1m}b - k_{3m} Sink_{3m}b] - \\
&- T_m k_{3m}\left(Chk_{1m}b - Cosk_{3m}b\right) = 0 \\
&H_m\left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\left(Chk_{1m}b - Cosk_{3m}b\right) - \\
&- T_m[\frac{k_{3m}}{k_{1m}}\left(k_{1m}^2 - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right) Shk_{1m}b - \\
&-\left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right) Sink_{1m}b] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Эти два уравнения, однородные относительно H_m и T_m, только тогда допускают решения, отличные от нуля, когда определитель системы равен нулю. Приравнивая его нулю, получим уравнение частот

$$\begin{aligned}
&\left(Chk_{1m}b - Cosk_{3m}b\right)^2 - \left(Sh^2k_{1m}b + Sin^2k_{3m}b\right) + \\
&\quad + [\frac{k_{3m}}{k_{1m}} \cdot \frac{\left(k_{1m}^2 - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)}{\left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)} + \\
&+ \frac{k_{1m}}{k_{3m}} \cdot \frac{\left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)}{\left(k_{1m}^2 - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)}] Shk_{1m}b Sink_{3m}b = 0,
\end{aligned} \quad (13)$$

которое нужно будет решать для каждого *n*.

Теперь, подставляя конкретные значения k_{1m} и k_{3m}, получим, что одно уравнение из (12) будет следствием другого, и можно будет положить

$$H_m = T_m \frac{\frac{k_{3m}}{k_{1m}}\left(k_{1m}^2 - \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right) Shk_{1m}b - \left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right) Sink_{1m}b}{\left(k_{3m}^2 + \nu\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\left(Chk_{1m}b - Cosk_{3m}b\right)}, \quad (14)$$

и постоянные F_m, C_{1m}, H_m выразятся линейно через T_m, которая вместе с δ_{nm} ищется из начальных условий.

$$w\big|_{t=0} = w_0(x,y) \text{ и } \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \nu_0(x,y). \quad (15)$$

Этими условиями можно воспользоваться только в том случае, если система функций (9) при данных граничных условиях ортогональна на *[0,b]*.

Докажем это.

В работе [4] показано, что для решений уравнения (7) справедливо следующее равенство

$$\left(\beta_{ni} - \beta_{nj}\right)\int_0^b Y_i Y_j dy = -\alpha_{ni}\int_0^b Y_i'' Y_j dy + \alpha_{nj}\int_0^b Y_i Y_j'' dy.$$

Интегрируя по частям, с учетом граничных условий, получим

$$\int_0^b Y_i Y_j'' dy = \int_0^b Y_i'' Y_j dy,$$

тогда выше написанный интеграл примет вид

$$\left(\beta_{nj} - \beta_{ni}\right)\int_0^b Y_i Y_j dy = -\left(\alpha_{nj} - \alpha_{ni}\right)\int_0^b Y_i'' Y_j dy.$$

С учетом третьей теоремы о среднем значении определенного интеграла (см. [4]) получим

$$\left|\int_0^b Y_i'' Y_j dy\right| = \mu\left|\int_0^b Y_i'' dy\right| = \mu\left|Y_i'\Big|_0^b\right| = 0,$$

что следует из граничных условий (10).

Из полученного следует, что система функций $\{Y_m\}$ ортогональна на *[0, b]*. T_m и δ_{nm} определяются из начальных условий (15) (см. [3] и [4]).

Список использованной литератур

1. Беридзе С.П. Свободные колебания тонких прямоугольных пластинок // Прогрессивные технологии в транспортных системах // Сборник докладов VII Российской научно-технической конференции. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. – С. 54-58.
2. Беридзе С.П., Муллабаев А.А. О граничных условиях для свободного края пластинки, совершающей поперечные колебания. Урал-2001: Всероссийская научно-практическая конференция. Научно-методические вопросы преподавания механики в современном вузе. Сборник трудов. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2001. – С. 85-86.
3. Беридзе С.П. Свободные колебания тонких прямоугольных пластинок с опертым или защемленным краем // Межвузовский тематический сборник трудов «Расчеты строительных конструкций на статическую и динамическую нагрузку». –Л: ЛИСИ. – 1985. – С. 28-33.

4. Беридзе С.П. К вопросу о колебаниях тонких прямоугольных пластинок //Вестник ОГУ. – 2009. – № 5 (99). – С. 181-189.
5. Беридзе С.П. Свободные колебания тонких квадратных пластинок со свободным краем. – Оренбург, 1987. – 4 с. – Деп. В ВИНИТИ 12.08.87. – № 5858-В87.

Сведения об авторе: Беридзе Станислав Петрович, доцент кафедры деталей машин и прикладной механики Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук
460018, пр-т Победы, 13, ауд. 4307в, тел.: (3532) 372561, 381615, e-mail: detm@mail.osu.ru

Beridze S.P.

FREE OSCILLATION OF THIN RECTANGULAR PLATES WITH THE LOOSE FRINGE

The paper addresses the description of the model for oscillation of thin rectangular plates with the loose fringe. The technique of numerical calculation process is given.

Key words: oscillation of thin rectangular plates