Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

А. Н. Благовисная, С. Т. Дусакаева, О. А. Тяпухина

МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА МНОГООТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ

Методические указания к самостоятельной работе

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2010

УДК 330.4 (07)
ББК 65.050.03 я 7
Б 68

Рецензент – профессор, доктор технических наук И.П. Болодурина

Благовисная, А.Н.

Б 68 Введение в модель Леонтьева многоотраслевой экономики: методические указания к самостоятельной работе / А.Н. Благовисная, С.Т. Дусакаева, О.А. Тяпухина; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2010. – 58 с.

Методические указания посвящены экономико-математической модели Леонтьева многоотраслевой экономики и предназначены для самостоятельной работы студентов специальности 080505 Управление персоналом при изучении дисциплины «Математика». Методические указания включают теоретические сведения по модели Леонтьева в многоотраслевой экономике, ее виды, примеры решений задач, задания для самостоятельного решения, вопросы для самопроверки.

Методические указания составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика» для студентов специальности 080505 Управление персоналом.

УДК 330.4 (07)
ББК 65.050.03 я 7

Содержание

Введение

Перспективы вхождения России в единое Европейское экономическое пространство, выход на уровень международного сотрудничества в области высшего профессионального образования ставят перед российским образованием сегодня такие задачи, как обновление содержания образования, улучшение его качества, создание условий, которые давали бы возможность обеспечить новые образовательные результаты. Анализ исследований, посвященных профессионально-личностным качествам будущих экономистов, позволяет сделать вывод, что современный специалист в области экономики должен усвоить не только фундаментальные математические знания, но и быть готовым к самостоятельному овладению новыми математическими знаниями, применению их при решении профессиональных задач, самостоятельному изучению научной и экономической литературы с математическим содержанием. Поэтому возрастает роль самостоятельной работы при обучении будущих экономистов математике. Перед преподавателем встает задача организации самостоятельной внеаудиторной работы студента таким образом, чтобы способствовать развитию мотивации к дальнейшему освоению профессионально значимого математического аппарата, актуализации субъектного потенциала личности студента средствами математических дисциплин, реализации профессионально-прикладной направленности курса математики.

Для оптимальной организации самостоятельной работы студентов необходимы соответствующие учебно-методические рекомендации, позволяющие с первого года обучения студентов-экономистов реализовать на практике профессионально-прикладную направленность обучения математике.

Предлагаемая работа является методическими указаниями для студентов специальности 080505 Управление персоналом, стандарт которой содержит в дисциплине «Математика» раздел «Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике», предназначенный для самостоятельной работы студентов. Методические указания содержат теоретические сведения по балансовым моделям экономики, примеры решений задач, задачи для самостоятельного решения, вопросы и тексты для самопроверки, позволяющие подготовиться к различным видам контрольных проверок по данной теме. В методических указаниях предпринята попытка реализации идеи самопознания, самопонимания личности в процессе обучения: часть заданий представляет собой открытые вопросы, призванные, прежде всего, заставить студентов задуматься о своих целях и задачах изучения темы, причинах понимания или непонимания материала, умениях или неумениях решать задачи, о месте и роли изучаемой темы в будущей учебной и профессиональной деятельности.

Методические указания могут быть также рекомендованы для самостоятельного изучения студентам других экономических специальностей.

Уважаемые студенты! Перед изучением методических указаний предлагаем Вам задуматься над следующими вопросами:

1. Зачем я изучаю тему «Модель Леонтьева многоотраслевой экономики»?

2. Что я знаю о модели Леонтьева на момент начала изучения темы?

3. Каковы мои ожидания от данной темы?

1 Цель и особенности построения модели Леонтьева

Часто при экономическом планировании на уровне регионов или страны в целом возникает необходимость определения объема выпуска товаров, обеспечивающего заданный спрос населения и производственные нужды на эти товары при известной технологии. В предположении о линейности технологии (т.е. о прямой пропорциональности объема выпуска объемам затрат ресурсов) математической формализацией этой задачи является знаменитая модель "Затраты-выпуск", полученная в 1930 г. американским экономистом В. Леонтьевым.

В зависимости от цели исследования экономику можно изучать в различных разрезах - от уровня национальной экономики до уровня отдельных фирм и потребителей. **Целью построения модели Леонтьева** является анализ перетока товаров между отраслями экономики, обеспечивающего такое функционирование производственного сектора, когда объем выпуска соответствует суммарному (т.е. производственному и конечному) спросу на товары. Поэтому экономика рассматривается в разукрупненном до уровня отраслей виде. Предполагается, что каждая отрасль является "чистой", т.е. выпускает только один и только свой продукт. Это допущение и ряд других упрощений (постоянство технологии производства, отсутствие инвестиций, игнорирование невоспроизводимых ресурсов и др.) касаются, в основном, исходной модели. Их не следует относить к недостаткам модели, ибо она в дальнейшем обобщается и конкретизируется до разных уровней детализации.

Классическая модель Леонтьева имеет следующие **особенности**:

- рассматривается экономика, состоящая из "чистых" отраслей, т.е. когда каждая отрасль выпускает один и только свой вид продукта;

- взаимосвязь между выпуском и затратами описывается линейными уравнениями (линейная и постоянная технология);

- вектор спроса на товары считается заданным, т.е. в модели отсутствуют как таковые оптимизационные задачи потребителей;

- вектор выпуска товаров вычисляется, исходя из спроса, т.е. отсутствуют как таковые оптимизационные задачи фирм;

- равновесие понимается как строгое равенство спроса и предложения, т.е. стоимостной баланс отсутствует, более того, цены товаров в модели не рассматриваются вообще.

Итак, все отрасли предполагаются взаимозависимыми в том смысле, что для производства своего продукта каждая из них использует результаты производства (продукты) других фирм и только их. Иначе говоря, на данном уровне формализации применение отраслями невоспроизводимых производственных факторов не предусматривается.

2 Построение модели Леонтьева

Построим модель Леонтьева.

Пусть имеется экономическая система, сфера производства которой состоит из n отраслей, выпускающих n видов продукта, причем каждая отрасль выпускает ровно один вид. Такая связь между отраслями задается, как правило, в виде таблиц, называемых **таблицами межотраслевого баланса**.

Обозначим:

x_i — общий (валовой) объем выпуска i-ой отрасли (объем товаров и услуг, произведенных в одной из n отраслей), $i = 1,2...,n$;

b_{ij} — объем товаров и услуг i-ой отрасли, потребляемой j-ой отраслью в процессе производства;

y_i — конечный продукт i-ой отрасли (объем продукции i-ой отрасли, потребляемой в отрасли конечного спроса).

Составим таблицу 1 межотраслевого баланса.

Таблица 1 – Таблица межотраслевого баланса

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Отрасли</td><td colspan="5">Потребители продуктов</td><td rowspan="2">Конечный продукт</td><td rowspan="2">Валовой выпуск продукции</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>…</td><td>n</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Поставщики продуктов (производство)</td><td>1</td><td>b_{11}</td><td>b_{12}</td><td>b_{13}</td><td>…</td><td>b_{1n}</td><td>y_1</td><td>x_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>b_{21}</td><td>b_{22}</td><td>b_{23}</td><td>…</td><td>b_{2n}</td><td>y_2</td><td>x_2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>b_{31}</td><td>b_{32}</td><td>b_{33}</td><td>…</td><td>b_{3n}</td><td>y_3</td><td>x_3</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>n</td><td>b_{n1}</td><td>b_{n2}</td><td>b_{n3}</td><td>…</td><td>b_{nn}</td><td>y_m</td><td>x_m</td></tr>
</table>

Валовой объем продукции i-той отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта. Тогда для каждой строки таблицы 1 получим уравнения

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + y_i, \ (i = 1,2,...n) \tag{1}$$

Уравнения (1) называют **соотношениями баланса.**

Единицы измерения всех рассматриваемых величин могут быть или натуральными (кубометры, тонны, штуки, киловатт-часы и т.п.), или стоимостными. В зависимости от этого различают натуральный и стоимостной межотраслевые балансы. Для определенности будем рассматривать стоимостной межотраслевой баланс, то есть такую модель, в которой все значения величин, входящих в уравнения модели, имеют стоимостное выражение.

В. Леонтьев, рассматривая развитие американской экономики в 30-е годы XX века, обратил внимание на то, что величины $a_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{x_j} \ (i, j = 1,2,...n)$ остаются постоянными в течение ряда лет. Это обусловливается примерным постоянством используемой технологии.

Поэтому мы сделаем такое допущение: для выпуска любого объема x_j продукции отрасли j j необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве $a_{ij} x_j$ где a_{ij}- постоянный коэффициент. Проще говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение вводит линейность существующей технологии. Принцип линейности распространяют и на другие виды издержек (например, на оплату труда), а также на нормативную прибыль.

Итак, введем коэффициенты прямых затрат:

$$a_{ij} = \frac{b_{ij}}{x_j}, \ (i, j = 1,2,...n)$$

показывающие затраты продукции i-й отрасли на производство единицы стоимости j-й отрасли.

Полагая, что в некотором промежутке времени коэффициенты a_{ij} будут постоянными и зависящими от сложившейся технологии производства рассмотрим линейную зависимость материальных затрат от валового выпуска, т.е.

$$b_{ij} = a_{ij} x_j$$

вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название линейной.

Теперь соотношения баланса примут вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \ (i = 1,2,...n) \qquad (2)$$

Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где

X - **вектор валового выпуска**;

A - **матрица прямых затрат** (технологическая или структурная матрица);

Y **- вектор конечного продукта**.

Тогда соотношения баланса можно записать в виде:

$$X = AX + Y \qquad (3)$$

Уравнение (3) с рассмотренной интерпретацией матрицы A и векторов X и Y называется **моделью Леонтьева**. Интерпретируя выражение AX как затраты, эту систему часто называют моделью «Затраты-выпуск».

3 Исследование модели Леонтьева. Продуктивные матрицы

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого вектора валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y.

Модель Леонтьева призвана ответить на вопрос: можно ли в условиях данной технологии удовлетворить конечный спрос? Ответ на этот вопрос сводится к существованию решения системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = x_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n = x_n, \end{cases} \tag{4}$$

относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Условия существования и единственности решения такой системы хорошо известны из курса алгебры и описаны в приложении А настоящих методических указаний. Однако здесь речь идет о решении этой системы, имеющем подходящий экономический смысл. А именно, все элементы модели Леонтьева по их определению являются неотрицательными величинами, в том числе переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение 1. Модель Леонтьева называется *продуктивной*, если система (4) имеет неотрицательное решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то есть $x_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Запишем систему (4) в виде $X - AX = Y$. Полученное матричное уравнение перепишем как $(E - A)X = Y$.

Если матрица $(E - A)$ невырожденная, то есть ее определитель не равен нулю, тогда:

$$X = (E - A)^{-1} Y \tag{5}$$

где E - единичная матрица n-го порядка.

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат.

Таким образом, существование неотрицательного решения системы (4) определяется существованием невырожденной матрицы $S = (E - A)^{-1}$, обратной к матрице $(E - A)$.

Экономический смысл элементов матрицы $S = (s_{ij})$ заключается в том, что каждый элемент s_{ij} матрицы S есть величина валового выпуска продукции i-й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-й отрасли.

В соответствии с экономическим смыслом задачи значения x_i должны быть неотрицательны при неотрицательных значениях y_j и a_{ij}.

Определение 2. Матрица $A > 0$ называется продуктивной, если для любого вектора $Y > 0$ существует решение $X > 0$ уравнения $(E - A)X = Y$. В этом случае и модель Леонтьева называется продуктивной.

Продуктивность матрицы материальных затрат в модели Леонтьева означает, что существует хотя бы один режим работы отраслей данной экономической системы, при котором каждого продукта выпускается больше, чем затрачивается на его производство. Другими словами, при этом режиме сфера производства создает положительный столбец прибавочного (конечного) продукта:

$$X - AX > 0.$$

Возникает естественный вопрос: как следует поступить, чтобы сравнительно несложным путем и как можно раньше выяснить, является ли предъявленная матрица материальных затрат исследуемой сферы производства продуктивной или, напротив, производство убыточно и совокупные материальные затраты превышают объем выпуска? Ответы на данный вопрос можно получить, воспользовавшись следующими критериями, позволяющими определять продуктивность неотрицательной квадратной матрицы.

Первый критерий продуктивности. Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $S = (E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

Второй критерий продуктивности. Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда максимальное по модулю собственное значение матрицы А удовлетворяет неравенству $\lambda_{max} < 1$.

Определение. Максимальное по модулю собственное значение неотрицательной матрицы А обозначается λ_A и называется **числом Фробениуса** матрицы А.

Замечание. Помимо приведенных критериев продуктивности неотрицательной квадратной матрицы A существуют и другие критерии продуктивности. В частности, матрица A продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма его элементов строго меньше единицы.

Замечание. Если матрица материальных затрат А продуктивна, то любой столбец прибавочного продукта может быть произведен при соответствующем режиме работы отраслей. Итак, пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

продуктивна и

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- столбец конечного продукта. Режим работы отраслей, обеспечивающий этот продукт, находится из полученного ранее равенства $X = (E - A)^{-1} Y = SY$. Для продуктивной матрицы построенное матричное уравнение имеет решение при любых y_j ($j = 1,2,\dots,n$).

4 Двойственная модель Леонтьева

Важным следствием модели Леонтьева являются результаты, получаемые с применением двойственной к ней модели. Двойственная модель Леонтьева интерпретируется как модель цен в системе межотраслевых связей.

Цены в открытой модели межотраслевых связей определяются из системы уравнений, каждое из которых устанавливает, что цена единицы продукции производящего сектора должна быть равна совокупным издержкам производства в расчете на единицу выпущенной в этом секторе продукции. В издержки входит не только плата за ресурсы, приобретенные в данном секторе и других секторах, но и добавленная стоимость (заработная плата, прибыль предпринимателей, правительственные налоги, выплачиваемые правительству и другим секторам конечного спроса, и др.).

Обозначим:

v_i — суммарные платежи i-го сектора за одну единицу произведенной i-м сектором продукции;

p_j — цена единицы продукции j-го сектора;

b_{ij} — объем товаров и услуг i-го сектора, потребляемых при производстве продукции в j-м секторе.

Тогда $x_i p_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} p_j + v_i x_i$, но поскольку $b_{ij} = a_{ij} x_i$, то $x_i p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_i p_j + v_i x_i$ или

$$P = A^T P + V . \tag{6}$$

Уравнение (6) есть двойственная модель Леонтьева, где где A — структурная матрица экономики; V — заданный вектор платежей; P — искомый вектор цен. Тогда цены P можно найти по формуле $P = \left((E - A)^T\right)^{-1} V$, или, что то же самое,

$$P = \left((E - A)^{-1}\right)^{T} V .$$

Аналитические выражения цены P через платежи V имеют вид:

$$\begin{cases} p_1 = d_{11}v_1 + d_{21}v_2 + \ldots + d_{n1}v_n \\ p_2 = d_{12}v_1 + d_{22}v_2 + \ldots + d_{n2}v_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = d_{1n}v_1 + d_{2n}v_2 + \ldots + d_{nn}v_n \end{cases}$$

Из приведенных равенств видно, что элемент d_{ij} матрицы $(E - A)^{-1}$ показывает, как изменится цена p_i единицы продукции i-го сектора при изменении на единицу платежа v_j в j-м секторе.

Поскольку $X^T V = X^T (E - A)^T P = \left((E - A)X\right)^T P = Y^T P$ то для рассмотренной модели межотраслевых связей справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i$$

Левая часть этого тождества равна общей сумме добавленных стоимостей, выплачиваемых в сектор конечного спроса, а правая часть — суммарная стоимость продукции, поставленной производственными секторами в сектор конечного спроса. Другими словами, приведенное тождество подтверждает совпадение произведенного и использованного национального дохода.

Существование решения двойственного уравнения (6) относительно вектора цен также связано с неотрицательностью всех его элементов.

Если уравнение (6) имеет неотрицательное решение, то двойственная модель Леонтьева называется **прибыльной**. Это свойство является двойственным к понятию продуктивности модели Леонтьева в том смысле, что выполнение одного из свойств влечет справедливость другого.

Теорема. Для того чтобы модель Леонтьева (3) была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы двойственная к ней модель (6) была прибыльной.

5 Интерпретация модели Леонтьева как модели международной торговли

Мы рассмотрели классическую (исходную) модель Леонтьева, которая описывает производство по схеме «Затраты-выпуск». Значимость модели Леонтьева заключается еще и в том, что она применяется для описания ряда других экономических задач, а также служит отправной точкой для различных обобщений. В качестве подтверждения этого приведем интерпретацию уравнения как линейной модели международной торговли.

Рассмотрим **модель международной торговли**, в которой участвуют n стран.

Обозначим:

x_i - национальный доход i-й страны;

a_{ij} - доля национального дохода j-й страны, которую она расходует на закупку товаров i-той страны;

p_i - общая выручка от внутренней и внешней торговли.

Будем полагать, что каждое государство расходует весь свой национальный доход на закупку товаров внутри страны и на импорт из других стран. Это означает, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \; j = 1,2...,n$.

Матрица A, элементами которой являются коэффициенты a_{ij}, называется структурной матрицей торговли. Сумма элементов каждого столбца этой матрицы равна единице.

Предположим, что в течение определенного фиксированного промежутка времени структура международной торговли не меняется (не меняется структурная матрица торговли), а национальные доходы торгующих стран могут измениться.

Требуется определить, какими могут быть эти национальные доходы, чтобы международная торговля осталась сбалансированной, т.е. чтобы сумма платежей всех государств была равна суммарной выручке от внешней и внутренней торговли.

Общая выручка p_i от внешней и внутренней торговли i-го государства вычисляется по формуле $p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

В сбалансированной системе международной торговли не должно быть дефицита, т.е. у каждой страны выручка от торговли должна быть не меньше ее национального дохода: $p_i > x_i$, $i = 1,2,...,n$. Однако поскольку $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, $j = 1,2,...,n$, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_j \geq \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Последнее неравенство справедливо только в случае, когда $p_i = x_i$, $i = 1,2,...,n$ то есть у всех торгующих стран выручка от внешней и внутренней торговли должна совпадать с национальным доходом.

В матричной записи это означает, что имеет место равенство $AX=X$, где A — структурная матрица международной торговли, а X — вектор национальных доходов.

Отсюда следует, что баланс в международной торговле будет достигнут, если единица является собственным значением структурной матрицы международной торговли, а вектор национальных доходов торгующих стран — собственным вектором, отвечающим этому единичному собственному значению.

6 Вопросы для самопроверки

1. Какова цель построения модели Леонтьева?
2. Перечислите основанные допущения и упрощения, возникающие при построении классической модели Леонтьева.
3. Приведите пример таблицы межотраслевого баланса.

4. Напишите уравнения, называемые соотношениями баланса. Поясните экономический смысл коэффициентов и переменных данных уравнений.

5. В чем заключается смысл линейности технологии?

6. Что такое коэффициенты прямых затрат? Как изменяются соотношения баланса при введении коэффициентов прямых затрат?

7. Что называется моделью Леонтьева?

8. В чем заключается основная задача межотраслевого баланса? Какова математическая интерпретация этой задачи?

9. Что называется матрицей полных затрат. Каков ее экономический смысл?

10. Дайте определения продуктивной модели Леонтьева.

11. Каков экономический смысл продуктивной матрицы материальных затрат в модели Леонтьева?

12. Для чего нужны критерии продуктивности матрицы?

13. Сформулируйте критерии продуктивности матрицы.

14. Запишите двойственную модель Леонтьева. Каков ее экономический смысл?

15. Дайте определение прибыльной двойственной модели Леонтьева.

16. Какова взаимосвязь продуктивностью и прибыльностью моделей Леонтьева?

17. С какими видами интерпретаций модели Леонтьева Вы знакомы?

18. Опишите модель международной торговли.

19. Какова основная задача исследования модели международной торговли?

20. В каком случае достигается баланс в международной торговле?

21. Что я узнал(а) нового в процессе изучения теоретических разделов методических указаний?

22. Как изменились мои знания после изучения модели Леонтьева многоотраслевой экономики?

23. Какие задачи я могу поставить и решить по теме «Модель Леонтьева в многоотраслевой экономике»?

24. В каких дисциплинах, видах учебной деятельности я планирую применять полученные знания, умения решать задачи? (Где я буду применять полученные знания).

Перед тем как приступить к изучению следующего раздела методических указаний, заполните, пожалуйста, таблицу 2.

Таблица 2 – Основные понятия темы «Модель Леонтьева в межотраслевой экономике» и их экономический смысл

Понятия темы «Модель Леонтьева многоотраслевой экономики»	Определения понятий	Экономический смысл понятий

7 Примеры решений задач

Пример 1. Является ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

продуктивной?

Решение.

1 способ. Воспользуемся первым критерием продуктивности матрицы.

Покажем, что матрица полных затрат $S = (E - A)^{-1}$ существует и неотрицательная.

$$B = E - A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$det\, B = det(E-A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24} \neq 0 \quad \Rightarrow$$ матрица S существует.

$$B_{11} = (-1)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\ ;\quad B_{21} = (-1)^3 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}\ ;$$

$$B_{12} = (-1)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};\quad B_{22} = (-1)^4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$S = B^{-1} = (E-A)^{-1} = \frac{24}{11}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица полных затрат S неотрицательная, значит, исходная матрица A продуктивная.

2 способ. Воспользуемся вторым критерием продуктивности матрицы.

Найдем собственные значения матрицы А.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0\ ;\ \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) - \frac{1}{24} = 0\ ;\ \lambda^2 - \frac{7}{12}\lambda + \frac{1}{24} = 0\ ;\ \lambda_1 = \frac{1}{12},\ \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

$max(\lambda_1, \lambda_2) = max\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, то есть число Фробениуса $\lambda_A = \frac{1}{2} < 1$. Значит, матрица А продуктивна.

Пример 2. Является ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

продуктивной?

Решение.

Воспользуемся первым критерием продуктивности. Покажем, что матрица полных затрат $S = (E-A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix};$$

$$\det B = \det(E - A) = 0{,}504 - 0{,}006 - 0{,}006 - 0{,}032 - 0{,}009 - 0{,}003 = 0{,}388 \neq 0 \Rightarrow$$

матрица S существует.

$$B_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}56 - 0{,}01 = 0{,}55;$$

$$B_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}7 \end{vmatrix} = -(-0{,}21 - 0{,}02) = 0{,}23;$$

$$B_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -0{,}3 & 0{,}8 \\ -0{,}2 & -0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}03 + 0{,}16 = 0{,}19;$$

$$B_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}7 \end{vmatrix} = -(-0{,}21 - 0{,}02) = 0{,}23;$$

$$B_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}63 - 0{,}04 = 0{,}59;$$

$$B_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & -0{,}1 \end{vmatrix} = -(-0{,}09 - 0{,}06) = 0{,}15;$$

$$B_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -0{,}3 & -0{,}2 \\ 0{,}8 & -0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}03 + 0{,}16 = 0{,}19;$$

$$B_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}72 - 0{,}09 = 0{,}63;$$

$$B_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}72 - 0{,}09 = 0{,}63.$$

$$S = B^{-1} = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}388} \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}23 & 0{,}19 \\ 0{,}23 & 0{,}59 & 0{,}15 \\ 0{,}19 & 0{,}15 & 0{,}63 \end{pmatrix}.$$

Матрица S неотрицательная, значит, исходная матрица A продуктивная.

Замечание. Если все суммы строк (столбцов) неотрицательной матрицы А равны одному и тому же числу λ, то число Фробениуса λ_A равно λ. В частности для матрицы из примера 2 $\lambda_A = 0{,}6$. Так как $\lambda_A < 1$, то матрица А продуктивна.

Пример 3. Выяснить, при каких значениях $a > 0$ матрица

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

является продуктивной.

Решение.

Воспользуемся вторым критерием продуктивности матрицы.

Построим характеристический многочлен матрицы А:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 3a \\ 3a & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - 9a^2 = (a-\lambda-3a)(a-\lambda+3a) = \\ = (-2a-\lambda)(4a-\lambda).$$

Характеристическое уравнение имеет вид $(-2a-\lambda)(4a-\lambda) = 0$.

Собственные значения матрицы $\lambda_1 = -2a$, $\lambda_2 = 4a$.

Для продуктивности матрицы А необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $max(\lambda_1, \lambda_2) = max(-2a, 4a) = 4a < 1$, то есть $a < \frac{1}{4}$. Например, при $a = 0{,}2$ получим продуктивную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Пример 4. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Найти:

а) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 132 \\ 198 \end{pmatrix}$;

б) приращение вектора ΔX для увеличения выпуска продукции на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 66 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) Нам необходимо решить основную задачу межотраслевого баланса, то есть найти такой вектор валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y. Вектор X находится по формуле $X = (E - A)^{-1} Y$ (см. пункт 3 настоящих методических указаний), при условии, что матрица A является продуктивной.

Продуктивность матрицы A установлена в примере 1. Из этого же примера известно, что матрица полных затрат $S = \frac{24}{11} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Найдем вектор X.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{24}{11} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 132 \\ 198 \end{pmatrix} = \frac{24}{11} \begin{pmatrix} 99 + 11 \\ 99 + 132 \end{pmatrix} = \frac{24}{11} \begin{pmatrix} 110 \\ 231 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 504 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы обеспечить прибавочный продукт $Y = \begin{pmatrix} 132 \\ 198 \end{pmatrix}$, необходимо, чтобы столбец выпуска был равен $X = \begin{pmatrix} 240 \\ 504 \end{pmatrix}$.

б) Найдем увеличенный выпуск конечной продукции

$$Y_1 = Y + \Delta Y = \begin{pmatrix} 132 \\ 198 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 72 \\ 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204 \\ 264 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица прямых затрат продуктивная, то находим соответствующий вектор валовой продукции $X_1 = SY_1$.

$$X_1 = \frac{24}{11} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 182 \\ 264 \end{pmatrix} = \frac{24}{11} \begin{pmatrix} 99 + 16{,}5 \\ 132 + 176 \end{pmatrix} = \frac{24}{11} \begin{pmatrix} 115{,}5 \\ 308 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 252 \\ 672 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Пусть дана балансовая модель Леонтьева “Затраты - Выпуск” $X = AX + Y$. Найти вектор конечной продукции Y при заданном векторе валовой продукции X.

Решение.

Найдем Y из уравнения $X = AX + Y$. $Y = X - AX \Rightarrow Y = (E - A)X$, где E - единичная матрица соответствующего порядка.

Пример 6. В таблице 3 приведены данные об исполнении баланса за отчетный период в условных денежных единицах. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится на 56,19 условных единиц, а машиностроения на 79,14 условных единиц.

Таблица 3 – Исполнение баланса за отчетный период

В условных денежных единицах

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		Энергетика	Машино-строение		
Производство	Энергетика	5	15	65	100
	Машиностроение	11	9	104	150

Решение.

Имеем вектор валовой продукции $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$, то есть $x_1 = 100$, $x_2 = 150$.

Матрица объемов товаров и услуг $\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$, то есть $b_{11} = 5$, $b_{12} = 15$, $b_{21} = 11$, $b_{22} = 9$.

Найдем коэффициенты матрицы прямых затрат по формуле $a_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{x_j}$, $(i, j = 1,2)$. Тогда $a_{11} = \dfrac{b_{11}}{x_1} = \dfrac{5}{100} = 0{,}05$, $a_{12} = \dfrac{b_{12}}{x_2} = \dfrac{15}{150} = 0{,}1$, $a_{21} = \dfrac{b_{21}}{x_1} = \dfrac{11}{100} = 0{,}11$, $a_{22} = \dfrac{b_{22}}{x_2} = \dfrac{9}{150} = 0{,}06$. То есть матрица прямых затрат имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}11 & 0{,}06 \end{pmatrix}$.

Вектор конечной продукции имеет вид $Y = \begin{pmatrix} 65 \\ 104 \end{pmatrix}$.

Матрица прямых затрат A имеет неотрицательные элементы. Для того, чтобы определить, является ли матрица A продуктивной воспользуемся первым критерием продуктивности.

Для этого найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$.

$B = E - A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}1 \\ -0{,}11 & 0{,}94 \end{pmatrix}$; $\det B = 0{,}882$.

$S = \dfrac{1}{0{,}882}\begin{pmatrix} 0{,}94 & 0{,}11 \\ 0{,}1 & 0{,}95 \end{pmatrix}$ - неотрицательная матрица, то есть матрица прямых затрат A является продуктивной.

По условию вектор конечного продукта должен измениться: y_1 на 56,19 условных единиц, y_2 на 79,14 условных единиц. Тогда измененный вектор конечной продукции примет вид $Y_1 = \begin{pmatrix} 121{,}19 \\ 183{,}14 \end{pmatrix}$

Тогда по формуле $X_1 = (E - A)^{-1} Y_1$ получаем новый вектор валового выпуска:

$$X_1 = \frac{1}{0{,}882}\begin{pmatrix} 0{,}94 & 0{,}11 \\ 0{,}1 & 0{,}95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 121{,}19 \\ 183{,}14 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}882}\begin{pmatrix} 113{,}9186 + 20{,}1454 \\ 12{,}119 + 173{,}983 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{0{,}882}\begin{pmatrix} 134{,}064 \\ 186{,}102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152 \\ 211 \end{pmatrix}$$

т.е. валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до **152** условных единиц, а в машиностроительной – до **211** условных единиц.

Пример 7. На основании заданных коэффициентов прямых материальных затрат и объемов конечной продукции в межотраслевом балансе для трех отраслей (таблица 4) требуется:

а) проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых материальных затрат;

б) рассчитать коэффициенты полных материальных затрат;

в) найти объемы валовой продукции отраслей;

г) восстановить схемы межотраслевого материального баланса.

Таблица 4 – Таблица коэффициентов прямых материальных затрат и объемов конечной продукции

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция, усл. ед.
	I	II	III	Y_i
I	0,1	0,3	0,2	135
II	0,3	0,2	0,1	70
III	0,2	0,1	0,3	35

Решение.

а) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$, $B = E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$,

$$S = B^{-1} = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,388}\begin{pmatrix} 0,55 & 0,23 & 0,19 \\ 0,23 & 0,59 & 0,15 \\ 0,19 & 0,15 & 0,63 \end{pmatrix}.$$

Матрица $E - A$ неотрицательно обратима, следовательно, по критерию продуктивности матрицы матрица коэффициентов прямых материальных затрат продуктивна.

б) $S = (E - A)^{-1}$ - матрица коэффициентов полных материальных затрат.

$$s_{11} = \frac{0{,}55}{0{,}388}; \qquad s_{12} = \frac{0{,}23}{0{,}388}; \qquad s_{13} = \frac{0{,}19}{0{,}388};$$

$$s_{21} = \frac{0{,}23}{0{,}388}; \qquad s_{22} = \frac{0{,}59}{0{,}388}; \qquad s_{23} = \frac{0{,}15}{0{,}388};$$

$$s_{31} = \frac{0{,}19}{0{,}388}; \qquad s_{32} = \frac{0{,}15}{0{,}388}; \qquad s_{33} = \frac{0{,}63}{0{,}388}.$$

в) $$X = S \cdot Y = \frac{1}{0{,}388}\begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}23 & 0{,}19 \\ 0{,}23 & 0{,}59 & 0{,}15 \\ 0{,}19 & 0{,}15 & 0{,}63 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 135 \\ 70 \\ 35 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}388}\begin{pmatrix} 97 \\ 77{,}6 \\ 58{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

г) $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$

$$x_{11} = 0{,}1 \cdot 250 = 25; \quad x_{12} = 0{,}3 \cdot 200 = 60; \quad x_{13} = 0{,}2 \cdot 150 = 30;$$

$$x_{21} = 0{,}3 \cdot 250 = 75; \quad x_{22} = 0{,}2 \cdot 200 = 40; \quad x_{23} = 0{,}1 \cdot 150 = 15;$$

$$x_{31} = 0{,}2 \cdot 250 = 50; \quad x_{32} = 0{,}1 \cdot 200 = 20; \quad x_{33} = 0{,}3 \cdot 150 = 45.$$

Условно чистая продукция находится как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов.

Схема межотраслевого материального баланса представлена в таблице 5

Таблица 5 – Схема межотраслевого материального баланса

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	25	60	30	135	250
2	75	40	15	70	200
3	50	20	45	35	150
Условно чистая продукция	100	80	60	240	
Валовая продукция	250	200	150		600

Пример 8. В таблице 6 представлены сведения о потреблении отраслями продукции и платежи. Требуется:

1. Записать двойственную модель Леонтьева. Исследовать ее на прибыльность.

2. Найти цены на единицу продукции каждого производственного сектора модели экономики для заданных платежей.

Таблица 6 – Таблица трехсекторной модели экономики с данными о платежах

Отрасли	Сельское хозяйство	Промышленность	Транспорт	Платежи
Сельское хозяйство	0,2	0,05	0,48	0,4
Промышленность	0,12	0,03	0,72	0,1
Транспорт	0,06	0,04	0,56	0,5

Решение.

1. Структурная матрица экономики (матрица прямых затрат) имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}48 \\ 0{,}12 & 0{,}03 & 0{,}72 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}56 \end{pmatrix}$.

Вектор платежей имеет вид $V = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Двойственная модель Леонтьева может быть записана как $P = A^T P + V$, где A — заданная структурная матрица экономики; V — заданный вектор платежей; P — искомый вектор цен.

Двойственная модель Леонтьева является прибыльной, если структурная матрица экономики продуктивная. Выясним, является ли заданная матрица A продуктивной.

Матрица прямых затрат A имеет неотрицательные элементы. Для того, чтобы определить, является ли матрица A продуктивной воспользуемся первым критерием продуктивности.

Для этого найдем матрицу полных затрат $S=(E-A)^{-1}$.

$$E-A=\begin{pmatrix} 0,8 & -0,05 & -0,48 \\ -0,12 & 0,97 & -0,72 \\ -0,06 & -0,04 & 0,44 \end{pmatrix}.$$

$$det\,B=det(E-A)=0,33088-0,00216-0,002304-0,027072-0,02304-0,00264=$$
$$=0,273664\neq 0.$$

Следовательно, матрица S существует.

$$B_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 0,97 & -0,72 \\ -0,04 & 0,44 \end{vmatrix}=0,4268-0,0288=0,398;$$

$$B_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} -0,12 & -0,72 \\ -0,06 & 0,44 \end{vmatrix}=-(-0,0528-0,0432)=0,096;$$

$$B_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} -0,12 & 0,97 \\ -0,06 & -0,04 \end{vmatrix}=0,0048+0,0582=0,063;$$

$$B_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} -0,05 & -0,48 \\ -0,04 & 0,44 \end{vmatrix}=-(-0,022-0,0192)=0,0412;$$

$$B_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 0,8 & -0,48 \\ -0,06 & 0,44 \end{vmatrix}=0,352-0,0288=0,3232;$$

$$B_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 0,8 & -0,05 \\ -0,06 & -0,04 \end{vmatrix}=-(-0,032-0,003)=0,035;$$

$$B_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} -0,05 & -0,48 \\ 0,97 & -0,72 \end{vmatrix}=0,036+0,4656=0,5016;$$

$$B_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 0,8 & -0,48 \\ -0,12 & -0,72 \end{vmatrix}=-(-0,576-0,0576)=0,6336;$$

$$B_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 0,8 & -0,05 \\ -0,12 & 0,97 \end{vmatrix}=0,776-0,006=0,77.$$

$$S = B^{-1} = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,273664}\begin{pmatrix} 0,398 & 0,0412 & 0,5016 \\ 0,096 & 0,3232 & 0,6336 \\ 0,063 & 0,035 & 0,77 \end{pmatrix}.$$

Матрица S неотрицательная, значит, исходная матрица A продуктивная, а значит, двойственная модель Леонтьева является прибыльной.

2. Цены на единицу продукции каждого производственного сектора модели экономики найдем по формуле $P = \left((E - A)^{-1}\right)^T V = S^T V$.

$$P = \left(\frac{1}{0,273664}\begin{pmatrix} 0,398 & 0,0412 & 0,5016 \\ 0,096 & 0,3232 & 0,6336 \\ 0,063 & 0,035 & 0,77 \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{0,273664}\begin{pmatrix} 0,398 & 0,096 & 0,063 \\ 0,0412 & 0,3232 & 0,035 \\ 0,5016 & 0,6336 & 0,77 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,273664}\begin{pmatrix} 0,2003 \\ 0,0663 \\ 0,649 \end{pmatrix}.$$

Округляя до тысячных, получим вектор цен в виде $P = \begin{pmatrix} 0,709 \\ 0,234 \\ 2,290 \end{pmatrix}$.

Пример 9. Найдите национальные доходы торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли с заданной структурной матрицей торговли $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 1/3 \\ 0,5 & 0,5 & 1/3 \\ 0,5 & 0,25 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Баланс в международной торговле будет достигнут, если единица является собственным значением структурной матрицы международной торговли, а вектор национальных доходов торгующих стран — собственным вектором, отвечающим этому единичному собственному значению.

Выясним, есть ли среди собственных значений матрицы A $\lambda = 1$. Для этого составляем характеристическое уравнение $det(A-\lambda E)=0$ или $\begin{vmatrix} -\lambda & 0{,}25 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0{,}5-\lambda & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0{,}25 & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix}=0$ и проверяем, будет ли оно обращаться в тождество при $\lambda=1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0{,}25 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & -0{,}5 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0{,}25 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=0 .$$

Найдем собственный вектор x, соответствующий собственному значению $\lambda=1$ из уравнения $(A-E)X=0$ (где $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора x) или

$$\begin{pmatrix} -1 & 0{,}25 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & -0{,}5 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0{,}25 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

То есть необходимо найти общее решение однородной системы линейных уравнений: $\begin{cases} -x_1+0{,}25x_2+\frac{1}{3}x_3=0, \\ 0{,}5x_1-0{,}5x_2+\frac{1}{3}x_3=0, \\ 0{,}5x_1+0{,}25x_2-\frac{2}{3}x_3=0. \end{cases}$

Определитель матрицы системы равен нулю (так как $\lambda=1$ - собственное значение матрицы А), поэтому система имеет бесконечное множество решений. Найдем общее решение системы. Матрица системы имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Приводим матрицу системы к ступенчатому виду

Шаг 1. $c_{11}\neq 0$. Получаем в первом столбце ниже элемента c_{11} нулевые элементы. Умножаем все элементы первой строки матрицы C на $\frac{1}{2}$ и складываем их с соответствующими элементам второй и третьей строк. Получаем матрицу, эквивалентную матрице C:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. $c_{22}\neq 0$. Получаем нулевые элементы во втором столбце полученной матрицы ниже элемента c_{22}. Для этого все элементы второй строки складываем с соответствующими элементами третьей строки. Получаем матрицу, эквивалентную матрице C:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисного минора для матрицы системы можно выбрать

$$M_2=\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{8} \end{vmatrix}=\frac{3}{8}\neq 0.$$

Найдем общее решение системы.

x_1, x_2 - базисные неизвестные, x_3 - свободное неизвестное. Запишем систему, эквивалентную данной, соответствующую последней матрице, полученной в результате элементарных преобразований матрицы С. При этом базисные переменные в уравнениях запишем в левых частях равенств, а свободные перенесем в правые:

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{4}x_2 = -\frac{1}{3}x_3, \\ -\frac{3}{8}x_2 = -\frac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $x_2 = \frac{4}{3}x_3$. Из первого уравнения, подставляя найденное значение для x_2, находим $x_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3}x_3$. Обозначим $x_3 = c$ и получим общее решение системы в виде $\left(\frac{2}{3}c, \frac{4}{3}c, c\right)$. В качестве собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda = 1$ выберем вектор с целыми неотрицательными координатами $x = (2,4,3)$. Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при соотношении национальных доходов $2 : 4 : 3$.

Перед тем как приступить к решению задач, предназначенных для самостоятельной работы, предлагаем Вам выполнить следующие два задания.

Задание 1. Заполните таблицы 7 и 8.

Таблица 7 – Самодиагностика умений решать задачи по теме «Модель Леонтьева многоотраслевой экономики»

Задачи, которые я умею решать	Что помогло мне научиться решать эти задачи

Таблица 8 – Самодиагностика желаний научиться решать задачи по теме «Модель Леонтьева многоотраслевой экономики»

Задачи, которые я хотел(а) бы научиться решать	Что мне нужно сделать для того, чтобы научиться решать эти задачи

Задание 2. Придумайте несколько задач по теме «Модель Леонтьева» и решите их.

8 Задания для самостоятельного выполнения

Задача 1. Исследовать модель Леонтьева на продуктивность по данной матрице материальных затрат A.

1. $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$; 2. $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 2\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$; 3. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$; 5. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$; 6. $A=\begin{pmatrix}6 & -2 & -1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$; 8. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$; 9. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

10. $A=\begin{pmatrix}7 & -6 & 6\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$; 11. $A=\begin{pmatrix}6 & 1 & -1\\ 2 & 5 & -2\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$; 12. $A=\begin{pmatrix}13 & 2 & -2\\ 6 & 9 & -6\\ 2 & -2 & 5\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}9 & -6 & -6\\ -2 & 5 & -2\\ -2 & 2 & 13\end{pmatrix}$; 14. $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 4 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; 15. $A=\begin{pmatrix}15 & 0 & 0\\ 2 & 13 & -4\\ 2 & -2 & 11\end{pmatrix}$.

Задача 2. Найти число Фробениуса матрицы А и сделать вывод о продуктивности матрицы.

$$1.\ A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5 & 1 & 2\\ -4 & 5 & 0 & 3 & -2\\ 12 & 10 & 7 & -12 & 11\\ 2 & -11 & -3 & 10 & -7\\ -3 & 7 & 1 & 8 & 6\end{pmatrix};\qquad 2.\ A=\begin{pmatrix}2 & 9 & -4 & 3 & -6\\ 4 & 2 & 4 & 7 & -13\\ -4 & 11 & 13 & -20 & 4\\ 5 & 3 & 8 & 3 & -15\\ 3 & 7 & 1 & 2 & -9\end{pmatrix};$$

$$3.\ A=\begin{pmatrix}6 & 11 & 2 & -3 & 10\\ 5 & 0 & 7 & 13 & -2\\ 1 & -1 & 4 & -2 & 3\\ 5 & 2 & -7 & 2 & 2\\ 0 & 5 & 11 & 7 & 4\end{pmatrix};\qquad 4.\ A=\begin{pmatrix}6 & 8 & -3 & 0 & 0\\ 11 & -1 & -3 & 2 & 2\\ -7 & 9 & 7 & 1 & 1\\ 10 & -2 & -2 & 6 & -1\\ 2 & 8 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix};$$

$$5.\ A=\begin{pmatrix}4 & 12 & -8 & 6 & 5\\ 2 & -4 & 8 & 3 & 2\\ 4 & -6 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -1 & -2 & -1 & -3\\ -5 & 2 & 1 & -1 & -3\end{pmatrix};\qquad 6.\ A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1 & 9 & -5\\ 9 & -5 & 2 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 1 & -3 & 6\\ 1 & 2 & -3 & 3 & 4\\ 3 & 1 & -2 & 4 & 1\end{pmatrix};$$

$$7.\ A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 9 & -4 & 5\\ -4 & 2 & -5 & 6 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 1 & 0 & 4\\ 5 & 4 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix};\qquad 8.\ A=\begin{pmatrix}7 & -4 & -5 & 1 & 1\\ -4 & 5 & 2 & -2 & -1\\ 3 & 0 & 1 & -5 & 1\\ 2 & 3 & -2 & -2 & -1\\ 3 & 1 & -4 & 2 & -2\end{pmatrix};$$

$$9.\ A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 5 & -4 & 2\\ 3 & -1 & -3 & 7 & 1\\ -1 & -3 & -1 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4\\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix};\qquad 10.\ A=\begin{pmatrix}6 & -2 & 6 & -10 & 2\\ -4 & 3 & 2 & 4 & -3\\ 3 & 3 & -5 & 4 & -3\\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2\\ -3 & 6 & 2 & -1 & -2\end{pmatrix};$$

$$11.\ A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2 & 11 & 9\\ 1 & 8 & 3 & -4 & -6\\ -2 & -4 & -1 & -3 & 3\\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix};\qquad 12.\ A=\begin{pmatrix}11 & -2 & -5 & -2 & 2\\ -5 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 6 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 0 & 5\\ 3 & -2 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix};$$

13. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 5 & 3 \\ -2 & 8 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 14. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 5 & 0 & -4 \\ 3 & 9 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Выяснить при каких значениях $a > 0$ матрица будет продуктивной.

1. $A=a\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$; 2. $A=a\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$; 3. $A=a\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

4. $A=a\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 5. $A=a\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 6. $A=a\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

7. $A=a\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 8. $A=a\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 9. $A=a\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

10. $A=a\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 11. $A=a\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 12. $A=a\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

13. $A=a\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 14. $A=a\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 15. $A=a\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Найти режим работы отраслей, обеспечивающий конечный продукт C.

1. $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. **2.** $A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$. **4.** $A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0.7 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$. **6.** $A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$. **8.** $A=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$. **10.** $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 42 \\ 24 \end{pmatrix}$. **12.** $A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}$. **14.** $A=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0.8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Составить модель Леонтьева для данной матрицы материальных затрат A. Выяснить продуктивность данной модели. Задать вектор выпуска конечной продукции Y (придумать самостоятельно) и найти вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции.

1. $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,6\\ 0,9 & 0,3\end{pmatrix}$; 2. $A=\begin{pmatrix}0,7 & 0.6\\ 0,5 & 0,8\end{pmatrix}$; 3. $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,5\\ 0,4 & 0,3\end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix}0,8 & 0,1\\ 0,3 & 0,4\end{pmatrix}$; 5. $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,7\\ 0,6 & 0,2\end{pmatrix}$; 6. $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3\\ 0,5 & 0,2\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,4\\ 0,3 & 0,2\end{pmatrix}$; 8. $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,2\\ 0,1 & 0,8\end{pmatrix}$; 9. $A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,3\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}$;

10. $A=\begin{pmatrix}0,9 & 0,2\\ 0,4 & 0,3\end{pmatrix}$; 11. $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,8\\ 0,6 & 0,1\end{pmatrix}$; 12. $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,6\\ 0,9 & 0,2\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,5\\ 0,6 & 0,7\end{pmatrix}$; 14. $A=\begin{pmatrix}0,8 & 0,5\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}$; 15. $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,4\\ 0,8 & 0,9\end{pmatrix}$.

Задача 6. На основании коэффициентов прямых материальных затрат и объемов конечной продукции, заданных в таблице 6, в межотраслевом балансе для трех отраслей требуется:

1. проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых материальных затрат;
2. найти объемы валовой продукции отраслей;
3. восстановить схемы межотраслевого материального баланса.

Таблица 6 – Задания по вариантам

Вариант 1					Вариант 2				
Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция	Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция
	1	2	3	Y_i		1	2	3	Y_i
1	0,1	0,2	0,3	260	1	0,2	0,1	0,3	310
2	0,2	0,3	0,1	40	2	0,3	0,2	0,1	70
3	0,3	0,1	0,2	20	3	0,1	0,3	0,2	20

Продолжение таблицы 6

Вариант 3					Вариант 4				
Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция	Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция
	1	2	3	Y_i		1	2	3	Y_i
1	0,3	0,2	0,1	120	1	0,1	0,2	0,1	160
2	0,2	0,1	0,3	85	2	0,3	0,1	0,2	95
3	0,1	0,3	0,2	35	3	0,2	0,3	0,3	45
Вариант 5					Вариант 6				
Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция	Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция
	1	2	3	Y_i		1	2	3	Y_i
1	0,2	0,3	0,1	240	1	0,3	0,1	0,2	270
2	0,3	0,1	0,2	20	2	0,1	0,2	0,3	115
3	0,1	0,2	0,3	60	3	0,2	0,3	0,1	35
Вариант 7					Вариант 8				
Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция	Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция
	1	2	3	Y_i		1	2	3	Y_i
1	0,1	0,3	0,2	135	1	0,2	0,1	0,3	155
2	0,3	0,2	0,1	70	2	0,1	0,3	0,2	105
3	0,2	0,1	0,3	35	3	0,3	0,2	0,1	40
Вариант 9					Вариант 10				
Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция	Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция
	1	2	3	Y_i		1	2	3	Y_i
1	0,3	0,2	0,1	220	1	0,1	0,2	0,4	310
2	0,1	0,3	0,2	60	2	0,2	0,3	0,1	90
3	0,2	0,1	0,3	40	3	0,1	0,1	0,2	80

Продолжение таблицы 6

Вариант 11					Вариант 12				
Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция	Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция
	1	2	3	Y_i		1	2	3	Y_i
1	0,3	0,1	0,2	240	1	0,3	0,1	0,2	162
2	0,2	0,3	0,1	360	2	0,1	0,2	0,3	69
3	0,1	0,2	0,3	480	3	0,2	0,3	0,1	21
Вариант 13					Вариант 14				
Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция	Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция
	1	2	3	Y_i		1	2	3	Y_i
1	0,1	0,3	0,2	120	1	0,2	0,1	0,3	186
2	0,3	0,2	0,1	240	2	0,1	0,3	0,2	126
3	0,2	0,1	0,3	360	3	0,3	0,2	0,1	48
Вариант 15									
Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечная продукция					
	1	2	3	Y_i					
1	0,3	0,2	0,1	330					
2	0,1	0,3	0,2	90					
3	0,2	0,1	0,3	60					

Список использованных источников

1 Карасев, А.И. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики: учебное пособие. / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер. - М.: ВЗФЭИ, 1989. – 100 с.

2 Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 471 с. – ISBN 5-238-00030-8

3 Кремер, Н.Ш. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, [и др.] – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 423 с. – ISBN 5-238-00459-1

4 Малыхин, В.И. Математика в экономике: учебное пособие / В.И. Малыхин – М.: ИНФРА-М , 2002. – 352 с. – ISBN 5-16-000872-1

5 Плис, А.И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с. – ISBN 5-279-02550-X

6 Солодовников, А.С. Математика в экономике: учебник: В 2-х ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2003. Ч.1. - 384 с. – ISBN 5-279-02640-9

Приложение А

(справочное)

Некоторые теоретические сведения из курса линейной алгебры

1 Матрицей А размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы, состоящей из m строк и n столбцов:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кратко матрицу A записывают в виде $A = \left(a_{ij}\right)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Числа a_{ij}, составляющие данную матрицу называют ее элементами.

2 Если $m = n$, то матрица называется квадратной, а число n порядком матрицы.

3 Совокупность элементов матрицы, для которых $i = j$ называется главной диагональю матрицы.

4 Квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю, называется диагональной.

5 Диагональная матрица, у которой ненулевые элементы равны единице называется единичной матрицей и обозначается:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6 Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

7 Матрица $A_{1\times n}$ называется матрицей-строкой, то есть

$$A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

8 Матрица $A_{m\times 1}$ называется матрицей-столбцом, то есть

$$A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

9 Суммой двух матриц одинаковой размерности называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых:

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$$

10 Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на число λ называется матрица $D_{m\times n}$, каждый элемент которой равен соответствующему элементу матрицы A, умноженному на число λ:

$$D_{m\times n} = \lambda A_{m\times n}, \text{ если } d_{ij} = \lambda a_{ij},\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$$

11 Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда чисто столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ называется такая матрица C, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj},\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n.$$

12 Если в матрице A поменять местами строки и столбцы одного и того же номера, то полученная матрица называется транспонированной для данной и обозначается A^T.

13 Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ или определителем

первого порядка, называется элемент a_{11}: $det\,A = a_{11}$.

14 Определителем квадратной матрицы А второго порядка, или определителем второго порядка, называется число, которое можно вычислить по формуле:

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

15 Определителем квадратной матрицы А третьего порядка, или определителем третьего порядка, называется число, которое можно вычислить по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

16 Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы А n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы А вычеркиванием i-той строки и j-го столбца.

17 Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы А n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

18 Определитель квадратной матрицы n-го порядка может быть вычислен по теореме Лапласа

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$det\,A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам i-той строки; $i = 1,2,\ldots,n$)

$$det\,A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; $j = 1,2,\ldots,n$)

19 Определитель треугольной и, в частности, диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

20 Некоторые свойства определителей квадратных матриц:

а) определитель не изменяется при транспонировании матриц;

б) определитель меняет знак, если поменять местами любые две строки (или столбца) матрицы;

в) определитель равен нулю, если: все элементы любой строки (или столбца) равны нулю; элементы любых двух строк (или столбцов) пропорциональны либо (в частном случае) равны;

г) определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на число, отличное от нуля.

21 Квадратная матрица А называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля, то есть $det\,A \neq 0$

22 Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A, если

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

23 *Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.* Всякая невырожденная матрица A имеет единственную обратную матрицу.

24 Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1) Найти определитель данной квадратной матрицы A.

Если $det\,A = 0$, то матрица A - вырожденная и обратной матрицы для нее не существует.

Если $det\,A \neq 0$, то существует единственная матрица A^{-1}.

2) Находим алгебраические дополнения матрицы A. Составляем присоединенную матрицу $\overline{A}$, состоящую из алгебраических дополнений, стоящих на местах элементов, к которым они относятся.

3) Находим союзную матрицу, полученную при транспонировании присоединенной матрицы: $A^{*} = \left(\overline{A}\right)^{T}$;

4) Находим обратную матрицу как $A^{-1} = \frac{1}{det} A^*$.

25 Экономический смысл матрицы - это упорядоченная система информации, представленная в виде матрицы.

26 Общий вид системы m линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{A.1}$$

Решением линейной системы называют упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, который при подстановке в каждое уравнение системы обращает его в верное равенство. Множество всех решений системы называют ее общим решением. Решить систему означает найти ее общее решение.

27 В матричной форме система (А.1) имеет вид $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец переменных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов.

28 Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{A.2}$$

Если определитель матрицы системы (А.2) отличен от нуля, то есть $det\, A = \Delta \neq 0$ (матрица А – невырожденная), то единственное решение системы определяется:

а) с помощью обратной матрицы по формуле $X = A^{-1}B$

б) по формуле Крамера $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где Δ - определитель матрицы системы А), Δ_j - определитель, получаемый из матрицы А заменой j-го столбца столбцом свободных членов, $j = 1,2...n$.

29 Над системой можно проводить *элементарные преобразования*:

1) перестановка уравнений;

2) вычеркивание из системы уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$;

3) умножение обеих частей одного из равнений системы на число, отличное от нуля;

4) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число.

При выполнении элементарных преобразований над системой может возникнуть уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b_i$, $b_i \neq 0$. Ясно, что это уравнение не имеет решений, будем называть такое уравнение противоречивым.

Система, содержащая противоречивое уравнение, несовместна, то есть не имеет решение.

30 Решение системы (А.2) можно найти, используя *метод Гаусса*.

Суть метода заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы либо получают систему, содержащую противоречивое уравнение (и тогда система оказывается несовместной), либо система приводится к некоторому специальному виду.

Сформулируем основную *идею метода Гаусса*.

1) Путем элементарных преобразований добиваются, чтобы в первом уравнении при первой неизвестной коэффициент был отличен от нуля.

2) С помощью элементарных преобразований получают коэффициенты,

равные нулю, при первой неизвестной во втором, третьем и т. д. уравнениях.

3) Добиваются, чтобы во втором уравнении при второй неизвестной коэффициент был отличен от нуля.

4) С помощью элементарных преобразований получают коэффициенты, равные нулю, при второй неизвестной во втором, третьем и т. д. уравнениях.

5) ....

6) Получают уравнение с одной неизвестной, найдя которую, совершают обратный ход по системе вверх и последовательно определяют значения всех остальных неизвестных.

Преобразования Гаусса можно проводить не только с уравнениями системы, но и с матрицей их коэффициентов.

31 В общем случае при исследовании системы могут встретиться только три случая:

-система имеет единственное решение (система является определенной);

- система имеет бесчисленное множество решений (система является неопределенной);

- система не имеет решений (несовместна).

Вопрос о совместности системы линейных уравнений (А.1) полностью решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (А.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы-системы.

Совместная система имеет единственное решение, если ранг матрицы системы равен количеству неизвестных системы.

Совместная система имеет бесконечно много решений, если ранг матрицы системы меньше количества неизвестных системы.

32 Правило нахождения решений неопределенной системы линейных уравнений.

Пусть дана совместная система линейных уравнений (А.1) и пусть основная матрица A этой системы имеет ранг r, меньший числа неизвестных n. Выбираем в матрице A r линейно независимых строк и оставляем в системе (А.1) лишь уравнения, коэффициенты которых вошли в выбранные строки. В этих уравнениях оставляем в левых частях такие r неизвестных, что определитель из коэффициентов при них отличен от нуля, а остальные неизвестные объявляем свободными и переносим в правые части уравнений. Давая свободным неизвестным произвольные числовые значения и вычисляя значения остальных неизвестных любым из методов, приведенных в пунктах 28 и 30, мы получим все решения системы (А.1).

33 Вектор $x \neq 0$ называется собственным вектором квадратной матрицы A, если найдется такое число λ, что $Ax = \lambda x$.

Число λ называется собственным (характеристическим) значением (числом) матрицы квадратной A, соответствующим вектору x.

Определение собственного вектора квадратной матрицы A может быть записано в виде

$$(A - \lambda E)x = 0 \tag{А.3}$$

34 Характеристическим уравнением квадратной матрицы A называется уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{А.4}$$

Определитель $|A - \lambda E|$ называется характеристическим многочленом квадратной матрицы A.

35 Алгоритм нахождения собственных значений и соответствующих им собственных векторов квадратной матрицы A:

1) Решая характеристическое уравнение (А.4), находим собственные значения квадратной матрицы A.

2) Для каждого собственного значения матрицы A, решая систему уравнений (А.3), находим собственные векторы матрицы A.

Приложение Б

(справочное)

Ответы к заданиям для самостоятельного выполнения

Задача 1

1. $\lambda_A = 5 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **2**. $\lambda_A = 5 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **3.** $\lambda_A = 3 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **4**. $\lambda_A = 3 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **5.** $\lambda_A = 5 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **6.** $\lambda_A = 7 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **7.** $\lambda_A = 3 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **8**. $\lambda_A = 5 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **9.** $\lambda_A = 3 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **10.** $\lambda_A = 7 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **11**. $\lambda_A = 7 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **12.** $\lambda_A = 15 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **13.** $\lambda_A = 15 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **14**. $\lambda_A = 9 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **15.** $\lambda_A = 15 > 1$, то есть матрица не продуктивна.

Задача 2

1. $\lambda_A = 10 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **2**. $\lambda_A = 4 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **3.** $\lambda_A = 17 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **4**. $\lambda_A = 11 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **5.** $\lambda_A = 3 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **6.** $\lambda_A = 7 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **7.** $\lambda_A = 7 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **8**. $\lambda_A = 0 < 1$, то есть матрица продуктивна. **9.** $\lambda_A = 3 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **10.** $\lambda_A = 2 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **11**. $\lambda_A = 5 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **12.** $\lambda_A = 4 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **13.** $\lambda_A = 1$, то есть матрица не продуктивна. **14**. $\lambda_A = 3 > 1$, то есть матрица не продуктивна. **15.** $\lambda_A = 5 > 1$, то есть матрица не продуктивна.

Задача 3

1. $a \in \left(0;\frac{1}{21}\right)$. **2.** $a \in \left(0;\frac{1}{15}\right)$. **3.** $a \in \left(0;\frac{1}{9}\right)$. **4.** $a \in \left(0;\frac{1}{9}\right)$. **5.** $a \in \left(0;\frac{1}{15}\right)$. **6.** $a \in \left(0;\frac{1}{7}\right)$. **7.** $a \in \left(0;\frac{1}{7}\right)$. **8.** $a \in \left(0;\frac{1}{7}\right)$. **9.** $a \in \left(0;\frac{1}{5}\right)$. **10.** $a \in \left(0;\frac{1}{3}\right)$. **11.** $a \in \left(0;\frac{1}{5}\right)$. **12.** $a \in \left(0;\frac{1}{3}\right)$. **13.** $a \in \left(0;\frac{1}{3}\right)$. **14.** $a \in \left(0;\frac{1}{5}\right)$. **15.** $a \in \left(0;\frac{1}{7}\right)$.

Задача 4

1. $\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} \frac{775}{9} \\ \frac{725}{9} \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 28 \\ 24 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} \frac{3350}{7} \\ \frac{2950}{7} \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} \frac{470}{11} \\ \frac{410}{11} \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 48 \\ 24 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} \frac{3100}{9} \\ \frac{1400}{9} \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} \frac{720}{17} \\ \frac{840}{17} \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} \frac{1900}{11} \\ \frac{9700}{33} \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} \frac{14520}{209} \\ \frac{10560}{209} \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} \frac{575}{6} \\ \frac{625}{6} \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} \frac{1872}{55} \\ \frac{2352}{55} \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} \frac{1280}{7} \\ \frac{1300}{7} \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} \frac{2128}{9} \\ \frac{2408}{9} \end{pmatrix}$.

Задача 5

1. Матрица А продуктивна; $(E-A)^{-1} = 50\begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,9 & 0,8 \end{pmatrix}$. **2.** Матрица А не продуктивна; $(E-A)^{-1} = -\frac{1}{0,24}\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$. **3.** Матрица А продуктивна $(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,43}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$. **4.** Матрица А продуктивна $(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,09}\begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$. **5.** Матрица А продуктивна $(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,14}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix}$. **6.** Матрица А продуктивна $(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,57}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$. **7.** Матрица А продуктивна $(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,28}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$ **8.** Матрица А продуктивна $(E-A)^{-1} = 10\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ **9.** Матрица А продуктивна $(E-A)^{-1} = 50\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$ **10.** Матрица А не продуктивна; $(E-A)^{-1} = -100\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$

11. Матрица А продуктивна $(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,06}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$ **12.** Матрица А не продуктивна; $(E-A)^{-1} = 50\begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,9 & 0,7 \end{pmatrix}$ **13.** Матрица А не продуктивна; $(E-A)^{-1} = -\frac{1}{0,12}\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$ **14.** Матрица А не продуктивна; $(E-A)^{-1} = -\frac{1}{0,18}\begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$ **15.** Матрица А не продуктивна; $(E-A)^{-1} = -\frac{1}{0,24}\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Задача 6

1. 1. $\lambda_A = 0,6 < 1$; 2. $\begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$; 3. Данные приведены в таблице Б.1.

Таблица Б.1 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 1 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	40	40	60	260	400
2	80	60	20	40	200
3	120	20	40	20	200
Условно чистая продукция	160	80	80	320	
Валовая продукция	400	200	200		800

2. 1. $\lambda_A = 0,6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.2.

Таблица Б.2 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 2 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	100	30	60	310	500
2	150	60	20	70	300
3	50	90	40	20	200
Условно чистая продукция	200	120	80	400	
Валовая продукция	500	300	200		1000

3. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.3.

Таблица Б.3 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 3 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	75	40	15	120	250
2	50	20	45	85	200
3	25	60	30	35	150
Условно чистая продукция	100	80	60	240	
Валовая продукция	250	200	150		600

4. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 260 \\ 246 \\ 244 \end{pmatrix}$ (округление до целых), 3. Данные приведены в таблице Б.4.

Таблица Б.4 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 4 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	26	49,2	24,4	160	260
2	78	24,6	48,8	95	246
3	52	73,8	73,2	45	244
Условно чистая продукция	104	98,4	97,6	300	
Валовая продукция	260	246	244		750

5. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.5.

Таблица Б.5 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 5 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	80	60	20	240	400
2	120	20	40	20	200
3	40	40	60	60	200
Условно чистая продукция	160	80	80	320	
Валовая продукция	400	200	200		800

6. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.6.

Таблица Б.6 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 6 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	150	30	50	270	500
2	50	60	75	115	300
3	100	90	25	35	250
Условно чистая продукция	200	120	100	420	
Валовая продукция	500	300	250		1050

7. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.7.

Таблица Б.7 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 7 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	25	60	30	135	250
2	75	40	15	70	200
3	50	20	45	35	150
Условно чистая продукция	100	80	60	240	
Валовая продукция	250	200	150		600

8. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 200 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.8.

Таблица Б.8 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 8 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	60	25	60	155	300
2	30	75	40	105	250
3	90	50	20	40	200
Условно чистая продукция	120	100	80	300	
Валовая продукция	300	250	200		750

9. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.9.

Таблица Б.9 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 9 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	120	40	20	220	400
2	40	60	40	60	200
3	80	20	60	40	200
Условно чистая продукция	160	80	80	320	
Валовая продукция	400	200	200		800

10. 1. $(E - A)^{-1} = \dfrac{1}{0{,}425}\begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}17 & 0{,}68 & 0{,}17 \\ 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}59 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.10.

Таблица Б.10 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 10 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	50	60	80	310	500
2	100	90	20	90	300
3	50	30	40	80	200
Условно чистая продукция	300	120	60	480	
Валовая продукция	500	300	200		100 0

11. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 768 \\ 884 \\ 1048 \end{pmatrix}$ (округление до целых), 3. Данные приведены в таблице Б.11.

Таблица Б.11 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 11 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	240,4	88,4	209,6	240	768
2	153,6	265,2	104,8	360	884
3	76,8	176,8	314,4	480	1048
Условно чистая продукция	307,2	353,6	419,2	1080	
Валовая продукция	768	884	1048		2700

12. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 300 \\ 180 \\ 150 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.12.

Таблица Б.12 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 12 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	90	18	30	162	300
2	30	36	45	69	180
3	60	54	15	21	150
Условно чистая продукция	120	72	60	252	
Валовая продукция	300	180	150		630

13. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 489 \\ 575 \\ 736 \end{pmatrix}$ (округление до целых), 3. Данные приведены в таблице Б.13.

Таблица Б.13 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 13 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	48,9	172,5	147,2	120	489
2	146,7	115	73,6	240	575
3	97,8	57,5	220,8	360	736
Условно чистая продукция	195,6	230	294,4	720	
Валовая продукция	489	575	736		1800

14. 1. $\lambda_A = 0{,}6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 360 \\ 300 \\ 240 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.14.

Таблица Б.14 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 14 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	72	30	72	186	360
2	36	90	48	126	300
3	108	60	24	48	240
Условно чистая продукция	144	120	96	360	
Валовая продукция	360	300	240		900

15. 1. $\lambda_A = 0,6 < 1$, 2. $\begin{pmatrix} 600 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix}$, 3. Данные приведены в таблице Б.15.

Таблица Б.15 – Схема межотраслевого материального баланса для варианта 15 задачи 6

В условных денежных единицах

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	180	60	30	330	600
2	60	90	60	90	300
3	120	30	90	60	200
Условно чистая продукция	240	120	120	480	
Валовая продукция	600	300	300		1200