

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

М.Р. РАСОВСКИЙ, В.Н. СТЕПАНОВ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»
в качестве учебного пособия для студентов
физических и радиофизических специальностей университетов

г. Оренбург 2008

УДК 537.8(075.8)
ББК 22.313.я73
Р 24

Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент Г.В. Ховрин
к.ф.-м.н., доцент Т.М. Чмерева

Р 24 **Расовский М.Р.**
Электродинамика : учебное пособие /М.Р. Расовский,
В.Н. Степанов. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. -133 с.
ISBN

В состав учебного пособия включены следующие главы:
«Введение. Предмет классической электродинамики»,
«Общие свойства электромагнитного поля в вакууме»,
«Релятивистская формулировка электродинамики»,
«Электростатическое поле в вакууме», «Стационарное
магнитное поле в вакууме», «Электромагнитные волны
в вакууме», «Изучение электромагнитных волн».
Методическое пособие может быть рекомендовано сту-
дентам физических и радиофизических специальностей
университетов.

Р 1604050000

© Расовский М.Р., 2008
© Степанов В.Н., 2008

ISBN

Содержание

| | |
|--|----|
| Предисловие. | 5 |
| Введение. Предмет классической электродинамики. | 6 |
| 1. Основные понятия электродинамики. | 7 |
| 1.1 Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда. | 7 |
| 1.2 Переменные состояния электромагнитного поля. Сила Лоренца. | 10 |
| 1.3 Эмпирический базис классической электродинамики. | 12 |
| | |
| 2. Общие свойства электромагнитного поля в вакууме. | 21 |
| 2.1 Уравнения Максвелла в вакууме. | 21 |
| 2.2 Потенциалы электромагнитного поля. | 24 |
| 2.3 Энергия электромагнитного поля. | 27 |
| 2.4 Импульс электромагнитного поля. Давление света. | 30 |
| | |
| 3. Релятивистская формулировка электродинамики. | 34 |
| 3.1 Ковариантный формализм в релятивистских теориях. | 34 |
| 3.2 Четырехмерный ток. | 39 |
| 3.3 Четырехмерный потенциал. | 41 |
| 3.4 Тензор электромагнитного поля. | 43 |
| 3.5 Уравнения Максвелла в ковариантной форме. | 48 |
| 3.6 Движение заряженной частицы в электромагнитном поле. | 50 |
| | |
| 4. Электростатическое поле в вакууме. | 52 |
| 4.1 Уравнения электростатики в вакууме. | 52 |
| 4.2 Электростатический потенциал. | 56 |
| 4.3 Теорема Ирншоу. | 59 |
| 4.4 Электростатическое поле в дипольном приближении. | 61 |
| 4.5 Энергия электростатического поля. | 70 |
| 4.6 Заряженные частицы во внешнем электростатическом поле. | 72 |
| | |
| 5. Стационарное магнитное поле в вакууме. | 75 |
| 5.1 Уравнения для стационарного магнитного поля. | 75 |
| 5.2 Закон Био – Савара – Лапласа и его применение к расчету различных магнитных полей. | 79 |
| 5.3 Магнитное поле равномерно движущегося заряда. | 82 |
| 5.4 Стационарное магнитное поле в дипольном приближении. | 83 |
| 5.5 Энергия стационарного магнитного поля. | 88 |
| 5.6 Движущиеся частицы во внешнем магнитном поле. | 92 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6 | Электромагнитные волны в вакууме. | 94 |
| 6.1 | Свободное электромагнитное поле. | 94 |
| 6.2 | Плоские электромагнитные волны в вакууме. | 96 |
| 6.3 | Монохроматические плоские электромагнитные волны | 99 |
| 6.4 | Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны. | 101 |
| 6.5 | Эффект Доплера. | 105 |
| | | |
| 7 | Излучение электромагнитных волн. | 111 |
| 7.1 | Дипольное приближение для поля в волновой зоне. | 111 |
| 7.2 | Дипольное излучение. | 115 |
| 7.3 | Простейшие излучающие системы. | 117 |
| 7.4 | Рассеяние света свободными электронами. | 123 |
| 7.5 | Радиационное трение. | 126 |
| | | |
| | Список использованных источников | 132 |

Предисловие

Данное учебное пособие написано в соответствии с программой курса электродинамики для физических специальностей университетов. В нем всюду использована Международная система единиц СИ, как это предписано

ГОСТ 8.417. В то же время нельзя не отметить, что традиционно применяемая в классических книгах по электродинамике система СГС, несомненно, обладает целым рядом преимуществ перед СИ как в научном, так и в методическом отношении. Поэтому при чтении лекционного курса представляется целесообразным основные законы электродинамики формулировать как в той, так и в другой системах единиц. Из экономии места мы в данном пособии этого не делаем.

Учебное пособие посвящено рассмотрению электродинамики вакуума; электродинамика сплошных сред представляет собой самостоятельный курс, содержание которого выходит за рамки данной книги.

Пособие предназначено для студентов физических специальностей университетов.

Введение.

Предмет классической электродинамики

Классическая механика изучала системы из небольшого числа частиц с $V \ll c$, и потому там взаимодействия распространялись *мгновенно, без запаздывания*. (Это позволяло ввести понятие потенциальной энергии.)

В релятивистской механике ($V \sim c$) эффекты запаздывания уже существенны, и для последовательного описания релятивистских взаимодействий приходится вводить понятие поля.

Одним из разделов физики, где детально изучаются свойства взаимодействий с полевой точки зрения, является *электродинамика*.

Электромагнитное взаимодействие – одно из четырех фундаментальных; оно очень интенсивно, его $R \rightarrow \infty$ и оно проявляется как в макро, так и в микромире. Так, все макроскопические силы (кроме силы тяжести) трения, упругости, натяжения и т.д. имеют электромагнитную природу.

Классическая электродинамика есть теория электромагнитного взаимодействия в его макроскопических проявлениях.

Классическую электродинамику обычно подразделяют на «микроскопическую» (электродинамика вакуума) и «макроскопическую» (электродинамика сплошных сред).

Основной физической системой, рассматриваемой «микроскопической» электродинамикой, является *электромагнитное поле*, состояние которого задается

двумя векторными полями $\vec{E}(\vec{r}|t)$ и $\vec{B}(\vec{r}|t)$. Источниками полей служат

заданные плотности заряда ρ и тока \vec{j} . Поведение электромагнитных полей описывается уравнениями Максвелла в вакууме. Эти уравнения имеют фундаментальный характер.

Электродинамика сплошных сред намного сложнее. Число заряженных частиц в среде огромно и они подвержены воздействию электромагнитных полей, которые сами же и создают. Однако в ряде случаев удастся упростить задачу о полях в среде. Делается это путем удвоения числа переменных состоя-

ния самого электромагнитного поля – введением, наряду с векторами \vec{E} и \vec{B} , двух вспомогательных векторов \vec{D} и \vec{H} .

Для этого набора переменных тоже удастся сформулировать динамические уравнения, но с привлечением разного рода модельных представлений и приближений. Такие уравнения имеют узкую область применимости, и они не могут быть отнесены к фундаментальным законам физики.

В данном учебном пособии речь пойдет только об электродинамике вакуума.

1 Основные понятия электродинамики

1.1 Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

Электрический заряд – физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия.

Одно из важнейших эмпирических свойств электрического заряда – это закон сохранения заряда. Сформулируем его математически.

Этот закон устанавливает определенную связь между локальными характеристиками пространственного распределения заряженных частиц.

Для описания распределения заряда в пространстве вводится скалярное поле – его *объемная плотность*

$$\rho(\vec{r}|t) = \frac{dq}{dV} \quad (1.1)$$

Иногда заряд сконцентрирован в малой окрестности некоторой поверхности (заряженные проводники) или кривой (заряженные нити). Тогда вводят *поверхностную плотность*

$$\sigma(M|t) = \frac{dq}{dS} \quad (1.2)$$

или *линейную плотность*

$$(M|t) = \frac{dq}{dl}, \quad (1.3)$$

где M – точка поверхности или кривой.

В случае пространственного распределения заряда для описания состояния его движения вводится векторное поле – *плотность тока*

$$\vec{j}(\vec{r}|t) = \rho(\vec{r}|t) * \vec{v}(\vec{r}|t). \quad (1.4)$$

Подчеркнем, что $\vec{v}(\vec{r}|t)$ – также векторное поле. Это не скорость какой – то выделенной частицы, а скорости частиц, пролетающих через фиксированную точку пространства \vec{r} в разные моменты t . Плотность тока \vec{j} – это вектор, коллинеарный вектору \vec{v} . Его модуль задает количество электричества, протекающего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную вектору скорости в данной точке пространства в данный момент времени t .

Рассмотрим воображаемую замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V (рисунок 1)

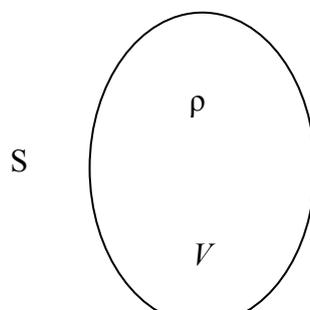


Рисунок 1

Пусть внутри S находится заряд, распределенный с плотностью ρ . В данный момент t полный заряд внутри S равен

$$q(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV.$$

Если заряды перемещаются, то, очевидно, убыль заряда внутри V за 1 сек

$$-\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV$$

будет равна количеству заряда, выходящему из V через поверхность S за 1 сек., т.е. потоку вектора $\vec{j} = \rho \vec{v}$:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} \quad . \quad (1.5)$$

Здесь учтено, что внутри V заряды не порождаются и не уничтожаются. Формула (1.5) выражает закон *сохранения заряда в интегральной форме*.

С помощью теоремы Гаусса (1.5) преобразуется в

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

или, с учетом произвольности V ,

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (1.6)$$

(1.6) - закон сохранения заряда в дифференциальной форме, или *уравнение непрерывности*.

Предположим, что внутри V были бы «источники» зарядов, тогда в правую часть (1.6) входила бы величина $i(\vec{r}, t)$ – заряд, производимый в 1 с в 1 м³ объема. Тогда уравнение (1.6) имело бы вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{j} \equiv i \quad (1.7)$$

Следовательно, закон сохранения заряда можно сформулировать и так:

$$i(\vec{r}, t) \equiv 0.$$

Локальные характеристики связаны с глобальными и наоборот:

$$q = \int_V \rho dV \quad - \quad \text{полный заряд в объеме } V;$$

$$q = \int_S \sigma dS \quad - \quad \text{полный заряд поверхности } S;$$

$$q = \int_L \tau dl \quad - \quad \text{полный заряд нити } L;$$

$$J = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j_n dS \quad - \quad \text{сила тока - (заряд, протекающий в 1 с через}$$

поверхность S).

Часто приходится использовать модель линейных проводников. Реально это – любой проводник, длина которого много больше его поперечного размера. При этом вводят понятие *элемента тока* $Jd\vec{l}$. Поскольку $\vec{j} \parallel d\vec{l}$, то

$$Jd\vec{l} = j\Delta S d\vec{l} = \vec{j} \Delta S dl = \vec{j} dV = \rho \vec{v} dV = dq \cdot \vec{v}.$$

В итоге имеем подстановки:

$$Jd\vec{l} = dq \cdot \vec{v}$$

$$Jd\vec{l} = \vec{j} dV$$

1.2 Переменные состояния электромагнитного поля. Сила Лоренца

Переменными, описывающими состояние электромагнитного поля, являются векторы: $\vec{E}(\vec{r}|t)$ - электрическое поле и $\vec{B}(\vec{r}|t)$ - магнитное поле. Эти векторные функции и называют *переменными состояниями* электромагнитного поля.

Предположим, что переменные состояния $\vec{E}(\vec{r}|t)$ и $\vec{B}(\vec{r}|t)$ заданы в некоторой области пространства как векторные функции координат и времени. Тогда на частицу с зарядом q , помещенную в некоторую точку рассматриваемой области пространства, со стороны электромагнитного поля будет действовать сила

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \left[\vec{v} \vec{B} \right]). \quad (1.8)$$

Она называется *силой Лоренца*.

Формула (1.8) – важнейшее соотношение электродинамики, т.к. она позволяет связать уравнения электромагнитного поля с уравнениями движения заряженных частиц.

Выражение для силы Лоренца позволяет уже на этом этапе выявить *относительность* понятий электрического и магнитного поля.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета (ИСО) (рисунок 2)

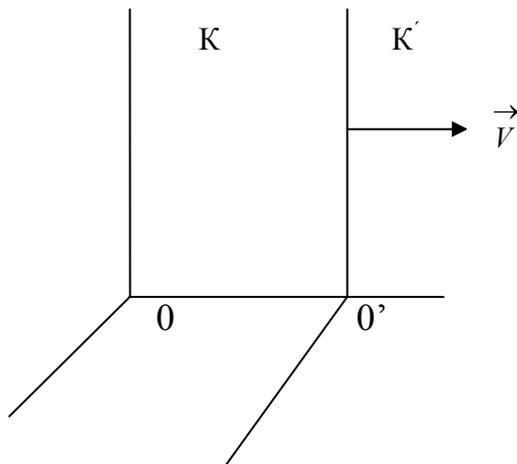


Рисунок 2

В неподвижной системе K на частицу с зарядом q действует сила Лоренца

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \left[\vec{v} \vec{B} \right], \quad (1.9)$$

где \vec{v} - скорость частицы относительно К.
 В системе K' на ту же частицу будет действовать сила

$$\vec{F}' = q \vec{E}' + q \left[\vec{v}' \vec{B}' \right], \quad (1.10)$$

где \vec{E}' и \vec{B}' - поля в системе K' (заряд q - инвариантен).

Учтем классическую формулу сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

и перепишем (1.9) в виде:

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \left[\vec{v}' \vec{B}' \right] + q \left[\vec{V} \vec{B}' \right]. \quad (1.11)$$

Силу можно приближенно (пока скорости не слишком велики) считать инвариантом: $\vec{F} = \vec{F}'$. Это позволяет приравнять правые части (1.10) и (1.11):

$$q \vec{E}' + q \left[\vec{v}' \vec{B}' \right] = q \vec{E} + q \left[\vec{v}' \vec{B}' \right] + q \left[\vec{V} \vec{B}' \right] \quad (1.12)$$

Чтобы выделить электрическое поле \vec{E}' в системе отчета K' , выберем частицу, которая покоится в этой СО, т.е. для которой $\vec{v}' = 0$. В этом случае равенство (1.12) превратится в

$$q \vec{E}' = q \vec{E} + q \left[\vec{V} \vec{B}' \right]. \quad (1.13)$$

Отсюда получаем закон преобразования электрического поля:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \left[\vec{V} \vec{B}' \right]. \quad (1.14)$$

Аналогично можно показать, что для магнитного поля

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \left[\vec{V} \vec{E} \right]. \quad (1.15)$$

В частности, если в исходной системе отсчета поле было чисто электрическим $\left(\vec{B} = 0\right)$, то в K'

$$\vec{E}' = \vec{E}, \quad \vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \left[\vec{V} \cdot \vec{E} \right], \quad (1.16)$$

т.е. в движущейся СО наряду с электрическим будет существовать и магнитное поле. Аналогично, если в K нет электрического поля $\left(\vec{E} = 0\right)$, то в системе K'

$$\vec{E}' = \left[\vec{V} \vec{B} \right], \quad \vec{B}' = \vec{B}, \quad (1.17)$$

и здесь уже $\vec{E}' \neq 0$. Таким образом, при переходе к движущейся СО магнитное поле может порождать электрическое поле и наоборот. Это и есть свидетельство относительности данных понятий. Кроме того, оказывается, что при определенных условиях один из компонентов поля с $\vec{E} \neq 0$ и $\vec{B} \neq 0$ можно «уничтожить», перейдя в подходящую СО (см. ниже).

1.3 Эмпирический базис классической электродинамики

Основная задача электродинамики: по известным $\rho = \rho \left(\vec{r} \middle| t \right)$ и $\vec{j} \left(\vec{r} \middle| t \right)$ найти создаваемое ими электромагнитное поле $\vec{E} \left(\vec{r} \middle| t \right)$ и $\vec{B} \left(\vec{r} \middle| t \right)$ в вакууме.

Обсудим важнейшие экспериментальные факты, на которых основываются уравнения классической электродинамики.

1. Закон Кулона. Рассмотрим две частицы с зарядами q и q_a , покоящиеся в точках \vec{r} и \vec{r}_a (рисунок 3):

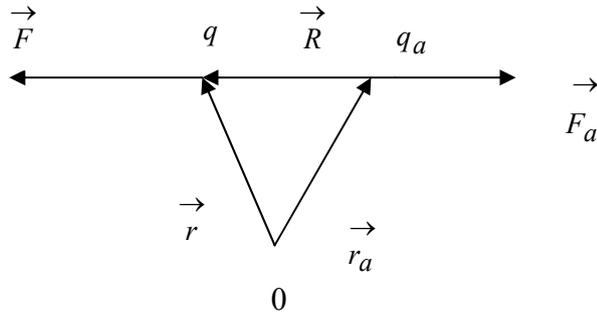


Рисунок 3

$$\vec{r} - \vec{r}_a = \vec{R}$$

$$\vec{F}_q = k \frac{qq_a}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R},$$

где

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{H \cdot m^2}{Kc^2};$$

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{m}$ - электрическая постоянная.

Можно показать (см. курс общей физики), что из закона Кулона следует теорема Гаусса для электростатического поля:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i,$$

где в правой части стоит алгебраическая сумма зарядов внутри замкнутой поверхности S. Введем вспомогательный вектор $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ (в вакууме); тогда

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i.$$

Запишем этот закон в дифференциальной форме:

$$\int_V \text{div } \vec{D} dV = \int_V \rho dV,$$

откуда, в силу произвольности V, $\text{div } \vec{D} = \rho$. Электростатическое поле имеет источниками электрические заряды.

2. Закон Био – Савара – Лапласа. Элемент линейного тока $J d\vec{l}$ создает в точке, отстоящей от него на расстояние \vec{R} , магнитное поле (рисунок 4).

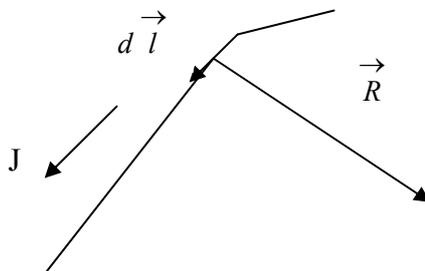


Рисунок 4

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J \left[d\vec{l} \cdot \vec{R} \right]}{R^3}.$$

В случае объемного тока:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[\vec{j} \cdot \vec{R} \right] dV}{R^3}.$$

Наконец, точечный заряд q , движущийся со скоростью \vec{v} , создает поле

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \left[\vec{v} \cdot \vec{R} \right]}{R^3}$$

Заметим, что закон Био–Савара–Лапласа не принадлежит к фундаментальным физическим законам: он справедлив только в нерелятивистском приближении. Это связано с тем, что закон Био–Савара–Лапласа был установлен из опытов с проводниками, где скорости зарядов малы.

3. Закон полного тока (закон Эрстеда). Пусть стационарные линейные токи (в вакууме) пронизывают некоторый воображаемый замкнутый контур L (рисунок 5)

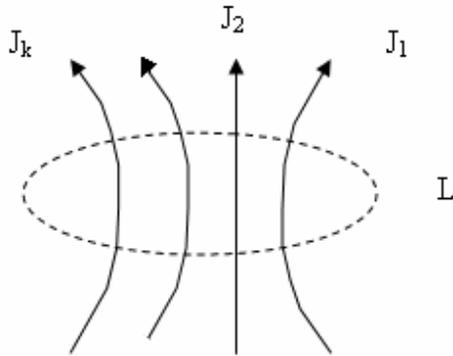


Рисунок 5

Из опытов Эрстеда следует, что

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k J_k,$$

где $\sum_k J_k$ - полный ток, пронизывающий контур L (сумма понимается в алгебраическом смысле: ток J_k считается положительным, если его направление находится в правовинтовом соотношении с направлением обхода контура в интеграле).

Введем вспомогательный вектор *напряженности магнитного поля*

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0};$$

тогда закон Эрстеда примет вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_k J.$$

Перейдем к дифференциальной форме записи: для этого выразим полный ток через \vec{j} :

$$\sum_k J_k = \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

где S – поверхность, опирающаяся на контур L. Имеем:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S};$$

воспользуемся теоремой Стокса:

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

и ввиду произвольности S :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \text{ - дифференциальная форма закона Эрстеда.}$$

Видим, что магнитное поле имеет вихревой характер: последнее соотношение задает вихри магнитного поля в данной точке пространства в зависимости от плотности тока в этой точке.

Заметим, что уравнение $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ согласуется с уравнением непрерывности. В самом деле, возьмем div от обеих частей (1.6):

$$0 = \text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{j},$$

а поскольку мы рассматриваем *стационарные токи* ($\frac{d\rho}{dt} = 0$), то уравнение непрерывности выполняется.

4. Теорема Гаусса для магнитного поля. Опыт показывает, что для произвольного, в том числе и нестационарного, магнитного поля поток через любую замкнутую поверхность равен 0:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

В дифференциальной форме:

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

Видно, что магнитное поле всегда носит вихревой характер: источники поля (т.е. «магнитные заряды») в природе отсутствуют.

5. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Явление электромагнитной индукции наблюдается только для переменного магнитного поля; при этом обнаруживается тесная взаимосвязь между электрическим и магнитным полями.

Рассмотрим замкнутый линейный проводник с постоянным током. Как известно, всякое электростатическое поле, т.е. электрическое поле неподвижных зарядов, является потенциальным (см. ниже). Поэтому его работа по перемещению заряда Δq вдоль замкнутого линейного проводника равна нулю :

$$\Delta A = \oint_L \Delta \vec{F}_{СТАТ} \cdot d \vec{l} = \Delta q \cdot \oint_L \vec{E}_{СТАТ} \cdot d \vec{l} = 0. \quad (1.18)$$

Но в проводнике всегда существуют энергетические потери, например тепловые. Мы приходим к выводу, что одно лишь электростатическое поле не может породить замкнутый ток. Даже если он по каким – то причинам возникнет, то быстро затухнет.

Но все же для создания тока необходимы именно электрические силы, ибо они должны действовать даже на неподвижные заряды. Электростатические (кулоновские) силы для этой цели не годятся, и они должны иметь какую – то другую природу.

Любые электрические силы, отличные от электростатических, называются *сторонними* силами. В соответствии с (1.18), в качестве основной характеристики стороннего электрического поля естественно взять величину, связанную с его работой по перемещению заряда по замкнутому контуру. Чтобы она была характеристикой самого поля, достаточно поделить эту работу на заряд (сравните с определением напряженности электрического поля). В итоге приходим к понятию *электродвижущей силы* (ЭДС) ε , которая по определению равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta A}{\Delta q} = \oint_L \vec{E}_{СТОР} \cdot d \vec{l}. \quad (1.19)$$

ЭДС – это работа сторонних электрических сил по перемещению единичного заряда по замкнутому контуру.

В качестве источников сторонних электрических полей долгое время применялись лишь химические элементы. Важнейшее открытие М. Фарадея, совершившее революцию в теории и практике электромагнетизма, состоит в том, что при определенных условиях источником подобных полей может служить магнитное поле. Это явление называется *электромагнитной индукцией*, и его описывает закон Фарадея, установленный на основе многочисленных экспериментов. Он гласит, что ЭДС индукции ε в данном контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока

$$\phi = \int_S \vec{B} d \vec{S}, \quad (1.20)$$

пронизывающего этот контур:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}. \quad (1.21)$$

Наличие знака « - » отражает известное *правило Ленца*. Сам М. Фарадей связывал электромагнитную индукцию с наличием реальных проводников. Возникновение ЭДС индукции при перемещении проводника в магнитном поле объяснялось тем, что на движущиеся заряды разных знаков действуют со стороны поля разные силы. Но М. Фарадей обнаружил и другую причину возникновения ЭДС индукции – движение магнита относительно неподвижного проводника. Объяснение этого эффекта оказалось для него затруднительным. Проблему разрешил Дж. К. Максвелл, предложивший универсальную формулировку закона электромагнитной индукции.

Согласно его точке зрения, следует различать две причины, которые при наличии магнитного поля могут вызывать ток в проводнике. Одна из них («фарадеевская») – это действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике. Другая причина («максвелловская») гораздо более глубокая. Это возникновение электрического поля за счет изменения во времени магнитного поля. Здесь уже не обязательно наличие реального проводника и заряженных частиц. Индукционное электрическое поле может существовать и в пустом пространстве. Для него тоже выполняется закон Фарадея (1.21), но при вычислении ЭДС по формуле (1.19), интегрирование проводится не по контуру проводника, а по любой неподвижной замкнутой кривой. В такой ситуации выражение (1.21) для ЭДС индукции уже не выводится из каких-то более общих положений. Сам закон Фарадея в трактовке Максвелла возводится в ранг фундаментального физического закона, подобного закону Кулона. И именно в этой трактовке он войдет ниже в общую систему уравнений электромагнитного поля.

Перейдем в законе электромагнитной индукции Фарадея

$$\varepsilon_{инд} = -\frac{d\phi}{dt}$$

к записи с помощью переменных состояния электромагнитного поля \vec{E} и \vec{B} .

$$\varepsilon_{инд} = \oint_L \vec{E} d\vec{l};$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S};$$

воспользуемся теоремой Стокса:

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = \int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S},$$

откуда, в силу произвольности S .

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Видно, что переменное магнитное поле (и только оно!) порождает *вихревое* электрическое поле.

Мы видим также, что в стационарном случае $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \right)$

$$\text{rot } \vec{E} = 0,$$

т.е. электростатическое поле *безвихревое*. Из этого следует, что для электростатического поля всегда можно ввести скалярную функцию $\varphi(x, y, z)$ такую, что

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Эта функция называется *потенциалом* электростатического поля; поэтому электростатическое поле потенциально.

6. Гипотеза Максвелла о токе смещения. Запишем дифференциальную форму закона полного тока:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

Предположим, что магнитное и электрическое поля – нестационарные; проверим наше уравнение на согласованность с законом сохранения заряда (1.6). Для этого возьмем *div* от обеих частей:

$$0 = \text{div} \left(\text{rot } \vec{H} \right) = \text{div } \vec{j}.$$

Но закон сохранения заряда требует иного:

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}.$$

Чтобы разрешить это противоречие, добавим к плотности тока \vec{j} неизвестное пока слагаемое $\vec{j}_{см.}$ - «ток смещения». Тогда уравнение для $rot \vec{H}$ переписывается так:

$$rot \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{см.}$$

Получим:

$$0 = div \left(rot \vec{H} \right) = div \vec{j} + div \vec{j}_{см.},$$

откуда (см.п.1)

$$div \vec{j}_{см.} = div \left(\frac{d \vec{D}}{dt} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\vec{j}_{см.} = \frac{d \vec{D}}{dt} + \vec{f},$$

где \vec{f} - произвольное *соленоидальное* векторное поле:

$$div \vec{f} = 0,$$

априори не равно нулю.

Максвелл проанализировал эту проблему и сформулировал дополнительное предположение, согласно которому:

$$\vec{f}(\vec{r}|t) \equiv 0.$$

Таким образом, суть *гипотезы Максвелла* состоит в следующем. Чтобы не вступать в противоречие с законом сохранения заряда, следует к обычному

току \vec{j} добавить «ток смещения» $\vec{j}_{см.} = \frac{d \vec{D}}{dt}$. Тогда получим:

$$rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{d \vec{D}}{dt}.$$

Последнее уравнение говорит о том, что наряду с электромагнитной индукцией существует также и магнитоэлектрическая индукция. Суть этого явления – в том, что источник вихревого магнитного поля связан не только с движением заряженных частиц, но и с переменным во времени электрическим полем.

Казалось бы, в справедливости гипотезы Максвелла можно было бы убедиться проще всего путем постановки экспериментов, аналогичных опытам Фарадея. Однако в 19 веке столь прямой путь оказался практически неосуществимым. Достижимые тогда переменные электрические поля порождали столь слабое магнитное поле, что оно не поддавалось регистрации. Поэтому статус фундаментального физического закона гипотеза Максвелла получила только после открытия электромагнитных волн, предсказанных теоретически на основе этой гипотезы.

2 Общие свойства электромагнитного поля в вакууме

2.1 Уравнения Максвелла в вакууме

На основании выше приведенных эмпирических закономерностей может записать сумму уравнений Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{а}) \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{б}) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{в}) \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{г}) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Здесь введены вспомогательные векторные поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

Эти уравнения являются важнейшей аксиомой классической электродинамики, и в этом смысле они подобны законам Ньютона в классической механике.

1 пара уравнений Максвелла выделена тем, что она содержит источники электромагнитного поля - ρ и \vec{j} , которые считаются заданными функциями времени. Уравнения 2-ой пары являются однородными.

Все выше записанные уравнения являются *дифференциальными*, что предполагает гладкость всех входящих в них функций. От этого ограничения можно избавиться, переписав уравнения Максвелла в *интегральной* форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_v \quad (a) \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} = J_S + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} \quad (б) \end{array} \right. \quad (2.1')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (в) \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (г) \end{array} \right. \quad (2.2')$$

Перечислим еще раз те экспериментальные факты, которые нашли свое отражение в уравнениях Максвелла:

- (а) – закон Кулона и инвариантность электрического заряда;
- (б) – закон Био– Савара – Лапласа и гипотеза Максвелла о токе смещения, основывающаяся на законе сохранения электрического заряда;
- (в) – отсутствие в природе магнитных зарядов;
- (г) – закон Кулона и закон электромагнитной индукции Фарадея в трактовке Максвелла.

Кроме того, все уравнения Максвелла органически включают принцип суперпозиции электрического и магнитного полей – это следует из *линейности* уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла представляют собой систему *зацепляющихся* дифференциальных уравнений первого порядка для векторных полей \vec{E} и \vec{B} .

Однако для этих полей можно получить и *независимые* дифференциальные уравнения, но уже второго порядка. Для этого возьмем *rot* от уравнений (г) и (б), воспользовавшись при этом уравнениями (а) и (в):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \rho - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \\ &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}; \end{aligned}$$

отсюда

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\text{grad} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right);$$

аналогично:

$$\text{rot} \left(\text{rot} \vec{H} \right) = \text{grad} \left(\text{div} \vec{H} \right) - \nabla^2 \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H} = \text{rot} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot} \vec{E} \right) = \text{rot} \vec{j} - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

;

после умножения на μ_0 :

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \text{rot} \vec{j}.$$

Дифференциальный оператор

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square$$

называется *оператором Даламбера* (даламбертианом). С его помощью два последних уравнения запишутся более кратко:

$$\square \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\text{grad} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right),$$

или

$$\square \vec{D} = \text{grad} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t},$$

и

$$\square \vec{B} = -\mu_0 \text{rot} \vec{j},$$

или

$$\square \vec{H} = -\text{rot} \vec{j}.$$

Они относятся к классу *уравнений Даламбера*.

В тех областях пространства, где отсутствуют источники, т.е. где

$$\rho = 0 \quad \text{и} \quad \vec{j} = 0,$$

эти уравнения превращаются в *волновые уравнения*:

$$\square \vec{D} = 0, \quad \square \vec{H} = 0,$$

или

$$\square \vec{E} = 0; \quad \square \vec{B} = 0.$$

Отсюда следует, что электромагнитные поля (в виде волн) могут быть и там, где нет источников.

2.2 Потенциалы электромагнитного поля

Помимо векторных переменных \vec{E} и \vec{B} , описывающих состояние электромагнитного поля, можно ввести и другой набор переменных состояния, во многих отношениях более удобный.

Возможность этого следует из второй пары уравнений Максвелла (не содержащей источников). Согласно уравнению (в), магнитное поле – соленоидально. Поэтому существует такое векторное поле \vec{A} , что

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (2.3)$$

Поле \vec{A} называется *векторным потенциалом*. Подставим (2.3) в (г); получим:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) = \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Отсюда видно, что существует *скалярный потенциал*, т.е. такое скалярное поле φ , что

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi.$$

В итоге электрическое поле представляется как

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Наличие второго слагаемого говорит о том, что в общем случае электрическое поле не является потенциальным.

Итак, электрическое и магнитное поля \vec{E} и \vec{B} однозначно выражаются через скалярный и векторный потенциалы:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (2.5)$$

Потенциалы φ и \vec{A} образуют новый набор переменных состояния электромагнитного поля. Этих величин всего 4, а не 6, и описание поля с их помощью более «экономно».

Как только поля \vec{E} и \vec{B} выражены через потенциалы φ и \vec{A} , однородные уравнения Максвелла (в) и (г) становятся излишними, ибо они удовлетворяются тождественно. Неоднородные уравнения Максвелла (а) и (б) дают в этом случае уравнения для потенциалов.

Подставим (2.5) в (2.1б):

$$\text{rot} \vec{H} = \text{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{A} \right) = \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \vec{A} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$$

$$\text{grad} \left(\text{div} \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},$$

откуда

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2.6)$$

Подставим теперь (2.5) в (2.1а):

$$\varepsilon_0 \text{div} \vec{E} = \varepsilon_0 \text{div} \left(-\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div} \vec{A} \right) \equiv$$

$$[\text{добавим и вычтем} \quad \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \varepsilon_0^2 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}]$$

$$\equiv -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi + \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \vec{A} \right) = \rho;$$

отсюда:

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2.7)$$

Итак, получена система весьма сложных зацепляющихся уравнений для потенциалов φ и \vec{A} . Однако их можно существенно упростить. Дело в том, что φ и \vec{A} определены неоднозначно: их можно изменять как угодно, лишь бы при этом не менялись поля \vec{E} и \vec{B} , выражаемые через потенциалы по формулам (2.5). Разные способы выбора потенциалов называют их *калибровками*, а свойство полей не зависеть от выбора конкретной калибровки называют *калибровочной инвариантностью*.

В электродинамике используется два варианта калибровки потенциалов:

1) *калибровка Лоренца*

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

В этой калибровке уравнения (2.6) и (2.7) резко упрощаются; они расцепляются и превращаются в уравнения Даламбера:

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (2.9)$$

Важный частный случай: потенциалы \vec{A} и φ не зависят от времени (стационарны). Тогда уравнения Даламбера переходят в *уравнения Пуассона*:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j};$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Выпишем (без доказательства) решения уравнений Даламбера в общем случае:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(\begin{array}{l} \vec{r} \\ r \\ t \end{array}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\begin{array}{l} \vec{r}' \\ r' \\ t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \end{array}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ \\ A\left(\begin{array}{l} \vec{r} \\ r \\ t \end{array}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(\begin{array}{l} \vec{r}' \\ r' \\ t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \end{array}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \end{array} \right. .$$

(«запаздывающие потенциалы»).

2) калибровка Кулона

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (2.10)$$

в которой уравнения (2.6) и (2.7) принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \square \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.3 Энергия электромагнитного поля

Чтобы сравнивать выводы из уравнений Максвелла с экспериментом, необходимо еще иметь выражение энергии электромагнитного поля через векторы поля.

Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный поверхностью S . Внутри него имеются электромагнитное поле и движущиеся заряды. Электрическое поле совершает работу по изменению состояния движения зарядов. Магнитная сила работы не совершает, так как она действует перпендикулярно скорости.

Работа электрического поля \vec{E} при перемещении заряда Δq на $d\vec{r}$ равна

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = \Delta q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r};$$

тогда мощность

$$\frac{dA}{dt} = \Delta q \cdot \vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \Delta q \cdot \vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Введем в рассмотрение плотность заряда: $\Delta q = \rho \cdot \Delta V$; отсюда плотность мощности (мощность на единицу объема) равна $\rho \cdot \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}$, а полная мощность в объеме V

$$N = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV. \quad (2.12)$$

Она характеризует превращение энергии электромагнитного поля в кинетическую энергию зарядов, заключенных в объеме V . Это превращение должно подчиняться всеобщему закону сохранения энергии, так как никаких других форм и источников энергии в нашем случае нет.

Воспользуемся уравнением Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и выразим из него \vec{j} , одновременно переходя к векторам поля \vec{E} и \vec{B} :

$$\vec{j} = \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Подставим (2.13) в (2.12):

$$N = \frac{1}{\mu_0} \int_V \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B} dV - \epsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV \quad (2.14)$$

Воспользуемся соотношением из векторного анализа

$$\text{div} \left[\begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right] = \vec{b} \text{ rot } \vec{a} - \vec{a} \text{ rot } \vec{b};$$

Получим ($\vec{a} = \vec{E}, \vec{b} = \vec{B}$)

$$\begin{aligned}
 N &= -\frac{1}{\mu_0} \int_V \operatorname{div} \left[\begin{matrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{matrix} \right] dV + \frac{1}{\mu_0} \int_V \underbrace{\vec{B} \operatorname{rot} \vec{E}}_{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} dV - \varepsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV = \\
 &= -\frac{1}{\mu_0} \int_V \operatorname{div} \left[\begin{matrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{matrix} \right] dV - \int_V \left(\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Учтем очевидные соотношения

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2; \quad \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} B^2,$$

а также то, что объем V от времени не зависит. Тогда можно переставить порядок операций дифференцирования по t и интегрирования по V во втором члене правой части (2.15):

$$\int_V \left(\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV \right\} \equiv \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (2.16)$$

где обозначено:

$$W \equiv \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV. \quad (2.17)$$

Из соотношения (2.15) мы видим, что $N = -\frac{1}{\mu_0} \oint_S \left[\begin{matrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{matrix} \right] d\vec{S} - \frac{\partial W}{\partial t}$, или,

вводя обозначение

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \left[\begin{matrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{matrix} \right],$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -N - \oint_S \vec{S} d\vec{s}. \quad (2.18)$$

Равенство (2.18) выражает закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Величина W из (2.17) есть энергия электромагнитного поля, заключенная в объеме V . Равенство (2.18) показывает, что энергия электромагнитного поля в этом объеме изменяется в результате двух факторов: выделения джоулева тепла в единицу времени (N) и потока энергии через поверхность, ограничивающую объем V (последний член в (2.18)). Следовательно, вектор $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \vec{E} & \vec{B} \end{bmatrix}$ характеризует движение электромагнитной энергии в пространстве. Он называется *вектором Пойнтинга*. Этот вектор следует трактовать как *плотность потока энергии* электромагнитного поля.

Из формулы (2.17) следует, что величина

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$$

есть *плотность энергии* самого электромагнитного поля.

2.4 Импульс электромагнитного поля. Давление света

До построения Максвеллом электродинамики понятие импульса применялось только к веществу. Оказалось, однако, что и электромагнитное поле обладает некоторым импульсом, причем справедлив всеобщий закон сохранения импульса, включающий как импульс вещества, так и импульс поля.

Будем исходить из основных положений релятивистской механики частицы. Как известно, в специальной теории относительности (СТО) связь между импульсом частицы и ее энергией \mathcal{E} имеет вид:

$$\vec{p} = \frac{\vec{\mathcal{E}}}{c^2} v \quad (2.20)$$

Преобразуем это соотношение. Рассмотрим совокупность бесконечного числа невзаимодействующих частиц, плотно заполняющих некоторую область пространства. Для частиц, заключенных в элементе объема dV , можем записать:

$$d\vec{p} = \frac{d\vec{\mathcal{E}}}{c^2} v \quad (2.21)$$

Введем плотность энергии частиц (по аналогии с плотностью заряда ρ)

$$\varepsilon \equiv \frac{d\mathcal{E}}{dV} = \begin{cases} \frac{m v^2}{2} \cdot n, v \ll c \\ mc^2 \cdot n \\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, v \approx c \end{cases}$$

Здесь n – концентрация частиц (они считаются одинаковыми).

Введем также аналог плотности тока \vec{j} - *плотность потока энергии частиц*

$$\vec{q} = \varepsilon \cdot \vec{v}$$

q - количество механической энергии, протекающей в 1 секунду через единичную площадку, перпендикулярную вектору скорости в данной точке пространства в данный момент t .

Имея в виду, определение плотности энергии ε и вводя аналогичным способом *плотность импульса*

$$\vec{\pi} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}, \quad (2.22)$$

из (2.21) получим

$$\vec{\pi} = \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \vec{v} \quad (2.23)$$

Но, согласно определению плотности потока энергии, $\vec{q} = \varepsilon \vec{v}$, и мы приходим к локальному соотношению

$$\vec{\pi} = \frac{1}{c^2} \vec{q} \quad (2.24)$$

До сих пор мы говорили об импульсе и энергии частиц. На самом же деле соотношение (2.24) справедливо для произвольной материальной субстанции; необходимо лишь, чтобы входящие в него энергия и импульс образовывали 4 – вектор, т.е. чтобы они надлежащим образом видоизменялись при преобразованиях Лоренца. Поэтому можно сформулировать следующее общее положение: в любой релятивистской физической системе всякому переносу энергии отвечает некоторый импульс, причем локальная связь между этими величинами устанавливается соотношением вида (2.24).

В частности, это соотношение справедливо не только для релятивистских частиц, но и для электромагнитного поля, которое несомненно является релятивистской системой (см. выше).

Плотность потока энергии поля – это вектор Пойнтинга $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{E} \vec{B} \right]$.

Поэтому с помощью формулы (2.24) можно сразу записать выражение для *плотности импульса* электромагнитного поля:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \varepsilon_0 \left[\vec{E} \cdot \vec{B} \right] = \left[\vec{D} \cdot \vec{B} \right] \quad (2.25)$$

Импульс частиц и импульс электромагнитного поля, взятые по отдельности, изменяются со временем, причиной этого является сила Лоренца. Однако для всей системы «частицы + поле» закон сохранения импульса выполняется:

$$\int_{R^3} \left(\vec{\pi} + \vec{\tau} \right) dV = const, \quad (2.26)$$

где интеграл берется по всему пространству R^3 .

Важнейшим экспериментальным подтверждением сказанного явились опыты Лебедева по измерению давления света. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Как известно, в пустом пространстве могут распространяться плоские электромагнитные волны, в которых

$$\vec{E} \perp \vec{n}, \quad \vec{B} \perp \vec{n}, \quad \vec{E} \perp \vec{B} \quad (2.27)$$

(\vec{n} - единичный вектор в направлении распространения волны).

Модули векторов \vec{E} и \vec{H} в такой волне связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} \cdot H. \quad (2.28)$$

Следовательно, для плоской электромагнитной волны в вакууме, согласно (2.28),

$$\begin{cases} w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \varepsilon_0 E^2 \\ \vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}] = E \cdot H \cdot \vec{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 \vec{n}; \\ \vec{\tau} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \varepsilon_0 \mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 \vec{n} = \frac{\varepsilon_0}{c} E^2 \vec{n}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Пусть такая волна падает на неподвижную стенку перпендикулярно ее поверхности с некоторым коэффициентом отражения

$$R \equiv \frac{\left| \vec{S}_{отр} \right|}{\left| \vec{S}_{над} \right|} = \frac{\left| \overset{\rightarrow}{\tau}_{отр} \right|}{\left| \overset{\rightarrow}{\tau}_{над} \right|} = \frac{w_{отр}}{w_{над}}. \quad (2.30)$$

Покажем, что эта волна оказывает на стенку определенное давление p , и найдем его значение. Проведем следующую цепочку рассуждений:

а) импульс поля в единице объема равен τ ;

б) в единицу времени на 1 м^2 площади поверхности стенки падает импульс $c\tau$

в) в единицу времени от 1 м^2 площади поверхности стенки отражает импульс $(-Rc\tau)$;

г) изменение соответствующего импульса поля в единицу времени:

$$-Rc\tau - c\tau = -(1+R)c\tau;$$

д) изменение соответствующего импульса стенки в единицу времени равно $(1+R)c\tau$, т.к. импульс системы «стенка + поле» сохраняется;

е) согласно второму закону Ньютона, изменение импульса тела в единицу времени есть сила, действующая на это тело, причем в рассматриваемом случае она направлена по нормали к поверхности и отнесена к 1 м^2 площади, т.е. как раз и является давлением.

Таким образом, для искомого давления электромагнитной волны получаем

$$p = (1+R)c\tau = (1+R) \cdot \varepsilon_0 E^2. \quad (12)$$

В частности, для двух предельных случаев имеем:

$$p = \begin{cases} 2\varepsilon_0 E^2 & \text{при } R = 1 \text{ (зеркальная поверхность)} \\ \varepsilon_0 E^2 & \text{при } R = 0 \text{ (черная поверхность)} \end{cases}$$

На этом результате, полученном Максвеллом, и основывались опыты Лебедева по измерению давления света.

3 Релятивистская формулировка электродинамики

3.1 Ковариантный формализм в релятивистских теориях

3.1.1 Преобразование координат события.

В заданной системе отсчета каждому элементарному событию сопоставляют четыре числа – координаты события $X = (\bar{r}, t)$. При переходе к другой системе отсчета координаты того же события превращаются в $X' = (\bar{r}', t')$. В специальной теории относительности рассматриваются только инерциальные системы отсчета и координаты преобразуются по формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right. \text{ (преобразования Лоренца) } \quad (3.1)$$

Одно из наиболее фундаментальных свойств преобразований Лоренца состоит в том, что они оставляют инвариантными интервалы событий:

$$S^2(X) \equiv c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \equiv (ct)^2 - \bar{r}^2 = inv. \quad (3.2)$$

Часто для удобства вводят вместо t мнимую координату $x_4 = ict$ и записывают координаты события так :

$$X = (x, y, z, ict) \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (\bar{r}, x_4) \quad . \quad (3.3)$$

Иными словами, события рассматриваются как точки 4-мерного пространства Минковского. Тогда преобразования Лоренца (3.1) принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \frac{x_1 + i \frac{V}{c} x_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, x'_2 = x_2, x'_3 = x_3, x'_4 = \frac{x_4 - i \frac{V}{c} x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right., \quad (3.4)$$

а интервалы (3.2), которые они сохраняют, представляются как

$$S^2(x) = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = -x_4^2 - \bar{r}^2 = -x_4^2 - x_j x_j = -x_\mu x_\mu. \quad (3.5)$$

Здесь и ниже греческие индексы пробегает значения от 1 до 4, а латинские, которые сохраняются за пространственными координатами, принимают значения 1, 2, 3, причем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Для компактной записи преобразований (3.4) можно воспользоваться матричной символикой:

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu \quad , \quad (3.6)$$

где Λ - матрица преобразований Лоренца, все 16 компонентов которой легко выписать в явном виде:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{iV}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{iV}{c} & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1.2 Преобразования значений физических величин

При изменении системы отсчета изменяются не только координаты событий, но, вообще говоря, и значения физических величин. Рассмотрим трансформационные свойства физических величин по отношению к преобразованиям Лоренца вида (3.1) или (3.4).

Важнейшими объектами для изучения таких преобразований являются четырехмерные тензоры. *Четырехмерным тензором F ранга n называется совокупность 4^n чисел $f_{\mu_1 \dots \mu_n}$ (компонентов тензора), которые при преобразованиях Лоренца (3.6) изменяются по закону*

$$f'_{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda_{\mu_1 \nu_1} \dots \Lambda_{\mu_n \nu_n} f_{\nu_1 \dots \nu_n} \quad , \quad (3.7)$$

то есть как произведение n координат события.

Во множестве 4-тензоров стандартным способом вводятся алгебраические операции: умножение на числа, сложение и перемножение, свертывание по паре индексов. Для построения релятивистской механики достаточно тензоров нулевого и первого ранга, в релятивистской электродинамике важную роль

будут играть также тензоры второго ранга. Тензор нулевого ранга имеет один компонент φ и называется скаляром. Он не меняется при изменении системы координат:

$$\varphi' = \varphi, \quad (3.8)$$

т.е. является инвариантом преобразований Лоренца.

Примеры скаляров: интервал S^2 , элемент собственного времени

$$dt_0 = \frac{dS}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (3.9)$$

масса частицы m , и так далее.

Тензор первого ранга A имеет 4 компоненты a_μ и называется четырех мерным вектором или 4-вектором :

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \equiv (\bar{a}, a_4) \quad (3.10)$$

Закон преобразования совпадает с законом преобразования (3.6) координат событий:

$$a'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} a_\nu, \quad (3.11)$$

или в явном виде (см. формулу (3.11)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_1 = \frac{a_1 + i \frac{V}{c} a_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, a'_2 = a_2, a'_3 = a_3, a'_4 = \frac{a_4 - i \frac{V}{c} a_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right. . \quad (3.12)$$

Примеры 4 - векторов: 4-радиус - вектор X (координаты событий),

$$\text{4-скорость} \quad U = \frac{dX}{dt_0} = \left(\frac{\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (3.13)$$

$$\text{4-импульс} \quad P = mU = \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, i \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\vec{P}, i \frac{\mathcal{E}}{c}). \quad (3.14)$$

Из всякого 4-мерного вектора A можно образовать скаляр его квадрат

$$A^2 = a_\mu a_\mu = \bar{a}^2 + a_4^2 \quad (3.15)$$

Так, $X^2 = -S^2$, $U^2 = -c^2$, $P^2 = -m^2 c^2$ и т.д. Любым двум 4-векторам A и B сопоставляется 4-мерное скалярное произведение

$$(A, B) \equiv a_\mu b_\mu = (\bar{a} \cdot \bar{b}) + a_4 b_4, \quad (3.16)$$

которое также является инвариантом преобразований Лоренца.

Тензор второго ранга T имеет 16 компонент $t_{\mu\nu}$, которые преобразуются по закону

$$t'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\rho} \Lambda_{\nu\sigma} t_{\rho\sigma}. \quad (3.17)$$

Отметим среди них симметричные и антисимметричные тензоры S и A :

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}, a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}. \quad (3.18)$$

Полная свертка симметричного и антисимметричного тензоров равна нулю:

$$(S, A) \equiv S_{\mu\nu} \cdot a_{\mu\nu} = 0, \quad (3.19)$$

поскольку

$$(S, A) \equiv S_{\mu\nu} \cdot a_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} \cdot a_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu} \cdot a_{\nu\mu} \equiv -S_{\mu\nu} \cdot a_{\mu\nu} = -(S, A)$$

Если в каждой точке X 4-пространства Минковского задан тензор F (4^n чисел $f_{\mu_1 \dots \mu_n}$), то говорят, что имеется тензорное поле $F = F(X)$.

Частные случаи: скалярное поле $\varphi = \varphi(X)$, векторное поле $A = A(X)$, тензорное поле $2^{\text{го}}$ ранга $T = T(X)$. Путем дифференцирования из заданного тензорного поля можно строить другие тензорные поля. Основным при этом является дифференциальный оператор ∇ :

$$\nabla_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = (\vec{\nabla}, \frac{\partial}{\partial x_4}) = (\vec{\nabla}, -\frac{i}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}), \quad (3.20)$$

обладающий формальными свойствами 4-вектора и обобщающий на 4-мерный случай общеизвестный 3-мерный оператор «набла». Квадрат ∇^2 есть инвариантный оператор, совпадающий с даламбертианом:

$$\nabla^2 \equiv \nabla_{\mu} \cdot \nabla_{\mu} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\mu}} = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square \quad (3.21)$$

Таким образом, оператор Даламбера \square есть непосредственный 4-мерный аналог оператора Лапласа $\vec{\nabla}^2 = \Delta$. Укажем теперь важнейшие дифференциальные операции над тензорными полями:

(а) 4 – градиент скаляра φ есть 4-вектор

$$(\text{grad}\varphi)_{\mu} \equiv \nabla_{\mu} \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} = (\vec{\nabla} \varphi, -\frac{i}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \quad (3.22)$$

(б) 4-дивергенция вектора A представляет собой скаляр

$$\text{div}A \equiv (\nabla A) = \nabla_{\mu} a_{\mu} = \frac{\partial a_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = \text{div}\vec{a} - \frac{i}{c} \cdot \frac{\partial a_4}{\partial t} = \text{div}\vec{a} - \frac{1}{c} \frac{\partial a_0}{\partial t}, \quad (3.23)$$

где введено обозначение $a_4 \equiv ia_0$.

(в) 4-дивергенция тензора 2-го ранга T есть 4 – вектор

$$(\text{div}T)_{\mu} \equiv \nabla_{\nu} t_{\mu\nu} = \frac{\partial t_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} \quad (3.24)$$

(г) 4-ротор 4- вектора A является антисимметричным тензором 2-го ранга

$$(\text{rot}A)_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu} a_{\nu} - \nabla_{\nu} a_{\mu} = \frac{\partial a_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial a_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \quad (3.25)$$

(д) Даламбертиан произвольного тензора F представляет собой тензор того же ранга

$$\square F \equiv \nabla_{\mu} \nabla_{\mu} F = \Delta F - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (3.26)$$

3.1.3 Физические законы

Все физические законы должны быть ковариантными по отношению к преобразованиям Лоренца, т.е. их форма не должна зависеть от выбора ИСО. Для обеспечения ковариантности данного физического закона необходимо, чтобы все входящие в него слагаемые были однотипными ковариантами группы Лоренца – тензорами одного и того же ранга. Применим изложенные соображения к установлению того дополнительного факта, что классическая электродинамика является релятивистской теорией.

3.2 Четырехмерный ток

Рассмотрим, прежде всего, плотность заряда ρ и плотность тока \vec{j} , подчиняющиеся уравнению непрерывности. Чтобы выявить 4-мерную структуру последнего, перепишем это уравнение в виде

$$\operatorname{div} \vec{j} + ic \frac{\partial \rho}{\partial(ict)} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial j_k}{\partial x_k} + \frac{\partial(ic\rho)}{\partial x_4} = 0.$$

Закон сохранения электрического заряда справедлив во всех ИСО, а поэтому данное уравнение должно быть ковариантным относительно преобразований Лоренца. В него, как мы видим, входит ковариантный дифференциальный оператор ∇_{μ} , обладающий формальными свойствами 4-вектора. Поэтому ковариантность будет обеспечена, если потребовать, чтобы величины ρ и \vec{j} образовывали 4- вектор

$$J = (\vec{j}, ic\rho) \quad (3.27)$$

Он называется 4-мерным током, или 4-током. С учетом его определения уравнение непрерывности будет записываться в полностью ковариантной форме

$$\frac{\partial j_{\mu}}{\partial x_{\mu}} \equiv \nabla_{\mu} j_{\mu} \equiv \operatorname{Div} J = 0 \quad (3.28)$$

Из общих формул преобразования компонент 4-вектора и из определения 4-тока (3.27) сразу получаем, что величины ρ и \vec{j} обладают следующими

трансформационными свойствами по отношению к преобразованиям Лоренца:

$$\left\{ j'_x = \frac{j_x - V\rho}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, j'_y = j_y, j'_z = j_z, \rho' = \frac{\rho - \frac{V}{c^2} j_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right. \quad (3.29)$$

В частности, переходя от системы K_0 покоя заряженных частиц, где $\rho = \rho_0, \vec{j} \equiv \vec{j}_0 = 0$, к системе отсчета K , движущейся относительно K_0 со скоростью $(-\vec{V})$, т.е. к ИСО, в которой сами частицы движутся со скоростью \vec{V} , из (3.29) находим

$$\left\{ j_x = \frac{\rho_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, j_y = 0, j_z = 0, \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right. \quad (3.30)$$

В нерелятивистском приближении

$$\vec{j} \approx \rho_0 \vec{V}, \rho \approx \rho_0, \quad (3.31)$$

и весь эффект сводится к естественному возникновению некоторого тока.

В релятивистской области возникает дополнительное явление – определенное возрастание плотности заряда движущихся частиц. Оно связано со свойством инвариантности электрического заряда. Действительно, для заряда, заключенного в некотором элементе объема, с учетом этого свойства и лоренцева сокращения имеем:

$$dq = \rho dV = \rho dx dy dz = \rho dx_0 dy_0 dz_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = dq_0 = \rho_0 dV_0 = \rho_0 dx_0 dy_0 dz_0,$$

откуда

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.32)$$

в полном соответствии с последней формулой (3.30)

Интересен также другой крайний случай, когда в исходной ИСО K имеется нейтральный проводник с током, для которого $\rho = 0, j_x = j, j_y = j_z = 0$.

В системе отсчета, движущейся вдоль проводника со скоростью $(-\vec{V})$

(в ней проводник движется со скоростью \vec{V}), из (3.29) получаем

$$j'_x = \frac{j}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, j'_y = 0, j'_z = 0, \rho' = \frac{\frac{V}{c^2} j}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad . \quad (3.33)$$

Таким образом, при движении проводника ток в нём несколько возрастает. Но, главное, нейтральный проводник становится теперь заряженным. Этот релятивистский эффект объясняется следующим образом. В исходной системе отсчета К имеем

$$\rho_+ = -\rho_-, j_+ \neq -j_- \quad . \quad (3.34)$$

Например, для металлического проводника $j_+ = 0$, а $j_- = j \neq 0$. В новой системе отсчета К' с помощью последней формулы (3.33) получим :

$$\rho'_\pm = \frac{\frac{V}{c^2} \cdot j_\pm}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad . \quad (3.35)$$

Поскольку $j_+ \neq -j_-$, то здесь уже $\rho'_+ \neq -\rho'_-$, т.е. $\rho' = \rho'_+ + \rho'_- \neq 0$. (3.36)

Таким образом, появление ненулевой плотности электрического заряда в конечном итоге связано с различием токов, создаваемых положительными и отрицательными заряженными частицами в исходной системе отсчета, т.е. с различием в характере движения этих частиц.

3.3 Четырехмерный потенциал

При анализе трансформационных свойств потенциалов φ и \vec{A} будем исходить из уравнений Даламбера, которым они удовлетворяют в лоренцевой калибровке. Имея в виду структуру 4-тока (3.27), перепишем эти уравнения в виде

$$\square A_k = -\mu_0 j_k, \quad \square (i\varphi) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c} (ic\rho) \quad (3.37)$$

Справа здесь стоят компоненты 4-вектора J , а входящий в левые части даламбертиан есть релятивистски ковариантный оператор. Поэтому ковариант-

ность уравнений (3.37) будет обеспечена, если потребовать, чтобы величины φ и \vec{A} образовывали 4-вектор

$$A \equiv (\vec{A}, i \frac{\varphi}{c}). \quad (3.38)$$

Он называется 4-потенциалом. С учетом его определения уравнения Даламбера будут записываться в полностью ковариантной форме:

$$\square A = -\mu_0 J. \quad (3.39)$$

С учетом определения 4-дивергенции удобно записывается и калибровка Лоренца:

$$\text{div } A = 0 \quad . \quad (3.40)$$

Нетрудно видеть, что величины φ и \vec{A} обладают следующими трансформационными свойствами:

$$A'_x = \frac{A_x - \frac{V}{c^2} \varphi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, A'_y = A_y, A'_z = A_z, \varphi' = \frac{\varphi - VA_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad . \quad (3.41)$$

В частности, если в исходной системе отсчета K_0 заряженные частицы покоятся, а значит, создают только электрические поля ($\vec{A} = 0, \varphi = \varphi_0$), то в движущейся системе отсчета K' будем иметь

$$A'_x = \frac{-\frac{V}{c^2} \varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, A'_y = 0, A'_z = 0, \varphi' = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad . \quad (3.42)$$

Здесь уже наряду с электрическим полем \vec{E} имеется и отличное от нуля магнитное поле $\vec{B}' = \text{rot} \vec{A}$. Этот факт не является неожиданным, ибо, как мы видели выше, разбиение электромагнитного поля на электрическую и магнитную составляющие относительно.

В нерелятивистском приближении ($V \ll c$) формула (3.42) принимает вид

$$A'_x = -\frac{V}{c^2} \varphi_0, A'_y = 0, A'_z = 0, \varphi' = \varphi_0 . \quad (3.43)$$

Отсюда для магнитного поля в движущейся системе отсчета имеем

$$\vec{B}' = \text{rot} \vec{A}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\varphi_0 \cdot \frac{V}{c^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{V}{c^2} \left\{ 0, \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}, -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right\} = \frac{V}{c^2} \{0, E_{0z}, E_{0y}\}.$$

Если учесть, что $\vec{V} = \{V, 0, 0\}$, а значит $[\vec{V}\vec{E}_0] = \{0, -VE_{0z}, VE_{0y}\}$, то получим

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2} [\vec{V}\vec{E}_0]. \quad (3.44)$$

В итоге мы пришли к формуле (1.15), приведенной без вывода в § 1.2:

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{V}\vec{E}],$$

задающей закон преобразования магнитного поля при изменении ИСО (в нашем случае $\vec{B} = 0$).

3.4 Тензор электромагнитного поля

Формула $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ подсказывает нам ввести в рассмотрение ковариантную величину

$$F = \text{rot} A . \quad (3.45)$$

Согласно определению 4-ротора, она представляет собой антисимметричный тензор 2-го ранга с компонентами

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu} \equiv \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} . \quad (3.46)$$

По причинам, которые сейчас выяснятся, этот тензор называется *тензором электромагнитного поля*. Из свойства антисимметрии

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (3.47)$$

следует, что тензор F имеет всего 6 независимых компонентов: диагональные равны нулю, а недиагональные компоненты с одинаковыми парами индексов различаются лишь знаками.

С помощью определений 4-потенциала и (3.46) получаем для временных компонентов

$$F_{k4} = -F_{4k} : \\ F_{k4} = \frac{\partial A_4}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_4} = \frac{\partial(i\frac{\varphi}{c})}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial(ict)} = \frac{i}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{i}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} = -\frac{i}{c} \left\{ -\mathit{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\}_k,$$

так что

$$F_{k4} = -F_{4k} = -\frac{i}{c} E_k \quad (3.48)$$

Аналогично,

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\mathit{rot}\vec{A})_z;$$

так же вычисляется F_{13} и F_{23} , и мы имеем

$$F_{12} = -F_{21} = B_z, F_{13} = -F_{31} = -B_y, F_{23} = -F_{32} = B_x$$

В итоге для матрицы тензора F получаем

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & cB_z & -cB_y & -iB_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iB_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \hline iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{array} \right], \quad (3.49)$$

где штриховыми линиями указана 3-мерная структура этой матрицы. Таким образом, в теории относительности электрическое и магнитное поля \vec{E} и \vec{B} комбинируются в единый 4-мерный ковариантный объект – тензор электромагнитного поля. При этом становится очевидным, что при преобразованиях Лоренца величины \vec{E} и \vec{B} будут "перепутываться" друг с другом, что с особой ясностью подчеркивает относительность разбиения электромагнитного поля на электрическую и магнитную составляющие.

Трансформационные свойства электрического и магнитного полей можно установить разными способами. Простейший основан на том, что

$$F_{\mu\nu} \sim x_\mu x_\nu, \quad (3.50)$$

где тильда означает «...преобразуется так же, как...». Учитывая, что при преобразованиях Лоренца $x'_2 = x_2$ и $x'_3 = x_3$, имеем:

$$\begin{aligned} F_{12} \sim x_1 x_2 \sim x_1, \quad F_{13} \sim x_1 x_3 \sim x_1, \quad F_{23} \sim x_2 x_3 = inv, \\ F_{14} \sim x_1 x_4, \quad F_{24} \sim x_2 x_4 \sim x_4, \quad F_{34} \sim x_3 x_4 \sim x_4 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Тогда для этих величин (кроме F_{14}) находим:

$$\begin{aligned} F'_{12} \equiv F_{1'2'} = F_{1'2} &= \frac{F_{12} + i\beta F_{42}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ F'_{13} \equiv F_{1'3'} = F_{1'3} &= \frac{F_{13} + i\beta F_{43}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ F'_{23} &= F_{23}; \\ F'_{24} \equiv F_{2'4'} &= \frac{F_{24} - i\beta F_{21}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ F'_{34} \equiv F_{3'4'} &= \frac{F_{34} - i\beta F_{31}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ (\beta &= \frac{V}{c}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Величина F_{14} требует особого рассмотрения. Проводя с помощью формул Лоренца последовательные преобразования по каждому её индексу, найдем:

$$\begin{aligned} F'_{14} \equiv F_{1'4'} &= \frac{F_{14'} + i\beta F_{44'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \frac{F_{14} - i\beta F_{11}}{\sqrt{1-\beta^2}} + i\beta \frac{F_{44} - i\beta F_{41}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\} = \\ &= \frac{F_{14} + \beta^2 F_{41}}{1-\beta^2} = \frac{F_{14}(1-\beta^2)}{1-\beta^2} = F_{14}, \end{aligned}$$

т.е.

$$F'_{14} = F_{14}. \quad (3.53)$$

Подставляя в формулы (3.52) и (3.53) явные выражения для компонентов тензора $F_{\mu\nu}$ из (3.49), получим окончательный закон преобразования электрического и магнитного полей:

$$E'_x = E_x, E'_y = \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, E'_z = \frac{E_z + VB_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, B'_x = B_x, B'_y = \frac{B_y + \frac{V}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, B'_z = \frac{B_z - \frac{V}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.54)$$

В нерелятивистском приближении ($V \ll c$):

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, E'_y = E_y - VB_z, E'_z = E_z + VB_y, B'_x = B_x, B'_y = \\ &= B_y + \frac{V}{c^2} E_z, B'_z = B_z - \frac{V}{c^2} E_y \end{aligned} \quad (3.55)$$

Учитывая, что $\vec{V} = \{V, 0, 0\}$, можем записать

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V}\vec{B}], \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{V}\vec{E}], \quad (3.56)$$

т.е. мы вернулись к уже обсуждавшимся ранее формулам (1.14) и (1.15).

Итак, сами поля \vec{E} и \vec{B} изменяются при изменении системы отсчета. Однако из них можно образовать комбинации, инвариантные относительно преобразований Лоренца. Они называются *инвариантами* электромагнитного поля. Прямым вычислением можно проверить, что при переходе от одной системы координат к другой не изменяют своей величины следующие инварианты:

$$I_1 = c^2 B^2 - E^2 \quad \text{в СГС} \quad I_1 = B^2 - E^2; I_2 = \vec{B}\vec{E}; I_3 = \vec{H}\vec{B} - \vec{D}\vec{E} \quad (3.57)$$

(в СГС $\vec{H} \equiv \vec{B}, \vec{D} \equiv \vec{E}$ - в вакууме, поэтому там 3-го инварианта нет)

Из существования инвариантов электромагнитного поля (3.57) вытекает ряд важных следствий:

(а) Свойство ортогональности векторов \vec{E} и \vec{B} :

$$\vec{E} \perp \vec{B} \Leftrightarrow (\vec{E}\vec{B}) = 0 \quad (3.58)$$

есть инвариантное свойство

(б) Свойство равенства модулей векторов \vec{E} и $c\vec{B}$

$$|\vec{E}| = c|\vec{B}| \Leftrightarrow c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2 = 0 \quad (3.59)$$

есть инвариантное свойство.

$$(в) \text{ Неравенства } \begin{cases} |\vec{E}| > c|\vec{B}| \Leftrightarrow c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2 < 0; \\ |\vec{E}| < c|\vec{B}| \Leftrightarrow c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2 > 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

имеют абсолютный смысл.

(г) Если в какой-то системе отсчета векторы \vec{E} и \vec{B} образуют острый (тупой) угол, то они будут образовывать острый (тупой) угол и в любой другой системе отсчета.

(д) Если векторы \vec{E} и \vec{B} : ортогональны и \vec{E} превышает по модулю $c\vec{B}$, т.е.

$$\vec{E} \perp \vec{B} \Leftrightarrow (\vec{E}\vec{B}) = 0 \quad |\vec{E}| > c|\vec{B}| \Leftrightarrow c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2 < 0, \quad (3.61)$$

то электромагнитное поле является «электроподобным». В этом случае не существует системы отсчета, в которой $\vec{E}^2 = 0$, но всегда найдется такая система отсчета, в которой магнитное поле отсутствует: $\vec{B}'=0$.

$$(е) \text{ Если } \vec{E} \perp \vec{B} \Leftrightarrow (\vec{E}\vec{B}) = 0, \quad |\vec{E}| < c|\vec{B}| \Leftrightarrow c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2 > 0, \quad (3.62)$$

то электромагнитное поле является «магнитоподобным».

(ж) Если хотя бы один из инвариантов (3.57) отличен от нуля, то найдется такая система отсчета, в которой векторы \vec{E} и \vec{B} в данной точке параллельны друг другу.

(з) Исключение составляет случай, когда $I_1=0$ и $I_2=0$. В этом случае векторы \vec{E} и $c\vec{B}$ во всех системах отсчета равны по модулю и взаимно ортогональны (см. первые два свойства). Именно таковы свойства плоской электромагнитной волны.

3.5 Уравнения Максвелла в ковариантной форме

В обычном формализме, если поля \vec{E} и \vec{B} выражены через потенциалы φ и \vec{A} посредством соотношений $\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ (см. выше), вторая пара уравнений Максвелла удовлетворяется тождественно:

$$\begin{cases} \text{div}\vec{B} = 0 \\ \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

Аналогично этому можно ожидать, что и в релятивистском формализме из определения (3.46) будет вытекать некоторое тождество для тензора электромагнитного поля. Такое тождество действительно существует, причем, как мы увидим, оно полностью эквивалентно второй паре уравнений Максвелла. Вот это тождество :

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} &= \nabla_\lambda (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) + \nabla_\nu (\nabla_\lambda A_\mu - \nabla_\mu A_\lambda) + \\ &+ \nabla_\mu (\nabla_\nu A_\lambda - \nabla_\lambda A_\nu) = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\lambda \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} = 0 \end{aligned}$$

В первую пару уравнений Максвелла входят источники электромагнитного поля - плотность заряда ρ и плотность тока \vec{j} , образующие 4-вектор J . Кроме того, эти уравнения включают первые производные от \vec{E} и \vec{B} по времени и координатам, причем \vec{E} и \vec{B} комбинируются в тензор F . Единственное ковариантное соотношение между J и первыми производными F имеет вид $\text{div} F = \alpha J$, причем из структуры уравнений Максвелла следует ожидать, что $\alpha = \mu_0$. В итоге возникает гипотеза, что уравнения Максвелла можно представить в следующей ковариантной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j_\mu; & (a) \\ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 & (b) \end{cases} \quad (3.63)$$

Система (3.63a) включает 4 уравнения, как это и должно быть. На первый взгляд может показаться, что в системе (3.63b) уравнений существенно больше. Однако это не так: нетривиальны здесь тоже 4 уравнения, которые получаются при $\mu \neq \nu \neq \lambda$. Все остальные соотношения удовлетворяются тожде-

ственно просто в силу антисимметрии тензора F . Например, при $\nu = \mu$ имеем (суммирования по μ нет):

$$\frac{\partial F_{\mu\mu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (F_{\mu\lambda} + F_{\lambda\mu}).$$

Но это выражение равно нулю для произвольного антисимметричного тензора, а не только для тензора F , являющегося 4-роторм 4-потенциала.

Проверим теперь, что уравнения (3.63) действительно совпадают с обычными уравнениями Максвелла. При $\mu = 4$ из (3.63а) получаем :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} &= \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \frac{i}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \equiv \\ &= \frac{i}{c} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j_4 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} (ic\rho) = \frac{i\rho}{\varepsilon_0 c}, \end{aligned}$$

т.е. первое уравнение Максвелла :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

При $\mu = 1$ из (3.63а) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} &= \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial(-\frac{i}{c} E_x)}{\partial(ict)} \equiv \\ &\equiv (\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})_x = \mu_0 j_1 = \mu_0 j_x \end{aligned}$$

Совершенно аналогичные результаты получаются при $\mu = 2$ и $\mu = 3$, и в итоге мы приходим к векторному уравнению Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{или} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Обратимся теперь к системе (3.63б), для которой, согласно сказанному выше, достаточно рассмотреть случаи $\mu \neq \nu \neq \lambda$. При $\mu = 1, \nu = 2, \lambda = 3$ имеем

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \equiv \text{div} \vec{B} = 0$$

При $\mu = 1, \nu = 2, \lambda = 4$ получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} &= \frac{\partial B_z}{\partial(ict)} + \frac{\partial(-\frac{i}{c}E_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{i}{c}E_x)}{\partial y} = \\ &= -\frac{i}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{i}{c} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \equiv -\frac{i}{c} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} \right)_z = 0. \end{aligned}$$

Совершенно аналогичные результаты возникают при $\mu = 1, \nu = 3, \lambda = 4$ и $\mu = 2, \nu = 3, \lambda = 4$, и мы приходим к векторному уравнению Максвелла:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

3.6 Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Сформулируем теперь в ковариантном виде уравнение движения релятивистской частицы в заданном электромагнитном поле:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left\{ \vec{E}(\vec{r}|t) + \left[\dot{\vec{r}}, \vec{B}(\vec{r}|t) \right] \right\} \quad (\text{см. выше}).$$

Основным уравнением релятивистской динамики является уравнение Минковского

$$\frac{d\wp}{dt_0} = \mathcal{F} \quad , \quad (3.64)$$

где \wp - 4-импульс, dt_0 - элемент собственного времени, а \mathcal{F} - сила Минковского, вид которой нам и предстоит установить.

Как и сила Лоренца, она должна выражаться через 3-мерные векторы $\vec{V}, \vec{E}, \vec{B}$. Обычная скорость \vec{V} входит в 4-скорость U , определяемую соотношением

$$U = \frac{dX}{dt_0} = \left(\frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right),$$

а 3-мерные векторы \vec{E} и \vec{B} комбинируются в 4-тензор электромагнитного поля F (см. выше). Именно из этих величин и должна строиться сила Минковского \mathcal{F} , являющаяся 4-вектором. Но из 4-вектора U и 4-тензора F можно образовать единственный (с точностью до множителя) линейный по ним 4-вектор \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \alpha F_{\mu\nu} U_\nu$$

При этом сопоставление \mathcal{F} с обычной силой Лоренца \vec{F} подсказывает нам, что $\alpha = q$. В итоге приходим к гипотезе, что уравнение Минковского, описывающее движение заряженной релятивистской частицы в заданном электромагнитном поле, имеет вид:

$$\frac{d\wp_\mu}{dt_0} = q F_{\mu\nu} U_\nu. \quad (3.65)$$

Распишем его по компонентам:

$$\begin{aligned} \frac{d\wp_1}{dt_0} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{dp_x}{dt} = q(F_{11}U_1 + F_{12}U_2 + F_{13}U_3 + F_{14}U_4) = \\ &= q \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left\{ B_z V_y - B_y V_z + \left(\frac{-i}{c} E_x \right) ic \right\} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} q \{ [\vec{V}\vec{B}] + \vec{E} \}_x. \end{aligned}$$

Совершенно аналогичные результаты получаются при $\mu = 2$ и $\mu = 3$, и в итоге мы приходим к уравнению

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \{ \vec{E} + [\vec{V}\vec{B}] \}.$$

При $\mu = 4$ из уравнения (3.65) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_4}{dt_0} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \frac{d(i\frac{\varepsilon}{c})}{dt} = \frac{i}{c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \frac{d\varepsilon}{dt} = q(F_{41}U_1 + F_{42}U_2 + F_{43}U_3 + F_{44}U_4) = \\ &= q \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left\{ \frac{i}{c} E_x V_z + \frac{i}{c} E_y V_y + \frac{i}{c} E_z V_z \right\} = \frac{i}{c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} q(\vec{V}\vec{E}), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = q(\vec{V}\vec{E}).$$

Т.о., релятивистски ковариантное уравнение (3.65) включает как уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле, так и закон изменения её механической энергии.

4 Электростатическое поле в вакууме

4.1 Уравнения электростатики в вакууме

Рассмотрим наиболее простой случай: электромагнитное поле создается системой неподвижных заряженных частиц. При этом все производные по t обращаются в ноль, и электрические токи отсутствуют: $j = 0$.

В этом случае система уравнений Максвелла распадается на две независимых пары уравнений, отдельно для электрического и магнитного полей:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Из второй пары уравнений (4.1) без ограничения общности следует $\vec{B} \equiv 0$, т.е. магнитное поле в нашем случае можно вообще не рассматривать. Электрическое же поле \vec{E} в этом случае называется *электростатическим* и как видно из (4.1), для него

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (4.2)$$

Первое из них говорит о том, что у электростатического поля есть

источники – электрические заряды; второе – о том, что всякое электростатическое поле *потенциально*. Запишем уравнения (4.2) в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_v}{\varepsilon_0}; \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (4.3)$$

Дифференциальные уравнения (4.2) имеют, вообще говоря, бесконечно много решений. Чтобы выделить среди них единственное, для поля \vec{E} при заданном распределении зарядов, необходимо дополнить уравнения (4.2) граничными условиями.

Если $\rho = \rho(\vec{r})$ - непрерывная функция координат, то в вакууме имеется только одна выделенная поверхность – бесконечно удаленная. В этом случае задают естественное условие, фиксирующее поведение поля \vec{E} на бесконечности:

$$\left| \vec{E}(\vec{r}) \right| < \frac{A}{r^2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (4.4)$$

где A – некоторая положительная постоянная. Условие (4.4) означает, что поле \vec{E} на бесконечности должно убывать не медленнее кулоновского поля.

Дополнительные граничные условия следует задавать на тех поверхностях, на которых функция $\rho(\vec{r})$ испытывает скачок (например, на поверхности равномерно заряженного шара) или обращается в ∞ (например, на равномерно заряженной сфере). Эти граничные условия получаются из уравнений Максвелла в интегральной форме (4.3).

Рассмотрим поверхность S с заданной плотностью заряда σ на ней и построим небольшой цилиндр, пересекающий S (рисунок 6) :

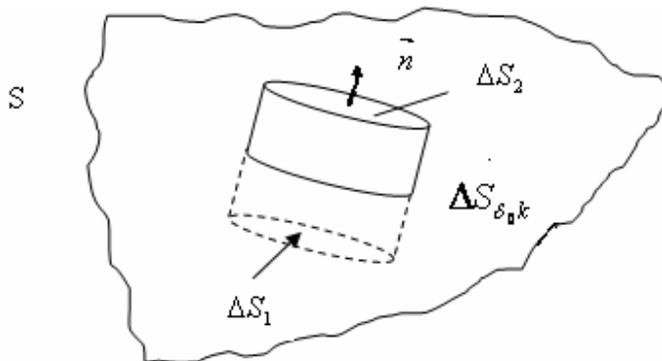


Рисунок 6

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = - \int_{\Delta S_1} E_n dS + \int_{\Delta S_2} E_n dS + \int_{\Delta S_{\text{бок}}} E_n dS = \frac{q_{\Delta V}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma dS;$$

учитывая, что $\Delta S_{\text{бок}} \rightarrow 0$, получаем:

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} . \quad (4.5)$$

Следовательно, при наличии поверхностных зарядов нормальная составляющая электростатического поля \vec{E} терпит разрыв $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Для получения граничного условия, налагаемого на тангенциальную составляющую \vec{E} , построим небольшой прямоугольник, плоскость которого пересекает выделенную поверхность S (рисунок 7):

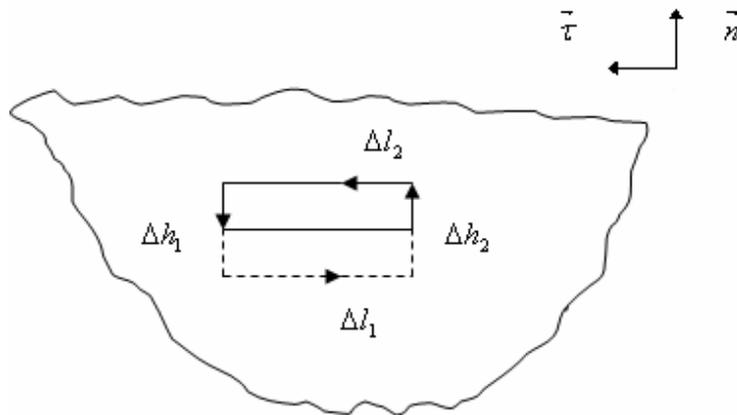


Рисунок 7

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_{\Delta l_2} E_\tau dl - \int_{\Delta h_1} E_n dl - \int_{\Delta l_1} E_\tau dl + \int_{\Delta h_2} E_n dl = 0$$

согласно второй из формул (4.3).

Учитывая малость прямоугольника, получаем ($\Delta h_1 \rightarrow 0$ и $\Delta h_2 \rightarrow 0$):

$$E_{\tau_2} = E_{\tau_1} . \quad (4.6)$$

Тангенциальная составляющая электростатического поля всегда непрерывна.

До сих пор в качестве переменной состояния электростатического поля выступал вектор \vec{E} . Однако мы знаем, что возможен и другой способ описания поля, более «экономный» - с помощью потенциала.

В нашем случае перейти к нему позволяет второе уравнение (4.2): $\text{rot}\vec{E} = 0$. Из него следует, что существует такое скалярное поле $\varphi(\vec{r})$, что

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (4.7)$$

Функция φ называется *электростатическим потенциалом*. Потенциал φ определяется равенством (4.7) неоднозначно: к нему, например, можно добавить любую постоянную C , т.е. калибровочное преобразование в электростатическом случае сводится к замене

$$\varphi \rightarrow \varphi_1 = \varphi + C. \quad (4.8)$$

Часто (хотя и не всегда) постоянную C можно выбрать так, что

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Уравнение для нахождения потенциала получается подстановкой уравнения (4.7) в первое из уравнений (4.2); это дает:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (4.10)$$

Можно показать, что общее решение уравнения Пуассона (4.10) имеет вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \text{ или } \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

Таким образом, электростатический потенциал подчиняется уравнению Пуассона, а в тех областях пространства, где нет электрических зарядов ($\rho=0$), - уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (4.11)$$

Граничные условия для потенциала φ вытекают из граничных условий для электростатического поля \vec{E} . Для получения их заметим, что из формулы (4.7) следуют выражения:

$$E_\tau = -\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}; E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}. \quad (4.12)$$

Тогда из уравнения (4.6) следует непрерывность тангенциальной производной потенциала, эквивалентная непрерывности самого потенциала:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (4.13)$$

Условие же (4.5) превращается в равенство:

$$\frac{d\varphi_1}{dn} - \frac{d\varphi_2}{dn} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (4.14)$$

4.2 Электростатический потенциал

Обсудим подробнее основные свойства электростатического потенциала φ , определяемого соотношением:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \quad (4.15)$$

и выступающего в качестве одной из возможных переменных состояния электростатического поля.

Заметим прежде всего, что из принципа суперпозиции для поля \vec{E} следует принцип суперпозиции для потенциала: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, если $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Если задан потенциал φ , то по формуле (4.15) можно найти поле \vec{E} . Наоборот, по заданному полю \vec{E} можно определить практически однозначно (с точностью до аддитивной постоянной) потенциал φ .

Сила, действующая на частицу с зарядом q со стороны электростатического поля, равна

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \cdot (-\text{grad}\varphi) = -\text{grad}(q\varphi). \quad (4.16)$$

Отсюда видно, что эта сила является потенциальной: существует такая скалярная функция $U = U(\vec{r})$, что

$$\vec{F} = -\text{grad}U \quad (4.17)$$

Из сравнения (4.17) с (4.16) следует, что потенциальная энергия U частицы в электростатическом поле равна

$$U = q\varphi \quad (4.18)$$

Таким образом, потенциал есть потенциальная энергия частицы с единичным зарядом, находящейся в электростатическом поле:

$$\varphi = \frac{U}{q} \quad (4.19)$$

Для работы A_{12} , совершаемой электростатическими силами при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 поля, имеем:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = - \int_1^2 \text{grad}U \cdot d\vec{l} = - \left[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) \right] = U_1 - U_2,$$

или, с учетом формулы (4.18),

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.20)$$

Получен общеизвестный результат: работа A_{12} не зависит от формы пути, а определяется лишь начальной и конечной точками. Она выражается через разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, или напряжение,

$$V_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (4.21)$$

в этих точках. Если частица перемещается по замкнутому контуру, то соответствующая работа равно нулю.

Соотношение (4.20) позволяет выразить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ через поле \vec{E} :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} = \frac{1}{q} \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \frac{1}{q} \int_1^2 q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

т.е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d \vec{l} . \quad (4.22)$$

Будем считать, что $\vec{r}_1 = r$ — произвольная точка поля, а $\vec{r}_2 = r_0$ — некоторая фиксированная точка, и, пользуясь произволом в определении потенциала, положим $\varphi(\vec{r}_0) = 0$. Тогда из (4.22) получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} d \vec{l} . \quad (4.23)$$

Из уравнения (4.23) следует, что естественное условие $\varphi(\vec{r}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, обычно накладываемое на потенциал, равнозначно тому, что в качестве \vec{r}_0 выбирается бесконечно удаленная точка, и в этом случае уравнение (4.23) превращается в

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} d \vec{l} . \quad (4.24)$$

При таком соглашении мы приходим к еще одной трактовке понятия потенциала: он равен работе электростатических сил по перемещению единичного заряда из данной точки поля в бесконечность. Однако подобная трактовка не является универсальной. Рассмотрим в качестве примера однородное электростатическое поле $\vec{E} = const$. Из (4.22) для разности потенциалов имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d \vec{l} = \vec{E} \int_1^2 d \vec{l} = \vec{E} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

т.е.

$$V_{12} \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = \vec{E} r_2 - \vec{E} r_1 . \quad (4.25)$$

Если ось Z направить по полю \vec{E} , то $\vec{E} r = Ez$ и

$$V_{12} \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = E(z_2 - z_1) \equiv E \cdot d \quad (4.26)$$

В итоге приходим к известной формуле для напряжения однородного поля:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = -\vec{E} \cdot \vec{r} + C = -Ez + C$$

Аддитивную постоянную здесь уже не удастся определить из естественного условия, ибо при любом C модуль потенциала безгранично возрастает при $r \rightarrow \infty$. Эта постоянная может быть фиксирована дополнительным требованием, чтобы в какой то точке (например, при $z = 0$) потенциал обращался в ноль.

Итак, мы установили, что существуют два способа описания состояния электростатического поля – посредством векторной функции $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\right)$ и посредством скалярной функции $\varphi = \varphi\left(\vec{r}\right)$. При этом оба способа описания полностью эквивалентны: от одного из них можно перейти к другому, и наоборот.

С физической точки зрения в качестве первичного следует рассматривать задание состояний электростатического поля с помощью вектора напряженности \vec{E} , являющегося силовой характеристикой поля. Однако и понятие потенциала чрезвычайно полезно как в практическом плане, так и методологически.

- (а) Экспериментально потенциал φ измеряется гораздо проще, чем напряженность поля \vec{E} .
- (б) Теоретически из основных уравнений электростатики скалярная функция $\varphi = \varphi\left(\vec{r}\right)$ находится обычно много проще, чем векторная функция $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\right)$.
- (в) Потенциал является энергетической характеристикой электростатического поля, а понятие энергии в современной физике неизмеримо более фундаментально, чем понятие силы. Например, в микромире последнее вообще утрачивает смысл.

4.3 Теорема Ирншоу

Пусть имеется система заряженных частиц, и пусть между ними действуют только электростатические силы. Поставим вопрос, может ли такая система находиться в равновесии. Ответ на этот вопрос в общем случае – утвердительный, и условие равновесия очевидно. Выделим произвольную частицу системы, расположенную в точке A и имеющую заряд q_A . При равновесии сила

\vec{F}_A , действующая на нее со стороны всех прочих частиц системы, должна быть равна нулю. Поскольку

$$\vec{F}_A = q_A \vec{E},$$

то это означает, что в точке A должно обращаться в ноль поле \vec{E} , создаваемое этими частицами. Подчеркнем, что сама выделенная частица вклада в поле \vec{E} не вносит. Пример подобной системы: расположенные на одной прямой (надлежащим образом) положительный заряд и два одинаковых отрицательных заряда.

Возникает еще один вопрос: будет ли такое равновесие устойчивым? Ответ на него дает теорема Ирншоу:

Одни только электростатические силы не могут обеспечить устойчивое равновесие системы заряженных частиц. Это утверждение можно доказать несколькими способами, эквивалентными друг другу.

1.

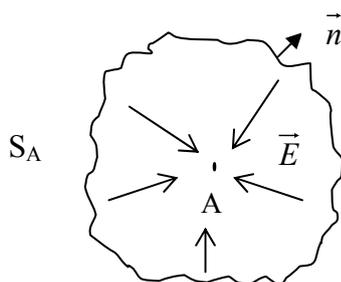


Рисунок 8

Пусть $q_A > 0$. При небольших смещениях частиц q_A из точки A должны возникать возвращающие силы, действующие со стороны всех остальных частиц системы. Поэтому поле \vec{E} вблизи точки A , создаваемое этими частицами, должно быть направлено к A (см. рисунок 8). Значит, поток поля \vec{E} через малую поверхность S_A , внутри которой находится только q_A , будет строго отрицательным. С другой стороны, по теореме Гаусса этот поток должен быть равен нулю, так как все заряды, создающие поле \vec{E} , расположены вне поверхности S_A . Полученное противоречие и доказывает теорему Ирншоу.

2. Если система находится в устойчивом равновесии, то потенциальная энергия любой выделенной частицы в поле остальных должна быть минимальной. Поскольку $U_A = q_A \cdot \varphi$, причем мы считаем $q_A > 0$, то это означает, что потенциал φ указанного поля должен в точке A достигать минимума. Но тогда он

будет возрастать по всем направлениям, и точку A можно окружить такой малой поверхностью S_A , на которой везде $\frac{d\varphi}{dn} > 0$, и потому

$$\oint_{S_A} \frac{d\varphi}{dn} dS > 0. \quad (4.27)$$

С другой стороны, применяя теорему Гаусса, получим

$$\oint_{S_A} \frac{d\varphi}{dn} dS = \oint_{S_A} \left(\text{grad} \varphi, d\vec{S} \right) = \int_{V_A} \text{div}(\text{grad} \varphi) dV = \int_{V_A} \nabla^2 \varphi dV. \quad (4.28)$$

Так как φ - это потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме q_A , то в окрестности V_A точки A он удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Поэтому, в противоречии с (4.27), интеграл в (4.28) равен нулю, чем и доказывается теорема Ирншоу

3. Исходим из того, что если система находится в устойчивом равновесии, то потенциал φ поля, создаваемого всеми зарядами, кроме q_A , должен иметь минимум в точке A . Для этого необходимо, чтобы все его первые производные в этой точке обращались в ноль, а вторые производные $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

были строго положительны. Но последнее условие не может выполняться, ибо $\nabla^2 \varphi = 0$, а потому сумма указанных производных тоже равна нулю. Таким образом, устойчивое равновесие системы невозможно, что и утверждает теорема Ирншоу.

4.4 Электростатическое поле в дипольном приближении

Простейшей системой в электростатике является одна покоящаяся заряженная частица. Рассмотрим следующую по сложности систему – электрический диполь, состоящий из двух частиц с зарядами q и $(-q)$, разделенных расстоянием l (рисунок 9).

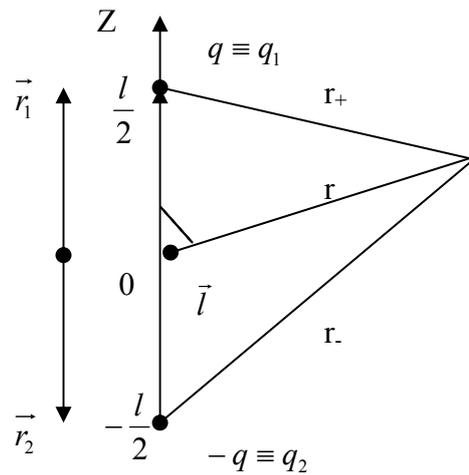


Рисунок 9

С помощью принципа суперпозиции можно записать потенциал поля диполя (всюду $k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$):

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = k \frac{q}{r_+} - k \frac{q}{r_-} = \frac{kq}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{l}{2} r \cos 0}} - \frac{kq}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{l}{2} r \cos 0}} \quad (4.29)$$

Видим, что уже в случае простой системы из двух зарядов выражение для потенциала оказывается довольно сложным.

Допустим, однако, что нас интересует поле на расстояниях r , больших по сравнению с размерами диполя l . Тогда в задаче возникает малый параметр $\epsilon = \frac{l}{r}$ и функцию (4.29) можно разложить в ряд Тейлора, сохранив лишь первые не исчезающие члены. Сразу пренебрегая квадратичными по l слагаемыми и учитывая приближенное равенство ($\epsilon \ll 1$)

$$(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon, \quad (4.30)$$

получим из (4.29), где $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\varphi &\approx \frac{kq}{\sqrt{r^2 - lr \cos \vartheta}} - \frac{kq}{\sqrt{r^2 + lr \cos \vartheta}} = k \frac{q}{r} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos \vartheta}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos \vartheta}} \right\} \approx \\ &\approx k \frac{q}{r} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} \frac{l}{r} \cos \vartheta \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{l}{r} \cos \vartheta \right) \right\} = k \frac{q}{r} \cdot \frac{l}{r} \cos \vartheta \equiv \frac{kqlr \cos \vartheta}{r^3}.\end{aligned}$$

Вводя вектор

$$\vec{d} = q \vec{l}, \quad (4.31)$$

придем к простой (хотя и приближенной) формуле:

$$\varphi \left(\vec{r} \right) = \frac{k \vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (4.32)$$

тем более точной, чем лучше выполняется неравенство $r \gg l$.

Вектор (4.31) можно записать иначе (см. рис. 9):

$$\vec{d} = q \vec{l} = q \frac{\vec{l}}{2} + (-q) \left(-\frac{\vec{l}}{2} \right) \equiv q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2,$$

или

$$\vec{d} = \sum_{a=1}^2 q_a \vec{r}_a. \quad (4.33)$$

Покажем, что формула (4.32) с вектором \vec{d} вида (4.33) справедлива не только для простого диполя, но и в достаточно общей ситуации.

Пусть задано произвольное распределение зарядов, которые занимают ограниченную область пространства с диаметром l , и пусть требуется найти поле вдали от этих зарядов, т.е. при $r \gg l$ (начало координат считаем находящимся где – то внутри занимаемой ими области). Разумеется, данная задача допускает точное решение; потенциал искомого поля имеет вид (в случае непрерывного либо дискретного распределения зарядов):

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = k \int \frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} dV' = \sum_a k \frac{q_a}{\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|}. \quad (4.34)$$

Но даже совсем простой пример диполя, рассмотренный выше, показывает, что на практике точные выражения для потенциала приносят не так уж много пользы. Гораздо целесообразнее оказывается приближенный анализ, основывающийся на разложении потенциала в ряд Тейлора

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \varphi_0\left(\vec{r}\right) + \varphi_1\left(\vec{r}\right) + \varphi_2\left(\vec{r}\right) + \dots \quad (4.35)$$

по естественному малому параметру

$$\varepsilon = \frac{\left|\vec{r}'\right|}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{\left|\vec{r}_a\right|}{\left|\vec{r}\right|} \sim \frac{l}{r} \quad (4.36)$$

(«мультипольное разложение потенциала»)

Мы здесь ограничимся рассмотрением лишь нулевого и первого членов разложения (4.35).

Для любой скалярной функции f , разложимой в ряд Тейлора,

$$f\left(\vec{r}-\vec{\rho}\right) \equiv f(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = f(x, y, z) - \frac{df(x, y, z)}{dx} \cdot \xi - \frac{df(x, y, z)}{dy} \cdot \eta - \frac{df(x, y, z)}{dz} \cdot \zeta + \dots$$

или

$$f\left(\vec{r}-\vec{\rho}\right) \cong f\left(\vec{r}\right) - \vec{\rho} \cdot \vec{\nabla} f\left(\vec{r}\right). \quad (4.37)$$

Полагая

$$f = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|},$$

из (4.34) получим:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\vec{r}\right) &\cong \varphi_0\left(\vec{r}\right) + \varphi_1\left(\vec{r}\right) = k \int \frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{r} dV' - k \int \rho\left(\vec{r}'\right) \cdot \left(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}\right) dV' = \\
&= k \sum_a \frac{q_a}{r} - k \sum_a q_a \cdot \left(\vec{r}_a \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}\right)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Нулевой член разложения

$$\varphi_0\left(\vec{r}\right) = k \frac{1}{r} \int \rho\left(\vec{r}'\right) dV' = k \frac{1}{r} \sum_a q_a \equiv k \frac{Q}{r} \tag{4.39}$$

отвечает потенциалу поля, создаваемого точечной частицей, которая расположена в начале координат и несет весь заряд рассматриваемой системы

$$Q = \int \rho\left(\vec{r}'\right) dV' = \sum_a q_a \quad . \tag{4.40}$$

Если этот заряд не равен нулю, то данным членом вполне можно и ограничиться, так, как все прочие члены разложения будут играть всего лишь роль малых поправок к φ_0 . Однако если система в целом электронейтральна ($Q = 0$), то $\varphi_0 = 0$, и главным становится первый член разложения φ_1 (если он сам не равен нулю). Из (4.38) следует, что в этом случае

$$\varphi\left(\vec{r}\right) \approx \varphi_1\left(\vec{r}\right) = - \left(k \int \vec{r}' \rho\left(\vec{r}'\right) dV' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = - \left(k \sum_a q_a \vec{r}_a \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right),$$

т.е.

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = k \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3}, \tag{4.41}$$

где

$$\vec{d} = \int \vec{r}' \rho\left(\vec{r}'\right) dV' = \sum_a q_a \vec{r}_a \tag{4.42}$$

(сравните с формулами (4.32) и (4.33)).

Вектор \vec{d} называется (электрическим) *дипольным моментом* системы. Обозначив через q_b^+ , q_c^- модули положительных и отрицательных зарядов, а через \vec{r}_b^+ и \vec{r}_c^- их радиусы векторы, запишем

$$\vec{d} = \sum_a q_a \vec{r}_a = \sum_b q_b^+ \vec{r}_b^+ - \sum_c q_c^- \vec{r}_c^- = \left(\sum_b q_b^+ \right) \vec{R}^+ - \left(\sum_c q_c^- \right) \vec{R}^-,$$

где

$$\vec{R}^\pm = \frac{\sum q^\pm \vec{r}^\pm}{\sum q^\pm}$$

суть радиусы векторы «центров» положительных и отрицательных зарядов (сравните с определением центра масс). Если система в целом электрически нейтральна, то (см. рисунок 10)

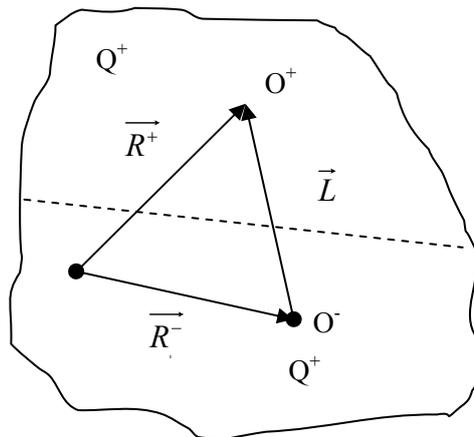


Рисунок 10

$$\sum_b q_b^+ \equiv Q^+ = \sum_c q_c^- \equiv Q^- \equiv Q,$$

и

$$\vec{d} = Q \left(\vec{R}^+ - \vec{R}^- \right) \equiv Q \vec{L}.$$

В итоге приходим к формуле вида (4.31) и к картинке, подобной той, что была в начале параграфа.

Сдвинем начало координат O на произвольный вектор \vec{h} (рисунок 11). При этом дипольный момент системы, определяемый формулой (4.42), вообще говоря, изменится:

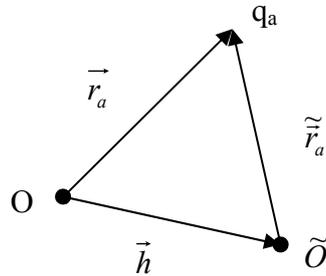


Рисунок 11

$$\vec{\tilde{d}} \equiv \sum_a q_a \vec{r}_a = \sum_a q_a \left(\vec{r}_a - \vec{h} \right) = \sum_a q_a \vec{r}_a - \vec{h} \sum_a q_a,$$

т.е.

$$\vec{\tilde{d}} = \vec{d} - Q \cdot \vec{h}, \quad (4.43)$$

где Q – полный заряд системы. Но если система частиц в целом электрически нейтральна, т.е. $Q = 0$, то вектор дипольного момента \vec{d} не будет зависеть от выбора начала координат:

$$\vec{\tilde{d}} = \vec{d}. \quad (4.44)$$

Не менее важно и другое свойство: *если распределение заряда обладает центром симметрии, то дипольный момент этой системы равен нулю*. Доказательство проведем, считая распределение заряда непрерывным и помещая начало координат в центр симметрии:

$$\vec{d} \equiv \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV = \int \left(-\vec{r} \right) \rho(-\vec{r}) dV = -\int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV = -\vec{d},$$

откуда

$$\vec{d} = 0.$$

(Здесь на первом этапе просто сделана замена переменной интегрирования $\vec{r} \rightarrow (-\vec{r})$, а на втором этапе учтено, что в силу предполагаемой симметрии задачи $\rho(-\vec{r}) = \rho(\vec{r})$).

Последнее свойство играет фундаментальную роль в физике атомов, атомных ядер и элементарных частиц. Так, из зеркальной симметрии пространства (точнее, электромагнитного взаимодействия) следует, что распределения электрического заряда в атомах и атомных ядрах должны обладать центрами симметрии, а потому у них не может быть дипольного момента. Более того, из микроскопической обратимости времени вытекает, что дипольного момента не может быть и у элементарных частиц. В частности, это справедливо и для нейтрона. Дипольный момент нейтрона записывают в виде $d_n = el_n$ (e – элементарный заряд), причем экспериментальные данные говорят о том, что его «плечо» $l_n < 10^{-26}$ м, тогда как размеры нейтрона $\sim 10^{-15}$ м.

Эта проблема очень важна для фундаментальной физики и измерения дипольного момента нейтрона продолжают с возрастающей точностью.

Вернемся к выражению (4.41) для потенциала поля диполя и перепишем его в виде

$$\varphi\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = k \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{r^2} = k \frac{d}{r^2} \cos \vartheta, \quad (4.45)$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор в направлении на точку наблюдения. Мы видим, что с ростом расстояния потенциал поля диполя убывает как $1/r^2$, т.е. быстрее потенциала точечного заряда, убывающего как $1/r$. Кроме того, он обладает резко выраженной анизотропией. Модуль потенциала максимален в точках прямой, на которой лежит вектор \vec{d} , где $|\varphi| = \frac{d}{r^2}$. А во всех точках оси симметрии диполя, перпендикулярной вектору \vec{d} , $\varphi = 0$. Таким образом, «диаграмма направленности» потенциала поля диполя имеет вид (рисунок 12)

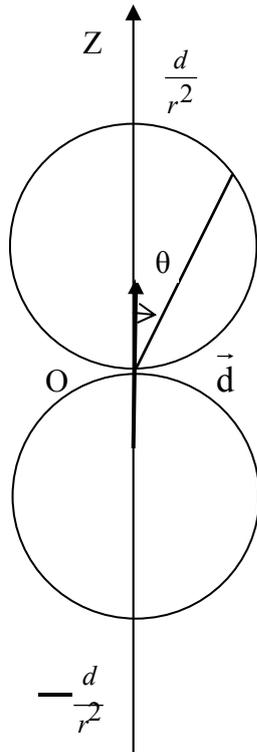


Рисунок 12

Найдем теперь напряжённость \vec{E} поля диполя. Используя формулы векторного анализа,

$$\text{grad}\left(\vec{c} \vec{a}\right) = \left(\vec{c} \vec{\nabla}\right) \vec{a} + \left[\vec{c} \text{rot} \vec{a}\right] \quad \left(\vec{c} = \text{const}\right)$$

и

$$\left(\vec{c} \vec{\nabla}\right) \vec{r} = \vec{c}, \quad \text{grad}\varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

а также учитывая, что ротор центрального поля равен нулю, будем иметь:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad}\varphi = -k \text{grad}\left(\vec{d} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -k \left(\vec{d} \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{r}}{r^3} - k \left[\vec{d} \cdot \text{rot} \frac{\vec{r}}{r^3}\right] = -k \left(\vec{d} \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{r}}{r^3} = \\ &= -\frac{k}{r^3} \left(\vec{d} \vec{\nabla}\right) \vec{r} - k r \left(\vec{d} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}\right) = -\frac{k}{r^3} \vec{d} - k r \left(\vec{d}, -\frac{3}{r^4} \frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{k \vec{d}}{r^3} + \frac{3k r \left(\vec{d} \vec{r}\right)}{r^5}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{3 \vec{r} \cdot (\vec{d}, \vec{r}) - r^2 \vec{d}}{r^5} = k \frac{3 n (\vec{d}, \vec{n}) - \vec{d}}{r^3}. \quad (4.46)$$

На больших расстояниях $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^3}$ (в случае точечного заряда $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$), причем поле \vec{E} диполя также обладает анизотропией. Из (4.46) для поля \vec{E}_{11} в точках оси диполя и для поля \vec{E}_{\perp} в точках его перпендикулярной оси симметрии ($\theta = \frac{\pi}{2}$) получаем:

$$\vec{E}_{11} = \frac{2 \vec{d}}{r^3}, \quad \vec{E}_{\perp} = -\frac{\vec{d}}{r^3}, \quad (4.47)$$

откуда

$$\frac{|\vec{E}_{11}|}{|\vec{E}_{\perp}|} = 2. \quad (4.48)$$

4.5 Энергия электростатического поля

Общая формула плотности энергии электромагнитного поля имеет вид:

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right);$$

В электростатике $B = 0$; поэтому плотность энергии электростатического поля

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (4.49)$$

Для нахождения полной энергии проинтегрируем (4.49) по всему пространству:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3} E^2 dV \quad (4.50)$$

- запись с точки зрения «теории близкодействия»: энергия системы делокализована, т.е. принадлежит электростатическому полю.

Преобразуем (4.50) с учетом того, что $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3} E^2 dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \varphi dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3} \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3} \varphi \operatorname{div} \vec{E} dV = \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{S_\infty} \varphi \vec{E} d\vec{S} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3} \varphi \operatorname{div} \vec{E} dV, \end{aligned}$$

причем первое слагаемое стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Здесь использовано соотношение

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{E}) = \vec{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \vec{E}; \Rightarrow \vec{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) - \varphi \operatorname{div} \vec{E}.$$

При $r \rightarrow \infty$ потенциал φ убывает не медленнее, чем $1/r$, а $|\vec{E}|$ - не медленнее, чем $1/r^2$; в то же время площадь поверхности S_∞ растет как r^2 ; поэтому первое слагаемое и стремится к нулю.

Получим:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3} \varphi \cdot \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=\rho/\varepsilon_0} dV = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV; \quad (4.51)$$

для дискретных зарядов:

$$U = \frac{1}{2} \sum_a q_a \varphi(\vec{r}_a) \quad (4.52)$$

Это – «промежуточная» точка зрения: энергия системы определяется взаимодействием заряженных частиц с порождаемым ими электростатическим полем.

Подставим в (4.51) и (4.52) выражения для потенциала φ :

$$\varphi = k \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad - \text{ для формулы (4.51),}$$

$$\varphi = k \sum_b \frac{q_b}{\left| \begin{matrix} \vec{r} & \vec{r}' \\ r_a & r_b \end{matrix} \right|} \quad - \text{ для формулы (4.52);}$$

получим:

$$U = \frac{k}{2} \iint \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{\left| \begin{matrix} \vec{r} & \vec{r}' \\ r & r' \end{matrix} \right|} dV dV' \quad , \quad (4.53)$$

либо

$$U = \frac{k}{2} \sum_a \sum_b \frac{q_a q_b}{\left| \begin{matrix} \vec{r} & \vec{r}' \\ r_a & r_b \end{matrix} \right|} \quad . \quad (4.54.)$$

Эти формулы отвечают точке зрения «теории дальнего действия»: энергия системы определяется непосредственными попарными взаимодействиями ее частиц.

4.6 Заряженные частицы во внешнем электростатическом поле

Рассмотрим систему заряженных частиц, находящуюся в заданном электростатическом поле $\vec{E}(\vec{r})$. Эта система считается жесткой, так что взаимодействие между отдельными ее частицами фиксировано, и оно не учитывается. Нас будет интересовать потенциальная энергия данной системы во внешнем поле, а также полная сила и полный момент сил, действующие на нее со стороны этого поля.

Для полной потенциальной энергии будем иметь

$$U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_a U_a(\vec{r}_a) = \sum_a q_a \varphi(\vec{r}_a). \quad (4.55)$$

(Обратим внимание на отсутствие здесь множителя $1/2$). Полная сила, действующая на систему частиц, есть

$$\vec{F} = \sum_a \vec{F}_a = \sum_a q_a \vec{E}(\vec{r}_a), \quad (4.56)$$

полный момент сил равен

$$\vec{M} = \sum_a \vec{M}_a = \sum_a \left[\vec{r}_a \cdot \vec{F}_a \right] = \sum_a q_a \left[\vec{r}_a \cdot \vec{E} \left(\vec{r}_a \right) \right], \quad (4.57)$$

Однако, как уже неоднократно подчеркивалось, точные формулы на практике не столь уж полезны. Целесообразнее пользоваться приближенными выражениями, которые получаются из точных уравнений путем разложения в ряд Тейлора по какому – то малому параметру.

В рассматриваемой задаче такой параметр возникает, когда внешнее поле $\vec{E} \left(\vec{r} \right)$ можно считать квазиоднородным, т.е. когда размеры l системы частиц

много меньше характерного расстояния L , на котором поле меняется сколько – нибудь существенно. Иными словами, в пределах системы частиц квазиоднородное поле $\vec{E} \left(\vec{r} \right)$ является почти однородным, а эффекты его неоднородности

учитывают низшие члены разложения в ряд Тейлора по параметру $\frac{l}{L} \ll 1$. При фактическом проведении этой процедуры начало координат помещается где – то внутри системы частиц и значения $f \left(\vec{r}_a \right)$ полевых величин f разлагаются по

радиусам - векторам частиц \vec{r}_a .

Начнем анализ с выражения (4.55) для полной потенциальной энергии. Пользуясь соотношением (4.37),

$$f \left(\vec{r} - \vec{\rho} \right) \cong \left(\vec{r} \right) - \left(\vec{\rho}, \vec{\nabla} f \left(\vec{r} \right) \right), \quad (4.58)$$

разложим $\varphi \left(\vec{r}_a \right)$ в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка малости ($\vec{r} = 0$; $\vec{\rho} = \vec{r}_a$):

$$\varphi \left(\vec{r}_a \right) \cong \varphi(0) + \left(\vec{r}_a, \text{grad} \varphi \left(\vec{r} \right)_{\vec{r}=0} \right) \quad (4.59)$$

и подставим в (4.55):

$$U \approx U_0 + U_1 = \left\{ \sum_a q_a \right\} \varphi(0) + \left(\left\{ \sum_a q_a \vec{r}_a \right\}, \text{grad} \varphi \left(\vec{r} \right)_{\vec{r}=0} \right). \quad (4.60)$$

В нулевом приближении

$$U \approx U_0 = Q \cdot \varphi(0), \quad Q = \sum_a q_a \quad (4.61)$$

и полная энергия совпадает с энергией одной частицы, которая расположена в начале координат и несет весь заряд Q рассматриваемой системы. Первая поправка U_1 к потенциальной энергии, являющаяся главным членом в случае, когда система в целом электронейтральна ($Q = 0$), имеет вид

$$U_1 = -\left(\vec{d}, \vec{E}(0)\right), \quad \vec{d} = \sum_a q_a \vec{r}_a. \quad (4.62)$$

Мы видим, что при $Q = 0$ потенциальная энергия системы заряженных частиц во внешнем поле определяется ее дипольным моментом \vec{d} .

Чтобы получить приближенное выражение для полной силы (4.56), нужно разложить в ряд Тейлора векторную функцию $\vec{E}\left(\vec{r}_a\right)$. Так как для каждого ее компонента справедливо соотношение (4.58), то с точностью до членов первого порядка малости будем иметь

$$\vec{E}\left(\vec{r}_a\right) \cong \vec{E}(0) + \left(\vec{r}_a, \vec{\nabla}\right) \vec{E}\left(\vec{r}\right)_{\vec{r}=0}. \quad (4.63)$$

Подстановка (4.63) в (4.56) дает

$$\vec{F} \cong \vec{F}_0 + \vec{F}_1 = \left\{ \sum_a q_a \right\} \vec{E}(0) + \left(\left\{ \sum_a q_a \vec{r}_a \right\}, \vec{\nabla} \right) \vec{E}\left(\vec{r}\right)_{\vec{r}=0}. \quad (4.64)$$

В нулевом приближении

$$\vec{F} \approx \vec{F}_0 = Q \vec{E}(0), \quad (4.65)$$

и полная сила определяется суммарным зарядом Q системы частиц и значением поля \vec{E} в начале координат (сравните с (4.61)). Если система в целом электронейтральна ($Q = 0$), то главным в разложении полной силы будет член

$$\vec{F}_1 = \left(\vec{d}, \vec{\nabla} \right) \vec{E}\left(\vec{r}\right)_{\vec{r}=0}. \quad (4.66)$$

Он определяется дипольным моментом системы и пространственной скоростью изменения поля \vec{E} в начале координат. В частности, со стороны однородного поля $\vec{E} = const$ никакой силы на диполь не действует. Этот результат вполне очевиден.

Чтобы получить полный момент сил, действующий на систему заряженных частиц со стороны квазиоднородного поля, достаточно подставить в точное выражение (4.57) нулевой член разложения (4.63):

$$\vec{M} \approx \vec{M}_0 = \left[\left\{ \sum_a q_a \vec{r}_a \right\}, \vec{E}(0) \right],$$

откуда

$$\vec{M} \approx \vec{M}_0 = \left[\vec{d}, \vec{E}(0) \right]. \quad (4.67)$$

В данном приближении момент сил определяется дипольным моментом системы частиц и значением самого поля \vec{E} в начале координат. Для простого диполя и однородного поля этот результат известен; с его помощью объясняется поляризация диэлектриков.

5 Стационарное магнитное поле в вакууме

5.1 Уравнения для стационарного магнитного поля

Следующий по сложности (после электростатики) случай возникает, когда в уравнениях Максвелла можно положить производные по времени равными нулю, не считая, однако, что и электрический ток обращается в ноль. В этом случае вновь получаем две независимые системы уравнений отдельно для электрического и магнитного полей:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \end{cases} \quad (5.1)$$

Описываемое этими уравнениями электромагнитное поле будет называться *стационарным*. Но следует иметь в виду, что при рассмотрении на макроскопическом и микроскопическом уровнях трактовка данного термина оказывается несколько различной.

При макроскопическом подходе он понимается стандартно. А именно, процесс движения заряженных частиц является стационарным, когда $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ для любой из характеризующих его величин f . Так, если заряды распределены по объему, то их плотность ρ и плотность тока \vec{j} должны быть непрерывными функциями координат, не зависящими от t . Не исключается существование и стационарных линейных токов. Ясно, что в подобной ситуации поля \vec{E} и \vec{B} тока не зависят от t $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \right)$, а потому они подчиняются уравнениям (5.1).

На микроскопическом уровне распределение зарядов всегда дискретно, и их движение не может быть стационарным в истинном смысле этого слова. Поэтому интерпретация понятия стационарности при таком подходе будет отличаться от предыдущей.

Пусть заряженные частицы совершают финитное движение. Оно является периодическим или квазипериодическим, вследствие чего целесообразно рассмотреть не сами величины $f\left(\vec{r} \middle| t\right)$, а их средние по времени:

$$\overline{f(\vec{r}|t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\vec{r}|t) dt \equiv f\left(\vec{r}\right), \quad (5.2)$$

которые являются функциями только координат. При этом

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(T) - f(0)}{T} = 0, \quad (5.3)$$

где на последнем этапе учтено, что в силу предполагаемой финитности движения все функции f оказываются ограниченными.

Проводя теперь в уравнениях Максвелла указанную операцию усреднения и учитывая (5.3), мы и придем к уравнениям (5.1). Как говорилось выше, при рассмотрении дискретного распределения зарядов все физические величины f следует усреднять по времени. В дальнейшем будем считать, что в этом случае операция усреднения уже проведена, но знак среднего всюду для краткости опущен. Поэтому, если в ходе каких – то выкладок появятся производные по времени $\frac{df}{dt}$, то, в силу соотношения (5.3), мы их будем просто отбрасывать.

Ниже, в зависимости от характера обсуждаемых проблем, будем рассматривать то объемные токи, то линейные токи, то токи, порождаемые движением точечных частиц. Переходы от одной картины распределения зарядов к другой осуществляются подстановками типа

$$\vec{j} dV \leftrightarrow J d\vec{l} \leftrightarrow q_a \vec{V}_a, \quad (5.4)$$

причем в первом случае подразумевается интегрирование по объему, во втором - интегрирование по замкнутому контуру, в третьем суммирование по заряженным частицам.

Вернемся к уравнениям (5.1). Как мы видим, стационарное электрическое поле \vec{E} подчиняется тем же уравнениям, что и в электростатике. Поэтому основное внимание мы уделим стационарному магнитному полю $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$,

которое называется также постоянным магнитным или магнитостатическим полем. Стационарное магнитное поле удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (5.5)$$

Первое из этих уравнений – универсально; оно свидетельствует о соленоидальности любого магнитного поля, что равнозначно отсутствию в природе магнитных зарядов.

Второе уравнение (5.5) говорит о том, что стационарное магнитное поле порождается только электрическими токами, т.е. движением заряженных частиц. Возьмем дивергенцию от второго уравнения (5.5); получим:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

- уравнение непрерывности для стационарного случая.

Предположим, что заряженные частицы совершают финитное движение, т.е. что вне некоторой ограниченной области пространства $\vec{j} = 0$. Отсюда следует, что

$$\int_{R^3} \vec{j}(\vec{r}) dV = 0 \quad (5.6)$$

в случае стационарных токов. Это соотношение потребуется нам в дальнейшем. Как уже говорилось, из 1-го уравнения (5.5) следует существование векторного потенциала \vec{A} :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (5.7)$$

Подстановка (5.7) во 2-е уравнение (5.5) дает :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \vec{A} = \vec{j}.$$

Используя калибровку Лоренца (в стационарном варианте) $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, приходим к уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (5.8)$$

а в тех областях пространства, где нет электрических токов ($\vec{j} = 0$), - к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (5.9)$$

Решение уравнения (5.8) имеет вид:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (5.10)$$

что аналогично решению уравнения Пуассона для электростатического потенциала $\varphi(\vec{r})$.

В случае линейных токов или движущихся точечных зарядов надо сделать замену (5.4):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad (5.11)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a \frac{q_a \vec{v}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \quad (5.12)$$

5.2 Закон Био – Савара – Лапласа и его применение к расчету магнитных полей

Из опыта известно, что элемент тока $\vec{j} dV = J d\vec{l}$ создает вокруг себя магнитное поле

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[\vec{j} \vec{r} \right] dV}{r^3}, \quad (5.13)$$

и

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J \cdot \left[d\vec{l} \cdot \vec{r} \right]}{r^3}. \quad (5.14)$$

На основании принципа суперпозиции, полное поле \vec{B} в точке \vec{r} находится интегрированием выражения (5.13) или (5.14) по всем элементам тока, т.е. по объему, где $\vec{j} \neq 0$, или по линейному контуру с током:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\left[\vec{j} \vec{r} \right] dv}{r^3}; \quad (5.15)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{J \left[d\vec{l} \cdot \vec{r} \right]}{r^3}. \quad (5.16)$$

Рассмотрим применения закона Био–Савара–Лапласа к расчету магнитных полей проводников с током различной конфигурации.

Магнитное поле бесконечного прямолинейного тока.

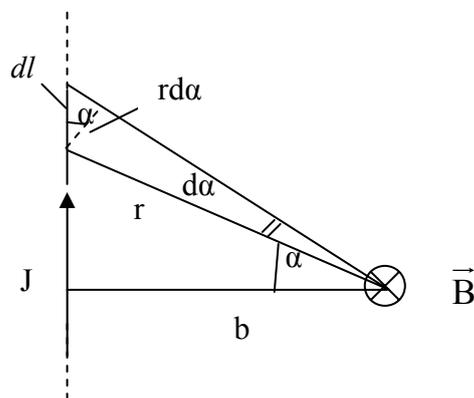


Рисунок 13

Все векторы $d\vec{B}$ от элементов тока будут направлены за чертеж (рисунок 13).
Имеем:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Jdl \cos \alpha}{r^2};$$

$$dl \cos \alpha = r d\alpha;$$

$$r = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

Поэтому:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{J \cos \alpha d\alpha}{b};$$

остается проинтегрировать по α в пределах $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$:

$$B = \frac{\mu_0 J}{4\pi b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 J}{2\pi b}.$$

Магнитное поле в центре кругового тока.

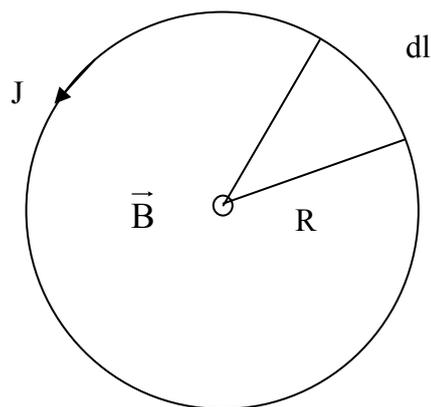


Рисунок 14

Элемент тока $Jd\vec{l}$ создает в центре окружности поле (рисунок 14)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Jdl}{R^2};$$

для нахождения полного поля в центре витка надо проинтегрировать по l от 0 до $2\pi R$:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{Jdl}{R^2} = \frac{\mu_0 J}{2R}.$$

Магнитное поле, создаваемое конечным отрезком прямолинейного тока.

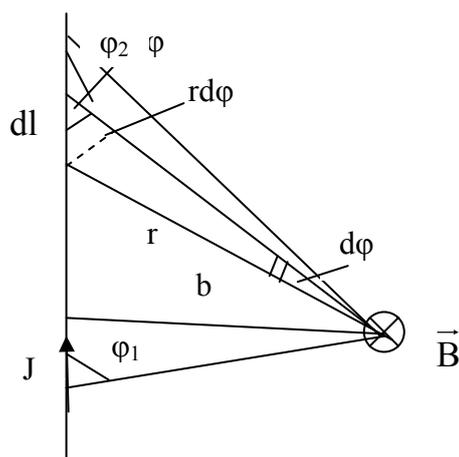


Рисунок 15

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Jdl \sin \varphi}{r^2}; \quad dl = \frac{rd\varphi}{\sin \varphi}; \quad r = \frac{b}{\sin \varphi};$$

подставим и проинтегрируем:

$$B = \frac{\mu_0 J}{4\pi b} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin d\varphi = \frac{\mu_0 J}{4\pi b} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

В частности, для бесконечного провода

$$(\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi): B = \frac{\mu_0 J}{4\pi b} \cdot 2 = \frac{\mu_0 J}{2\pi b},$$

в соответствии с п.1.

5.3 Магнитное поле равномерно движущегося заряда

Запишем закон Био–Савара–Лапласа для случая точечного заряда q , движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью \vec{v} :

$$\vec{B}(\vec{r}|t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \left[\vec{v} \times \vec{r} \right]}{r^3}, \quad (5.17)$$

где \vec{r} - по-прежнему радиус – вектор, проведенный к точке наблюдения.

В такой трактовке (точка наблюдения неподвижна) конец вектора \vec{r} в данной (лабораторной) СО фиксирован, а его начало перемещается со скоростью \vec{v} (рисунок 16):

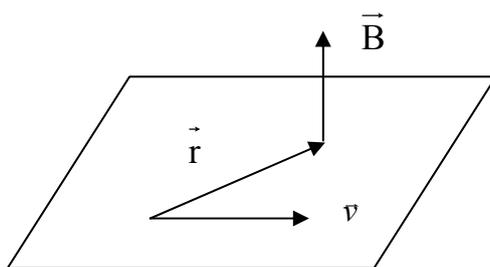


Рисунок 16

Таким образом, вектор \vec{B} в данной СО зависит не только от положения точки наблюдения, но и *от времени*.

Запишем выражение для электрического поля точечного заряда q ; при $v \ll c$ можно воспользоваться законом Кулона:

$$\vec{E}(\vec{r}|t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (5.18)$$

Перепишем соотношение (5.17) с учетом (5.18):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[\vec{v} \cdot q \vec{r} \right]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 4\pi\epsilon_0 \left[\vec{v} \times \vec{E} \right] = \epsilon_0 \mu_0 \left[\vec{v} \times \vec{E} \right] = \frac{1}{c^2} \left[\vec{v} \times \vec{E} \right], \quad (5.19)$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ - электродинамическая постоянная.

Пример. Пусть два точечных заряда q движутся параллельно друг другу с одинаковыми скоростями $v \ll c$.

Найдем силы, с которыми взаимодействуют эти заряды, - магнитную силу F_m и электрическую силу $F_{эл.}$. Имеем:

$$F_m = qvb; \quad F_{эл.} = qE,$$

где \vec{E} и \vec{B} - поля, созданные одним из зарядов в месте нахождения другого (из - за нерелятивистского характера движения зарядов время запаздывания можно не учитывать). Отношение модулей магнитной и электрической сил:

$$\frac{F_m}{F_{эл.}} = \frac{vB}{E}.$$

А поскольку из (5.19) следует: $B = \frac{vE}{c^2}$, то в нашем случае

$$\frac{F_m}{F_{эл.}} = \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Даже для довольно больших скоростей частиц это отношение очень мало; например, при $v = 300 \frac{\text{км.}}{\text{с}}$ $\frac{F_m}{F_{эл.}} \approx 10^{-6}$, т.е. магнитная часть электромагнитной силы составляет ничтожную часть (малую поправку) к электрической. Скорость электронов в проводах $v \sim 10^{-4} \text{ м/с}$; т.е. $\frac{F_m}{F_{эл.}} \sim 10^{-24}$.

Тем не менее, магнитная сила очень важна, поскольку электрическая сила исчезла благодаря почти идеальному балансу отрицательных и положительных зарядов в проводах.

5.4 Стационарное магнитное поле в дипольном приближении

Пусть заряженные частицы совершают финитное движение в области пространства диаметром l . Требуется найти порождаемое ими (усредненное) магнитное поле на больших расстояниях от этой системы частиц, т.е. при

$$r \ll \left| \vec{r}_a \right| \sim l.$$

Исходим из выражения для векторного потенциала (5.12)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a \vec{v}_a}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}$$

и разлагаем его в ряд Тейлора по малому параметру $\varepsilon = \frac{l}{r}$, ограничиваясь низшими членами. Имея в виду формулу

$$f(\vec{r} - \vec{\rho}) = f(\vec{r}) - \left(\vec{\rho}, \vec{\nabla} f(\vec{r}) \right)$$

и полагая в ней $f = \frac{1}{\left| \vec{r} - \vec{\rho} \right|}$ и $\vec{\rho} = \vec{r}_a$, из (5.12) получим

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \vec{A}_0(\vec{r}) + \vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a q_a \vec{v}_a - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a q_a \vec{v}_a \left(\vec{r}_a, \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right). \quad (5.20)$$

Нулевой член разложения можно представить в виде полной производной по времени:

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a q_a \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a q_a \vec{r}_a \right\} \quad (5.21)$$

и поэтому его следует считать равным нулю (см. выше). Заметим, что если рассматривать объемное распределение токов, то нужно исходить из выражения

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_v \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} dV' \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}$$

В этом случае нулевой член разложения

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \int_v \vec{j}(\vec{r}') dv' \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (5.22)$$

обращается в ноль в силу соотношения (5.6)

$$\int_{R^3} \vec{j}(\vec{r}) dV = 0$$

Равенство $\vec{A}_0 = 0$ фактически равнозначно отсутствию в природе магнитных зарядов (в случае электростатики, как мы помним, было $\varphi_0(\vec{r}) = k \frac{Q}{r}$).

Итак, в первом нетривиальном приближении имеем:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a q_a v_a \left(\vec{r}_a, \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a q_a v_a \left(\vec{r}, \vec{r}_a \right). \quad (5.23)$$

(здесь учтено, что $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$). Преобразуем последнюю сумму:

$$\begin{aligned} \sum_a q_a v_a \left(\vec{r}_1, \vec{r}_a \right) &= \frac{1}{2} \sum_a q_a \frac{d r_a}{dt} \left(\vec{r}, \vec{r}_a \right) + \frac{1}{2} \sum_a q_a v_a \left(\vec{r}, \vec{r}_a \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_a q_a r_a \left(\vec{r}, \vec{r}_a \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_a q_a r_a \left(\vec{r}, \vec{v}_a \right) + \frac{1}{2} \sum_a q_a v_a \left(\vec{r}, \vec{r}_a \right). \end{aligned}$$

Вновь опуская полную производную по времени и учитывая, что

$$\vec{b} \left(\vec{a}, \vec{c} \right) - \vec{c} \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = \left[\vec{a} \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right],$$

из (5.23) получим:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \sum_a q_a \left[\vec{r} \left[\vec{v}_a, \vec{r}_a \right] \right] = \frac{1}{r^3} \left[\frac{\mu_0}{8\pi} \sum_a q_a \left[\vec{r}_a v_a \right], \vec{r} \right],$$

ИЛИ

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{[\vec{P}_m, \vec{r}]}{r^3} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}. \quad (5.24)$$

Здесь введён вектор

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \sum_a q_a \left[\vec{r}_a \vec{v}_a \right], \quad (5.25)$$

полностью определяемый состоянием системы заряженных частиц и не зависящий от точки наблюдения. Он называется магнитным дипольным моментом или просто магнитным моментом системы и вполне аналогичен ее электрическому дипольному моменту $\vec{d} = \sum_a q_a \vec{r}_a$. Переход к объемному распределению зарядов и к линейным токам осуществляется с помощью известных подстановок, которые дают соответственно

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \int_V \left[\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}') \right] dV', \quad (5.26)$$

и

$$\vec{P}_m = \frac{J}{2} \oint_L \left[\vec{r}', d\vec{l}' \right]. \quad (5.27)$$

Подстановка найденного магнитного момента \vec{P}_m в (5.24) и взятие ротора приводит к выражению для магнитного поля \vec{B} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3 \vec{r} \left(\vec{P}_m \cdot \vec{r} \right) - r^2 \vec{P}_m}{r^5} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (5.28)$$

Рассмотренное приближение, в котором учитывался только первый член разложения $\vec{A}(\vec{r})$ по малому параметру ε , называется магнитным дипольным приближением.

Рассмотрим замкнутый линейный ток и перепишем формулу (5.27) для его магнитного момента как

$$\vec{P}_m = J \oint_L \frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{l}]. \quad (5.29)$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{l}] = ds \cdot \vec{n} \equiv d\vec{S}, \quad (5.30)$$

где $d\vec{S}$ – элемент площади, \vec{n} – единичный вектор нормали. Подставляя (5.30) в (5.29), для плоского контура с током, для которого $\vec{n} = \text{const}$, получим:

$$\vec{P}_m = JS \vec{n} \equiv J \vec{S} \quad (5.31)$$

Именно так вводится вектор магнитного момента в курсе общей физики. Пусть все частицы обладают одинаковыми удельными зарядами:

$$\frac{q_a}{m_a} = \text{const} \equiv \frac{q}{m}. \quad (5.32)$$

(наиболее важный пример - система тождественных частиц). Для такой системы имеем из (5.25):

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \sum_a q_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a] \equiv \frac{1}{2} \sum_a \frac{q_a}{m_a} \cdot m_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a] = \frac{q}{2m} \sum_a [\vec{r}_a, m_a \vec{v}_a],$$

т.е.

$$\vec{P}_m = \frac{q}{2m} \vec{L} \equiv g \vec{L}, \quad (5.33)$$

где \vec{L} – обычный момент импульса. Таким образом, в данном случае магнитный момент пропорционален полному механическому моменту. Коэффициент пропорциональности

$$g = \frac{q}{2m} \quad (5.34)$$

называется *гиромагнитным отношением*.

Проекция вектора магнитного момента на произвольную ось z равна

$$p_{mz} = \frac{q}{2m} L_z . \quad (5.35)$$

Для микрочастиц проекция момента импульса, как известно, квантуется:

$$L_z = \hbar \cdot M_L, \quad (5.36)$$

где M_L - магнитное квантовое число, принимающее целочисленные значения. Подстановка (5.36) в (5.35) дает:

$$p_{mz} = \frac{q\hbar}{2m} M_L \equiv \pm \mu M_L. \quad (5.37)$$

Величина

$$\mu = \frac{q\hbar}{2m}, \quad (5.38)$$

имеющая смысл кванта магнитного момента, называется *магнетон*. Если система состоит из электронов ($m = m_e, q = e$), то получаем *магнетон Бора*

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}, \quad (5.39)$$

а если из протонов ($m = m_p, q = e$) - *ядерный магнетон*

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}. \quad (5.40)$$

Эти величины играют важную роль в атомной и ядерной физике.

5.5 Энергия стационарного магнитного поля

Запишем полную энергию магнитного поля:

$$U = \int_{R^3} B^2 dV \cdot \frac{1}{2\mu_0} \quad (5.41)$$

Преобразуем (5.41) с учетом того, что $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, и применяя формулы векторного, анализа:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{R^3} \vec{B}^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R^3} \left(\vec{B}, \text{rot } \vec{A} \right) dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R^3} \text{div} \left[\begin{matrix} \vec{A} & \vec{B} \\ \vec{A} & \vec{B} \end{matrix} \right] dV + \frac{1}{2\mu_0} \int_{R^3} \left(\vec{A}, \text{rot } \vec{B} \right) dV = \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_\infty} \left[\begin{matrix} \vec{A} & \vec{B} \\ \vec{A} & \vec{B} \end{matrix} \right] d\vec{S} + \frac{1}{2\mu_0} \int_{R^3} \left(\vec{A}, \text{rot } \vec{B} \right) dV.
\end{aligned}$$

Интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю (см. выше).

Учитывая, далее, что $\text{rot } \vec{B} = \vec{j} \cdot \mu_0$, получим для полной энергии магнитного поля:

$$U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{j} \left(\vec{r} \right) \cdot \vec{A} \left(\vec{r} \right) dV, \quad (5.42)$$

что аналогично выражению (4.51) для энергии электростатического поля. Наконец, подставляя в (5.42) выражения для векторного потенциала

$$\vec{A} \left(\vec{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \left(\vec{r}' \right)}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} dV',$$

придем к формуле:

$$U = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_{R^3} \int_{R^3} \frac{\vec{j} \left(\vec{r} \right) \cdot \vec{j} \left(\vec{r}' \right)}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} dV dV'. \quad (5.43)$$

Если разбить все пространство на отдельные области, нумеруемые индексом i , в которых протекают токи \vec{j}_i , то, учитывая свойство аддитивности

$\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i$, из (5.43) получим

$$U = \sum_{i,k} U_{ik}, \quad (5.44)$$

где

$$U_{ik} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\vec{j}_i(\vec{r}_i) \cdot \vec{j}_k(\vec{r}_k)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} dV_i dV_k \quad (5.45)$$

Величины U_{ii} имеют смысл собственных энергий токов, а U_{ik} при $i \neq k$ - энергий их взаимодействия. В случае, когда в каждой выделенной области имеется по одному замкнутому линейному току, в (5.45) следует сделать подстановки $\vec{j}_i dV_i \rightarrow J_i d\vec{l}_i$, в результате чего получим:

$$U_{ik} = \frac{\mu_0}{8\pi} J_i J_k \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}. \quad (5.46)$$

В итоге полная энергия магнитного поля линейных токов будет записываться как

$$U = \sum_{i,k} U_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k, \quad (5.47)$$

Здесь введены индуктивные коэффициенты

$$L_{ik} = \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\vec{l}_i d\vec{l}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (5.48)$$

которые определяются исключительно геометрией, т.е. формой и размерами линейных проводников. Величины L_{ii} есть коэффициенты *самоиндукции*, а L_{ik} при $i \neq k$ - коэффициенты *взаимной индукции* этих проводников.

Вычисление интегралов (5.48) на практике оказывается весьма сложным. Мало того, при $k=i$ эти интегралы, задающие коэффициенты самоиндукции, расходятся. Последнее обстоятельство вовсе не удивительно, так как в силу (5.47) величина L_{ii} определяет собственную магнитную энергию линейного тока, которая, как и собственная электрическая энергия точечного заряда, бесконечно велика (см. выше).

Чтобы преодолеть эти трудности, получим другое выражение для полной энергии магнитного поля системы линейных токов. Исходим непосредственно из формулы (5.42), учитываем свойство аддитивности $\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i$ и переходим от объемных токов к линейным:

$$U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{A} \cdot \vec{j} dV = \frac{1}{2} \sum_i \int_{V_i} \vec{A} \vec{j}_i dV = \frac{1}{2} \sum_i J_i \oint_{L_i} \vec{A} d\vec{l}. \quad (5.49)$$

Но величина

$$\oint_{L_i} \vec{A} d\vec{l} = \int_{S_i} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{S_i} \vec{B} d\vec{S} \equiv \phi_i \quad (5.50)$$

есть *магнитный поток* через контур i – го проводника, создаваемый полями всех проводников, в том числе и данного. Подстановка (5.50) в (5.49) дает для полной магнитной энергии

$$U = \frac{1}{2} \sum_i J_i \phi_i. \quad (5.51)$$

Из сравнения (5.51) с (5.47) находим:

$$\phi_i = \sum_k L_{ik} J_k. \quad (5.52)$$

Таким образом, индуктивные коэффициенты L_{ik} выступают в качестве коэффициентов линейных (по токам) форм, задающих магнитные потоки через контуры проводников. В частности, для уединенного проводника из (5.47), (5.51) и (5.52) находим:

$$U = \frac{1}{2} L J^2 = \frac{1}{2} J \phi, \quad \phi = L J. \quad (5.53)$$

Это соотношение приводит также к простой формуле

$$L = \frac{\phi}{J}, \quad (5.54)$$

с помощью которой обычно и вычисляют коэффициенты самоиндукции различных соленоидов и проволочных катушек.

Следует иметь в виду, однако, что формула (5.45), как и (5.48), дает для индуктивности идеального линейного проводника бесконечно большое значение. Но подобные бесконечности не должны вызывать беспокойства, ибо понятие линейного проводника (в отличие от понятия точечного заряда) является заведомой идеализацией. Всякий реальный проводник имеет конечные поперечные размеры, и его индуктивность также конечна, причем ее значение тем больше, чем тоньше проводник.

Фактическое вычисление коэффициентов самоиндукции тонких проводников на практике оказывается довольно сложным делом. При расчетах чаще используют вместо (5.54) формулу

$$L = 2 \frac{U}{J^2}, \quad (5.55)$$

вытекающую из первого соотношения (5.53). Энергия же магнитного поля U находится с помощью ее исходного выражения (5.41).

5.6 Движущиеся частицы во внешнем магнитном поле

Пусть имеется система заряженных частиц (или токов – объемных либо линейных), совершающих заданное движение во внешнем стационарном магнитном поле $\vec{B}(\vec{r})$, которое также считается заданным. Нас будут интересовать полная сила и полный момент сил, действующие на систему частиц, а также энергия ее взаимодействия с этим полем.

Начнем с точных выражений для полной магнитной силы, действующей на систему частиц в разных физических ситуациях. На одну частицу действует магнитная часть силы Лоренца, и потому для системы точечных заряженных частиц

$$\vec{F} = \sum_a q_a \left[\vec{v}_a, \vec{B}(\vec{r}_a) \right]. \quad (5.56)$$

Сила, действующая на объемный ток,

$$\vec{F} = \int_V \left[\vec{j}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r}) \right] dV, \quad (5.57)$$

а на линейный ток:

$$\vec{F} = J \oint_L \left[d\vec{l}, \vec{B}(\vec{r}) \right]. \quad (5.58)$$

Последнее выражение обычно записывают в дифференциальной форме:

$$d\vec{F} = J \left[d\vec{l}, \vec{B} \right], \quad (5.59)$$

и в итоге мы приходим к закону Ампера.

Снабдим теперь рассматриваемые токи индексом 1 и будем считать, что внешнее поле \vec{B} создается некоторыми другими токами (с индексом 2), которые не перекрываются с рассматриваемыми. Тогда, учитывая общую формулу

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

и введенную индексацию, можем записать:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[j_2(\vec{r}_2), \vec{r} - \vec{r}_2]}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} dV_2. \quad (5.60)$$

Из (5.57) получим для полной силы \vec{F}_{12} , действующей на объемный ток 1 со стороны объемного тока 2:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{[j_1(\vec{r}_1), [j_2(\vec{r}_2), \vec{r}_1 - \vec{r}_2]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} dV_1 dV_2. \quad (5.61)$$

Аналогично, для линейных токов с помощью (5.58) найдем:

$$\vec{F}_{12} = J_1 J_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{[dl_1, [dl_2, \vec{r}_1 - \vec{r}_2]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (5.62)$$

Если записать это выражение в дифференциальной форме, то придем к закону Био – Савара – Лапласа:

$$d^2 \vec{F}_{12} = J_1 J_2 \frac{\left[d \vec{l}_1, \left[d \vec{l}_2, R_{12} \right] \right]}{R_{12}^3} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (5.63)$$

$$R_{12} \equiv r_1 - r_2$$

Все эти формулы являются точными, но на практике они не слишком полезны. Наша цель – сформулировать достаточно простые приближенные результаты, справедливые в случае квазиоднородного внешнего поля $\vec{B}(\vec{r})$. Их можно предугадать, отправляясь от аналогии магнитостатики с электростатикой. При этом для полноты аналогии естественно рассмотреть электрически нейтральную ($Q = 0$) электростатическую систему частиц, ибо магнитных зарядов не существует. Итак, производя в соответствующих формулах замены $\vec{d} \rightarrow \vec{p}_m$ и $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, придем к следующей таблице:

Таблица 1

| Электростатика | Магнитостатика |
|--|--|
| $\vec{F} = \left(\vec{d}, \vec{\nabla} \right) \vec{E}$ | $\vec{F} = \left(\vec{p}_m, \vec{\nabla} \right) \vec{B}$ |
| $U = - \left(\vec{d}, \vec{E} \right)$ | $U = - \left(\vec{p}_m, \vec{B} \right)$ |
| $\vec{M} = \left[\vec{d}, \vec{E} \right]$ | $\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B} \right]$ |

6 Электромагнитные волны в вакууме

6.1 Свободное электромагнитное поле

Перейдем к анализу нестационарных электромагнитных явлений. Начнем с рассмотрения свободного электромагнитного поля, т.е. поля в тех областях пространства, где отсутствуют его источники – заряженные частицы: $\rho = 0, j = 0$. В этом случае уравнения Максвелла превращаются в систему однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. , \quad (6.1)$$

из которого вытекают волновые уравнения (см. выше § 2.1)

$$\square \vec{E} = 0, \quad \square \vec{B} = 0. \quad (6.2)$$

Поля \vec{E} и \vec{B} выражаются через скалярный и векторный потенциалы φ и \vec{A}

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (6.3)$$

Если подчинить φ и \vec{A} условию Лоренца (2.8), то они будут удовлетворять уравнениям Даламбера, которые в нашем случае свободного электромагнитного поля также превращаются в волновые уравнения

$$\square \varphi = 0, \quad \square \vec{A} = 0. \quad (6.4)$$

Итак, каждая из величин $\vec{E}, \vec{B}, \varphi, \vec{A}$, характеризующих состояние свободного электромагнитного поля, и совокупность которых мы будем обозначать единым символом f , удовлетворяет уравнению

$$\square f \equiv \nabla^2 f\left(\frac{\vec{r}}{t}\right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f\left(\frac{\vec{r}}{t}\right)}{\partial t^2} = 0. \quad (6.5)$$

Ниже будет проведен строгий анализ этого уравнения. Качественно возможность существования электромагнитных волн в вакууме можно усмотреть уже из самой структуры уравнений Максвелла (6.1). Из них видно, что переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле, которое в свою очередь, вызывает появление нового переменного электрического поля и т.д. причем данный процесс захватывает все большие и большие области пространства.

6.2 Плоские электромагнитные волны в вакууме

Рассмотрим важный случай плоского (одномерного) электромагнитного поля. По определению, это такое поле, для которого переменные состояния f (т.е. $\vec{E}, \vec{B}, \varphi, \vec{A}$) меняются лишь в одном направлении. Принимая для определенности его за ось x , будем иметь $f = f(x|t)$. Если плоское поле является свободным, то f подчиняется одномерному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (6.6)$$

Из математической физики известно, что общее решение этого уравнения имеет вид:

$$f(x|t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (6.7)$$

где f_1 и f_2 - произвольные функции. При этом решению f_1 отвечает электромагнитное поле, распространяющееся в положительном направлении оси x со скоростью c , т.е. плоская электромагнитная волна. Аналогично, решение f_2 отвечает плоской электромагнитной волне, бегущей со скоростью c в отрицательном направлении оси x . Общее решение (6.7) есть суперпозиция двух электромагнитных волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Проанализируем более детально свойства электромагнитных волн в вакууме, состояние которых характеризуется векторами \vec{E} и \vec{B} . Будем пользоваться следующими формулами дифференцирования скалярной функции f , зависящей от волнового аргумента $\xi = t - \frac{x}{c}$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f', \quad \vec{\nabla} f = -\frac{1}{c} f' \cdot \vec{n}, \quad (6.8)$$

где штрих означает дифференцирование по всему аргументу ξ , а \vec{n} есть единичный вектор вдоль оси x , т.е. вдоль направления распространения волны. Первая из формул (6.8) очевидна, а вторая доказывается следующим образом:

$$\vec{\nabla} f\left(t - \frac{x}{c}\right) = f' \cdot \vec{\nabla}\left(t - \frac{x}{c}\right) = -\frac{1}{c} f' \cdot \vec{\nabla} x = -\frac{1}{c} f' \cdot \vec{n}.$$

Итак, рассматриваем электромагнитную волну, бегущую в положительном направлении оси x . Полагая $f = E_x, E_y, E_z$, получаем:

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (6.9)$$

Ограничимся случаем линейно поляризованной плоской электромагнитной волны, в которой вектор \vec{E} остается все время параллельным некоторому постоянному единичному вектору \vec{e} , называемому *вектором поляризации*. Для такой волны

$$\vec{E} = \vec{e} f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (6.10)$$

Магнитное поле \vec{B} находится с помощью четвертого из уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} = -\text{rot}\left(\vec{e} f\right).$$

Учитывая, что $\vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right)$, а также используя формулы (6.8), получим:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi} = \vec{B}' = -\left[\vec{\nabla} \vec{E}\right] = -\left[\vec{\nabla}, \vec{e} f\right] = -\left[\vec{\nabla} f, \vec{e}\right] = -\left[-\frac{1}{c} f' \vec{n}, \vec{e}\right] = \frac{1}{c} \left[\vec{n}, \vec{e}\right] \cdot f';$$

после интегрирования по t :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \left[\vec{n}, \vec{e}\right] \cdot f\left(t - \frac{x}{c}\right) \equiv \frac{\vec{b}}{c} f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (6.11)$$

(постоянная интегрирования выбрана равной нулю, т.к. нас интересуют только переменные поля). Учитывая (6.10), будем иметь

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \left[\vec{n}, \vec{E}\right]. \quad (6.12)$$

Аналогично, если исходить из выражения (6.11) для магнитного поля, то с помощью второго уравнения Максвелла найдем

$$\vec{E} = -c \left[\vec{n}, \vec{B} \right]. \quad (6.13)$$

Воспользуемся теперь первым уравнением Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \left(\vec{e} f \right) = 0.$$

Вновь применяя формулы дифференцирования (6.8), будем иметь:

$$\left(\vec{\nabla}, \vec{e} f \right) = \left(\vec{e}, \vec{\nabla} f \right) = \left(\vec{e}, -\frac{1}{c} f' \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} f' \cdot \left(\vec{e}, \vec{n} \right) = 0, \text{ так что } \left(\vec{e}, \vec{n} \right) = 0$$

или

$$\left(\vec{n}, \vec{E} \right) = 0. \quad (6.14)$$

Аналогично из (6.12) и третьего уравнения Максвелла получим:

$$\left(\vec{n}, \vec{B} \right) = 0, \quad (6.15)$$

Из сопоставления (6.12) с (6.11) видно, что поля \vec{E} и \vec{B} в плоской электромагнитной волне изменяются в пространстве и во времени синхронно. Из (6.14) и (6.15) следует, что векторы \vec{E} и \vec{B} лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, т.е. что она является поперечной. Формулы (6.12) и (6.13) показывают, что векторы \vec{E} и \vec{B} взаимно перпендикулярны, а если учесть предыдущее их свойство, то получим, что они с точностью до множителя с равны по модулю (\vec{E} и \vec{B} сравниваются здесь в одной точке пространства в один и тот же момент времени). В итоге мы установили все важнейшие свойства плоских электромагнитных волн

$$\vec{E} \perp \vec{n}, \vec{B} \perp \vec{n}; \vec{E} \perp \vec{B}; \frac{1}{c} \left| \vec{E} \right| = \left| \vec{B} \right|. \quad (6.16)$$

которые уже использовались нами при вычислении давления света.

6.3 Монохроматические плоские электромагнитные волны

Электромагнитное поле называется монохроматическим, если его переменные состояния f изменяются во времени по гармоническому закону, т.е. по закону $\cos(\omega t + \alpha)$. Как мы видели в предыдущем параграфе, в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в положительном направлении оси x , переменные состояния f зависят только от аргумента $t - \frac{x}{c}$. Поэтому для плоской монохроматической волны полевые переменные суть гармонические функции от $t - \frac{x}{c}$:

$$f(x|t) = f_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right], \quad (6.17)$$

где

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.18)$$

- период изменения поля.

Удобно представлять полевые переменные в виде действительной части от некоторой комплексной функции. Для этого надо выражение (6.17) записать как

$$f = \operatorname{Re} \left\{ f_0 e^{-i \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ f_0 e^{-i\alpha} \cdot e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\},$$

или

$$f(x|t) = \operatorname{Re} \left\{ \widehat{f}_0 e^{i \left(\frac{\omega}{c} x - \omega t \right)} \right\}. \quad (6.19)$$

Здесь введена комплексная амплитуда

$$\widehat{f}_0 = f_0 e^{-i\alpha}, \quad (6.20)$$

содержащая информацию, как об обычной амплитуде f_0 , так и о фазе α . Удобство такой записи обусловлено, в частности, тем, что при сложении двух монохроматических волн с одинаковыми частотами величина f_0 не является аддитивной, тогда как комплексная амплитуда обладает этим свойством:

$$\widehat{f}_0^{(12)} = \widehat{f}_0^{(1)} + \widehat{f}_0^{(2)}. \quad (6.21)$$

Это значительно упрощает, например, анализ интерференционных явлений.

Введем теперь волновое число $k = \frac{\omega}{c}$ и запишем (6.19) как

$$f(x|t) = \text{Re}\{\widehat{f}_0 e^{i(kx - \omega t)}\}. \quad (6.22)$$

Длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT \quad (6.23)$$

задает период изменения поля в зависимости от координат в фиксированный момент времени и равна расстоянию, проходимому волной за период T . Наконец, введя волновой вектор

$$\vec{k} = k \cdot \vec{n}, \quad (6.24)$$

представим полевые переменные (6.17) в форме, которая не зависит от выбора системы координат:

$$f\left(\begin{array}{c} \vec{r} \\ r \\ t \end{array} \middle| \right) = \text{Re}\left\{\widehat{f}_0 e^{i\left(\begin{array}{c} \vec{k} \\ k \\ r - \omega t \end{array} \right)}\right\}. \quad (6.25)$$

Здесь уже не обязательно считать, что волна бежит вдоль оси x . Выражение (6.25) отвечает волне, которая распространяется в произвольном (но фиксированном) направлении, задаваемом единичным вектором \vec{n} .

Отождествляя величину f в (6.25) с компонентами E_i ($i = x, y, z$) вектора электрического поля \vec{E} , получим для них:

$$E_i = \text{Re}\left\{\widehat{E}_{0i} e^{i\left(\begin{array}{c} \vec{k} \\ k \\ r - \omega t \end{array} \right)}\right\}, \quad (6.26)$$

или в векторной форме

$$\vec{E} = \text{Re}\left\{\vec{E}_0 e^{i\left(\begin{array}{c} \vec{k} \\ k \\ r - \omega t \end{array} \right)}\right\}. \quad (6.27)$$

Величина \vec{E}_0 есть комплексная векторная амплитуда, которую представим как

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 - i \vec{E}_2. \quad (6.28)$$

Здесь \vec{E}_1 и \vec{E}_2 - обычные векторы, а знак « - » перед мнимой частью введен из соображений удобства (см. следующий параграф). Заметим, что в силу условия поперечности $\left(\vec{n}, \vec{E} \right) = 0$ \vec{E}_1 и \vec{E}_2 должны быть перпендикулярны волновому вектору \vec{k} , а в остальном эти постоянные векторы произвольны.

Заметим, что символ Re часто опускают, обращаясь с величинами f как с обычными комплексными числами и выделяют действительную часть лишь в конце вычислений. Однако это допустимо лишь тогда, когда над величинами f совершаются линейные операции: сложение, дифференцирование и интегрирование. Но этого нельзя делать, например, при перемножении двух функций f_1 и f_2 , ибо, вообще говоря,

$$\text{Re}(f_1 f_2) \neq \text{Re} f_1 \text{Re} f_2.$$

6.4 Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны

Общий закон изменения вектора \vec{E} в плоской монохроматической электромагнитной волне можно представить в форме (6.27) с комплексной амплитудой (6.28). Подставим (6.28) в (6.27) и раскроем экспоненту с мнимым показателем по формуле Эйлера:

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \left(\vec{E}_1 - i \vec{E}_2 \right) \left[\cos \left(\vec{k} \vec{r} - \omega t \right) + i \sin \left(\vec{k} \vec{r} - \omega t \right) \right] \right\}. \quad (6.29)$$

Выделяя действительную часть в явном виде, получим:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \cos \left(\vec{k} \vec{r} - \omega t \right) + \vec{E}_2 \sin \left(\vec{k} \vec{r} - \omega t \right) \quad (6.30)$$

Таким образом, в общем случае плоская монохроматическая волна представляет собой суперпозицию двух линейно поляризованных волн. Как от-

мечалось в предыдущем параграфе, векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 перпендикулярны направлению распространения волны (волновому вектору \vec{k} или единичному вектору \vec{n}), а в остальном произвольны. В частности, эти векторы, вообще говоря, не ортогональны друг другу.

Введем декартову систему координат, направив ось x вдоль волнового вектора \vec{k} и располагая оси y и z в перпендикулярной ему плоскости. Тогда из (6.30) будем иметь

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_1 \cos \alpha \cos(kx - \omega t) + E_2 \cos \beta \sin(kx - \omega t) \\ E_z = E_1 \sin \alpha \cos(kx - \omega t) + E_2 \sin \beta \sin(kx - \omega t), \end{cases} \quad (6.31)$$

где α и β - углы, которые составляют векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 с осью y (рисунок 17)

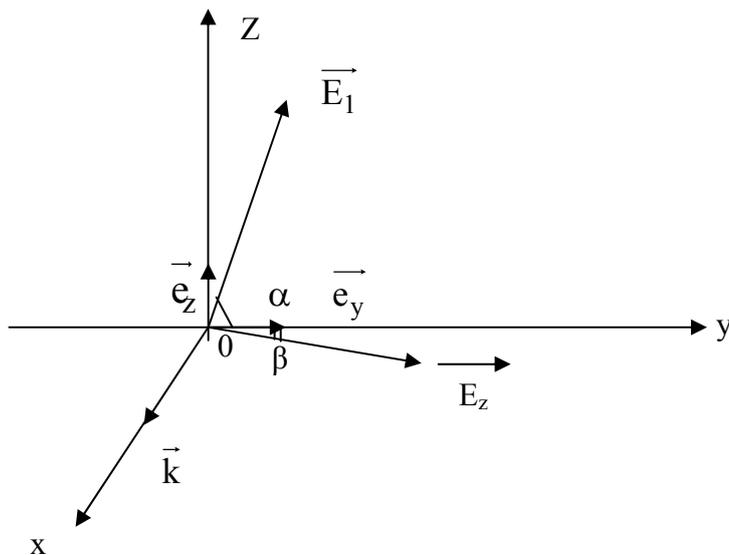


Рисунок 17

Рассмотрим движение конца вектора \vec{E} в фиксированной плоскости $x = const$. Для наглядности его можно представлять себе как движение частицы с координатами $y = E_y$ и $z = E_z$. Из (6.31) видно, что по каждому из направлений z и y это движение является суммой двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами. Но, как известно, подобные суммы сводятся к простым гармоническим колебаниям, и вместо (6.31) можно записать

$$\begin{cases} E_y = \varepsilon_1 \cos[(kx - \omega t) + \delta_1] \\ E_z = \varepsilon_2 \cos[(kx - \omega t) + \delta_2] \end{cases} \quad (6.32)$$

Амплитуды и фазы этих колебаний выражаются через параметры исходных колебаний (6.31), но мы эти формулы выписывать не будем.

Итак, движение конца вектора \vec{E} есть суперпозиция двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с одинаковыми частотами. Рассмотрим в начале отдельные частные случаи.

а) Если $\delta_2 = \delta_1$ (или $\varepsilon_2 = 0$, или $\varepsilon_1 = 0$), то конец вектора \vec{E} движется по отрезку прямой, направленной вдоль вектора $\varepsilon_1 \vec{e}_y + \varepsilon_2 \vec{e}_z$ (или оси y или оси z).

При распространении волны вектор \vec{E} будет оставаться все время параллельным постоянному вектору, совершая колебания в фиксированной плоскости. Подобные плоские электромагнитные волны нам уже встречались; они называются линейно (или плоско) поляризованными волнами.

б) Если $\delta_2 - \delta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$, то из (6.32) будем иметь

$$\begin{cases} E_y = \varepsilon_1 \cos[(kx - \omega t) + \delta_1] \\ E_z = \mp \varepsilon_2 \sin[(kx - \omega t) + \delta_1] \end{cases} \quad (6.33)$$

После деления E_y на ε_1 и E_z на ε_2 , возведения в квадрат и сложения получим:

$$\frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{E_z^2}{\varepsilon_2^2} = 1. \quad (6.34)$$

Конец вектора \vec{E} при $x = \text{const}$ движется по эллипсу с полуосями ε_1 и ε_2 , ориентированными вдоль y и z . При распространении волны он описывает винтовую линию, навитую на эллиптический цилиндр с осью x в качестве оси симметрии и с шагом, равным длине волны λ . Такие плоские монохроматические электромагнитные волны называется эллиптически поляризованными. В зависимости от знака разности фаз $\delta_2 - \delta_1$ вектор \vec{E} вращается по часовой стрелке или против нее, и в соответствии с этим говорят о правой или левой эллиптической поляризации.

в) Если в предыдущем случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_0$, то (6.34) превращается в уравнение окружности

$$E_x^2 + E_y^2 = \varepsilon_0^2. \quad (6.35)$$

Вектор \vec{E} вращается в плоскости $x = const$, оставаясь постоянным по модулю. При распространении волны его конец описывает круговую винтовую линию и говорят, что волна обладает круговой (циркулярной) поляризацией, которая также бывает правой и левой.

Чтобы исследовать самый общий случай, нужно из (6.32) исключить волновой аргумент $k - \omega t \equiv \psi$. Для этого из первого уравнения (6.32) находим

$$\cos(\psi + \delta_1) = \frac{E_y}{\varepsilon_1}$$

и подставляем это выражение во второе уравнение, переписанное в виде

$$E_z = \varepsilon_2 \cos[(\psi + \delta_1) + (\delta_2 - \delta_1)] = \varepsilon_2 \cos(\psi + \delta_1) \cos(\delta_2 - \delta_1) - \varepsilon_2 \sin(\psi + \delta_1) \sin(\delta_2 - \delta_1)$$

Получим:

$$\cos(\psi + \delta_1) = \frac{E_y}{\varepsilon_1};$$

$$\sin(\psi + \delta_1) = \sqrt{1 - \frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2}};$$

$$\begin{aligned} E_z &= \varepsilon_2 \cos(\psi + \delta_1) \cos(\delta_2 - \delta_1) - \varepsilon_2 \sin(\psi + \delta_1) \cdot \sin(\delta_2 - \delta_1) = \\ &= \varepsilon_2 \cdot \frac{E_y}{\varepsilon_1} \cdot \cos(\delta_2 - \delta_1) - \varepsilon_2 \sqrt{1 - \frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2}} \cdot \sin(\delta_2 - \delta_1); \end{aligned}$$

$$\varepsilon_2 \sqrt{1 - \frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2}} \cdot \sin(\delta_2 - \delta_1) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_y \cdot \cos(\delta_2 - \delta_1) - E_z;$$

$$\sqrt{1 - \frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2}} \cdot \sin(\delta_2 - \delta_1) = \frac{E_y}{\varepsilon_1} \cos(\delta_2 - \delta_1) - \frac{E_z}{\varepsilon_2};$$

$$\left(1 - \frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2}\right) \cdot \sin^2(\delta_2 - \delta_1) = \frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2} \cos^2(\delta_2 - \delta_1) - \frac{2E_y E_z}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\delta_2 - \delta_1) + \frac{E_z^2}{\varepsilon_2^2};$$

$$\sin^2(\delta_2 - \delta_1) = \frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{2E_y E_z}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\delta_2 - \delta_1) + \frac{E_z^2}{\varepsilon_2^2}. \quad (6.36)$$

В итоге будем иметь уравнение второго порядка:

$$\frac{E_y^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{2E_y E_z}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\delta_2 - \delta_1) + \frac{E_z^2}{\varepsilon_2^2} = \sin^2(\delta_2 - \delta_1). \quad (6.37)$$

Оно задает кривую, которая расположена в ограниченной области плоскости $x = const$, ибо из (6.37) следует, что «координаты» E_y и E_z не могут принимать сколь угодно большие значения. Подобная кривая второго порядка есть эллипс, но теперь его оси симметрии повернуты относительно координатных осей y и z на некоторый угол. Мы видим, что наиболее общей является эллиптическая поляризация, причем из (6.37) легко получить все рассмотренные выше частные случаи.

Итак, всякая плоская монохроматическая электромагнитная волна обладает той или иной поляризацией. Однако большинство реальных источников электромагнитных волн состоит из огромного числа независимых элементарных излучателей, испускающих не вполне монохроматические волны со случайными значениями амплитуд и начальных фаз, а также со всевозможными поляризациями. Даже в лазерах, которые отличаются огромной степенью согласованности, возможны некоторые флуктуации указанных величин.

Если распределение амплитуд, начальных фаз и поляризаций отдельных волн полностью хаотическое, то электромагнитная волна в целом будет неполяризованной. Пример – естественный свет, испускаемый тепловыми или люминесцентными источниками. Если же характеристики отдельных волн от разных элементарных излучателей в какой – то степени скоррелированы, то электромагнитная волна в целом оказывается частично поляризованной. Ее свойства описываются с помощью определенного тензора второго ранга, именуемого тензором поляризации (в квантовой теории – матрицей плотности), но мы на этих вопросах не останавливаемся.

6.5 Эффект Доплера

Пусть неподвижный источник испускает монохроматические волны с частотой ω_0 . Если тот же источник движется относительно наблюдателя, то последний будет регистрировать частоту $\omega \neq \omega_0$. Это явление называется *эффектом Доплера*. Задача состоит в том, чтобы найти частоту ω , зная ω_0 и характер движения источника волн и наблюдателя. Как мы увидим ниже, в классической механике и в электродинамике результаты оказываются различными.

В классической физике вплоть до появления теории Максвелла рассматривались только волны в упругих средах. В частности, считалось, что свет

распространяется в эфире. Для определенности будем говорить о звуковых волнах в воздухе, обозначая их скорость тем же символом c , что и скорость света. Подчеркнем, что источник звука считается неподвижным, если он покоится относительно воздуха. В данном случае ход решения задачи и ответ зависят от того, движется ли сам источник или наблюдатель. Получаются следующие результаты (рисунок. 18):

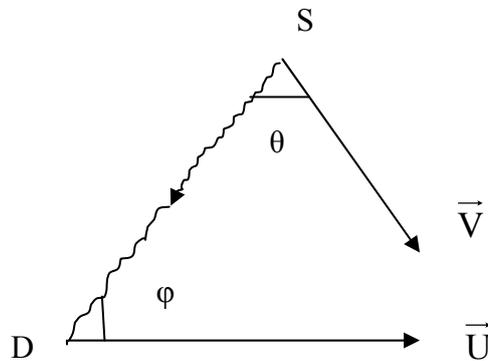


Рисунок 18

а) если движется источник S, то

$$\omega_{кл}^{(1)} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \omega_0. \quad (6.38)$$

б) Если движется наблюдатель D, то

$$\omega_{кл}^{(2)} = \left(1 + \frac{u}{c} \cos \varphi \right) \omega_0; \quad (6.39)$$

в) В общем случае

$$\omega_{кл} = \frac{1 + \frac{u}{c} \cos \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \omega_0. \quad (6.40)$$

Обратим внимание на то, что в последнем случае детектируемая частота определяется не скоростью сближения наблюдателя и источника, т.е. величиной

$$\frac{V_{сбл}}{c} = \frac{u}{c} \cos \varphi + \frac{v}{c} \cos \theta, \quad (6.41)$$

а их «абсолютными» скоростями « u » и « v » по отдельности.

Электромагнитные волны распространяются непосредственно в вакууме, а не в упругой среде, с которой можно было бы связать выделенную систему отсчета (СО). Поэтому, когда говорится о неподвижном источнике этих волн, имеется в виду, что он рассматривается в собственной СО. И ясно, что оптический эффект Доплера должен определяться лишь скоростью относительного движения источника и наблюдателя. Ниже мы убедимся, что это действительно так. Но прежде чем переходить к соответствующему анализу, сделаем небольшое отступление.

Плоская монохроматическая электромагнитная волна должна оставаться таковой во всех ИСО, в частности в той, которая движется относительно исходной СО вдоль общей оси x . Но согласно общим формулам (3.54) для x – компонентов электрического поля:

$$E_x' = E_x. \quad (6.42)$$

Это означает, что значения E_x в соответственных точках пространства и в соответственные моменты времени одинаковы, т.е. при изменении СО максимумы переходят в максимумы, минимумы – в минимумы и т.д. Отсюда следует, что полная фаза рассматриваемой волны должна быть инвариантом преобразований Лоренца:

$$\vec{k} \vec{r} - \omega t = inv. \quad (6.43)$$

Перепишем (6.43) как

$$k_j x_j + \left(i \frac{\omega}{c} \right) (ict) = k_j x_j + i \frac{\omega}{c} x_4 = inv \\ (j = 1, 2, 3)$$

Поскольку x_i и $x_4 = ict$ образуют 4-вектор X (см. главу 3), то инвариантность фазы будет обеспечена, если волновой вектор \vec{k} и частота ω также образуют 4-вектор

$$K = \left(\vec{k}, i \frac{\omega}{c} \right). \quad (6.44)$$

Тогда левая часть (6.43) представится в виде 4 – мерного скалярного произведения:

$$\vec{k} \vec{r} - \omega t = (K, X), \quad (6.45)$$

которое есть инвариант преобразований Лоренца. 4-вектор K является изотропным вектором:

$$K^2 = 0, \quad (6.46)$$

что сразу следует из его определения (6.44) и из равенства $k = \frac{\omega}{c}$.

Умножив обе части (6.44) на постоянную Планка \hbar , получим

$$\hbar K = \left(\vec{\hbar k}, i \frac{\hbar \omega}{c} \right). \quad (6.47)$$

Но величина $E = \hbar \omega$ есть энергия фотона, а $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ - его импульс. Поэтому 4-вектор $\wp = \hbar K$ является 4-импульсом фотона:

$$\wp = \left(\vec{p}, i \frac{E}{c} \right). \quad (6.48)$$

В его изотропности, т.е. в равенстве $\wp^2 = 0$, вытекающем из (6.46), находит свое выражение то обстоятельство, что фотон имеет нулевую массу.

При изменении системы отсчета компоненты 4-вектора K преобразуются по общим формулам главы 3, из которых, в частности, имеем

$$k_4' = \frac{k_4 - i \frac{v}{c} k_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.49)$$

Совместим начало системы отсчета S с наблюдателем, начало $SO S'$ - с источником волн и направим оси x и x' вдоль вектора скорости \vec{v} , с которой источник движется относительно наблюдателя. Учитывая, что $k_4 = i \frac{\omega}{c}$ и $k_1 = k \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta$, где θ - угол между направлением испускания волны (вектором \vec{k}) и направлением движения источника (вектором \vec{v}), из (6.49) получим:

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.50)$$

Поскольку S' есть собственная СО для источника волн, то $\omega' = \omega_0$ и для частоты ω , регистрируемой наблюдателем, находим из (6.50):

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \omega_0. \quad (6.51)$$

Это и есть искомая формула, описывающая эффект Доплера для электромагнитных волн. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Если скорость относительного движения наблюдателя и источника невелика, т.е. $v \ll c$, то из (6.51) с точностью до членов первого порядка малости по $\frac{v}{c}$ имеем

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) \equiv \omega_0 \left(1 + \frac{v_{сбл}}{c}\right), \quad (6.52)$$

где $v_{сбл}$ - скорость сближения источника и наблюдателя. Этот результат совпадает с результатом для классического (нерелятивистского) эффекта Доплера, который получается из (6.40) при $u, v \ll c$:

$$\omega_{кл} \approx \left(1 + \frac{u}{c} \cos \varphi\right) \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) \omega_0 \approx \left(1 + \frac{u \cos \varphi + v \cos \theta}{c}\right) \omega_0 = \left(1 + \frac{v_{сбл}}{c}\right) \omega_0, \quad (6.53)$$

где $v_{сбл}$ задается формулой (6.41).

б) Если источник приближается к наблюдателю ($\theta = 0$), то из (6.51)

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \omega_0. \quad (6.54)$$

В то же время из (6.38) при $\theta = 0$ и из (6.39) при $\varphi = 0$ получаются совсем другие результаты:

$$\omega_{кл}^{(1)} = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{c}}, \omega_{кл}^{(2)} = \omega_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right). \quad (6.55)$$

в) Аналогичная ситуация возникает при удалении источника от наблюдателя вдоль направления распространения волны (в этом легко убедиться, выписав соответствующие формулы).

г) Если источник движется перпендикулярно линии наблюдения, то из (6.40) при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ следует, что классический эффект Доплера отсутствует:

$$\omega_{кл} = \omega_0. \quad (6.56)$$

В то же время релятивистский поперечный эффект Доплера имеет место, ибо при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ из (6.51) получаем:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (6.57)$$

При умеренных скоростях

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (6.58)$$

и для обнаружения этого эффекта требуется огромная точность, так как.

$$\frac{|\Delta\omega|}{\omega_0} \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}, \quad (6.59)$$

где $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$ - соответствующий сдвиг частоты. Его впервые наблюдали в 1938 году. Айвс и Стилуэлл в излучении каналовых лучей – пучка атомов водорода, движущихся со скоростью $v \approx 3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Эти опыты еще раз подтвердили справедливость СТО, хотя к тому времени ее статус и без того был уже достаточно надежным. (Любопытно, что сами авторы пытались интерпретировать результаты своих измерений в рамках старой теории эфира.) Впоследствии в целом ряде экспериментов правильность формулы (6.57) для поперечного эффекта Доплера была подтверждена с очень высокой степенью точности.

7 Излучение электромагнитных волн

7.1 Дипольное приближение для поля в волновой зоне

Рассмотрим самый общий случай: переменное электромагнитное поле создается заряженными частицами, которые движутся произвольным образом.

Заданными считаем функции $\rho\left(\vec{r}|t\right)$ и $\vec{j}\left(\vec{r}|t\right)$; требуется определить поля $\vec{E}\left(\vec{r}|t\right)$ и $\vec{B}\left(\vec{r}|t\right)$ с помощью системы уравнений Максвелла.

Удобнее решать задачу не для полей, а для потенциалов $\varphi\left(\vec{r}|t\right)$ и $\vec{A}\left(\vec{r}|t\right)$, через которые выражаются поля:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Если наложена калибровка Лоренца

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

то потенциалы будут удовлетворять уравнениям Даламбера (2.9):

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

Как было отмечено в начале курса лекций, решениями их будут запаздывающие потенциалы

$$\varphi\left(\vec{r}|t\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}'|t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV',$$

$$\vec{A}\left(\vec{r} \mid t\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j\left(\vec{r}' \mid t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Нам понадобится последнее соотношение.

С помощью точных формул, как мы уже не раз видели, задачу решить затруднительно; гораздо целесообразнее провести приближенный анализ.

Пусть задано произвольное распределение зарядов, которые движутся в ограниченной области пространства, и пусть начало координат помещено где-то внутри этой области. Нас будет интересовать электромагнитное поле вдали от порождающих его зарядов, т.е. при $r \gg r'$ (рисунок 19).

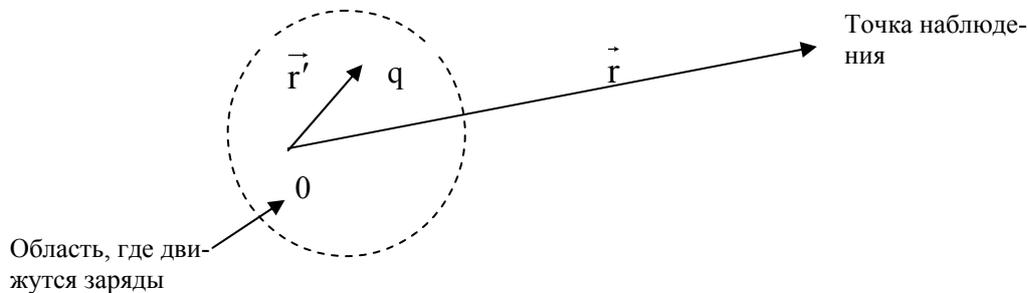


Рисунок 19

В такой задаче имеется малый параметр $\varepsilon = \frac{r'}{r}$, по которому естественно проводить разложение в ряд Тейлора. При этом мы ограничимся нулевым членом разложения, просто полагая $\vec{r}' = 0$ во всех разностях $\vec{r} - \vec{r}'$. В результате для векторного потенциала получим приближенное выражение, которое гораздо проще исходного:

$$\vec{A}\left(\vec{r} \mid t\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}\left(\vec{r}' \mid \tau\right) dV', \quad (7.1)$$

где

$$\tau \equiv t - \frac{r}{c}. \quad (7.2)$$

Будем рассматривать систему точечных заряженных частиц, для которой преобразование интеграла в правой части (7.1) особенно просто. Переходя от объемного распределения зарядов к дискретному, найдем:

$$\int \vec{j} \left(\vec{r}' \middle| \tau \right) dV' = \sum_a q_a \vec{v}_a(\tau) = \frac{d}{d\tau} \sum_a q_a \vec{r}_a(\tau). \quad (7.3)$$

Заметим, что в случае стационарного магнитного поля нулевой член разложения векторного потенциала, имеющий вид полной производной по времени, обращался в ноль (см. выше). Но здесь именно этот член играет ведущую роль.

Подставляя (7.3) в (7.1), получим в рассматриваемом приближении

$$\vec{A} \left(\vec{r} \middle| t \right) = \frac{\vec{d} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}. \quad (7.4)$$

Здесь \vec{d} - дипольный момент системы частиц, вводимый определением (см. выше) $\vec{d} = \sum_a q_a \vec{r}_a$, почему данное приближение и называется дипольным.

При этом точка над \vec{d} может, очевидно, пониматься и как производная по всему аргументу τ , и просто по времени t . Из формулы (7.4) явствует, что электромагнитное поле системы заряженных частиц, совершающих произвольное финитное движение, представляет собой на больших расстояниях от этой системы расходящуюся сферическую волну.

Будем теперь считать неравенство $r \gg r'$ столь сильным, чтобы на небольших участках сферическую волну можно было рассматривать как плоскую. О соответствующей пространственной области говорят как о волновой зоне.

Укажем на одно важное математическое свойство, имеющее место в волновой зоне и упрощающее выкладки. Если r – велико, то в процессе дифференцирования по координатам величину $\frac{1}{r}$ можно приближенно считать постоянной. Убедимся в этом на примере вычисления градиента:

$$\text{grad} \frac{f_1 \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} = \frac{1}{r_1} \text{grad} f_1 + f_1 \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{grad} f_1 - \frac{1}{r^2} f_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

При больших r первый член ведет себя как $\frac{1}{r}$, а второй – как $\frac{1}{r^2}$, так что при $r \rightarrow \infty$ второй член убывает значительно быстрее первого, и им можно пренебречь. В итоге получаем

$$\text{grad} \frac{f_1}{r} \approx \frac{1}{r} \text{grad} f_1,$$

т.е. при больших r можно считать $\frac{1}{r} = const$.

Данное свойство весьма полезно при вычислении полей \vec{E} и \vec{B} в дипольном приближении в волновой зоне. С учетом этого находим:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= rot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} rot \dot{\vec{d}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{\nabla}, \dot{\vec{d}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\vec{\nabla} \left(t - \frac{r}{c} \right), \ddot{\vec{d}} \left(t - \frac{r}{c} \right), \dot{\vec{d}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[-\frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r}, \ddot{\vec{d}} \right],\end{aligned}$$

так что

$$\vec{B} \left(\frac{\vec{r}}{r} | t \right) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\left[\ddot{\vec{d}} \left(t - \frac{r}{c} \right), \vec{n} \right]}{r} \equiv \frac{\vec{B}_0 \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}, \quad (7.5)$$

где

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Электрическое поле можно найти через \vec{B} , поскольку, как и в плоской волне, $\vec{E} = c \left[\vec{B}, \vec{n} \right]$. Отсюда получаем:

$$\vec{E} \left(\frac{\vec{r}}{r} | t \right) = \frac{\left[\left[\ddot{\vec{d}} \left(t - \frac{r}{c} \right), \vec{n} \right], \vec{n} \right] \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}}{r} \equiv \frac{\vec{E}_0 \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (7.6)$$

В предыдущих главах мы видели, что при финитном распределении электрических зарядов стационарные поля \vec{E} и \vec{B} убывают при $r \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$. Из формул (7.5) и (7.6) следует, что при аналогичном распределении зарядов переменные во времени поля \vec{E} и \vec{B} ведут себя на больших расстояниях совершенно иначе: при $r \rightarrow \infty$ они убывают гораздо медленнее стационарных полей – по закону $\frac{1}{r}$.

7.2 Дипольное излучение

Как видно из формул (7.5) и (7.6), от системы зарядов, совершающих финитное движение, распространяется сферическая электромагнитная волна. Это означает, что часть энергии данной системы частиц расходуется на электромагнитное излучение. Плотность потока излучаемой энергии задается вектором Пойнтинга (см. выше):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{E}, \vec{B} \right] = \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{n}, \quad (7.7)$$

где при переходе к последнему выражению учтены свойства поперечности волны $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{n}$ и соотношение $\vec{E} = c \left[\vec{B}, \vec{n} \right]$, согласно которому

$$\vec{E} \perp \vec{B} \quad \text{и} \quad \left| \vec{E} \right| = c \left| \vec{B} \right|.$$

Дифференциальная интенсивность излучения dI определяется как количество электромагнитной энергии, протекающей в единицу времени через элемент площади $d\vec{S}$

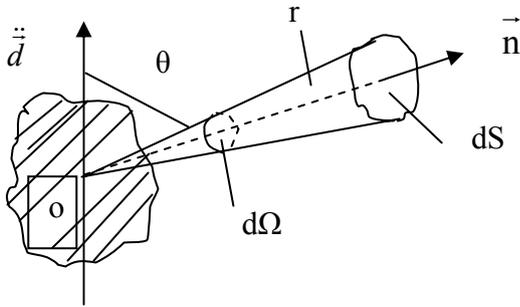


Рисунок 20

сферической поверхности радиуса r с центром в начале координат, в окрестности которого находится источник излучения (см. рисунок 20). Можно сказать также, что dI есть количество электромагнитной энергии, испускаемой излучателями в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$, на который опирается элемент площади $d\vec{S}$.

Вспоминая смысл вектора Пойнтинга, будем иметь

$$dI = \left(\vec{S}, d\vec{s} \right) = \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{n} r^2 d\Omega \vec{n}, \quad (7.8)$$

где учтена формула (7.7), а также то, что $d\vec{s} \parallel \vec{n}$ и $dS = r^2 d\Omega$.

Из (7.8) находим:

$$dI = \frac{c}{\mu_0} B^2 r^2 d\Omega. \quad (7.9)$$

Подставляя сюда выражение (7.5) для поля \vec{B} , получим:

$$dI = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{4\pi c} \left[\frac{\ddot{\vec{d}}}{d}, \vec{n} \right]^2 d\Omega. \quad (7.10)$$

Именно в этом пункте и сыграло свою решающую роль то обстоятельство, что при больших r поля \vec{E} и \vec{B} убывают по модулю как $1/r$. В итоге дифференциальная интенсивность излучения dI , если брать ее в соответственные моменты времени, оказывается не зависящей от расстояния r до источников. В этом находит свое выражение закон сохранения энергии электромагнитного излучения. И именно поэтому под dI можно понимать энергию, испускаемую в элемент телесного угла $d\Omega$, без указания элементарной площадки $d\vec{S}$, которая на него опирается.

Раскроем в (7.10) модуль векторного произведения, учитывая, что

$$\left| \frac{\vec{d}}{d} \right| = 1: \quad dI = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{4\pi c} \left| \frac{\ddot{\vec{d}}}{d} \right|^2 \cdot \sin^2 \theta d\Omega. \quad (7.11)$$

Отсюда сразу видно, как излучение распределяется по углу θ между вектором $\frac{\ddot{\vec{d}}}{d}$ и вектором \vec{n} , задающим направление излучения (см. рис. 20). Принимая во внимание, что $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, из (7.11) найдем

$$dI = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{4\pi c} \left| \frac{\ddot{\vec{d}}}{d} \right|^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi. \quad (7.12)$$

Для вычисления полной интенсивности излучения I , т.е. количества электромагнитной энергии, испускаемой источниками в единицу времени по всем направлениям, нужно выполнить в (7.12) интегрирование по углам. Так как интеграл по φ равен 2π , а

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\pi} (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \frac{4}{3},$$

то из (7.12) мы получаем одну из основных формул классической теории излучения

$$I = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left| \ddot{\vec{d}} \right|^2 = \frac{\left| \ddot{\vec{d}} \right|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (7.13)$$

которая имеет и свой непосредственный квантовый аналог. Если дипольный момент изменяется со временем по периодическому (например, гармоническому) закону, то целесообразно вместо мгновенных значений dI и I интенсивности излучения рассматривать средние по периоду T значения:

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt. \quad (7.14)$$

Полученные результаты относятся к (электрическому) дипольному излучению. При учете следующих членов разложения запаздывающих потенциалов возникает излучение и других типов: магнитное дипольное, электрическое квадрупольное и т.д. Обычно вносимые ими поправки гораздо меньше основного эффекта, связанного с дипольным излучением. Но если последнее по каким – то причинам отсутствует, то иные типы излучения становятся главенствующими.

7.3 Простейшие излучающие системы

Пусть дипольный момент системы заряженных частиц изменяется со временем по гармоническому закону:

$$\vec{d} = \vec{d}_0 \cos \omega t. \quad (7.15)$$

Тогда для \vec{B} и \vec{E} , порождаемых таким элементарным излучателем, будем иметь

$$\vec{B} \left(\vec{r} \middle| t \right) = \omega^2 \left[\vec{n}, \vec{d}_0 \right] \cdot \frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi c} \equiv \frac{\vec{B}_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (7.16)$$

и

$$\vec{E}\left(\vec{r} \middle| t\right) = \omega^2 \left[\left[\vec{n}, \vec{d}_0 \right], \vec{n} \right] \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \equiv \frac{\vec{E}_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (7.17)$$

Видим, что электромагнитное поле представляет собой монохроматическую расходящуюся сферическую волну с частотой, равной частоте излучателя. Для полной интенсивности излучения из формул (7.13) и (7.15) находим

$$I(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \cdot d_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t \quad (7.18)$$

Усредняя эту величину по времени с учетом того, что $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$, получим:

$$\bar{I} = \frac{\mu_0}{12\pi c} \cdot d_0^2 \omega^4 \quad (7.19)$$

Отсюда видно, что интенсивность излучения диполя, меняющегося по гармоническому закону, прямо пропорциональна квадрату амплитуды дипольного момента, а главное – четвертой степени частоты его колебаний. Общеизвестно, сколь важную роль играют эти свойства для осуществления эффективной радиосвязи, основанной на модуляции высокочастотных электромагнитных колебаний низкочастотными сигналами.

1. Рассмотрим систему частиц с одинаковыми удельными зарядами

$$\frac{q_a}{m_a} = \text{const} = \frac{q}{m}. \quad (7.20)$$

- (наиболее важный случай – система одинаковых частиц, например электронов).

Дипольный момент такой системы

$$\vec{d} = \sum_a q_a \vec{r}_a \equiv \sum_a \frac{q_a}{m_a} m_a \vec{r}_a = \frac{q}{m} \sum_a m_a \vec{r}_a. \quad (7.21)$$

но

$$\sum_a m_a \vec{r}_a \equiv \sum_a m_a \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a} = M \vec{R}, \quad (7.22)$$

где M – полная масса системы, \vec{R} – радиус - вектора ее центра масс, а потому

$$\vec{d} = \frac{M}{m} q \vec{R}. \quad (7.23)$$

Если рассматриваемая система является замкнутой, то, как известно из механики, ее центр масс движется равномерно, т.е. $\vec{\ddot{R}} = 0$. Из (7.23) следует, что тогда и $\vec{\ddot{d}} = 0$, а потому дипольное излучение у замкнутой системы частиц с одинаковыми удельными зарядами отсутствует. Как уже говорилось, это не означает, что у такой системы излучения нет, но оно, при прочих равных условиях, является очень слабым.

Именно такая ситуация всегда имеет место в гравитодинамике, где роль заряда играет величина $\sqrt{G} \cdot m$, и удельные заряды всех частиц равны \sqrt{G} , т.е. одинаковы. Здесь может возникать только относительно слабое квадрупольное излучение. К тому же интенсивность гравитационного взаимодействия, ответственного в данном случае за излучение, крайне мала. Поэтому гравитационные волны до сих пор не зарегистрированы.

Для одной заряженной частицы дипольный момент равен $q \vec{r}$, и

$$\vec{\ddot{d}} = q \vec{\ddot{r}} \equiv q \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{F}, \quad (7.24)$$

где \vec{a} – ускорение частицы, \vec{F} – действующая на нее сила. Отсюда видно, что излучать может только ускоренно движущийся заряд. В прочем, это ясно

уже из принципа относительности, ибо при $v = const$ существует ИСО, в которой данная частица покоится. Неподвижный же заряд создает вокруг себя только кулоновское поле, не излучая никакой энергии. Гораздо важнее другой вывод: всякий ускоренно движущийся заряд обязательно излучает электромагнитные волны, причем уже в дипольном приближении. Подставляя (7.24) в формулу для I , найдем:

$$I = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c} \cdot \frac{q^2 F^2}{m^2}. \quad (7.25)$$

а) Со стороны магнитного поля на заряженную частицу действует сила Лоренца

$$\vec{F} = q \left[\vec{v}, \vec{B} \right], \quad (7.26)$$

и, согласно (7.25), интенсивность излучения этой частицы будет равна

$$I = \frac{\mu_0 q^4}{6\pi c m^2} \left[\vec{v}, \vec{B} \right]^2 \quad (7.27)$$

Если магнитное поле \vec{B} стационарно и однородно и если начальная скорость частицы $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, то в отсутствие излучения, как известно, частица двигалась бы по окружности неизменного радиуса с постоянной по модулю скоростью $\vec{v} \perp \vec{B}$ $\left(\left| \vec{v} \right| = \left| \vec{v}_0 \right| \right)$. За счет излучения частица будет растрчивать свою механическую энергию, двигаясь по спирали, которая стягивается к центру исходной окружности (сравните с движением ИСЗ, попавшего в верхние слои атмосферы).

б) Рассмотрим теперь поведение заряженной частицы в современных циклических ускорителях, где на нее действует не только магнитное, но и электрическое поле. Последнее сообщает частице энергию ε , прирост которой в единицу времени задается формулой

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \wp = q \left(\vec{v}, \vec{E} \right). \quad (7.28)$$

Магнитное поле закручивает траектории частиц. Его закон изменения во времени $\vec{B} = \vec{B}(t)$ и/или радиальную зависимость $\vec{B} = \vec{B}(r)$ можно подобрать так, чтобы частица двигалась по окружности постоянного радиуса R . Но всякое криволинейное движение есть движение ускоренное и потому ускоряемая частица будет растрчивать свою энергию на электромагнитное излучение, именуемое в данном случае синхротронным. Энергетические потери в единицу времени определяются формулой (7.25), в которую нужно подставить центростремительное ускорение $a = v^2/R$:

$$I = \frac{\mu_0 q^2 v^4}{6\pi c R^2} = \frac{2\mu_0 q^2}{3\pi c R^2 m^2} \left(\frac{mv^2}{2} \right)^2 = \frac{2\mu_0 q^2 \varepsilon^2}{3\pi c R^2 m^2}. \quad (7.29)$$

Они увеличиваются с ростом энергии по квадратичному закону и в конце концов становятся сравнимыми с приростом энергии (7.28). Потери на син-

хронное излучение особенно велики для легких частиц, т.к. они пропорциональны m^{-2} . Поэтому в настоящее время мощные циклические ускорители электронов практически не применяются, а вместо них используют линейные ускорители, в которых синхротронное излучение отсутствует. Напротив, все мощные ускорители протонов до сих пор являются циклическими.

в) Оценим время, за которое электрон в планетарной модели атома, согласно классическим представлениям, должен упасть на ядро. Будем считать энергетические потери на протяжении одного оборота малыми (это предположение оправдывается окончательным результатом), так что в каждый малый промежуток времени электрон можно считать движущимся по окружности, радиус которой $r = r(t)$ постепенно уменьшается. Подставляя в (7.25) кулоновскую силу $F = k \frac{e^2}{r^2}$, действующую на электрон со стороны протона, получим для его энергетических потерь в единицу времени:

$$I = \frac{\mu_0 k^2 e^6}{6\pi c m^2} \cdot \frac{1}{r^4}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (7.30)$$

Скорость v , входящую в выражение для энергии

$$\varepsilon = T + U = \frac{mv^2}{2} - k \frac{e^2}{r}, \quad (7.31)$$

исключим с помощью второго закона Ньютона:

$$m \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}, \quad (7.32)$$

в результате чего будем иметь:

$$\varepsilon = -k \frac{e^2}{2r}. \quad (7.33)$$

Тогда соотношение (7.30) превратится в дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $r = r(t)$:

$$k \frac{e^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0 k^2 e^6}{6\pi c m^2} \left(\frac{1}{r} \right)^4. \quad (7.34)$$

Вводя функцию $u = \frac{1}{r}$ и разделяя переменные, получим

$$dt = \frac{3\pi c m^2}{\mu_0 k e^4} \frac{du}{u^4}. \quad (7.35)$$

Для отыскания времени жизни τ атома водорода нужно выполнить интегрирование по r от его начального значения $r=R$ до конечного значения $r=0$ или, что то же самое, интегрирование по u от $1/R$ до ∞ :

$$\tau = \frac{3\pi c m^2}{\mu_0 k e^4} \int_{1/R}^{\infty} \frac{du}{u^4}. \quad (7.36)$$

В итоге находим:

$$\tau = \frac{\pi c m^2 R^3}{\mu_0 k e^4}. \quad (7.37)$$

Подстановка в (7.37) численных значений СГС дает по порядку величины

$$\tau \sim 10^{-10} \text{ с}. \quad (7.38)$$

Полагая, далее, в (7.32) $r=R$ (начальный радиус) и $v=V$ (начальная скорость), получим $\frac{V}{R} = \sqrt{\frac{ke^2}{mR^3}}$, откуда для начального периода T обращения электрона находим

$$T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi \sqrt{\frac{mR^3}{ke^2}}. \quad (7.39)$$

Подставляя сюда, численные значения, будем иметь

$$T \sim 10^{-16} \text{ с}. \quad (7.40)$$

Эта величина в 10^6 раз меньше времени (7.38), и электрон, падающий на протон (согласно классическим представлениям), должен совершить огромное число оборотов. Поэтому расстояния между соседними витками спирали будут чрезвычайно малыми, благодаря чему и можно считать, что в каждый относительно малый промежуток времени электрон движется по окружности.

7.4 Рассеяние света свободными электронами

Если на систему заряженных частиц падает внешняя электромагнитная волна, то под ее воздействием частицы приобретут ускорения и станут испускать во всех направлениях вторичные волны. В итоге возникнет, как говорят, рассеяние первичной электромагнитной волны. Для его характеристики вводится дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$. Оно определяется как отношение количества энергии, испускаемой зарядом в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$, т.е. дифференциальной интенсивности их излучения dI , к плотности потока энергии поля падающего на систему извне, т.е. к модулю вектора Пойнтинга \vec{S} :

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{S} \quad (7.41)$$

(черта означает усреднение по времени). Дифференциальное сечение имеет, очевидно, размерность площади. Если проинтегрировать его по всем направлениям, то получится *полное сечение рассеяния* σ .

Пусть теперь имеется один свободный электрон, первоначально неподвижный, и пусть на него падает плоская монохроматическая линейно поляризованная волна, под действием которой он начинает двигаться. Электрическое поле такой волны можно записать в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha) \quad (7.42)$$

Обычно оно является весьма слабым (лазерные источники не рассматриваем), а потому вызываемые им колебания электрона будут малыми:

$$|\Delta\vec{r}| \ll \lambda, \quad \vec{V} \ll c, \quad (7.43)$$

где $\Delta\vec{r}$ - его перемещение, а \vec{V} - скорость. Первое из неравенств (7.43) позволяет при рассмотрении электрической силы, действующей на электрон, считать слагаемое $\vec{k}\vec{r} \sim \frac{r}{\lambda}$ с полной фазе волны (7.42) постоянным по сравнению с ωt , так что его можно включить в начальную фазу α :

$$\vec{E} \cong \vec{E}_0 \cos(\omega t + \beta). \quad (7.44)$$

Второе неравенство (7.43) дает возможность пренебречь магнитной силой по сравнению с электрической, поскольку в плоской волне $|\vec{E}| = c |\vec{B}|$, и отношение

$$\frac{F_{\text{магн}}}{F_{\text{эл}}} = \frac{evB}{eE} = \frac{evB}{ecB} = \frac{v}{c} \ll 1.$$

В итоге для второй производной от вектора дипольного момента по времени получим:

$$\vec{d} = -e\vec{r}; \quad \ddot{\vec{d}} = -e\ddot{\vec{r}} = -e\frac{\vec{F}}{m} = \frac{e^2}{m}\vec{E} = \frac{e^2}{m}\vec{E}_0 \cos(\omega t + \beta) \quad (7.45)$$

(Здесь учтено, что $\vec{F} = -e\vec{E}$). Отсюда и из пункта 1 предыдущего параграфа следует, что частота рассеянного света ω' совпадает с частотой падающего света ω :

$$\omega' = \omega \quad (7.46)$$

Найдем дифференциальную интенсивность излучения электрона:

$$dI = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{4\pi c} |\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \Theta d\Omega;$$

подставим сюда (7.45)

$$dI = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{e^4}{m^2} E^2 \sin^2 \Theta d\Omega, \quad (7.47)$$

где Θ - угол между вектором \vec{E} и направлением рассеяния. Далее, модуль вектора Пойтинга для плоской электромагнитной волны, как было показано, равен

$$S = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{1}{\mu_0 c} E^2. \quad (7.48)$$

Подставив (7.47) и (7.48) в уравнение (7.1), найдем дифференциальное сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{dI}{S} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 c^4 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \Theta d\Omega = \frac{e^4 \sin^2 \Theta d\Omega}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^4}. \quad (7.49)$$

Интегрируя (7.49) по всем углам Θ и φ получим полное сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) \quad (7.50)$$

Соотношение (7.50) называется формулой Томсона. Введем обозначение

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (7.51)$$

так называемый классический радиус электрона, введенный в начале XX века Лоренцем. С учетом (7.51) формула Томсона приобретает вид:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (7.52)$$

Отступление. О классическом радиусе электрона.

В начале XX века многие физики (Х. Лоренц, М. Абрагам, А. Пуанкаре, П. Ланжевен и другие) придерживались той точки зрения, что вся масса электрона имеет чисто электромагнитное происхождение. При таком подходе энергия покоя электрона отождествлялась с ее собственной электромагнитной энергией:

$$mc^2 = \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где R -радиус электрона, α – коэффициент порядка 1 (для равномерно заряженного по объему шара, как известно из электростатики, $\alpha = \frac{3}{5}$). Отсюда для радиуса электрона находим :

$$R = \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \equiv \alpha r_0.$$

Здесь введена величина $r_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \approx 2.8 * 10^{-15} (м)$, называемая

классическим радиусом электрона. В современной физике смысл этой величины не соответствует ее названию. Классический радиус электрона появляется в некоторых задачах электродинамики просто как параметр с размерностью длины, образованный из фундаментальных констант e , m , c . (Например, как мы видели выше, он входит в формулу Томсона для сечения рассеяния света свободными электронами).

Возможна и другая трактовка величины r_0 : как расстояние между электронами, на котором энергия их электрического взаимодействия становится равной энергии покоя каждого электрона :

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = mc^2$$

Можно было бы думать, что именно такими расстояниями и ограничивается снизу область применимости классической электродинамики. Однако на самом деле многие ее положения становятся непригодными уже на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона $\Lambda \equiv \frac{\hbar}{mc} \approx 3.9 * 10^{-13}$ м, на которых становятся существенными квантоворелятивистские эффекты. (С точки зрения релятивистской квантовой механики электрон «дрожит» с амплитудой Λ и не может быть локализован с большей точностью, чем эта величина, если даже мы ничего не знаем о его импульсе. Это показали Ландау и Пайерлс в 1931 г.).

Вернемся к формуле Томсона (7.52). Из классической механики известно, что сечение рассеяния частиц на твердом шарике с радиусом R равно геометрическому сечению шарика

$$\sigma = \pi R^2 \tag{7.53}.$$

Как видно из сопоставления формул (7.52) и (7.53) , в таком (и только в таком!) смысле электрон можно считать твердым шариком радиуса $R \sim r_0$, на котором происходит упругое рассеяние электромагнитной волны. На самом же деле, по современным данным, размеры электрона не превышают 10^{-18} м, что значительно меньше $r_0 \sim 10^{-15}$ м.

7.5 Радиационное трение

Пусть требуется описать движение заряженной частицы, сопровождающееся излучением электромагнитных волн. При строгом подходе к этой задаче нужно рассмотреть единую систему «частица + поле» и решать уравнение движения частицы совместно с уравнениями Максвелла для поля. Однако технически такое решение очень громоздко. Возникает вопрос: нельзя ли описать указанное движение частицы в рамках только механики, исключая из рассмотрения электромагнитное поле? Ясно, что в строгой постановке ответ на этот вопрос будет отрицательным. Но он может стать вполне разрешимым, если принять какие-то разумные приближения.

Очевидно, что более или менее корректная механическая постановка задачи о движении заряженной частицы требует включения во второй закон

Ньютона наряду с обычными силами какой-то дополнительной эффективной силы, с помощью которой должны учитываться энергетические потери на излучение. Эту силу называют *силой радиационного трения*, и нам требуется отыскать ее явное выражение. (Некоторым аналогом здесь служит описание движения частицы в НИСО, где также приходится модифицировать 2-ой закон Ньютона путем включения в него фиктивной силы инерции).

Излучение возникает только тогда, когда частица движется ускоренно. Но ускорение не может возникнуть само по себе, и на излучающую частицу обязательно должны действовать «обычные» внешние силы. Сама постановка соответствующей механической задачи будет, очевидно, иметь смысл только в том случае, когда энергетические потери гораздо меньше работы внешних сил. Это - важнейшее предположение при введении силы радиационного трения, и о нем нужно постоянно помнить при физической интерпретации результатов, которые будут получены ниже.

Итак, для учета излучения вводим во второй закон Ньютона некоторую эффективную силу \vec{F}_R - силу радиационного трения :

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R. \quad (7.54)$$

Подберем \vec{F}_R так, чтобы работа этой силы равнялась энергетическим потерям на излучение:

$$A_R \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_R d\vec{r} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_R \vec{V} dt = \Delta\varepsilon = - \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt = - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{V}}^2(t) dt$$

Здесь использована формула

$$I = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left| \ddot{\vec{d}} \right|^2 = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left| \ddot{\vec{d}} \right|^2$$

и учтено, что для частицы $\ddot{\vec{d}} = q\dot{\vec{V}}$.

С помощью интегрирования по частям находим:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_R \cdot \vec{V}) dt = - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} (\dot{\vec{V}}\vec{V}) \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{\vec{V}}\vec{V}) dt. \quad (7.55)$$

В большинстве физически интересных случаев 1-ый член справа исчезает: при периодическом движении, если $t_2 - t_1 = T$; при движении частицы в магнитном поле, где $(\dot{\vec{V}}\vec{V}) = 0$; при конечном времени действия внешней силы, когда $\dot{\vec{V}}(t_1) = \dot{\vec{V}}(t_2) = 0$. Он исчезает и при финитном движении частицы, когда рас-

сматриваются средние значения переменных ее состояния, поскольку $(\dot{V}\vec{V}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)$, а усреднение полной производной по времени при финитном движении дает нуль. Считая данное условие выполненным, приходим к заключению, что уравнение энергетического баланса (7.55) будет справедливо, если положить

$$\vec{F}_R = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{V}} \quad (7.56)$$

Таким образом, мы установили, что во всех перечисленных случаях выражение (7.56) для силы радиационного трения оказывается достаточным для того, чтобы удовлетворить сформулированным выше требованиям.

Уравнение движения заряженной частицы с учетом ее электромагнитного излучения принимает вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{r}} \quad (7.57)$$

где \vec{F} - обычная сила (чаще всего – сила Лоренца), зависящая от $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ и, может быть, явно от t .

Естественно задать вопрос: в полной ли мере достигнута цель, сформулированная в начале параграфа? Мы стремились описать поведение излучающей частицы на чисто механическом языке. Однако, как видно из уравнения (7.57), эффективный учет потерь на излучение выводит нас за рамки классической механики.

Действительно, в основе классической механики лежит утверждение, что состояние частицы задается ее координатами и скоростью (или, что эквивалентно, - что ускорение частицы есть функция ее координат и скорости: $\ddot{\vec{r}} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}|t)$). Это и есть уравнение движения, то есть фактически второй закон Ньютона. Уравнение же (7.57) содержит член с третьей производной координат по времени, существование которого не укладывается в рамки механики. Поэтому к выражению (7.56) для силы радиационного трения, приближенному по своей сути, надо относиться с осторожностью. Напомним, что мы с самого начала исходили из предположения

$$|\vec{F}_R| \ll |\vec{F}| \quad (7.58)$$

В такой ситуации разумнее всего учитывать силу радиационного трения в уравнении движения (7.57) методом итераций, что и будет показано ниже на конкретном примере.

Если не учитывать вышесказанное, то можно прийти к физически нелепым результатам. Пусть внешние силы отсутствуют, т.е. $\vec{F} = 0$. Тогда уравнение (7.57) запишется как

$$m\vec{a} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\vec{a}}. \quad (7.59)$$

У него есть тривиальное решение $\vec{a} = 0$, имеющее очевидный смысл: отсутствует сила – отсутствует ускорение. Но наряду с этим существует и нетривиальное решение уравнения (7.59):

$$\vec{a} = \vec{a}_0 \cdot e^{-\frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{q^2} t}. \quad (7.60)$$

Оно отвечает, например, тому, что электрон, вылетевший из конденсатора, где он приобрел начальное ускорение, дальше будет двигаться с экспоненциально возрастающим ускорением (и, конечно, с возрастающей скоростью). При этом ускорение увеличивается только благодаря энергетическим потерям на излучение, что, конечно, абсурдно. Дело здесь в том, что при $F=0$ заведомо нарушено условие (7.58) и поэтому само понятие силы радиационного трения здесь неправомерно.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть на электрон падает электромагнитная волна

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha). \quad (7.61)$$

Тогда на него будет действовать внешняя сила, которую с хорошей степенью точности можно записать как

$$\vec{F} = -e\vec{E}_0 \cos \omega t. \quad (7.62)$$

(Обычно колебания электрона, вызываемые электромагнитной волной, невелики, т.е. $|\Delta\vec{r}| \ll \lambda$. Это позволяет считать член $\vec{k}\vec{r} \sim \frac{r}{\lambda}$ постоянным по сравнению с ωt , так что его можно включить в начальную фазу α , а получившуюся начальную фазу без потери общности считать равной нулю). В пренебрежении радиационным трением из (7.62) получаем откуда

$$\begin{aligned} \dot{\vec{V}} &= \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 \cos(\omega t), \\ \ddot{\vec{V}} &= \frac{e\omega}{m} \vec{E}_0 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в (7.56) находим

$$F_R = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \omega \vec{E}_0 \sin \omega t. \quad (7.63)$$

Из (7.62) и (7.63) заключаем, что неравенство (7.58) выполняется во все моменты времени при условии

$$\begin{aligned} & \frac{e^3 \omega}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \ll e, \\ \text{или} & \\ & \frac{c}{\omega} \sim \lambda \gg \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim r_0, \end{aligned}$$

т.е. при

$$\lambda \gg r_0, \quad (7.64)$$

где $r_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 10^{-15} \text{ м}$ - классический радиус электрона.

Если учесть, что длины $\lambda \sim r_0$ отвечают самому жесткому ядерному излучению, то мы видим, что исходное предположение (7.58) для электрона, на который падает электромагнитная волна, оказывается справедливым в большинстве реальных физических задач. Заметим, что критерий (7.64) является достаточно универсальным. В частности, он должен выполняться для электронного осциллятора с собственной частотой ω_0 , излучающего электромагнитные волны с $\lambda \sim \frac{c}{\omega_0}$. Рассмотрим эту важную задачу подробнее.

Пусть на электрон действует квазиупругая сила $\vec{F} = -k\vec{r}$, а других внешних сил нет. Тогда уравнение движения (7.57) запишется в виде

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \ddot{\vec{r}}, \quad (7.65)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Пренебрегая излучением, получим

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

и исходное предположение (7.58) сведется в данном случае к неравенству

$$\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \omega_0^3 \ll \omega_0^2 \quad . \quad (7.66)$$

Отсюда опять приходим к условию (7.64), которое, как мы видели, даже в рентгеновском диапазоне выполняется с огромным запасом.

Преобразуем уравнение (7.65) с помощью метода итераций. Полагая в нулевом приближении $\vec{F}_R = 0$, будем иметь

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r}, \quad \text{откуда} \quad \ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \dot{\vec{r}}.$$

Подстановка этого выражения в (7.65) дает в первом приближении

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = 0 \quad , \quad (7.67)$$

где введено обозначение

$$\gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} = \frac{2\omega_0^2}{3c} r_e \sim \omega_0 \frac{r_e}{\lambda}. \quad (7.68)$$

Уравнения (7.67) и (7.65) фактически эквивалентны. Но метод итераций позволил нам заменить немеханическую силу \vec{F}_R , включающую третью производную по времени, привычной диссипативной «механической» силой $-m\gamma\dot{\vec{r}}$, подобной стоксовой силе вязкого трения. Заметим, что применительно к собственному излучению квазиупруго связанного электрона критерий (7.64) – неравенство (7.58) – можно переписать как

$$\gamma \ll \omega_0 \quad . \quad (7.69)$$

Этот результат следует из определения γ и неравенства (7.66).

Список использованных источников

1. **Ландау, Л.Д.**, Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля./Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: Наука,1987. -510 с.
2. **Матвеев, А.Н.** Электродинамика / А.Н. Матвеев - М.: Высшая школа, 1980. – 383 с.
3. **Тамм, И.Е.** Основы теории электричества/ И.Е. Тамм - М.: Наука, 1989. -504 с.
4. **Левич, В.Г.** Курс теоретической физики Т.1./ В.Г. Левич –М.: Наука, 1969.–912с.
5. **Компанец, А.С.** Курс теоретической физики Т.1./ А.С. Компанец – М.: Просвещение, 1972. -512 с.
6. **Савельев, И.В.** Основы теоретической физики» Т.1./ И.В. Савельев –М.:Наука,1975. –416с.