В.Д.Шевеленко, Д.В.Шевеленко, Е.В.Квитек

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ ФОРМИРОВАНИЕМ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ

В работе рассматривается спектральный метод фильтрации измерительных сигналов, основанный на возможности сокращения объема преобразований над сигналом путем перехода от базиса гармонических функций к базису в виде ядра Дирихле.

Получены соотношения, обеспечивающие реализацию фильтрующего свойства ортонормированного базиса путем воспроизведения ядра Дирихле в виде амплитудно-модулированного колебания. Показана возможность практической реализации фильтрующего устройства и дана оценка ее погрешности.

Поскольку фильтрация измерительных сигналов заключается в целенаправленном изменении соотношения между различными компонентами спектра сигнала [1], то, с учетом легко осуществляемой в измерительной технике периодизации однократных реализаций сигнала, представляет значительный интерес поиск новых возможностей, заключенных в ортонормированности базиса гармонических функций при переходе к представлению усеченных рядов Фурье в виде определенных интегралов.

Для периодического сигнала e(t) считаем известной сумму ряда Фурье

$$e(t) = \frac{C_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(2\pi kft) + b_k \sin(2\pi kft)\right] \qquad (1)$$

и поставим перед собой задачу найти выражение суммы усеченного ряда

$$S_n(t) = \frac{C_o}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left[a_k \cos(2\pi kft) + b_k \sin(2\pi kft)\right] \qquad (2)$$

в котором коэффициенты a_k и b_k определяются формулами

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos(2\pi kft)\,dt \qquad (3)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\sin(2\pi kft)\,dt \qquad (4)$$

где $T = \frac{1}{f}$ - - период повторения сигнала e(t).

Так как интегралы (3) и (4) являются определенными, то символ переменной под знаком интеграла может быть выбран произвольно, а потому, подставив значения коэффициентов a_k и b_k в выражение полинома, получим:

$$\begin{aligned} S_N(t) = \frac{C_0}{2} &+ \sum_{k=1}^{N}\cos(2\pi kft)\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(z)\cos kz\,dz + \\ &+ \sum_{k=1}^{N}\sin(2\pi kft)\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(z)\sin kz\,dz \end{aligned} \qquad (5)$$

$\cos(2\pi kft)$ и $\sin(2\pi kft)$ можно внести под знаки интегралов как постоянные множители и переписать выражение (5) в виде:

$$\begin{aligned} S_N(t) &= \frac{C_0}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\left[\int_0^{2\pi} e(z)\cos kz\cdot\cos(2\pi kft)\,dz + \int_0^{2\pi} e(z)\sin kz\cdot\sin(2\pi kft)\,dz\right] = \\ &= \frac{C_0}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi} e(z)\cos k(z - 2\pi ft)\,dz \end{aligned} \qquad (6)$$

Выражению (6) можно придать следующий вид:

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(z)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos k(z - 2\pi ft)\right]dz \qquad (7)$$

Сумма, стоящая в квадратных скобках, может быть представлена в замкнутом виде [2]:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos k\alpha = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \qquad (8)$$

Вводя (8) в выражение $S_N(t)$ полуаем:

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(z)\,\frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\left(z - 2\pi ft\right)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}\left(z - 2\pi ft\right)\right]}\,dz \qquad (9)$$

Для удобства вычислений целесообразно ввести новую переменную:

$$z - 2\pi ft = u;$$
$$z = u + 2\pi ft;$$
$$dz = du;$$

тогда окончательно получим:

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(u + 2\pi ft)\,\frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \qquad (10)$$

Выражение (10), называемое интегралом Дирихле, представляет основу для реализации фильтрующего свойства ортонормированного базиса. Действительно, результат интегрирования (10) дает функцию, зависящую от t как аргумента и N как параметра, а потому форма $S_N(t)$ определяется полосой частот, требуемой для воспроизведения в реальном масштабе времени t $\Delta f = Nf$, либо количеством гармоник N, укладывающихся в выделенной для воспроизведения функции $S_N(t)$ полосе частот $N = \frac{\Delta f}{f}$.

Воспроизведение функции $S_N(t)$ может быть обеспечено устройством, структурная схема которого приведена на рис. 1.

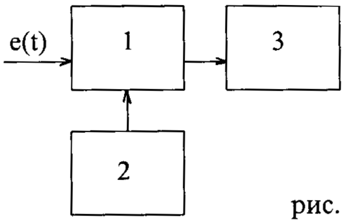

рис.1

Здесь:
1- перемножитель;
2- формирователь периодически повторяемого ядра Дирихле;
3- интегратор.

Из сравнения (5) и (10) следует, что сокращение количества процедур (вычислительных или аппаратурных) для определения $S_N(t)$ возможно путем перехода от базиса гармонических функций к базису в виде ядра Дирихле

$$D_N(U) = \frac{sin(N + \frac{1}{2})U}{2\,sin(\frac{U}{2})}, \quad (11)$$

формирование которого изменением N в широких пределах обеспечивает фильтрацию сигнала e(t).

Действительно, формирование $S_{N_{max}}(t)$ выбором $N = N_{max}$ обеспечивает получение $e_{нч}(t) = S_{N_{max}}(t)$ с ограниченным количеством членов равноамплитудного полинома, образующего ядро Дирихле, и вызывает обращение в ноль членов бесконечного ряда Фурье (1) с номерами k, превышающими $N = N_{max}$, т.е. подавление высокочастотной части спектра e(t) или его низкочастотную фильтрацию.

Существенно при этом, что в полосе пропускания такого фильтра низких частот (ФНЧ) соотношение между соответствующими частотными компонентами e(t) и $S_{N_{max}}$ сохраняется с той степенью точности, с какой удается формировать ядро Дирихле и интегрировать результат его перемножения с фильтруемым сигналом e(t).

Формирование $S_{N_{max}}$ при $N = N_{max}$ обеспечивает получение $e_{ВЧ}(t) = e(t) - S_{N_{min}}(t)$ с подавленной низкочастотной частью спектра e(t).

Для обеспечения эффекта полосовой фильтрации необходимо получить $e_{ПФ}(t) = e_{ВЧ}(t) - \left[e(t) - S_{N_{max}}(t)\right]$, т.е. сформировать базисную функцию

$$D_{N_{пФ}}(U) = D_{max}(U) - D_{min}(u) = \frac{sin(N_{max} + \frac{1}{2})U - sin(N_{min} + \frac{1}{2})U}{2\,sin(\frac{U}{2})} =$$

$$= \frac{sin\frac{(N_{max} - N_{min})U}{2}}{sin(\frac{U}{2})} \times cos\frac{(N_{max} + N_{min} + 1)U}{2},$$

(12)

которая в рассматриваемом случае наделяет $e_{ПФ}(t)$ свойствами осциллирующей функции.

Из (12) следует, в частности, что при $N_{max} = N_{min} + 1$.

$$D_N(U) = \frac{sin\frac{U}{2}}{sin\frac{U}{2}} cos(N_{min} + 1) = cos\,N_{max}U = cos\,N_{max}(z - 2\pi ft),$$

а потому

$$S_{N_{max}}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(z)\,cos\,N_{max}(z - 2\pi ft)\,dz =$$

$$= cos\,2\pi N_{max}ft \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(z)\,cos\,N_{max}z\,dz + sin\,2\pi N_{max}ft \times$$

$$\times \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(z)\,sin\,N_{max}z\,dz = a_{N_{max}} \cdot cos\,2\pi N_{max}ft + b_{N_{max}} \cdot sin\,2\pi N_{max}ft.$$

(13)

Из (13) следует, что в предельном случае полосовой фильтрации выходной сигнал представляет собой гармоническое колебание частоты $f_{пФ} = N_{max}f$ с амплитудой $A_{N_{max}} = \sqrt{a^2_{N_{max}} + b^2_{N_{max}}}$ и начальной фазой $\varphi_{N_{max}} = arctg\frac{b_{N_{max}}}{a_{N_{max}}}$.

Реализация фильтрующего свойства ортонормированного базиса определяется возможностями синтеза ядра Дирихле (11) или возможностями синтеза равноамплитудного полинома на основании (8):

$$\sum_{k=1}^{N} cos\,k\alpha = \frac{sin(N + \frac{1}{2})\alpha}{2\,sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2} \quad (14)$$

Реализация левой части (14) связана с необходимостью синхронизации работы “N” генераторов гармонических колебаний кратных частот в процессе суммирования этих колебаний с равными амплитудами и строгими фазовыми соотношениями, а следовательно и с необходимостью стабилизации амплитуд и фаз суммируемых колебаний, что является сложной технической проблемой.

Поиск разрешения противоречий приводит к необходимости анализа возможностей, содержащихся в выражении (14).

В случае синтеза равноамплитудного полинома (14) имеем:

$$U_{вых}(t) = A_m \sum_{k=1}^{N} cos(kw_1 t + \varphi_0) =$$
$$= \frac{A_m}{2}\left[\sum_{k=1}^{N} e^{j(kw_1 t+\varphi_0)} + \sum_{k=1}^{N} e^{-j(kw_1 t+\varphi_0)}\right] =$$
$$= \frac{A_m}{2}\cdot\frac{sin\frac{Nw_1 t}{2}}{sin\frac{w_1 t}{2}}\left[e^{j(\frac{N+1}{2}w_1 t+\varphi_0)} + e^{-j(\frac{N+1}{2}w_1 t+\varphi_0)}\right] =$$
$$= A_m \frac{sin\frac{Nw_1 t}{2}}{sin\frac{w_1 t}{2}} cos\left(\tfrac{N+1}{2}w_1 t+\varphi_0\right) = \quad (15)$$
$$= K(t)\cdot A_m cos\left(\tfrac{N+1}{2}w_1 t+\varphi_0\right),$$

откуда следует возможность воспроизведения равноамплидутного полинома амплитудно-модулированным колебанием, закон изменения огибающей которого

$$A(t) = A_m \frac{sin\left(\frac{Nw_1 t}{2}\right)}{sin\frac{w_1 t}{2}} \quad (16)$$

где A_m - амплитуда колебаний несущей частоты $\frac{N+1}{2}f_1$.

Одновременно в выражении (15) содержится информация о необходимости реализации параметрического преобразователя с системным оператором K(t). При синтезе устройства для воспроизведения амплитудно-модулированного колебания (15) главным требованием является поддержание жесткой связи между параметрами несущего колебания и модулирующего процесса, что может быть обеспечено резистивной параметрической цепью, периодическое изменение коэффициента передачи K(t) которой внутри интервала $t = 2T_1 = \frac{4\pi}{w_1}$ осуществляется переключением резисторов в моменты прохождения нулевых мгновенных значений колебаниями несущей частоты.

Формальную основу для реализации функционального преобразования

$$K(t) = \frac{sin\frac{Nw_1 t}{2}}{sin\frac{w_1 t}{2}}$$

составляет известное положение теории операционных усилителей, охваченных параллельной отрицательной обратной связью, согласно которому коэффициент передачи по напряжению масштабного усилителя $K_U = -\frac{R_1}{R_2}$, где где R_2-сопротивление, включенное между выходным зажимом и суммирующей точкой, а R_1 - сопротивление, включенное между входными зажимами и суммирующей точкой [3].

Для установления закона изменения $R_2/R_1 = \varphi(t)$, требуемого для реализации K(t) будем исходить из технической возможности скачкообразного изменения R_1/R_2 в моменты времени, когда подводимое ко входу масштабного усилителя гармоническое напряжение несущей частоты $w_H = \frac{N+1}{2}w_1$

$A_H(t) = A_m\, cos\left(\frac{N+1}{2}w_1 t + \varphi_0\right)$ проходит через нулевые значения, что обеспечивает неизменность KU внутри каждого полупериода UH(t).

Тогда из $K(t) = K_U(t) = -\frac{R_2(t)}{R_1(t)}$ следует:

$$\frac{sin\frac{Nw_1 t}{2}}{sin\frac{w_1 t}{2}} = -\frac{R_2(t)}{R_1(t)} \quad (17)$$

откуда очевидно, что для выполнения требования $K(t)\big|_{t=0} = N(-1)^{N-1}$ достаточно при t=0 обеспечить $\frac{R_2(0)}{R_1(0)} = N$ и повторение или инвертирование выходного сигнала масштабным усилителем с модулем коэффициента передачи по напряжению $|K_U| = 1$.

При $t = \frac{2T_1}{4} = \frac{T_1}{2}$ имеем:

$$-\frac{R_2(t)}{R_1(t)} = \frac{sin N\frac{\pi}{2}}{sin\frac{\pi}{2}} = sin N\frac{\pi}{2} \quad (18)$$

откуда следует, что соотношение между частотой несущих колебаний $(N+1)\frac{w_1}{2}$ и частотой повторения модулирующего процесса $\frac{w_1}{2}$ должно выбирать исходя из желания обеспечить $\left|\frac{sin\frac{Nw_1 t}{2}}{sin\frac{w_1 t}{2}}\right| = \frac{R_2\left(\frac{T_1}{2}\right)}{R_1\left(\frac{T_1}{2}\right)} = 1$ при N-нечетном или $\left|\dfrac{\sin\dfrac{Nw_1t}{2}}{\sin\dfrac{w_1t}{2}}\right| = \dfrac{R_2\left(\dfrac{T_1}{2}\right)}{R_1\left(\dfrac{T_1}{2}\right)} = 0$ при N - четном.

Очевидно, что на основе (15) можно реализовать периодическое воспроизведение амплитудно-модулированного сигнала путем коммутации сетки резисторов $R_1 \div R_2$ сначала в прямом направлении (от 0 до $T_1/2$), а затем в обратном (от $T_1/2$ до T_1).

Так как условия периодизации воспроизведения амплитудно-модулированных колебаний из колебаний несущей частоты определены, то целесообразно определить аппаратурную погрешность задания коэффициента передачи масштабного преобразователя.

Так как при t=0 $|K(t)| = \dfrac{R_2(0)}{R_1(0)} = N$, а потому изменения $R_1(0)$ и $R_2(0)$ вследствие воздействия дестабилизирующих факторов вызывают изменения коэффициента передачи

$$\Delta|K(t)| = \frac{\partial|K(t)|}{\partial R_2}\Delta R_2 + \frac{\partial|K(t)|}{\partial R_1}\Delta R_1 = \frac{\Delta R_2}{R_1(0)} + \frac{R_2(0)\Delta R_1}{R_1^2(0)} \quad (19)$$

и

$$\frac{\Delta|K(t)|}{|K(t)|} = \frac{\Delta R_1}{R_1(0)} + \frac{\Delta R_2}{R_2(0)} = \frac{\Delta R_1}{R_1(0)} + \frac{\Delta R_2}{NR_1} \quad (20)$$

Отсюда следует, что точность задания коэффициента передачи масштабного преобразователя определяется стабильностью резисторного делителя, т.е. достижимым технологическим уровнем долговременной стабильности резисторов, что позволяет на порядок повысить точность воспроизведения равноамплитудных полиномов, а следовательно и процедуры фильтрации измерительных сигналов.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о принципиальной возможности фильтрации измерительных сигналов переходом к базису в виде ядра Дирихле, реализация которого воспроизведением в виде амплитудно-модулированного колебания позволяет обеспечить высокую точность фильтрации при малом объёме оборудования.

Список использованной литературы

1. Гутников В.С., Фильтрация измерительных сигналов., Энергоатомиздат, Л., 1990.
2. Двайт Г.Б.,Таблицы интегралов и другие математические формулы., “Наука”, М., 1966.
3. Гутников В.С.,Интегральная электроника в измерительных устройствах., Энергоатомиздат, Л., 1988.

Статья поступила в редакцию 23.07.99.