МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

О.Д. ЛИТВИНЕНКО

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

Рекомендовано к изданию Ученым советом Оренбургского государственного университета в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программе высшего профессионального образования по специальностям: «Промышленное и гражданское строительство», «Городское строительство и хозяйство», «Экспертиза и управление недвижимостью».

Оренбург 2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Л 64

Рецензенты: доктор технических наук, доцент И.П. Болодурина,
кандидат физико-математических наук, доцент И.В. Игнатушина.

Литвиненко О.Д.

Л 64 **Основы математики для инженеров: учебное пособие/О.Д. Литвиненко - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. - 115 с.**

В пособии рассмотрены основы линейной алгебры, начала анализа, функции нескольких переменных и теория рядов. Кроме того, пособие содержит вопросы для самоконтроля и методические указания по подготовке к первой контрольной работе.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальностям 270102, 270105, 270115 при изучении дисциплины «Математика».

1602010000

Л ББК 22.1я73

Содержание

Введение

Современный инженер должен не только знать основы математики, но и хорошо владеть всеми новейшими математическими методами исследования, которые могут применяться в области его деятельности. Сегодня никакая научная и инженерная работа невозможна без математики.

В процессе обучения студенту постоянно приходится пользоваться математическими знаниями. Такие основные предметы, как физика, теоретическая механика, сопротивление материалов, строительная механика и многие другие широко применяют математические методы.

Математика способствует развитию логического мышления, именно поэтому, в наше время, несмотря на появление и распространение различных компьютерных математических и инженерно-строительных программ, овладение этой наукой по-прежнему остается актуальным.

В соответствии с учебным планом студенты-заочники специальностей 270102 – Промышленное и гражданское строительство, 270105 – Городское строительство и хозяйство, 270115 – Экспертиза и управление недвижимостью выполняют четыре письменные контрольные работы по математике. Данное пособие содержит краткий курс лекций излагаемых в первом семестре и методические указания по подготовке к первой контрольной работе. Специфика работы с пособием состоит в том, что студент сначала знакомится с теоретическим материалом, с требованиями к оформлению контрольной работы, с образцом решения типовых задач, входящих в данный курс, а затем переходит к выполнению заданий конкретного варианта. Основываясь на решенных задачах, студенты заочного обучения, а так же все, желающие углубить свои знания по математике, могут самостоятельно выполнять задания из этого сборника.

Отбор материала и способы его изложения строились автором так, чтобы у студента постепенно складывалось цельное представление об основных математических идеях и методах.

1 Элементы линейной алгебры

1.1 Основные понятия теории множеств. Символика математической логики

Математика – одна из древнейших наук. Она определяется как наука о пространственных формах и количественных отношениях реального мира. Математика дает другим наукам язык чисел и символов для выражения различного рода отношений между явлениями природы. Но прежде чем применять математику инженер должен понять суть изучаемого явления, разбить его на части, поддающиеся математической обработке.

Объектами изучения в самой математике являются логические модели, построенные для описания явлений природы и общества. Математика изучает соотношения между элементами этих моделей. Если математическая модель верно отражает суть данного явления, то она позволяет вскрывать и необнаруженные вначале закономерности, т.е. математика способна раскрыть и качественную сторону явления.

В силу большой абстрактности одна и та же математическая модель может описывать различные процессы. Например, одно и то же дифференциальное уравнение описывает и характер радиоактивного распада, и изменение температуры тела.

Основным, фундаментальным понятием в математике является множество. Множество – неопределяемое понятие. Его можно проиллюстрировать примерами:

1) множество студентов в данной аудитории;
2) множество яхт, участвующих в регате;
3) множество книг в библиотеке.

Для математики особенно важны числовые множества (множества, состоящие из чисел) и геометрические множества (множества, состоящие из точек пространства). Некоторые числовые множества обозначаются специальными символами: N – множество натуральных чисел; Z – множество целых чисел; Q – множество рациональных чисел; J – множество иррациональных чисел; R – множество действительных чисел; C – множество комплексных чисел,

Множество считается конечным, если количество его элементов можно выразить каким-нибудь числом.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается ø.

Остальные множества принято считать бесконечными. Само множество принято обозначать заглавными латинскими буквами, а его элементы – строчными. Так как множество однозначно определено своими элементами, то иногда будем обозначать множество его элементами, заключенными в фигурные скобки. Задать множество можно двумя способами:

1) перечислением всех его элементов

Пример

а) список студентов группы з07ОБД;

б) $A = \{-2;2\}$;

2) указанием свойства, которому удовлетворяют элементы только данного множества.

Пример

а) афро-американцы – чернокожие жители нашей планеты;

б) $A = \{x : x^2 - 4 = 0\}$ – множество корней указанного уравнения.

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Пример - $A = \{3,5,7\}$; $B = \{7,5,3\}$; $A = B$.

Два множества *A* и *B* называются эквивалентными, если между ними установлено взаимно однозначное соответствие (обозначают *A~B*).

Говорят, что между множествами *A* и *B* установлено взаимнооднозначное соответствие, если каждому элементу множества *A* поставлен в соответствие один элемент множества *B* так, что: 1) разным элементам множества *A* поставлены в соответствие разные элементы множества *B* и 2) каждый элемент множества *B* поставлен в соответствие некоторым элементам множества *A*.

Для сокращения записи в дальнейшем будем употреблять некоторые логические символы.

1) $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: «Из утверждения α следует утверждение *β*», т. е. α – достаточное условие для утверждения β;

2) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает: «Из утверждения α следует утверждение *β* и наоборот, из утверждения *β* следует утверждение α», т. е. *β* – условие необходимое и достаточное для α (можно сказать и наоборот);

3) $x \in A$ «*x* – элемент, принадлежащий множеству А»;

4) $X \subset M$ «множество *X* включено во множество *M* или *X* подмножество множества *M,* если каждый его элемент *x* является элементом множества *M*».

$X \subset M, \forall x \in X \Rightarrow \forall x \in M$

$\forall$ – квантор всеобщности «любой, каждый».

5) После « : » указано свойство, которым обладают все элементы данного множества.

6) $\wedge$ означает «и», $\vee$ означает «или».

7) $X \cap Y$ «пересечение множеств»

Назовем пересечение множеств *X* и *Y* множество *Z*, *Z*=$X \cap Y$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству *X*, так и множеству *Y*.

$$X \cap Y = Z \Rightarrow Z = \{z : z \in X \wedge z \in Y\}.$$

8) $Y \cup K$ «объединение множеств»

Объединением множеств *Y* и *K* назовем множество *H*, *H*=$Y \cup K$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *Y* и *K*.

$$Y\bigcup K=H\Rightarrow \; H=\{h: h\in Y\vee h\in K\vee h\in (Y\bigcap K)\}.$$

9) $\exists x_0\in R:\overline{\alpha}$ «найдется такое действительное число x_0, для которого не выполняется утверждение α ».

$\exists$ - квантор существования.

Черта над утверждением означает его отрицание.

10) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ - означает: «по определению» (от лат. *definitio*)

С помощью выше изложенной символики в математике записывают многие определения.

Примеры

1 Интервалом (a,b) называют множество таких действительных x, которые удовлетворяют неравенству $a<x<b$. Кратко записывают так:

$$(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$$

2 Дельта окрестностью точки a называют множество таких действительных x, которые удовлетворяют неравенству $|x-a|<\delta$. Кратко записывают так:

$$U_\delta(a)=\{x\in R: |x-a|<\delta\}$$

3 Выколотой дельта окрестностью точки a называют дельта окрестность точки a без самой точки a. Кратко записывают так:

$$\overset{o}{U}_\delta(a)=\{x\in R: |x-a|<\delta, a\notin U_\delta(a)\}\cdot$$

Множество A называется ограниченным сверху, если существует такое действительное число z, при котором для любого элемента x этого множества выполняется неравенство $x\le z$.

A – ограничено сверху $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists z\in R: \forall x\in A\;\; x\le z$

Если множество ограничено сверху, то верхних границ бесконечно много. Однако существует самая малая из всех верхних границ.

Наименьшую из всех верхних границ называют точной верхней границы множества и обозначают *SupA*.

Аксиома: Всякое множество ограниченное сверху имеет точную верхнюю границу.

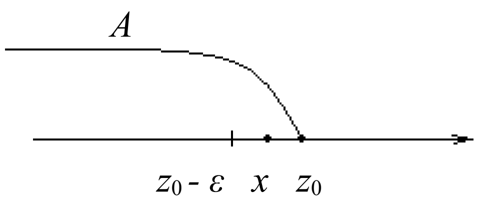


Рисунок 1

$$z_0=SupA\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1.\forall x\in A\;\; x\le z_0\\ 2.\forall \varepsilon>0,\ \exists x\in A: x>z_0-\varepsilon\end{array}\right.$$

Множество B называется ограниченным снизу, если существует такое действительное число c, что для любого элемента у множества B выполняется неравенство $y \geq c$.

B – ограниченно снизу $\Leftrightarrow \; \exists c \in R : \forall y \in B \;\; y \geq c$.

Нижних границ у ограниченного снизу множества бесконечно много, среди них есть наибольшая.

Наибольшую из всех нижних границ называют точной нижней границей множества и обозначают $InfB$.

Аксиома: Всякое множество ограниченное снизу имеет точную нижнюю границу.

1.2 Множество матриц. Операции над матрицами

Прямоугольной матрицей $A_{m\times n}$ размера (размерности) m на n – называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{m\times n} \Leftrightarrow \; A_{m\times n} = (a_{ij}), \begin{matrix} \forall i = \overline{1,m} \\ \forall i = \overline{1,n} \end{matrix}$$

a_{ij} – элемент матрицы, стоящий в i строке и j столбце.

Совокупность матриц размерности $m \times n$ принято обозначать $R_{m\times n}$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется – нулевой.

Матрица, состоящая из одной строки (столбца), называется матрицей-строкой (матрицей-столбцом).

Две матрицы называются равными, если они одинаковых размеров и элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной. Порядком квадратной матрицы называется число ее строк.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Элементы квадратной матрицы a_{11}, a_{22},…, a_{nn} образуют главную диагональ; a_{1n}, $a_{2\,(n-1)}$,…, a_{n1} – побочную.

Квадратная матрица, у которой отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются диагональной. Диагональную матрицу называют скалярной, если элементы главной диагонали равны одному и тому же числу: $a_{11}= a_{22}= \dots = a_{nn}=\alpha$.

Если это число α = 1, то скалярную матрицу называют единичной и обозначают:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой строк столбцами с сохранением нумерации, называется матрицей, транспонированной к данной, обозначают $A^{\text{т}}$.

Пример

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ A^{\text{т}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами

1. Произведением матрицы A на число α называется новая матрица C того же размера, элементы которой пропорциональны соответствующим элементам матрицы A, т. е.

$$A_{m\times n} = (a_{ij}),\ \begin{matrix} \forall\, i = \overline{1,m} \\ \forall\, j = \overline{1,n} \end{matrix},\ C = \alpha \cdot A,\ \ C = (c_{ij}),\ \text{ где } c_{ij} = \alpha\, a_{ij}$$

Пример

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Сложение матриц. Эта операция вводится только для матриц одинаковых размеров. Суммой двух матриц называется новая матрица того же размера, элементы которой получены сложением элементов данных матриц, стоящих на соответствующих местах, т. е.

$$A_{m\times n} = (a_{ij}), \forall\, i = \overline{1,m}$$
$$B_{m\times n} = (b_{ij}), \forall\, j = \overline{1,n}$$
$$A + B = C,\ C_{m\times n} = (c_{ij}),\ \text{ где } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Пример

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -28 & 90 \\ 38 & -125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-28 & 3+90 \\ 7+38 & 5-125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 93 \\ 45 & -120 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -5 \\ 9 & 8 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -2 \\ 9 & 13 & -5 \\ 4 & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

3. Умножение матриц. Эта операция определена только в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Матрица – результат находится по следующему правилу:

$$A_{m\times p} = (a_{ij}), \quad \begin{matrix} \forall\, i = \overline{1,m} \\ \forall\, j = \overline{1,p} \end{matrix}$$

$$B_{p\times n} = (b_{jk}), \quad \forall\, k = \overline{1,n}$$

$$A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = C_{m\times n},\ C = (c_{ik}),\ \text{где}\ c_{ik} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \cdot b_{lk}$$

Пример

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 3\cdot 4+(-2)\cdot 5 \\ 5\cdot 3+(-4)\cdot 2 & 5\cdot 4+(-4)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \\ 37 & 9 \end{pmatrix}$.

Может случиться, что матрицу A умножить на матрицу B можно, а B на A-нельзя. Кроме того, если можно произвести и то, и другое действия совсем не обязательно получение одинаковых результатов. Таким образом, вообще говоря, произведение матриц не обладает свойством коммутативности (переместительности).

Если же $A{\cdot}B=B{\cdot}A$, то говорят, что матрицы перестановочны (коммутативны).

1.3 Определители и их свойства

Всякой квадратной матрице в соответствие ставится число, называемое ее определителем и обозначаемое одним из символов:

$$\Delta = det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|,\ A = (a_{ij}),\ \begin{matrix} \forall\, i = \overline{1,n} \\ \forall\, j = \overline{1,n} \end{matrix}$$

Минором, соответствующим элементу a_{ij} матрицы A (обозначают M_{ij}) называется определитель порядка (n– 1), полученный из данного определителя матрицы A вычеркиванием строки и столбца, на пересечение которых стоит элемент a_{ij}.

Пример - если $det\,A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$, то $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$; $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением, соответсвующим элементу a_{ij} матрицы A (обозначают A_{ij}) называется минор этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Пример - если $det\,A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$, то $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$;

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

Если $A=(a_{11})$, то $det\,A = |a_{11}|$, т.е. определитель матрицы, состоящий из одного элемента, равен этому элементу.

Определителем «n» – го порядка называется число, равное сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$det\,A = |a_{ij}| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in};$$

1) $detA = |a_{11}| = a_{11}$;

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} a_{21} =$

$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Проверьте, каков будет результат, если провести разложение определителя по 2 строке, 1 столбцу.

Пример - $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-7) \cdot 3 = 4 + 21 = 25.$

3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Проще для вычисления определителя 3-го порядка запомнить правило Саррюса.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad = \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Свойства определителей

1) Если строка (столбец) $detA$ целиком состоит из элементов равных нулю, то $\det A = 0$.

2) Определитель не изменится, если все его строки заменить соответствующими столбцами, т.е. $detA = detA^T$

3) Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) $\det A$ умножить на одно и то же число γ, то значение полученного определителя $\det B$ увеличится в γ раз, т.е. $\det B = \gamma \det A$.

4) Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя представимы в виде суммы двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых вместо указанной строки (столбца) стоят первые слагаемые, во втором – вторые.

5) Если в $\det A$ поменять местами любые две строки (столбца), то его значение изменит знак.

6) Если в $\det A$ есть две одинаковые или пропорциональные строки (столбца), то он равен нулю.

7) $\det A$ не меняет своего значения от прибавления ко всем элементам некоторой строки (столбца) соответствующих элементов другой его строки (столбца), умноженной на одно и то же число, неравное нулю.

8) Сумма произведений элементов любой фиксированной строки (столбца) $\det A$ на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой его строки (столбца) равна нулю.

9) Если в $\det A$ все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, кроме одного, то такой $\det A$ равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.

Примеры

1 Верно ли $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$?

2 Известно, что $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 7 \end{vmatrix} = -16$ установить чему равен $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 9 \\ 2 & 15 & 7 \\ 3 & 18 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 9 \\ 2 & 15 & 7 \\ 3 & 18 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 3(-16) = -48$

Используя свойства определителей 3), 4), получили: - 48.

3 Найти k, если $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 10 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

Решение: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 10 & 2 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$

Используя свойства определителей 5), 3), получили $k = -\frac{1}{8}$.

1.4 Обратная матрица. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре

Квадратную матрицу любого порядка называют невырожденной (неособенной), если ее определитель отличен от нуля.

В противном случае квадратную матрицу называют вырожденной (особенной).

Матрица называется обратной матрице A (обозначается A^{-1}), если имеет место соотношение: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица.

Рассмотрим способы нахождения обратной матрицы:

1) Всякая невырожденная матрица A имеет обратную A^{-1}, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A} \cdot A^*, \text{ где } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Рассмотрим матрицу A^* вида: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Эта матрица строится путем замены элементов матрицы A (порядка n) их алгебраическими дополнениями и последующей операции транспонирования.

Обозначим определитель матрицы A символом Δ, т.е. $det\,A = \Delta$. При этом помним, что по условию теоремы $\Delta \neq 0$. Тогда матрица вида: $\frac{1}{\Delta} A^*$ есть обратная матрице A, т.е. $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^*$.

Убедимся в этом проверкой:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = B$$

Матрица- результат умножения будет иметь вид: $B=\left(b_{ij}\right), \forall\, i=\overline{1,n},\ \ \forall\, j=\overline{1,n}$

$$b_{11}=\frac{1}{\Delta}\cdot(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+...+a_{1n}A_{1n})=\frac{1}{\Delta}\cdot\Delta=1;$$

$b_{12}=\frac{1}{\Delta}\cdot(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+...+a_{n}A_{2n})=\frac{1}{\Delta}\cdot 0=0$, по 8) свойству определителей;

……………………………………………………………..

$$b_{1n}=\frac{1}{\Delta}\cdot(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+...+a_{1n}A_{nn})=\frac{1}{\Delta}\cdot 0=0;$$

$$b_{21}=\frac{1}{\Delta}\cdot(a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+...+a_{2n}A_{1n})=\frac{1}{\Delta}\cdot 0=0;$$

$$b_{22}=\frac{1}{\Delta}\cdot(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+...+a_{2n}A_{2n})=\frac{1}{\Delta}\cdot\Delta=1;$$

$$b_{23}=\frac{1}{\Delta}\cdot(a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+...+a_{2n}A_{3n})=\frac{1}{\Delta}\cdot 0=0;$$

……………………………………………………………..

$$b_{n1}=\frac{1}{\Delta}\cdot(a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+...+a_{nn}A_{1n})=\frac{1}{\Delta}\cdot 0=0;$$

……………………………………………………………..

$$b_{nn}=\frac{1}{\Delta}\cdot(a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+...+a_{nn}A_{nn})=\frac{1}{\Delta}\cdot\Delta=1.$$

Таким образом, матрица – результат: $B=E=\begin{pmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&1\end{pmatrix}$.

Аналогично можно доказать, что $A^{-1}\cdot A=E$

Пример - найти обратную матрице $A=\begin{pmatrix}5&8&7\\0&2&3\\0&0&4\end{pmatrix}$.

Решение:

$$det\,A=\begin{vmatrix}5&8&7\\0&2&3\\0&0&4\end{vmatrix}=5(-1)^2\begin{vmatrix}2&3\\0&4\end{vmatrix}=5(2\cdot 4-3\cdot 0)=40\neq 0\Rightarrow\ \exists A^{-1}.$$

$A_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\0&4\end{vmatrix}=8;$ $\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}0&3\\0&4\end{vmatrix}=0;$ $\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}=0;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -32$; $\qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 20$; $\qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10$; $\qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15$; $\qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$;

$$A^{-1} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 8 & -32 & 10 \\ 0 & 20 & -15 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Чтобы окончательно убедиться в верности результата сделайте проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Назовем элементарными следующие преобразования матрицы:

- умножение некоторого столбца (строки) матрицы на число, отличное от нуля;

- прибавление к одному столбцу (строке) матрицы другого столбца (строки), умноженного на произвольное число;

- перестановку местами двух столбцов (строк) матрицы.

Исходную матрицу A и матрицу A', полученную из A в результате элементарных преобразований, будем называть эквивалентными (обозначать $A \sim A'$).

2) Если к единичной матрице порядка n применить те же элементарные преобразования только над столбцами (строками) и в том же порядке, с помощью которых невырожденная матрица A порядка n приводится к единичной, то полученная при этом матрица будет обратной матрице A.

Пример

Найти матрицу обратную к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$det\, A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)(-3) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)(-0.5) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим прямоугольную матрицу A размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выделим в этой матрице какие-нибудь k строк и k столбцов. Ясно, что k не превосходит меньшего из чисел: $m,n,$ т.е. $k \le min\{m,n\}$.

Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, составим определитель порядка k. Вся совокупность таких определителей называется множеством миноров матрицы A 1-го порядка: $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{21}, \dots, a_{1k}, \dots, a_{kk}$; 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \dots,$ $\begin{vmatrix} a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} \\ a_{k1} & a_{k2} \end{vmatrix}, \dots$ Самый большой порядок, входящего минора, n (если $m>n$).

Говорят, что матрица A имеет ранг r (обозначают: $rangA=r$), если среди ее миноров порядка r существует хотя бы один отличный от нуля, а все миноры порядка (r+1) и выше равны нулю или не существуют.

Если каждый элемент матрицы равен нулю, то по определению считают: ранг такой матрицы равным нулю.

Отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы A, называется базисным минором матрицы A. Строки и столбцы матрицы A, которые содержат элементы базисного минора, называются базисными.

Другими словами: $rangA$ называют порядок базисного минора.

Имеет место теорема.

Теорема 1.1 (теорема о базисном миноре)

В любой матрице каждый столбец линейно выражается через столбцы, в которых расположен базисный минор.

Доказательство:

Пусть дана матрица $A_{m \times n}$, имеющая ранг r. Будем считать, что базисный минор матрицы A расположен в левом верхнем углу. Это возможно за счет перенумерации строк и столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rr} & a_{r(r+1)} & \dots & a_{rn} \\ a_{(r+1)1} & a_{(r+1)2} & a_{(r+1)3} & \dots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} & \dots & a_{(r+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mr} & a_{m(r+1)} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Добавим к базисному минору матрицы A какой-нибудь столбец или строку. Построенный минор равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rr} & a_{rq} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kr} & a_{kq} \end{vmatrix} = 0, \text{ так как}$$

1) если выполняется неравенство $k \leq r$ или неравенство $q \leq r$, то этот определитель будет содержать две одинаковые строки или столбца (возможно и то, и другое).

2) если же $k > r$ и $q>r$, то определитель равен нулю на основании определения ранга.

Разложим полученный определитель по элементам последней строки:

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots a_{kr}A_{kr} + a_{kq}A_{kq} = 0 \qquad (1.1)$$

$A_{kq} \neq 0$, т.к. это базисный минор $A_{m\times n}$.

Из (1.1) можно найти $$a_{kq} = -a_{k1}\frac{A_{k1}}{A_{kq}} - a_{k2}\frac{A_{k2}}{A_{kq}} - \dots - a_{kr}\frac{A_{kr}}{A_{kq}} \qquad (1.2)$$

Из (1.2) вытекает утверждение теоремы.

(Если положить k=1 получим a_{1q}; k=2 получим a_{2q}; таким образом, получим то, что и требовалось доказать).

1.5 Системы линейных алгебраических уравнений. Линейные пространства. Линейное пространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим множество из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.3)$$

Если свободный член каждого уравнения равен нулю, т.е. $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$, то система (1.3) называется однородной. В противном случае – система (1.3) называется неоднородной.

Упорядоченное множество чисел (μ_1, μ_2,… μ_n) называют решением системы (1.3), если при замене x_1 на μ_1, x_2 на μ_2,…, x_n на μ_n все уравнения (1.3) обращаются в тождества.

Система, имеющая единственное решение называется определенной. Если решение не единственное, то система – неопределенная. Систему называют совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет ни одного решения, то ее называют несовместной.

Для исследования системы (1.3) введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрица данной системы.

A составлена из коэффициентов при неизвестных каждого уравнения системы (1.3).

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$ - матрица неизвестных системы.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$ - матрица свободных членов данной системы.

Используя введенные обозначения систему (1.3) можно записать в виде одного матричного уравнения: $A \cdot X = B$ (1.4)

Можно убедиться в том, что множество решений системы (1.3) равно множеству решений матричного уравнения (1.4)

1) Чтобы найти неизвестную матрицу X из (1.4) будем считать, что число уравнений системы (1.3) равно числу неизвестных, т.е. $m=n$ и $detA\neq0$.

В этом случае квадратная матрица A является невырожденной и для нее существует обратная A^{-1}. Умножив обе части (1.4) слева на A^{-1}, получим:

$A^{-1}\cdot A\cdot X= A^{-1}\cdot B$

$E\cdot X= A^{-1}\cdot B$

$$X=\frac{1}{det\,A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};\ X=\frac{1}{det\,A}\cdot\begin{pmatrix} det\,V_1 \\ det\,V_2 \\ \dots \\ det\,V_n \end{pmatrix}$$

Получили матрицу столбец – результат умножения, где

$$det\,V_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ det\,V_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\dots,\ det\,V_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Таким образом, решение системы (1.3) можно записать:

$$x_1=\frac{1}{det\,A}\cdot det\,V_1,\ \ x_2=\frac{1}{det\,A}\cdot det\,V_2,\dots,x_n=\frac{1}{det\,A}\cdot det\,V_n,$$

эти формулы называются формулами Крамера.

2) Теперь рассмотрим случай, когда $m\neq n$.

Тогда, кроме введенной матрицы A, рассмотрим матрицу A'. Ее называют расширенной матрицей системы (1.3) и обозначают:

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Теорема 1.2 (Кронекера – Капели)

Для совместности системы (1.3) необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу матрицы системы: $rang A'=rang A$.

Доказательство:

Необходимость.

Дано: система (1.3) совместна

Требуется доказать: $rang A=rang A'$.

Так как система (1.3) совместна, то она имеет хотя бы одно решение. Пусть это будет набор $(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$.

Проведем следующие элементарные преобразования в матрице A': из элементов последнего столбца будем последовательно вычитать соответствующие элементы первого столбца, предварительно умноженные на

μ_1, элементы второго столбца, умноженные на $\mu_2, \ldots,$ элементы n-го столбца, умноженные на μ_n. После чего получим матрицу A'' эквивалентную A', и отличающуюся от нее только последним столбцом, который у A'' целиком состоит из нулей. Значит, $rangA'' = rangA$, а т.к. $A'' \sim A'$, то $rangA'' = rangA'$ следовательно $rangA = rangA'$.

Достаточность.

Дано: $rangA = rangA'$.

Требуется доказать: система (1.3) совместна.

Базисные миноры матриц A и A' расположены в левых верхних углах, тогда первые r строк и r столбцов матрицы A будут базисными, и систему (1.3) можно записать в виде:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1r} \cdot x_r = b_1 - a_{1r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \cdot x_1 + a_{r2} \cdot x_2 + \ldots + a_{rr} \cdot x_r = b_r - a_{rr+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_{rn} \cdot x_n \end{cases}$$

(1.5)

на основании теоремы о базисном миноре.

Возможны два случая:

1) $rangA = r = n$, то система (1.5) отличается от системы (1.3) только количеством уравнений, а решение системы (1.5) находится по формулам Крамера.

2) $rangA = r < n$

В этом случае неизвестные: $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ остаются в правой части и мы считаем их параметрами. А систему (1.5) решаем по формулам Крамера относительно r неизвестных: $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Таким образом, решение системы (1.3) определяется набором найденных r решений и параметрами $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Т.к. параметры принимают все возможные значения, то система (1.3) имеет бесконечное множество решений.

Пример - найти решение системы: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$

Решение:

1) Выясним, совместна ли система. Составим расширенную матрицу данной системы.

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножим последний столбец на 6, прибавим к 4 столбцу полученное и вычтем элементы 5 столбца. Эти операции сделают последний столбец нулевым.

$$\begin{matrix} 1\cdot 6+(-2)-4=0 \\ 1\cdot 6+1-7=0 \\ (-1)\cdot 6+8-2=0 \end{matrix} \qquad A'\sim\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = rangA'' = rangA'$$

таким образом, система совместна.

2) Найдем $rangA$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим второй столбец матрицы на 2 и сложим с первым, из последнего столбца вычтем третий, затем вновь полученный последний столбец прибавим ко второму, умножим первую строку на (-1) и сложим со второй, вновь полученную вторую строку сложим с первой; умножим вторую строку на (-1) и сложим с третьей; найдем сумму новых первой и третьей строк. Эти операции приведут к матрице вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = 2$$

3) В матрице A выбираем базисный минор

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1-4=-5\neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_2, x_4 - \text{базисные переменные} \\ x_1, x_3, x_5 - \text{параметры} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -x_2-2x_4=1-2x_1-3x_3-4x_5 \\ -2x_2+x_4=1-4x_1-5x_3-7x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-\dfrac{3}{5}+2x_1+\dfrac{13}{5}x_3+\dfrac{18}{5}x_5 \\ x_4=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}x_3+\dfrac{1}{5}x_5 \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(x_1; -\dfrac{3}{5}+2x_1+\dfrac{13}{5}x_3+\dfrac{18}{5}x_5; x_3; -\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}x_3+\dfrac{1}{5}x_5; x_5\right)\right\}$,

произвольный элемент этого множества $\left(0; -\dfrac{3}{5}; 0; -\dfrac{1}{5}; 0\right)$

Множество V элементов x, y, z,… называется линейным пространством (действительным или комплексным), если по некоторому правилу

- любым двум элементам x и y из V поставлен в соответствие элемент из V, обозначаемый $(x+y)$ и называемый суммой элементов x и y;

- любому элементу x из V и каждому числу α (действительному или комплексному) поставлен в соответствие элемент из V, обозначаемый (αx) и называемый произведением элемента x на число α, и эти правила сложения и умножения на число удовлетворяют следующим аксиомам:

1) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность);

2) $x+y=y+x$ (коммутативность);

3) $\exists\theta\in V: x+\theta=x, \forall x\in V$;

4) $\forall x\in V\ \exists(-x)\in V: x+(-x)=\theta$;

5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;

6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

8) $1\cdot x=x$.

Элемент θ называется нулевым элементом, а элемент $(-x)$ – противоположный элементу x.

Элементы x, y, z,…линейного пространства часто называют векторами. Поэтому линейное пространство называют так же векторным пространством.

Приведем несколько примеров линейных пространств:

1 Множество геометрических векторов в трехмерном пространстве R^3, с введенными операциями сложения и умножения вектора на число.

2 Множество n-мерных строк с операциями сложения строк и умножения строки на число.

3 Совокупность всевозможных матриц $R_{m\times n}$ с введенными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

4 Множество действительных функций непрерывных на отрезке с операциями сложения и умножения функции на число.

Линейное пространство V называется евклидовым пространством, если любым двум элементам x и y из V ставится в соответствие число, обозначаемое через (x,y), такое, что для любых элементов x, y, z и произвольного действительного числа α выполняются следующие условия:

1) $(x,y)=(y,x)$;

2) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

3) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

4) $(x,x)\geq 0$; причем равенство нулю возможно в том и только в том случае, если $x=\theta$.

Число (x,y) называется скалярным произведением элементов x и y.

Для систем вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.3

Множество решений системы (1.6) образует линейное пространство.

Теорема 1.4

Размерность линейного пространства решений системы (1.6) (обозначается *dimL*) определяется по формуле *dimL=n – r*, где *n*-число неизвестных системы, а *r*-ранг матрицы системы.

1.6 Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Понятие линейного оператора – одно из фундаментальных понятий матричной алгебры.

Рассмотрим два линейных пространства: R^n размерности n и R^m размерности m.

Если задан закон, по которому каждому вектору x пространства R^n ставится в соответствие единственный вектор y пространства R^m, то говорят, что задан оператор (преобразование, отображение) $\widetilde{A}(x)$, действующих из R^n в R^m, и записывают $y = \widetilde{A}(x)$.

$$x \to y; \quad \begin{matrix} \forall x \in R^n \\ \exists ! y \in R^m \end{matrix} \qquad R^n \xrightarrow{\widetilde{A}(x)} R^m$$

Оператор (преобразование) называют линейным, если для любых векторов x и y пространства R^n и любого числа λ выполняются соотношения:

1) $\widetilde{A}(x+y) = \widetilde{A}(x) + \widetilde{A}(y)$ - свойство аддитивности оператора;

2) $\widetilde{A}(\lambda x) = \lambda \widetilde{A}(x)$ - свойство однородности оператора.

Вектор $y = \widetilde{A}(x)$ называется образом вектора x, а сам вектор x – прообразом y. Если пространства R^n и R^m совпадают, то оператор $\widetilde{A}$ отображает пространство R^n в себя. Именно такие операторы мы будем рассматривать в дальнейшем.

Выберем в пространстве R^n базис из векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (обозначим $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$). Известно, что каждый вектор линейного пространства можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса. Например, если x с координатами (x_1, x_2, … ,x_n), то справедливо равенство: $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Эту запись будем называть разложением произвольного вектора x по данному базису $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

В силу линейности оператора $\widetilde{A}$ получаем:

$$\widetilde{A}(x) = x_1\widetilde{A}(e_1) + x_2\widetilde{A}(e_2) + \ldots + x_n\widetilde{A}(e_n).$$

Поскольку образ вектора e_i $\widetilde{A}(e_i), \forall\, i = \overline{1,n}$ является также вектором из R^n, то его можно разложить по базису $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Пусть $\widetilde{A}(e_i) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + ... + a_{ni}e_n, \forall\, i = \overline{1,n}$ (1.7)

Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x) &= x_1(a_{11} \cdot e_1 + a_{21} \cdot e_2 + ... + a_{n1} \cdot e_n) + x_2(a_{12} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 + ... + a_{n2} \cdot e_n) + ... \\ &+ x_n(a_{1n} \cdot e_1 + a_{2n} \cdot e_2 + ... + a_{nn} \cdot e_n) = (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n) \cdot e_1 + \\ &+ (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n) \cdot e_2 + ... + (a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + ... + a_{nn} \cdot x_n) \cdot e_n\end{aligned} \quad (1.8)$$

С другой стороны, вектор $y = \widetilde{A}(x)$, имеющий в том же базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ координаты $(y_1, y_2, ..., y_n)$ можно записать так:

$$\widetilde{A}(x) = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n \quad (1.9)$$

Ввиду единственности разложения вектора по базису равны правые части равенства (1.8) и (1.9), откуда

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Матрица $A = (a_{ij}), i = \overline{1,n}, \ \forall\, j = \overline{1,n},$ называется матрицей оператора $\widetilde{A}$ в базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, а ранг r матрицы A – рангом оператора $\widetilde{A}$.

Таким образом, каждому линейному оператору соответствует матрица в данном базисе. Справедливо и обратное: всякой матрице n-го порядка соответствует линейный оператор n-мерного пространства.

Связь между вектором x и его образом $y = \widetilde{A}(x)$ можно выразить в матричной форме уравнением:

$$Y = A \cdot X, \quad (1.10)$$

где A – матрица линейного оператора, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$

Пример - пусть в R^3 линейный оператор $\widetilde{A}$ задан матрицей A,

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образ $y = \widetilde{A}(x)$ вектора $x = 5e_1 + e_2 - 2e_3$.

По формуле (1.10) имеем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+1+0 \\ 5+3-4 \\ 0-4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $y = -9e_1 + 4e_2 - 6e_3$.

Определим действия над линейными операторами.

Суммой двух линейных операторов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется оператор $\left(\widetilde{A} + \widetilde{B}\right)$, определяемый равенством $\left(\widetilde{A} + \widetilde{B}\right)(x) = \widetilde{A}(x) + \widetilde{B}(x)$.

Произведением линейного оператора $\widetilde{A}$ на число λ называется оператор ($\lambda \widetilde{A}$), определяемый равенством $\left(\lambda \widetilde{A}\right)(x) = \lambda\left(\widetilde{A}(x)\right)$.

Произведением линейных операторов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется оператор ($\widetilde{A}\widetilde{B}$), определяемый равенством: $\left(\widetilde{A}\widetilde{B}\right)(x) = \widetilde{A}\left(\widetilde{B}(x)\right)$.

Можно убедиться в том, что операторы $\left(\widetilde{A} + \widetilde{B}\right)$, ($\lambda \widetilde{A}$), ($\widetilde{A}\widetilde{B}$), полученные в результате этих действий, удовлетворяют свойствам аддитивности и однородности, т.е. являются линейными.

Определим нулевой оператор $\widetilde{O}$, переводящий все векторы пространства R^n в нулевые векторы $\widetilde{O}(x) = 0$, и тождественный оператор $\widetilde{E}$, действующий по правилу: $\widetilde{E}(x) = x$.

Зависимость между матрицами одного и того же оператора в разных базисах выражается теоремой.

Теорема 1.5

Матрицы A и A^* линейного оператора $\widetilde{A}$ в базисах $\{e_i\}$ *и* $\{e_i^*\}$, $i = \overline{1,n}$, связаны соотношением $A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C$ (1.11), где C – матрица перехода от старого базиса к новому.

Доказательство:

При воздействии линейного оператора $\widetilde{A}$ вектор X пространства R^n переводится в вектор Y этого пространства, т.е. справедливо равенство (1.10) (в старом базисе) и равенство $Y^* = A^* \cdot X^*$ (1.12) (в новом базисе). Т.к. C – матрица перехода от старого базиса к новому, то $X = C \cdot X^*$ *и* $Y = C \cdot Y^*$.

Сделаем следующие преобразования:

Умножим обе части равенства $X = C \cdot X^*$ слева на A: $A \cdot X = A \cdot C \cdot X^*$, с учетом (1.10) $Y = A \cdot C \cdot X^*$. Заменим $C \cdot Y^* = A \cdot C \cdot X^*$, умножим последнее равенство слева на C^{-1}: $Y^* = C^{-1} A \cdot C \cdot X^*$.

Сравнивая найденное выражение с (1.12), мы получим доказываемую формулу: $A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C$.

Пример - В базисе $\{e_1, e_2\}$ оператор $\widetilde{A}$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Найти матрицу оператора $\widetilde{A}$ в базисе $\{e_1^*, e_2^*\}$, если $e_1^* = e_1 + 2e_2, e_2^* = -2e_1 + e_2$.

Решение:

Матрица перехода имеет вид: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$det\, C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-4) = 5 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$; $\quad C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Ненулевой вектор x называется собственным вектором линейного оператора $\widetilde{A}$, если найдется такое число λ, что $\widetilde{A}(x) = \lambda x$ (1.13)

Само число λ тогда называется собственным значением оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A) соответствующим вектору x.

Из определения следует, что собственный вектор под действием $\widetilde{A}$ переходит в вектор, параллельный самому себе, т.е. просто умножается на некоторое число. В то же время несобственные векторы преобразуются более сложным образом. В связи с этим понятие собственного вектора является полезным и удобным при изучении многих вопросов матричной алгебры и ее приложений.

Собственное значение оператора $\widetilde{A}$, т.е. число λ, определяется однозначно, т.к. вектор x отличен от нулевого вектора . В R^n оно показывает, во сколько раз под действием «сжимается» или «растягивается» собственный вектор x. ($|\lambda| < 1$ – «сжимается», $|\lambda| > 1$ - «растягивается»).

Равенство (1.13) можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = \lambda X \qquad (1.14)$$

или в развернутом виде: $\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = \lambda x_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = \lambda x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = \lambda x_n \end{cases}$

Преобразуем систему так, чтобы в правых частях были нули:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda) \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

Эта однородная система всегда имеет нулевое решение $x = (0,0,\ldots,0)$. Для существования нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы этой системы был равен нулю:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.15)$$

Определитель $|A - \lambda E|$ является многочленом n-ой степени относительности λ. Этот многочлен называется характеристическим многочленом оператора $\widetilde{A}$ или матрицы A. Равенство $|A - \lambda E| = 0$ называют характеристическим уравнением.

Заметим, что характеристический многочлен линейного оператора $\widetilde{A}$ не зависит от выбора базиса. В самом деле, преобразуем характеристический многочлен $|A^* - \lambda E|$, полученный в новом базисе $\{e_i^*\}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, если известна матрица C перехода от старого базиса $\{e_i\}$ к новому $\{e_i^*\}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. С учетом (1.11) получим:

$$|A^* - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(A - \lambda E)C|.$$

Учитывая, что определитель произведения квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц, получим:

$$|A^* - \lambda E| = |C^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |C| = |C^{-1}C| |A - \lambda E| = |A - \lambda E|, \text{ т.е. } |A^* - \lambda E| = |A - \lambda E|$$

независимо от выбора базиса.

Пример - найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\widetilde{A}$, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Составим характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 9 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow (1-\lambda)^2-36=0\Rightarrow \lambda^2-2\lambda-35=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1=-5\\ \lambda_2=7\end{array}\right.$$

Находим собственный вектор x^1, соответствующий собственному значению λ_1. Для этого решаем матричное уравнение $(A-\lambda_1 E)x^1=0$ или

$$\begin{pmatrix}1-(-5) & 4\\ 9 & 1-(-5)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1^1\\ x_2^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6 & 4\\ 9 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1^1\\ x_2^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases}6x_1^1+4x_2^1=0\\ 9x_1^1+6x_2^1=0\end{cases} \quad \begin{cases}3x_1^1+2x_2^1=0\\ 3x_1^1+2x_2^1=0\end{cases}\Rightarrow x_2^1=-\frac{3}{2}x_1^1$$

Положив (для удобства) $x_1^1=C$, получим, что векторы $x^1=\left(C,-\frac{3}{2}C\right)^T, \forall C\neq 0$ являются собственными векторами линейного оператора $\widetilde{A}$ с собственным значением $\lambda_1=-5$.

Аналогично можно убедиться в том, что векторы $x^2=\left(\frac{2}{3}C_1,C_1\right)^T, \forall C_1\neq 0$ являются собственными векторами линейного оператора $\widetilde{A}$ с собственным значением $\lambda_2=7$.

Наиболее простой вид принимает матрица A линейного оператора $\widetilde{A}$, имеющего n линейно независимых собственных векторов $e_1,e_2,...,e_n$ с собственными значениями соответственно равными $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$. Примем векторы $e_1,e_2,...,e_n$ за базисные. Тогда $\widetilde{A}(e_i)=\lambda_i e_i, \quad \forall i=\overline{1,n}$ или с учетом (1.6.1): $\widetilde{A}(e_i)=a_{1i}e_1+a_{2i}e_2+...+a_{ni}e_n=\lambda_i e_i$, откуда $a_{ij}=0$,

если $i\neq j$ и $a_{ij}=\lambda_i$, если $i=j$.

Таким образом, матрица оператора $\widetilde{A}$ в базисе, состоящем из его собственных векторов, является диагональной и имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Верно и обратное: если матрица A линейного оператора $\widetilde{A}$ в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса – собственные векторы оператора $\widetilde{A}$.

Можно доказать, что если линейный оператор имеет n попарно различных собственных значений, то отвечающие им собственные векторы линейно независимы, и матрица этого оператора в соответствующем базисе имеет диагональный вид.

1.7 Квадратичные формы

Квадратичной формой от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (1.16)$$

Предполагаем, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij} - действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Матрица $A = (a_{ij}), \forall\, i = \overline{1, n},$ составленная из этих коэффициентов, называется матрицей квадратичной формы.

Матрица, у которой все элементы $a_{ij} = a_{ji}$, называется симметрической. В матричной записи квадратичная форма имеет вид: $L = X^T \cdot A \cdot X$ (1.17)

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица столбец переменных.

$$L(x_1,x_2,...,x_n)=(x_1,x_2,...,x_n)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ ...\\ x_n\end{pmatrix}=(x_1,x_2,...,x_n)\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\\ ...\\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_1x_j+\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_2x_j+...+\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_nx_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

и эквивалентность формул (1.16) и (1.17) установлена.

Пример - $L(x_1,x_2,...,x_n)=4x_1^2-12x_1x_2-10x_1x_3+x_2^2-3x_3^2$. Записать данную квадратичную формулу в матричном виде.

Найдем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадрате переменных, то есть 4, 1, -3; а другие элементы половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы, поэтому

$$L(x_1,x_2,...,x_n)=(x_1,x_2,...,x_n)\cdot\begin{pmatrix} 4 & -6 & -5\\ -6 & 1 & 0\\ -5 & 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Выясним, как изменяется квадратичная форма при невырожденном линейном преобразовании переменных.

Пусть матрицы - столбцы переменных $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ и $Y=(y_1,y_2,...,y_n)^T$ связаны линейным соотношением $X=C\cdot Y$, где $C=(c_{ij}), \forall\, i=\overline{1,n},\ \forall\, j=\overline{1,n}$ есть некоторая невырожденная матрица n-го порядка. Тогда квадратичная форма

$$L=X^T\cdot A\cdot X=(C\cdot Y)^T\cdot A\cdot(C\cdot Y)=(Y^T\cdot C^T)\cdot A\cdot(C\cdot Y)=Y^T(C^T\cdot A\cdot C)Y.$$

Итак, при невырожденном линейном преобразовании $X=CY$ матрица квадратной формы принимает вид:

$$A^*=C^T\cdot A\cdot C \tag{1.18}$$

Следует отметить, что при некоторых удачно выбранных линейных преобразованиях вид квадратичной формы можно существенно упростить.

Квадратичная форма $L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$ называется канонической (или имеет канонический вид), если все ее коэффициенты $a_{ij} = 0 \quad при \quad i \neq j$.

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2,$$

а ее матрица является диагональной.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.6

Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

Пример - Привести к каноническому виду

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

В начале выделим полный квадрат при переменной x_1, коэффициент при квадрате которой отличен от нуля:

$$L = \left[x_1^2 - 2x_1 \cdot \left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right) + \left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right)^2\right] - \left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right)^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 =$$

$$= \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2.$$

Теперь выделим полный квадрат при переменной x_2, коэффициент при квадрате которой отличен от нуля:

$$L = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2^2 - \frac{32}{9}x_2x_3 + \frac{256}{81}x_3^2\right) + \frac{9}{4}\cdot\frac{256}{81}x_3^2 - 3x_3^2 =$$

$$= \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2 - \frac{16}{9}x_3\right)^2 + \frac{37}{9}x_3^2$$

Итак, невырожденное линейное преобразование $y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3; \quad y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3; \quad y_3 = x_3$ приводит данную квадратичную форму к каноническому виду $L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2$

Канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным, т.к. одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами. Однако полученные различными способами канонические формы обладают рядом общих свойств. Одно из этих свойств сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.7 (закон инерции квадратичных форм).

Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.

Следует отметить, что ранг матрицы квадратичной формы, называемый рангом квадратичной формы, равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется положительно (отрицательно) определенной, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, она положительна $L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ (она отрицательна $L(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$). Так, например, квадратичная форма $L_1 = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$, является положительно определенной, а форма $L_2 = 3x_2x_3 - x_1^2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 5x_3^2$ - отрицательно определенной.

Квадратичная форма называется знакопеременной, если она принимает как строго положительные, так и строго отрицательные значения.

Квадратичная форма называется квазизнакоопределенной, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но при этом обращается в нуль для $x_1, x_2, ..., x_n$ одновременно неравных нулю.

Теорема 1.8

Для того чтобы квадратичная форма $L = X^T \cdot A \cdot X$ была положительно определенной (отрицательно определенной), необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i матрицы A были положительными (отрицательными).

В ряде случаев для установления знакоопределенности квадратичных форм удобнее бывает применить критерий Сильвестра (Теорема 1.9).

Теорема 1.9

Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительные, т.е. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$, где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Следует отметить, что для отрицательно определенных квадратичных форм знаки главных миноров чередуются, начиная со знака минус для минора первого порядка.

Пример - доказать, что квадратичная форма $L = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ является положительно определенной.

1 способ решения: матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}13 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix},\ \text{тогда}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}13-\lambda & -3\\ -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\ \lambda^2-18\lambda+56=0,\Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\lambda_1=14\\ \lambda_2=4\end{array}\right.$$

Т.к. корни характеристического уравнения матрицы A положительны, то по теореме 1.8 $L>0$, положительно определенная.

2 способ решения: т.к. главные миноры матрицы A

$\Delta_1=|a_{11}|=13;\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13 & -3\\ -3 & 5\end{vmatrix}=56$ положительны, то по критерию

Сильвестра данная квадратичная форма L положительно определенная.

2 Начала математического анализа

2.1 Числовые последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. Фундаментальные последовательности

Отображением f множества X во множество Y (обозначается $f:X\to Y$) называется соответствие, при котором каждому элементу x множества X соответствует единственный элемент y из Y.

$$f:X\to Y\ \text{- соответствие:}\ \forall x\in X\to\exists!\,y\in Y$$

Функцией заданной на множестве X со значениями во множестве Y называется отображение множества X во множество Y.

$f:X\to Y$ называется функцией

При этом X – множество прообразов (D_f - область определения функции), Y – множество образов (E_f – область значений функции).

Рассмотрим отображение f множества натуральных чисел N во множество действительных чисел R, т.е. функцию $f:N\to R$.

Значения этой функции можно пронумеровать: $f(1)=y_1,\ f(2)=y_2,...,f(n)=y_n,...$

$y_1,y_2,...,y_n,...$ – получили числовую последовательность.

Числовой последовательностью называются значения функции натурального аргумента, расположенные в порядке возрастания аргумента. Обозначают: $\{y_n\}$.

Пример – В школьном курсе рассматриваются числовые последовательности – арифметическая и геометрическая прогрессии.

Свойства числовой последовательности индуцируются из свойств функции натурального аргумента.

1) $\{y_n\}$ – ограничена $\Leftrightarrow$ $\{f(n)\}$ – ограничено, т. е. $\begin{matrix}\exists A \in R \\ \exists B \in R\end{matrix} : A \le y_n \le B$;

2) $\{y_n\}$ – монотонна $\Leftrightarrow$ $f(n)$ – монотонна;

$\{y_n\}$- возрастает, если $f(n)$- возрастает; $\{y_n\}$- убывает, если $f(n)$- убывает; $(y_n > y_{n+1}, \forall n \in N)$.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{y_n\}$, если любая ε окрестность точки a содержит почти все члены последовательности $\{y_n\}$.

Поясним, что слова «почти все члены последовательности $\{y_n\}$»

означают все, начиная с некоторого номера, будем обозначать (*п*. все y_n)

$$a = \lim y_n \overset{def}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \forall U_\varepsilon(a) : \exists k : \forall y_n : \ n > k \Rightarrow \quad y_n \in U_\varepsilon(a) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k : \forall y_n : n > k \Rightarrow \quad |y_n - a| < \varepsilon \end{array}\right.$$

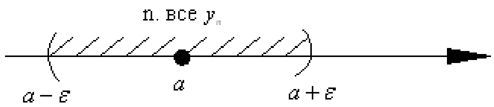


Рисунок 2

Рассмотрим геометрический смысл понятия предела:

Вне $U_\varepsilon(a)$ находится разве лишь конечное число членов $\{y_n\}$. Это означает, что если существует любая хотя бы одна окрестность точки a такая, что вне ее бесконечное множество членов последовательности, то a не является пределом этой числовой последовательности.

Пример

$y_n = (-1)^n$

-1, 1, -1, 1, .., -1, 1, …

– Будет ли $1 = \lim y_n$?

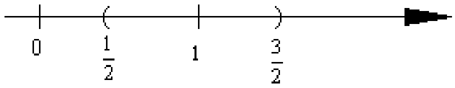


Рисунок 3

Рассмотрим $U_{\frac{1}{2}}(1)$. Эта окрестность содержит лишь члены $\{y_n\}$, стоящие на четных местах. И не содержит - на нечетных местах, т.е. бесконечное множество членов $\{y_n\}$ находится вне $U_{\frac{1}{2}}(1)$, следовательно $1 \ne \lim y_n$.

– Будет ли $-1 = \lim y_n$?

Аналогичные рассуждения показывают, что $-1 \neq \lim y_n$.

– Быть может 1 и -1 пределы $\{y_n\}$?

– Нет. Данная последовательность не имеет предела.

Такие последовательности относятся к расходящимся.

Если последовательность имеет конечный предел, то ее называют сходящейся. В противном случае последовательность называют расходящейся.

Теорема 2.1

Если числовая последовательность имеет предел, то он единственный,т.е.

$$\text{если}\quad \{y_n\}: \left[\begin{array}{l} \exists \lim y_n = a \\ \exists \lim y_n = b \end{array}\right. \Rightarrow a = b.$$

Доказательство: методом от противного. Пусть $a \neq b$ $(a < b)$. Воспользуемся геометрическим толкованием $\lim y_n$.

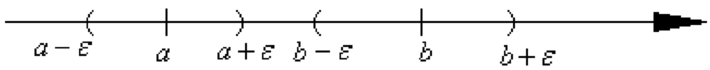


Рисунок 4

Рассмотрим $U_\varepsilon(a)\overline{\cap}U_\varepsilon(b)$, т.е. $a+\varepsilon < b-\varepsilon$, $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$.

Согласно условию теоремы $a = \lim y_n$,тогда $U_\varepsilon(a)$ содержит почти все члены $\{y_n\}$, а вне $U_\varepsilon(a)$ разве лишь конечное число.

Так как $U_\varepsilon(a)$ находится вне $U_\varepsilon(b)$, то вне $U_\varepsilon(b)$ бесконечное множество членов $\{y_n\} \Rightarrow b \neq \lim y_n$

Получили противоречие с условием теоремы, значит, предположение неверно. Следует принять, что $a = b$.

Теорема 2.2

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

$$\exists \lim y_n = a \Rightarrow \{y_n\} \text{ – ограничена.}$$

Однако условие ограниченности не является достаточным для сходимости, т.е. существуют ограниченные последовательности, не имеющие пределов.

Но, если к ограниченной последовательности добавить свойство монотонности, то получится теорема Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности (Теорема 2.3)

Теорема 2.3

$$\forall \{y_n\}: \begin{array}{l} 1 \text{ монотонная} \\ 2 \text{ ограниченная} \end{array} \Rightarrow \exists \lim y_n = a$$

Эта теорема Вейерштрасса разбивается на две части:

1) Любая возрастающая и ограниченная сверху числовая последовательность имеет предел, причем $\lim y_n = Sup\{y_n\} = a$;

2) Любая убывающая и ограниченная снизу числовая последовательность имеет предел, причем $\lim y_n = Inf\{y_n\} = b$

Докажем 1) Дано: 1. $\{y_n\}$ возрастающая

2. $\exists M: \; y_n \le M, \forall n \in N$

Требуется доказать: $\exists \lim y_n = Sup\{y_n\} = a$

Доказательство:

По аксиоме о верхней границе, т.к. $\{y_n\}$ ограниченная сверху, то $\exists Sup\{y_n\} = a$. По свойству точной верхней границы найдется такой член последовательности, например y_{18}, что $\exists y_{18} : \forall \varepsilon > 0 \;\; y_{18} > a - \varepsilon$. А т.к. $\{y_n\}$ возрастающая (по условию), то имеет место цепочка неравенств $a - \varepsilon < y_{18} < y_{19} < y_{20} < \ldots \le a < a + \varepsilon$

Т.е. $U_\varepsilon(a)$ содержит почти все $\{y_n\} \Rightarrow a = \lim y_n$.

Теорема 2.4 (о пределе промежуточной последовательности)

Пусть почти все члены последовательностей $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \le y_n \le z_n$, кроме того последовательности $\{x_n\},\{z_n\}$ сходятся к *a*. Тогда последовательность $\{y_n\}$ тоже сходится к *a*.

$$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\} \wedge \text{почти все } x_n \le y_n \le z_n \wedge \begin{matrix} \exists \lim x_n = a \\ \exists \lim z_n = a \end{matrix} \Rightarrow \exists \lim y_n = a.$$

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если она сходится к нулю.

$\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая $\Rightarrow \exists \lim \alpha_n = 0 \; \left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists k : \forall \alpha_n : n > k \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon\right)$

Пример – последовательности $\{\alpha_n\}$, где общие члены заданы $\alpha_n = \dfrac{1}{n}; \; \alpha_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ являются бесконечно малыми.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) Сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

$$\begin{matrix} \{\alpha_n\} - \text{бесконечно малая} \\ \{\beta_n\} - \text{бесконечно малая} \end{matrix} \Rightarrow \left[\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}\right] - \text{бесконечно малая}$$

2) Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательности есть бесконечно малая последовательность.

$\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая

$\{y_n\}$ - ограниченная $\Rightarrow$ $\{\alpha_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

Теорема 2.5 (об арифметических действиях над сходящимися последовательностями).

$$\text{Если } \{x_n\} \wedge \{y_n\} : \begin{matrix} \exists \, lim \, x_n = a \\ \exists \, lim \, y_n = b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1) \exists \, lim\{x_n + y_n\} = a + b \\ 2) \exists \, lim\{x_n \cdot y_n\} = a \cdot b \\ 3) \exists \, lim\{x_n / y_n\} = a / b \ (b \neq 0) \end{matrix}$$

Определим ε окрестности для $+\infty$; $-\infty$; ∞:

1. $U_\varepsilon(+\infty) = \{x \in R : \ x > \varepsilon\}$
2. $U_\varepsilon(-\infty) = \{x \in R : \ x < -\varepsilon\}$
3. $U_\varepsilon(\infty) = \{x \in R : |x| > \varepsilon\} \ = \ U_\varepsilon(+\infty) \cup U_\varepsilon(-\infty)$

Изобразим на числовой прямой:

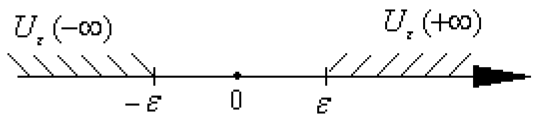


Рисунок 5

$\{y_n\}$ – называется бесконечно большой, если выполняется одно из трех условий:

$$\left[\begin{matrix} lim \, y_n = +\infty \\ lim \, y_n = -\infty \\ lim \, y_n = \infty \end{matrix} \right.$$

$$lim \, y_n = \infty \ \Leftrightarrow \ \{\forall \, \varepsilon > 0 \ \text{ почти все } \ y_n \in U_\varepsilon(\infty)\}$$
$$(\{\forall \, \varepsilon > 0 \ \exists \, k : \forall \ \ y_n : n > k \ \ |y_n| > \varepsilon\})$$

Заметим, что $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательность неограниченная.

Пример - $y_n = n \wedge y_n = n^2 + 2n + 3$ - бесконечно большие, а $y_n = \begin{cases} n - \text{нечетное} \\ 0 - \text{четное} \end{cases}$ - неограниченная, но не является бесконечно большой.

Свойства бесконечно больших последовательностей.

1) Если $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – бесконечно малая.

2) Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая и почти все $\alpha_n \neq 0,$ то $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая.

Теорема 2.6

Любая последовательность стягивающихся сегментов имеет единственную общую точку.

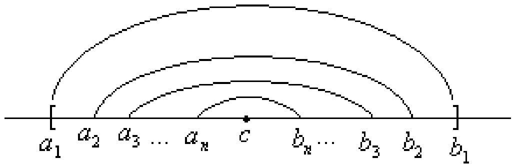


Рисунок 6

Подпоследовательностью данной числовой последовательности называется числовая последовательность, которая составлена из членов данной числовой последовательности, взятых в порядке возрастания номеров. Она должна быть бесконечной.

Пример - для последовательности $\{y_n\}$, общий член которой задан формулой: $y_n = n+1$, т.е $\{y_n\}$: 2, 3, 4, …, 100, 101, … можно записать две подпоследовательности:

$\{y_{n1}\}$: 3, 5, 7, …, 100, 101, …

$\{y_{n2}\}$: 3, 13, 23, …

Теорема 2.7 (Больцано-Вейерштрасса).

Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Воспользуемся принципом Больцано (деление отрезка пополам). По условию $\{y_n\}$ – ограниченая

$$\Rightarrow \begin{matrix} \exists a \in R \\ \exists b \in R \end{matrix} : \; a \leq y_n \leq b, \; \forall n, \text{ т.е. } [a,b] \text{ содержит почти все } \{y_n\}$$

Разделим $[a,b]$ пополам и обозначим $[a_1,b_1] = \frac{1}{2}[a,b]$ ту половину, которая содержит бесконечно много членов $\{y_n\}$. Далее $[a_2,b_2] = \frac{1}{2}[a_1,b_1]$ – та половина $[a_1,b_1]$, которая содержит бесконечно много членов $\{y_n\}$.

Выберем любой элемент из $[a_1,b_1]$ и обозначим y_{n1}. А из $[a_2,b_2]$ выберем y_{n_2} такой, что $n_1 < n_2$ (это можно сделать, т.к. y_n в $[a_2,b_2]$ бесконечно много). И так далее, выберем любой элемент из $[a_k, b_k] = \frac{1}{2}[a_{k-1}, b_{k-1}]$ и обозначим его y_{n_k} .Далее поступаем аналогично.

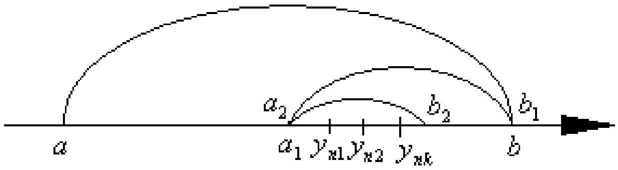


Рисунок 7

Получим подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$.

По построению сегменты вложены друг в друга, т.е. имеем последовательность стягивающихся сегментов $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots$. Заметим, что последовательность из длин отрезков стремится к нулю.

$$(|[a_k, b_k]|) = \frac{b-a}{2^k} \to 0 .$$

Поэтому по принципу Кантора (Теорема 2.6) $\exists! c \ : \ c \in ([a_k, b_k])$

$c = lim\, a_k = lim\, b_k$, т.к. $\{a_k\}$ – последовательность левых концов возрастает,

$c = Sup\{a_k\}$

т.к. $\{b_k\}$ – последовательность правых концов убывает,

$c = Inf\{b_k\}$

По построению $\{y_{n_k}\}$ промежуточная для $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, тогда по теореме 2.4 имеет место равенство $\exists\, lim\, y_{n_k} = c$

Прежде чем сформулировать критерий Коши, введем очень важное для математического анализа понятие: фундаментальной последовательности.

Последовательность $\{y_n\}$ называют фундаментальной, если для любого наперед заданного положительного ε найдется такое число *k*, что члены последовательности с номерами большими *k* удовлетворяют неравенству $|y_n - y_m| < \varepsilon$.

$$\{y_n\} \text{ – фундаментальная} \overset{def}{\Leftrightarrow} \{\forall \varepsilon > 0 \ \exists k : \begin{matrix} \forall n > k \\ \forall m > k \end{matrix} \Rightarrow |y_n - y_m| < \varepsilon\}$$

Неравенство $|y_n - y_m| < \varepsilon$ выражает так называемый «эффект слипания» членов последовательности.

Свойства фундаментальных последовательностей

1) Если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.

2) Если $\{y_n\}$ – фундаментальна, то $\{y_n\}$ – ограничена.

Теорема 2.8 (критерий Коши).

Для того, чтобы последовательность была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Докажем прямую теорему.

Дано: $\{y_n\} : \exists\ lim\ y_n = a.\ (\{\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k : \forall\ y_n : n > k \Rightarrow |\ y_n - a| < \varepsilon\})$

Требуется доказать: $\{y_n\}$ – фундаментальная

$$(\{\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k : \begin{matrix} \forall\ n > k \\ \forall\ m > k \end{matrix} \Rightarrow |\ y_n - y_m| < \varepsilon\})$$

Доказательство:

Выберем $\forall\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, тогда $|\ y_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (по условию), $\forall\ n > k$

Составим модуль разности $|\ y_n - y_m|$, заметим:

$|\ y_n - y_m| = |\ y_n - a + a - y_m| = |(y_n - a) - (y_m - a)| \leq |\ y_n - a| + |\ y_m - a| < \varepsilon$, т.к. выбрали такое m, что $|\ y_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|\ y_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом $|\ y_n - y_m| < \varepsilon \Rightarrow \{y_n\}$ - фундаментальная

Докажем обратную теорему.

Дано: $\{y_n\}$ – фундаментальная.

Требуется доказать: $\{y_n\} : \exists\ lim\, y_n = a$

Доказательство:

Из свойства фундаментальных последовательностей следует, что $\{y_n\}$ – ограничена. А по теореме Вейерштрасса: $\exists \{y_{n_k}\} : lim\ y_{n_k} = a.$

Составим: $|\ y_n - a| = |(y_n - y_{n_k}) + (y_{n_k} - a)| \leq |\ y_n - y_{n_k}| + |\ y_{n_k} - a|$

Номер n_k нужно выбрать достаточно большим, чтобы наблюдался «эффект слипания».

Пусть n_k=1001

$|y_n - a| \leq |\ y_n - y_{1001}| + |\ y_{1001} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, ($|\ y_n - y_{1001}|$ – числовая последовательность, $|\ y_{1001} - a|$ – бесконечно малая).

$|\ y_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \exists\ lim\, y_n = a$.

Таким образом мы доказали, что если фундаментальная последовательность $\{y_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ предел которой равен a, то $\{y_n\}$ сходится к тому же самому числу a.

2.2 Предел функции одной переменной в точке. Левосторонний и правосторонний пределы функции. Два замечательных предела

Рассмотрим функцию $f(x)$ с областью определения D_f. Пусть точка $x_0 \in D_f$ или $x_0 \notin D_f$. Возьмем из D_f последовательность точек $\{x_n\}$, отличных от x_0, сходящуюся к x_0.

$\{x_n\}: \forall x_n \neq x_0 \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n,\ ... \to x_0$.

Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность: $f(x_1),\ f(x_2),\ ...,\ f(x_n),\ ...,$ и можно ставить вопрос о существовании ее предела.

(По Гейне): число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x=x_0 (при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности значений аргумента, отличных от x_0 , соответствующая последовательность значений функции сходится к числу A.

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \{\forall \{x_n\}:\ x_n \in D_f \wedge \begin{matrix} 1.\ x_n \neq x_0 \\ 2.\ \lim x_n = x_0 \end{matrix} \Rightarrow \lim f(x_n) = A\}$$

Заметим, что функция $f(x)$ в точке x_0 может иметь только один предел. Это следует из того, что последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет только один предел.

Примеры

1 Функция $f(x) = C = const$ имеет предел в каждой точке x_0 числовой прямой.

$$\forall (x_n):\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ... \to x_0$$

$$f(x_n): C, C, ..., C, ... \Rightarrow f(x_n): \lim_{n\to\infty} f(x_n) = C \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = C$$

2 Функция $f(x) = x$ имеет предел в любой точке x_0 числовой прямой, равный x_0.

Последовательности $\{x_n\}$ и $\{f(x_n)\}$ тождественны $\Rightarrow$ если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x_0, \text{ т.е. } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

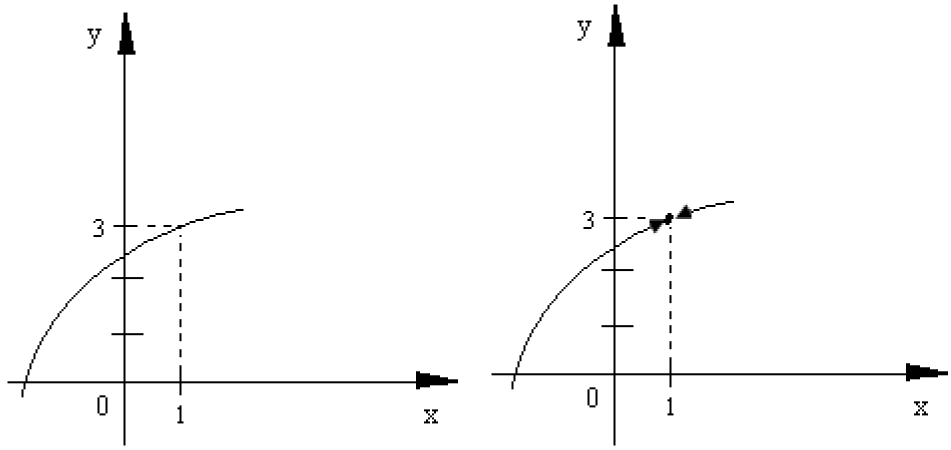
3 Функция Дирихле, значения которой в рациональных точках равны 1, а в иррациональных – 0, не имеет предела ни в одной точке x_0 числовой прямой. Действительно, для сходящейся к точке x_0 последовательности рациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен 1, а для сходящейся к точке x_0 последовательности иррациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен 0.

(По Коши): число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех значений x взятых из области определения функции и некоторой выколотой дельта окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \{ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \bigcap D_f \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \ \}.$$

Т.е. значения функции в этой окрестности приближенно равны A с точностью до ε , для всех x из этой $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$.

Пример - $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$



$f(x)$ – непрерывна $\qquad$ $f(x)$ – не является непрерывной

Рисунок 8

Отметим, что

1) предел и значение функции в точке не всегда совпадают.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ говорит о поведении $f(x)$ в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$.

Теорема 2.9

Первое и второе определения предела функции эквивалентны.

Иногда важно знать поведение функции справа (соответственно слева) от точки x_0, так что целесообразно ввести следующее определение.

Число A называется правосторонним (левосторонним) пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (обозначают $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для всех x из интервала $(x_0, x_0 + \delta)((x_0 - \delta, x_0))$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$A = \lim_{x \to x_0+} f(x) \Rightarrow \{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\}$$

$$(A = \lim_{x \to x_0-} f(x)) \qquad\qquad (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))$$

Пример - для функции $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ правосторонний предел равен одному $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$, а левосторонний - нулю $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0$.

Теорема 2.10

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы, и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.

Доказательство:

Прямая теорема

Дано: $\exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A$

Требуется доказать $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

По определению $\forall \varepsilon>0 \begin{matrix}\exists \delta_1>0:\forall x\in(x_0,x_0+\delta_1)\\ \exists \delta_2>0:\forall x\in(x_0-\delta_2,x_0)\end{matrix} \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

Возьмем $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$, тогда для всех $x\in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ будет выполняться неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Обратная теорема

Дано: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

Требуется доказать: $\exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A$.

По определению

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\forall x\in \overset{o}{U}_\delta(x_0)\cap D_f \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\}$

Тем самым, как для $x\in(x_0,x_0+\delta)$, так и для $x\in(x_0-\delta,x_0)$ справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$

А это, согласно определению односторонних пределов, и означает, что

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{x\to x_0-} f(x)=A.$$

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы x_n которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность значений функции сходится к A.

Обозначают: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \quad (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A)$.

Определение (по Гейне) дает возможность перенести доказанные ранее теоремы о пределах числовых последовательностей на функции. Покажем это на примере двух теорем.

Теорема 2.11

Пусть функции

$$f(x) \wedge g(x) : \begin{matrix} \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \\ \text{при } B \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1. \exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B \\ 2. \exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B \\ 3. \exists \lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{A}{B} \end{matrix}$$

Доказательство: Пусть $\{x_n\} : x_n \neq x_0 \wedge \exists \lim x_n = x_0$

Соответствующие последовательности значений функций $\{f(x_n)\}$ и

$$\{g(x_n)\} : \exists \lim f(x_n) = A \wedge \exists \lim g(x_n) = B$$

Но тогда в силу ранее доказанной теоремы 2.1.5 (об арифметических действиях над пределами последовательностей) последовательности $\{f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n) \cdot g(x_n)\}$, $\left\{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ имеют пределы, соответственно равные $A \pm B$, $A \cdot B$, A / B. Согласно определению это означает, что

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B; \ \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B; \ \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}.$$

Теорема 2.12

Пусть функции

$$f(x),\ g(x),\ h(x):\ D_f = D_g = D_h = \overset{o}{U}_\delta (x_0) \wedge \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A,$$

кроме того выполняется условие: $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

Заметим, что теоремы (2.11), (2.12) верны также и в случаях, когда $x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$. Для практических расчетов необходимо знание следующих двух замечательных пределов:

I. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ II. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

2.3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции одной переменной. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

$f(x)$ –бесконечно малая в точке $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0(\{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \ \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon\})$

Имеет место следующая теорема 2.13

Теорема 2.13

Для выполнения равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечная малая при $x \to x_0$.

Доказательство:

Необходимое условие:

Дано: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Требуется доказать: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

Так как

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A \wedge \exists \lim_{x \to x_0} A = A \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0$$

Достаточное условие:

Дано: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

Требуется доказать: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Так как $f(x) = A + \alpha(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

Из теоремы получаем специальное представление для функции, имеющей в точке x_0 предел, равный $A: f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

При этом обычно говорят, что функция $f(x)$ в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ отличается от A на бесконечно малую функцию.

Бесконечно малые функции обладают такими же свойствами, что и бесконечно малые последовательности.

Теорема 2.14

Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

Все выше сказанное о бесконечно малых функциях при $x \to x_0$ справедливо и для функций при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0+$, $x \to x_0-$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = x_0$, если она имеет бесконечный предел в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

$f(x)$ –бесконечно большая в точке $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \; (\{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon\})$

Если же выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$ ($f(x) < -\varepsilon$), то пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \; (\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$$

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и бесконечные односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = +\infty, \; \lim_{x \to x_0-} f(x) = +\infty, \; \lim_{x \to x_0+} f(x) = -\infty, \; \lim_{x \to x_0-} f(x) = -\infty$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует такая же связь, как и между соответствующими последовательностями, т.е. функция обратная бесконечно малой является бесконечно большой и наоборот.

Как показано в теореме 2.14 сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются бесконечно малыми функциями. Этого, вообще говоря, нельзя сказать о частном: деление одной бесконечно малой на другую может привести к различным результатам. Например:

1) $\alpha(x) = x \qquad \beta(x) = 2x \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

2) $\alpha(x) = x \qquad \beta(x) = x^2 \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Рассмотрим правила сравнения бесконечно малых функций. (Для сравнения бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения). Пусть при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми, тогда:

1) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$, обозначают: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ (*о* – символ «*о* малое»);

2) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$ (A – число), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка;

3) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые. Обозначают: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

В некоторых случаях недостаточно знать, что одна из двух бесконечно малых является бесконечно малой более высокого порядка, чем другая. Нужно еще оценить как высок этот порядок. Поэтому вводится следующее правило:

4) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая n-го порядка относительно $\beta(x)$.

Существуют аналогичные правила для сравнения бесконечно малых функций при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, а также при $x\to x_0$ справа и слева.

Для решения ряда практических задач необходимо знание следующих эквивалентных бесконечно малых:

1. $x\sim sinx\sim tgx$ (при $x\to 0$)
2. $1-cosx\sim\dfrac{x^2}{2}$ (при $x\to 0$)
3. $tgx-sinx\sim\dfrac{x^3}{2}$ (при $x\to 0$)
4. $\sqrt[k]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{k}$ (при $x\to 0$)
5. $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ (при $x\to 0$)
6. $ln(1+x)\sim x$ (при $x\to 0$)
7. $a^x-1\sim x\cdot ln\,a$ (при $x\to 0$)

Примеры

1 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,5x}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5$.

$x^3+x\sim x$ при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$.

2 Доказать, что $\alpha(x)=x^4+x+1$ является при $x\to\infty$ бесконечно большой второго порядка по отношению к $\beta(x)=x^2+1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{(x^2+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{x^4+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=1.$$

3 Функции нескольких переменных

3.1 Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. Производные и дифференциальные функции

При изучении многих вопросов естествознания встречаются такие зависимости между несколькими переменными величинами, когда значения одной из этих переменных величин полностью определяются значениями остальных переменных.

Например:

1) температура T тела в данный момент времени t: изменяется от точки к точке, т.е. $T(x;\ y;\ z)$. Если учесть зависимость температуры от времени t, то получим $T_0(x;\ y;\ z;\ t)$

2) известно, что объем параллелепипеда, рассчитывается по формуле $V_{\text{параллелепипеда}}=abc$, т.е. $V(a, b, c)$ – зависит от линейных размеров.

Если каждой точки $M \in \{M\}$ из множества точек n-мерного евклидова пространства E^n ставится в соответствии по известному закону некоторое число u, то говорят, что на $\{M\}$ задана функция $u=f(M)$. При этом, множество $\{M\}$ называется областью задания функции $u=f(M)$.

Число u, соответствующее данной точке $M \in \{M\}$, будем называть частным значением функции в точке M. Совокупность $\{u\}$, всех частных значений функции $u=f(M)$ называется множеством значений этой функции. Т.к. точка M определяется координатами $(x_1, x_2, ..., x_n)$, то для функции $u=f(M)$ используется также обозначение $u=f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Число b называется пределом функции $u=f(M)$ в точке A, если для $\forall\ \varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех точек M из области задания функции, удовлетворяющих условию $0<\rho(M, A)<\delta$(расстояние от точки М до точки А обозначают $\boldsymbol{\rho(M, A)}$), выполняется неравенство $|f(M)-b|<\varepsilon$.

Символически записывают: $\lim\limits_{M\to A} f(M)=b$, или $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \dots\dots\dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n)=b$,

где $A=(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Все правила предельного перехода, рассмотренные для функций одной переменной, без всяких изменений переносятся на случай функций нескольких переменных. Пусть точка $A \in \{M\}$ и $\forall\ U_\varepsilon(A)$ содержит отличные от A точки области задания $\{M\}$ функции $u=f(M)$.

Функция $u=f(M)$ называется непрерывной в точке A, если предел этой функции в точке A существует и равен частному значению $f(A)$.

Так как $A=\lim\limits_{M\to A} M$, то условие непрерывности функции можно записать в следующем виде:

$$\lim_{M\to A} f(M) = f\left(\lim_{M\to A} M\right).$$

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются точками разрыва этой функции.

Используя определение предела функции нескольких переменных определение непрерывности функции можно сформулировать так:

Функция $u=f(M)$ называется непрерывной в точке A, если

$$\left\{\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, M \in \{M\} : \rho(M, A) < \delta \Rightarrow |f(M) - f(A)| < \varepsilon\right\}$$

Функция $u=f(M)$ называется непрерывной на множестве $\{M\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Назовем приращением или полным приращением функции $u=f(M)$ в точке A функцию Δu, определяемую формулой:

$$\Delta u = f(M) - f(A), \tag{3.1}$$

где $\forall\, M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \{M\},\ A = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Обозначим: $x_1 - a_1 = \Delta x_1, x_2 - a_2 = \Delta x_2, ..., x_n - a_n = \Delta x_n$.

Используя эти обозначения получим для приращения функции Δu, соответствующего приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, следующее выражение:

$$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, ..., a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) \tag{3.2}$$

Очевидно, для непрерывности функции $u=f(M)$ в точке A необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δu представляло собой бесконечно малую в точке A функцию, т.е. необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{M\to A} \Delta u = \lim_{M\to A} (f(M) - f(A)) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0$$

(3.3)

Для функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно определить понятие непрерывности по одной из переменных при фиксированных значениях остальных переменных. Зафиксируем все аргументы, кроме x_1, придадим x_1 произвольное приращение Δx_1, получим точку $M'(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_n) \in \{M\}$.

Соответствующее приращение функции называется частным приращением функции в точке $M(x_1,x_2,...,x_n)$, соответствующим приращению Δx_1 аргумента x_1.

$$\Delta_{x_1}u = f(x_1+\Delta x_1, x_2,...,x_n) - f(x_1,x_2,...,x_n)$$
$$\Delta_{x_2}u = f(x_1, x_2+\Delta x_2,...,x_n) - f(x_1,x_2,...,x_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta_{x_n}u = f(x_1, x_2,...,x_n+\Delta x_n) - f(x_1,x_2,...,x_n)$$

Функция $u = f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется непрерывной в точке M $(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменной x_k, если частное приращение $\Delta_{x_k}u$ этой функции в точке M представляет собой бесконечно малую функцию от Δx_k, т.е. $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\Delta_{x_k}u = 0$. При фиксированных значениях всех переменных, кроме x_k, функция $u = f(x_1,x_2,...,x_n)$ представляет собой функцию одной переменной. Непрерывность функции по x_k означает непрерывность указанной функции $u = f(x_1,x_2,...,x_n)$ одной переменной. Очевидно, из непрерывности функции $u = f(x_1,x_2,...,x_n)$ в данной точке M вытекает непрерывность этой функции в точке M по каждой из переменных $x_1,x_2,...,x_n$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пусть $M(x_1,x_2,...,x_n)$ - внутренняя точка множества $\{M\}$.

Рассмотрим отношение:

$$\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1,x_2,...,x_k+\Delta x_k,...,x_n) - f(x_1,x_2,...,x_n)}{\Delta x_k}, \tag{3.4}$$

которое представляет собой функцию от Δx_k, определенную для всех $\Delta x_k \neq 0$, для которых $M(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,...,x_{k+1},x_n) \in \{M\}$.

Если $\exists \lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}$, то этот предел называется частной производной функции $u = f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке M по аргументу x_k.

Обозначают одним из символов: $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} = f'_{x_k}$.

Заметим, что f'_{x_k} представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x_k при фиксированных значениях остальных переменных. Поэтому вычисление f'_{x_k} производится по обычным правилам вычисления производных функций одной переменной (смотри приложение Б).

Из существования у функции в данной точке всех частных производных, вообще говоря, не вытекает непрерывность функции в этой точке.

Для граничных точек области задания данное определение частной производной является, вообще говоря, непригодным.

Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется дифференцируемой в данной точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_n \Delta x_n, , \qquad (3.5)$$

где $A_1, ..., A_n$ - некоторые независящие от $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ числа, а $\alpha_1, ..., \alpha_n$ - бесконечно малые при $\Delta x_1 \to 0, ..., \Delta x_n \to 0$ функции, равные нулю при $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... \Delta x_n = 0$.

Соотношение (3.5) называют условием дифференцируемости функции в данной точке. Это условие можно записать также в иной форме:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n + o(\rho), \text{ где } \rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2},$$

(3.6)

а $o(\rho) = 0$, при $\rho = 0$

Теорема 3.1

Если $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то в этой точке существуют частные производные по всем аргументам, причем $\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$, где A_i определяется из условия (3.5) дифференцируемости функции.

Доказательство:

Из (3.5) вытекает, что частное приращение

$$\Delta_{x_i} u = A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i \Rightarrow \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i .$$

Переходя к пределу в последнем равенстве, учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \alpha_i = 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta x_i u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$

Следствие 1 Условие (3.6) дифференцируемости функции в данной точке *M* можно записать в следующей форме:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \Delta x_n + o(\rho)$$

Все частные производные берутся в данной точке *M*.

Следствие 2 Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке *M*, то представление ее приращения в форме (3.5) и (3.6) единственно.

Теорема 3.2

Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке M $(x_1, x_2, ..., x_n)$, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Из (3.5) $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0$, а это и означает непрерывность функции в точке M.

Теорема 3.3 (достаточные условия дифференцируемости функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$)

Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, причем все частные производные непрерывны в самой точке M_0, то указанная функция дифференцируема в точке M_0.

Сумма $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_n\Delta x_n$ называется главной частью приращения дифференцируемой функции, линейно зависящей от соответствующих приращений аргументов.

Полным дифференциалом функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется главная часть полного приращения этой функции в точке M, линейно зависящая от соответствующих приращений аргументов.

$$du = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_n\Delta x_n \tag{3.7}$$

Если все коэффициенты $A_i = 0, \forall i = \overline{1,n}$, то дифференциал du функции в точке M считается равным нулю.

Используя теорему 3.1 выражение (3.7) можно переписать в виде:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{3.8}$$

Дифференциалы dx_i независимых переменных x_i, $\forall i = \overline{1,n}$ считают равными их приращениям Δx_i, т.е. $dx_i = \Delta x_i$.

Это определение позволяет переписать формулу (3.8) в виде:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n \tag{3.9}$$

3.2 Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Ряд психологических исследований доказал, что разум человека более расположен к восприятию наглядно выраженной информации нежели к абстрактной. При работе с функциями нескольких переменных используются способы задания их аналогичные способам задания функций одной переменной, а именно: табличный, аналитический и графический (т.е. наглядный). Однако графическая иллюстрация функций $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при n>2 теряет наглядность, поскольку графиками функций $u = f(x_1, x_2)$ непрерывных аргументов служат некоторые поверхности второго порядка, а уже для функции $u = f(x_1, x_2, x_3)$ геометрически можно представить только область ее задания $\{M\}$ в виде части трехмерного пространства. Ведь человеческая цивилизация способна видеть окружающий мир только в трехмерном пространстве.

Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных

Так же как понятия производной и дифференциала функции $y = f(x)$ связаны с касательной к кривой графику функции, так и понятия частных производных и полного дифференциала функции $z = f(x, y)$ связаны с касательной плоскостью к поверхности-графику функции.

Пусть $z = f(x, y)$ - дифференцируема в точке (x_0;y_0).
Рассмотрим сечения поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями: $x = x_0$, $y = y_0$.Они представляют собой кривые $z = f(x_0, y)$, $z = f(x, y_0)$.Вектора направленные по касательным к этим кривым имеют вид: $\tau_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix}$, $\tau_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix}$. См. рисунок 9.

Плоскость, содержащая касательные τ_x, τ_y, называется касательной плоскостью к поверхности $z = f(x, y)$.

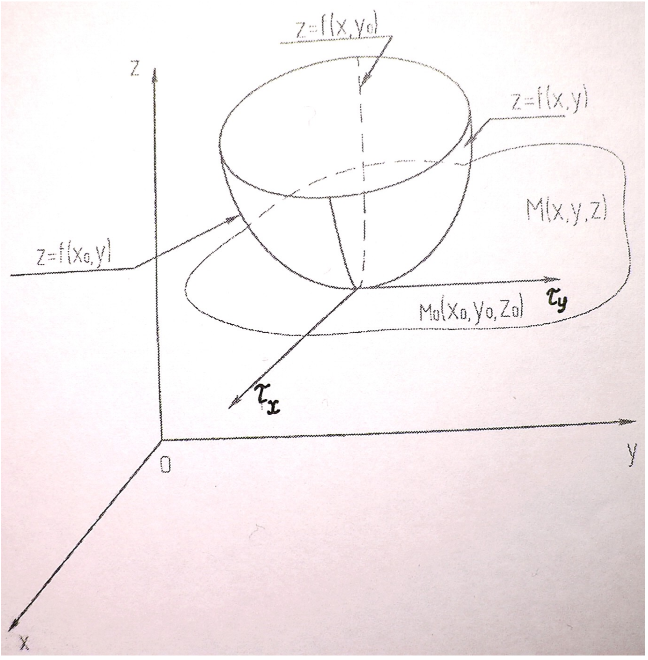


Рисунок 9

Построим вектор $\overrightarrow{M_0M}$, соединяющий точки $M_o=(x_o,y_o,z_o)$, $M=(x,y,z)$. Составим уравнение касательной плоскости, учитывая, что векторы $\vec{\tau}_x, \vec{\tau}_y, \overrightarrow{M_0M}$ лежат в одной плоскости.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ z-z_0 = f_x'(x-x_0)+f_y'(y-y_0)$$

$$z-z_0 = f_x' \cdot \Delta x + f_y' \cdot \Delta y$$

$$z-z_0 = f_x' \cdot dx + f_y' \cdot dy$$

Т.е. полный дифференциал функции двух переменных это есть приращение аппликаты точки касательной плоскости, проведенной к поверхности $z = f(x,y)$ в ее точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Нормалью поверхности называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной плоскости поверхности. Вектор, направленный по нормали имеет вид:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \\ -1 \end{pmatrix}$$

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ сложная, т.е. ее аргументы представляют собой некоторые функции определяемые равенствами:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k) \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_k) \\ .... \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_k) \end{cases} \tag{3.10}$$

Можно доказать, что при определенных условиях эта сложная функция является дифференцируемой функцией своих аргументов $t_1, t_2, ..., t_k$. При этом частные производные сложной функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по аргументам $t_1, t_2, ..., t_k$ выражаются следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ .... \\ \frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \end{gathered}$$

(3.11)

Имеет место следующая теорема 3.4:

Теорема 3.4

Если функции (3.10) дифференцируемы в некоторой точке $M_0(t_1^0, t_2^0, ..., t_n^0)$, а функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в соответствующей точке $N_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0)$, где $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. Тогда сложная функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_i определяются формулами (3.10), дифференцируема в точке M_0. При этом частные производные этой сложной функции в точке M_0 определяются формулами (3.11), где $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ берутся в точке N_0, а $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ в точке M_0.

Частный случай. Если функции (3.10) зависят от одного аргумента *t*. Тогда мы имеем сложную функцию одной переменной *t*

$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i = \varphi_i(t), \forall\, i = \overline{1,n}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \tag{3.12}$$

Уравнение $F(x,y,z)=0$ - определяет неявную функцию двух переменных. На вопрос о существовании такой функции отвечает следующая теорема.

Теорема 3.5

Пусть $F(x,y,z)$:

1) непрерывна в $U_\delta(x_0,y_0,z_0)$

2) частные производные этой функции по переменным x, y, z:

F_x', F_y', F_z' - непрерывны в $U_\delta(x_0,y_0,z_0)$;

3) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

4) $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Тогда уравнение $F(x,y,z)=0$ имеет единственное решение $z=\varphi(x,y)$, которое представляет в свою очередь функцию $\varphi(x,y)$ непрерывно зависящую от x и y в некоторой $U_\varepsilon(x_0,y_0)$, причем:

1) $\varphi(x_0,y_0)=z_0$;

2) φ_x', φ_y' - непрерывны

При этом частные производные функции двух переменных $z=\varphi(x,y)$, заданной неявно: $F(x,y,z)=0$ вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

А в случае функции n переменных, заданной неявно $F(x_1,x_2,...,x_n,u)=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{F_{x_1}'}{F_u'},\frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{F_{x_2}'}{F_u'},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}=-\frac{F_{x_n}'}{F_u'}$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Можно показать, что формула (3.9) сохраняет свой вид в случае, когда $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ сложная функция, где $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,...,t_k)$ - дифференцируемы.

Поскольку для этой функции выполняются условия теоремы (3.4), то

$$du=\frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_2}dt_2+...+\frac{\partial u}{\partial t_k}dt_k,$$ а $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ определяются из (3.11)

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2+...+\frac{\partial x_1}{\partial t_k}dt_k\right)+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\left(\frac{\partial x_n}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_n}{\partial t_2}dt_2+...+\frac{\partial x_n}{\partial t_k}dt_k\right)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Получили формулу, совпадающую по внешнему виду с (3.9), однако dx_i - дифференциалы функций $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, а не дифференциалы независимых переменных как в (3.9).

Это свойство позволяет установить правила дифференцирования. Отметим, что если *u*, *v*– дифференцируемые функции каких-либо переменных, то:

$$1)\, d(Cu) = Cdu,\ \ C = const;$$
$$2)\, d(u \pm v) = du \pm dv;$$
$$3)\, d(uv) = udv + vdu;$$
$$4)\, при\ \ v \neq 0\ \ \ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

3.3 Частные производные и дифференциалы высших порядков. Локальный экстремум функции нескольких переменных

Пусть частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ по аргументу x_i функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенной в области $\{M\}$, существует в каждой точке области $\{M\}$. В этом случае указанная частная производная представляет собой функцию переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, также определенную в $\{M\}$. Может случиться, что эта функция $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ имеет частную производную по аргументу x_k в некоторой точке *M* области $\{M\}$. Тогда указанную частную производную по аргументу x_k называют второй частной производной или частной производной второго порядка функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке *M* сначала по аргументу x_i, а затем по аргументу x_k и обозначают одним из символов: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, f''_{x_i x_k}, u''_{x_i x_k}$.

При этом, если $i \neq k$, то частная производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$ называется смешанной частной производной второго порядка. Далее можно последовательно определить третью частную производную, затем четвертую и т.д. Если предположить, что определена (m-1)-ая частная производная функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{m-1}}$ (отдельные или даже все номера которых могут совпадать) и что эта (m-1)-ая частная производная имеет в точке *M* частную производную по аргументу x_{i_m}, то указанную частную производную называют m-ой частной производной (или частной производной m-го порядка) функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке M по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{m-1}}, x_{i_m}$.

Обозначают: $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_{i_m} \partial x_{i_{m-1}} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \dfrac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial x_{i_{m-1}} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right)$

Если не все индексы $i_1, i_2, ..., i_m$ совпадают между собой, то эта частная производная называется смешанной частной производной m-го порядка.

Т.к. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ определяется как обыкновенная производная функции одной переменной x_i при фиксированных значениях остальных, то методика вычисления частных производных высших порядков предполагает умение вычислять только обыкновенные производные 1-го порядка.

Вообще говоря, значения смешанных производных зависят от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования. Чтобы выяснить достаточные условия независимости значений смешанных производных от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования, введем понятие m раз дифференцируемой функции нескольких переменных.

Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется m раз дифференцируемой в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если все частные производные (m-1) –го порядка этой функции являются дифференцируемыми в точке M_0. Для того, чтобы функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ была m раз дифференцируемой в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, достаточно, чтобы все ее частные производные m-го порядка были непрерывны в точке M_0. Справедливость этого утверждения вытекает из определения дифференцируемости функции и теоремы о достаточных условиях дифференцируемости.

Теорема 3.6

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ m раз дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Тогда в этой точке значения любой смешанной частной производной m-го порядка не зависит от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Если существует первый полный дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, дифференцируемой в данной точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, т.е. $\exists\, du = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + ... + \dfrac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} dx_k$, то можно рассмотреть дифференциал от выше указанной величины: $\delta(du) = \delta \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} dx_k \right]$ в предположении, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} dx_k$ представляет собой функцию аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$, дифференцируемую в данной точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. А для этого достаточно потребовать, чтобы $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ была два раза дифференцируема в точке *M*, при этом аргументы $x_1, x_2, ..., x_n$ являлись либо независимыми переменными, либо два раза дифференцируемыми функциями некоторых независимых переменных.

Значение $\delta(du)$ дифференциала от 1-го дифференциала (3.9), взятое при $\delta x_1 = dx_1, \delta x_2 = dx_2, ..., \delta x_n = dx_n$ называется вторым дифференциалом функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (в данной точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$) и обозначается символом d^2u.

Итак, по определению:

$$d^2u = \delta(du)\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \delta x_2 = dx_2 \\ \cdots\cdots \\ \delta x_n = dx_n}} = \left\{\delta\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \delta x_2 = dx_2 \\ \cdots\cdots \\ \delta x_n = dx_n}}$$

Дифференциал $d^m u$ любого порядка *m* введем по индукции.

Значение $\delta(d^{m-1}u)$ дифференциала от (*m*-1)-го дифференциала $d^{m-1}u$, взятое при $\delta x_1 = dx_1, \delta x_2 = dx_2, ..., \delta x_n = dx_n$, называется *m*-м дифференциалом функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (в данной точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$) и обозначается символом $d^m u$.

Итак, по определению:

$$d^m u = \delta(d^{m-1}u)\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \delta x_2 = dx_2 \\ \cdots\cdots \\ \delta x_n = dx_n}}$$

При вычислении второго и последующих дифференциалов приходится существенно различать два случая:

1) случай, когда аргументы $x_1, x_2, ..., x_n$ являются независимыми переменными;
2) случай, когда $x_1, x_2, ..., x_n$ – функции нескольких переменных $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k), ..., x_n = \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_k)$ соответствующее число раз дифференцируемые.

В первом случае имеем право считать $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ – постоянными. Каждый дифференциал dx_k можно взять равным одному и тому же приращению Δx_k для всех точек $M\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. При этом получим

$$\delta\left(dx_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(dx_k\right)}{\partial x_i}\delta x_i = 0.$$

Это соотношение и правила дифференцирования позволяют записать для два раза дифференцируемой в данной точке M функции $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ следующую цепочку неравенств:

$$d^2u = \delta\left(du\right)\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \cdots\cdots \\ \delta x_n = dx_n}} = \left\{\delta\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \cdots\cdots \\ \delta x_n = dx_n}} = \sum_{k=1}^{n}\delta\left[\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \cdots\cdots \\ \delta x_n = dx_n}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(dx_k \cdot \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_k}\cdot\delta\left(dx_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(dx_k\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\delta x_i\right)\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \cdots\cdots \\ \delta x_n = dx_n}} =$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_k}\delta x_i dx_k\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \cdots\cdots \\ \delta x_n = dx_n}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_k}dx_i dx_k$$

Итак, получаем: $$d^2u = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_k}dx_i dx_k \qquad (3.13)$$

т.е. для случая, когда аргументы $x_1, x_2, ..., x_n$ являются независимыми переменными, второй дифференциал два раза дифференцируемой в данной точке M функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ представляет собой квадратичную форму от переменных $dx_1, dx_2, ..., dx_n$, коэффициенты которой равны соответствующим частным производным второго порядка данной функции, взятым в точке M.

По индукции легко убедится в том, что в случае, когда аргументы $x_1, x_2, ..., x_n$ дифференцируемой m раз в данной точке M функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются независимыми переменными, для m-го дифференциала этой функции справедливо представление:

$$d^m u = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} ... \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \cdot \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_m}} dx_{i_1} dx_{i_2} ... dx_{i_m} \qquad (3.14)$$

Совершенно другой вид имеют представления для второго и последующих дифференциалов во 2) случае. А именно:

$$d^2 u = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_k} dx_i dx_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} d^2 x_k$$

(3.15)

Таким образом, в отличие от первого дифференциала второй дифференциал уже не обладает свойством инвариантности формы. Тем более не обладают таким свойством все последующие дифференциалы.

Однако, если $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема m раз в данной точке M, а ее аргументы $x_1, x_2, ..., x_n$ являются линейными функциями независимых переменных $t_1, t_2, ..., t_k$, то m-ый дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определяется той же самой формулой, что и для случая независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ (3.14)

Пусть $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0) \in E^n$.

Говорят, что эта функция имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если найдется такая $U_\delta(M_0)$ в пределах которой значение $f(M_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений $f(M)$ этой функции.

Говорят, что функция имеет в точке M_0 локальный экстремум, если она имеет в этой точке либо локальный максимум, либо локальный минимум.

Теорема 3.7

Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ обладает в точке M_0 частными производными 1-го порядка по всем переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то все частные производные первого порядка обращаются в точке M_0 в нуль.

Доказательство:

Докажем, что $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)=0$. Зафиксируем $x_2, x_3, \ldots, x_n$ положив их равными $x_2 = x_2^{\,0}, x_3 = x_3^{\,0}, \ldots, x_n = x_n^{\,0}$.

Таким образом получим функцию $u = f\left(x_1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0\right)$ одной переменной x_1. Производная этой функции в точке $x_1 = x_1^{\,0}$ совпадает с $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$. Т.к. по условию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в M_0 локальный экстремум, то $u = f\left(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ имеет экстремум в точке $x_1 = x_1^{\,0}$ и поэтому

$$f'\left(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)\Big|_{x_1 = x_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) = 0$$

Для $\frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0) = 0, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0) = 0$ доказательства аналогичны.

Точки, в которых обращаются в нуль все частные производные первого порядка функции $u = f(M)$, называются точками возможного экстремума этой функции. В каждой точке возможного экстремума функции $u = f(M)$ может быть локальный экстремум, однако наличие этого экстремума можно установить лишь с помощью достаточных условий экстремума.

Теорема 3.8

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ один раз дифференцируема в некоторой $U_\delta(M_0), M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ и два раза дифференцируема в самой точке M_0. Пусть, кроме того, точка M_0 – точка возможного экстремума функции

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т.е. $du\Big|_{M_0} = 0$, тогда если d^2u представляет собой положительно определенную (отрицательно определенную) квадратичную форму от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, то функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке M_0 локальный минимум (максимум). Если же d^2u представляет собой знакопеременную квадратичную форму, то $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не имеет локального экстремума в точке M_0.

Заметим:

1) Если d^2u два раза дифференцируемой в данной точке возможного экстремума M_0 функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представляет собой в этой точке квазизнакопеременную квадратичную форму, то нельзя сказать

ничего определенного о наличии или отсутствии в этой точке локального экстремума.

2) Требование $\left.d^2u\right|_{M_0} \geq 0 \left(\left.d^2u\right|_{M_0} \leq 0\right)$ является необходимым

условием локального минимума (максимума) в точке M_0 дважды дифференцируемой в этой точке функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

4 Теория рядов

4.1 Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Остаточный член ряда. Линейные операции над сходящимися рядами. Необходимое условие сходимости ряда

Рассмотрим числовую последовательность: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Выражение вида: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (4.1) называется числовым рядом или просто рядом.

Числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называются членами ряда, член a_n, с произвольным номером называют общим членом ряда.

Суммы конечного числа членов ряда: $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, ...$
$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называют частичными суммами ряда (4.1).

Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы образуют бесконечную последовательность: $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ (4.2).

Ряд (4.1) называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм (4.2) сходится к какому-нибудь числу S, которое в этом случае называется суммой ряда (4.1): $S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Если же последовательность частичных сумм (4.2) расходится, то ряд (4.1) называется расходящимся.

Пример - рассмотрим числовой ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию:

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0. \tag{4.3}$$

Частичная сумма: $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \dfrac{a\cdot\left(1-q^n\right)}{1-q} = \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{aq^n}{1-q}, q \neq 1$ (известно из школьного курса математики)

1) если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{aq^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$, т.е.

рассматриваемый ряд сходится и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$;

2) если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \infty$, т.е. ряд расходится;

3) при $q = 1$ получим $a + a + \ldots + a + \ldots \Rightarrow S_n = a + a + \ldots + a$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a + a + \ldots + a\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a = \infty$, т.е. ряд расходится;

4) при $q = -1$ получим $a - a + a - \ldots + a - \ldots \Rightarrow S_n = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a(-1)^n}{2}$, тогда при четном $n: S_n = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{2} = 0$, а при нечетном $n: S_n = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = a, \Rightarrow \overline{\exists} \lim\limits_{n\to\infty} S_n \Rightarrow$ ряд расходится.

Вывод: ряд (4.3) является сходящимся при $|q| < 1$ и расходящимся при $|q| \geq 1$.

Свойства сходящихся рядов

1) Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (4.4) сходится, то сходится и ряд: $a_{k+1} + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ (4.5). Верно и обратное. При этом ряд (4.5) называют остаточным членом ряда (4.4). (Другими словами на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов).

Доказательство:

I. Дано: (4.4) – сходится.

Требуется доказать (4.5) – сходится.

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S, S_n -$ частичная сумма ряда (4.4).

Обозначим $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ сумму отброшенных членов ряда (4.4),

$\sigma_{n-k} = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n$, тогда $S_n = S_k + \sigma_{n-k}$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n-S_k\right)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_k=S-S_k,$ т.е. последовательность частичных сумм $\left\{\sigma_{n-k}\right\}$ ряда (4.5) имеет конечный предел следовательно получили, что и требовалось доказать.

II. Дано: (4.5) – сходится.

Тогда: (4.4) – сходится.

По условию $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-k}=\sigma,$ тогда

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_k+\sigma_{n-k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}S_k+\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-k}=S_k+\sigma,$ таким образом,

последовательность частичных сумм $\left\{S_n\right\}$ ряда (4.4) является сходящейся, следовательно, ряд сходится.

Над сходящимися рядами можно производить арифметические действия, а именно: умножать на число, почленно складывать и вычитать так же, как и конечные суммы.

2) Если ряд (4.1) сходится и его сумма равна $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n$ сходится и его сумма равна cS, где c – некоторое число.

Доказательство:

Дано: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$

Требуется доказать $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n=cS,\forall c=const.$

Составим частичную сумму для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n$:

$$\sigma_n=ca_1+ca_2+\ldots+ca_n=c\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)=cS_n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=c\cdot\lim_{n\to\infty}S_n=cS,\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=cS$$

3) Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - сходятся: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sigma,$ то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\pm b_n\right)$ сходится и его сумма равна $S\pm\sigma$.

Доказательство:

$\tau_n=\left(a_1\pm b_1\right)+\left(a_2\pm b_2\right)+\ldots+\left(a_n\pm b_n\right)=\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\pm\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)=$
$=S_n\pm\sigma_n$

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\lim_{n\to\infty}\left(S_n\pm\sigma_n\right)=\lim_{n\to\infty}S_n\pm\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S\pm\sigma\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\pm b_n\right)=S\pm\sigma.$$

При рассмотрении рядов возникает две задачи:
а) исследовать ряд на сходимость;
б) зная, что ряд сходится, найти его сумму.

Необходимое условие сходимости ряда:

Если ряд (4.1) сходится, то его общий член стремится к нулю.
Доказательство:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S, \text{ рассмотрим } S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}.$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Это условие является необходимым, но не достаточным. Примером тому служит гармонический ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Хотя $a_n = \frac{1}{n}$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Действительно, в случае сходимости этого ряда выполнялось бы равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = 0,$$

но $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$ т.е.

$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$, следовательно, равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = 0$ не возможно,

следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Вывод: если общий член ряда стремится к нулю, то еще нельзя сказать о сходимости ряда. Нужны дополнительные исследования, которые могут быть проведены с помощью достаточных условий (признаков) сходимости ряда.

Если же общий член ряда не стремится к нулю, то такой ряд расходится.

4.2 Достаточные признаки сходимости ряда

Рассмотрим некоторые достаточные условия сходимости рядов с неотрицательными членами. Предварительно докажем критерий сходимости неотрицательного ряда, который будет использован в последующих рассуждениях.

Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.

Доказательство:

Необходимость. Дано: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ - сходится.

Требуется доказать: $\{S_n\}$ - ограничена.

По определению сходящегося ряда $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S,$ следовательно $\{S_n\}$ -ограничена, так как всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Достаточность. Дано: $\{S_n\}$ - ограничена.

Требуется доказать: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ - сходится.

Заметим, что так как ряд с неотрицательными членами, то $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_{n-1} \leq S_n \leq \ldots$ его частичные суммы образуют неубывающую последовательность. В силу теоремы Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности (2.3) $\{S_n\}$ - сходится, следовательно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

Первый признак сравнения

Пусть даны $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n \geq 0 : a_n \leq b_n, \forall n \in N$

Тогда из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами, а из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.

Доказательство:

Обозначим S_n – частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;σ_n- частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Из $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n \leq \sigma_n$

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по критерию сходимости последовательность частичных сумм S_n этого ряда ограничена, т.е. $(\sigma_n \leq M, \forall n \in N \Rightarrow S_n \leq M)$, следовательно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится

2) Если же $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - расходится

Доказываем методом от противного.

Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда получим по только что доказанному сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Это противоречит условию теоремы. Значит предположение неверно. Остается принять, что если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - расходится.

Замечание:

Первый признак сравнения справедлив и в случае более общего неравенства $a_n \leq \lambda b_n \ (n = 1,2,...)$, где λ>0.

Второй признак сравнения

.

Два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся, если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = K, (K \neq 0)$.

Признак Даламбера

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда

1) при d<1 ряд сходится;
2) при d>1 ряд расходится.

Доказательство:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d. \Rightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0 \ \exists K : \forall n > K \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - d \right| < \varepsilon \right\}$ - по определению предела последовательности.

Последнее неравенство можно записать в следующем виде:

$$d - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < d + \varepsilon$$

(4.6)

1) Пусть $d<1$, то ε можно выбрать настолько малым, что будет выполняться неравенство: $d + \varepsilon < 1$.

Обозначим $d + \varepsilon = q$, тогда $q<1$.

На основании правого из неравенств (4.6) имеем: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow a_{n+1} < qa_n$, для $n=k, k+1, k+2,\dots$

$$a_{k+1} < a_k \cdot q,$$
$$a_{k+2} < a_{k+1} \cdot q < a_k \cdot q^2,$$
$$a_{k+3} < a_{k+2} \cdot q < a_k \cdot q^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

т.е. члены ряда $a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}+\dots$ меньше членов ряда $a_k.q + a_k.q^2 + a_k.q^3 + \dots$ составленного из элементов геометрической прогрессии, так как $q<1$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k q^k$ - сходится, следовательно $a_{k+1}+a_{k+2}+\dots$ - сходится. А т.к. последний ряд получен из данного в результате отбрасывания конечного числа первых членов, то по первому свойству сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

2) Теперь положим, что $d>1$, тогда возьмем ε настолько малым, чтобы $d - \varepsilon > 1$, тогда при $n>k$ в силу левого из неравенств (4.6) имеем: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, отсюда $a_{n+1} > a_n$. Таким образом члены ряда начиная с некоторого номера K, возрастают с увеличением их номеров, следовательно $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, по необходимому условию сходимости числовых рядов.

Как показывает практика, при $d=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может, как сходится, так и расходится. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью других признаков.

Примеры

Исследовать на сходимость ряды: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ - обобщенный гармонический ряд.

1. $s \le 1$. Сравним члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ с членами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Получим неравенство: $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^s}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, при $s \le 1$ расходится по первому признаку сравнения.

2. $s > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ - сходится (без доказательства).

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ - воспользуемся признаком Даламбера

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot n!}{(n+1)! \cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \text{ сходится.}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ - воспользуемся признаком Даламбера

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ell > 1 \Rightarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ – расходится.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ - в этом случае признак Даламбера ответа не дает

$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} \cdot 1} = 1$. Если воспользоваться примером 1), то так как $s=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Признак Коши

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ и $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, то при $c<1$ – ряд сходится, $c>1$ – ряд расходится.

Заметим, что при $c=1$, признак ответа не дает.

Интегральный признак

Пусть дан ряд: $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, члены которого являются значениями некоторой функции $f(x)$ натурального аргумента, положительной, непрерывной и убывающей на $[1;+\infty)$.

Тогда если, $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)dx = z$, т.е. интеграл сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, если же, $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)dx = \left[\begin{matrix}\infty\\ \bar{\exists}\end{matrix}\right.$, т.е. интеграл расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ также расходится.

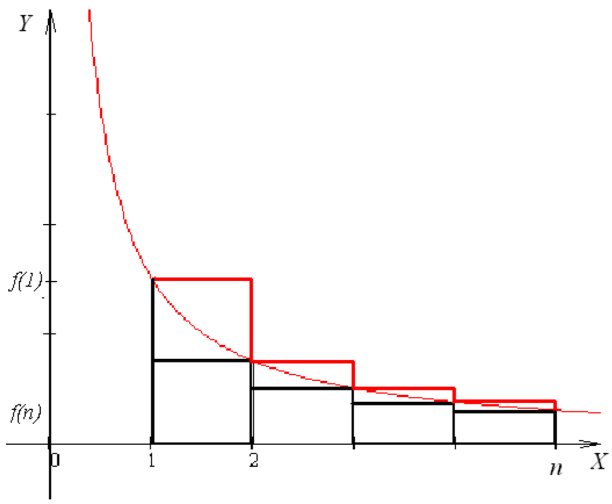


Рисунок 10

Доказательство: рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа - прямыми $x=1$, $x=n$, снизу осью OX.

Впишем в эту трапецию и опишем около нее две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями: $[1;2]$, $[2;3]$, $\ldots$,$[n-1; n]$ и высотами $f(1), f(2), \ldots, f(n)$.

Тогда, принимая во внимание геометрический смысл определенного интеграла, имеем:

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<\int\limits_1^n f(x)dx < f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)$$

или короче: $S_n - f(1) < \int\limits_1^n f(x)dx < S_n - f(n) > \begin{cases} S_n < f(1)+\int\limits_1^n f(x)dx & (4.7)\\ S_n > f(n)+\int\limits_1^n f(x)dx & (4.8)\end{cases}$

где S_n –частичные суммы рассматриваемого ряда.

1) Пусть $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(x)dx = I$.

Так как по условию теоремы $f(x)>0$, то последовательность $\int\limits_1^n f(x)dx$ возрастает с увеличением n и ограничена сверху своим пределом: $\int\limits_1^n f(x)dx < I$.

Из неравенства (4.7)=> $S_n < f(1) + I$, т.е. $\{S_n\}$ – ограничена => $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ - сходится, по критерию сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$

2) Пусть $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(x)dx = \infty$.

Так как $\int\limits_1^n f(x)dx$ - монотонно возрастающая неограниченная последовательность.

Из неравенства (4.8) следует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. $\{S_n\}$ – расходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ - расходится, по определению.

Примеры

Исследовать на сходимость ряды:

1) $\dfrac{1}{ln2} + \dfrac{1}{ln^2 3} + \ldots + \dfrac{1}{ln^n(n+1)} + \ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$.

Решение:

1) $\dfrac{1}{ln2} + \dfrac{1}{ln^2 3} + \ldots + \dfrac{1}{ln^n(n+1)} + \ldots$

$$c = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{ln^n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$$ по

признаку Коши данный ряд сходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Применим интегральный признак

$$f(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in [1,+\infty)$$

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{x\to+\infty}\int\limits_1^x \frac{dx}{x} = \lim_{x\to+\infty}(ln\,x)\Big|_1^x = \lim_{x\to+\infty} ln\,x = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ - расходится.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_1^x \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} (arctgx)\Big|_1^x = \lim_{x\to+\infty}(arctgx - arctg1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

=> по интегральному признаку данный ряд сходится.

Замечание: до сих пор мы рассматривали ряды с неотрицательными членами. Ряды с неположительными членами отличаются от соответствующих рядов с неотрицательными членами только множителем (-1), поэтому вопрос о их сходимости решается аналогично.

4.3 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов

Ряд $$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} \cdot a_n + ... , \qquad (4.9)$$

где $a_n > 0, \forall n \in N$ называется знакочередующимся.

Для рядов (4.9) имеет место следующий достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница

Если абсолютные величины членов ряда (4.3.1) монотонно убывают:

$|a_1| > |a_2| > \ldots |a_n| > \ldots$ и общий член ряда стремится к 0: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Доказательство:

Пусть $a_n > a_{n+1}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Рассмотрим частичную сумму ряда с четным числом членов $S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n})$.

Все разности в скобках больше нуля, в силу первого условия, поэтому $\{S_{2n}\}$ возрастает. Докажем, что $\{S_{2n}\}$ ограничена. Для чего S_{2n} представим в виде:

$S_{2n} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}]$, $S_{2n} < a_1$, $\forall n$ => $\{S_{2n}\}$ – ограничена.

Итак, $\{S_{2n}\}$ возрастает и ограничена => $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Покажем теперь, что и последовательность частичных сумм нечетного числа членов сходится к тому же числу S. $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, переходя в этом равенстве к пределу, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + a_{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S\ ,$$

таким образом $\{S_n\}$ ряда (4.9) сходится к S ($\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$). Это означает, что ряд (4.3.1) сходится.

Пример - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ - сходится, так как

1) $|1|=1;\ \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2};\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3};\left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4};\ldots \Rightarrow 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} = 0$

Заметим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ отличается от $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ только знаками четных членов.

Рассмотрим теперь ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называют знакопеременными:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ , \qquad (4.10)$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов в ряде произвольно. Одновременно рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (4.3.2):

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (4.11)$$

Для знакопеременных рядов имеет место следующий признак сходимости.

Если ряд (4.11) сходится, то сходится и ряд (4.10).

Пример - $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots$ сходится,

так как ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$ - сходится ($\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - сходится, как обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, где s=2>1)

Заметим, что рассмотренный признак является достаточным условием сходимости знакопеременного ряда, но не необходимым, т.к. существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Например: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ - сходится по признаку Лейбница, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится.

Поэтому все сходящиеся ряды можно разделить на абсолютно и условно сходящиеся.

К абсолютно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды составленные из абсолютных величин их членов, также сходятся.

К условно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Примеры

1 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}$ - абсолютно сходящийся, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ сходятся как ряды, члены которых составляют геометрические прогрессии со знаменателями $q_1 = -\frac{1}{2}$; $q_2 = \frac{1}{2}$, соответственно ($|q_1|<1$, $|q_2|<1$).

2 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ - условно сходящийся, т.к. сам ряд сходится по признаку Лейбница, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ -расходящийся, как обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, где s=$\frac{1}{2}<1$.

Деление сходящихся рядов на абсолютно и условно сходящиеся существенно, т.к. абсолютно сходящиеся ряды обладают рядом свойств, тогда как условно сходящиеся ряды некоторыми из этих свойств не обладают. Например, для условно сходящихся рядов сумма ряда не равна сумме положительных и сумме отрицательных членов ряда, как это имеет место для абсолютно сходящихся рядов, что было показано ранее.

4.4 Функциональные ряды. Степенные ряды. Их свойства

Ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется функциональным, если его члены являются функциями от x, т.е.

$$a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \qquad (4.12)$$

Придавая x различные значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

Множество тех значений x, при которых ряд (4.12) сходится, называется областью его сходимости.

Очевидно, что в области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x, ее принято обозначать $S(x)$.

Пусть $S_n(x)$ частичная сумма ряда (4.12), т.е. $S_n(x) = a_1(x) + ... + a_n(x)$. Если ряд (4.12) сходится и сумма его равна $S(x)$, то $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $R_n(x)$ есть сумма ряда $a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + ...$ В этом случае величина $R_n(x)$ называется остатком ряда (4.12). Для всех значений x в области сходимости ряда имеет место соотношение $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$, поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} [S(x) - S_n(x)] = 0$, т.е. остаток $R_n(x)$ сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$.

Функциональный ряд называется мажорируемым, если каждый его член по абсолютной величине не больше соответствующего члена некоторого сходящегося числового ряда с положительными членами.

Для мажорируемых рядов справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1

Сумма ряда непрерывных функций, мажорируемого на некотором отрезке $[a, b]$, есть функция, непрерывная на этом отрезке.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (4.13)$$

где $a_0, a_1, a_2, ... a_n, ...$ - постоянные числа, называемые коэффициентами ряда.

Областью сходимости степенного ряда всегда является некоторый интервал, который, в частности, может вырождаться в точку. Для того, чтобы убедиться в этом, докажем сначала следующую теорему, очень важную для всей теории степенных рядов.

Теорема 4.2 (теорема Абеля)

1) если степенной ряд (4.13) сходится при $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$), то он сходится, и притом абсолютно, для всех x, удовлетворяющих условию: $|x|<|x_0|$.

2) если степенной ряд (4.13) расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих условию: $|x|>|x_1|$.

Доказательство:

1) По условию числовой ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ - сходится $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow \{a_n x_0^n\}$-ограничена, т.е. $\exists$ M >0: $\left|a_n x_0^n\right|$<M, $\forall n = 0,1,2,...$ (4.14)

Перепишем ряд (4.13) в следующем виде:

$$a_0 + a_1 x_0 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + ... + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + ...$$

(4.15)

И рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|a_2 x_0^2\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ... + \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + ... \qquad (4.16)$$

Члены ряда (4.16) в силу неравенства (4.14) меньше соответствующих членов ряда:

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ... + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + ... \qquad (4.17)$$

При $|x|<|x_0|$ члены ряда (4.17) представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|<1$ и, следовательно, сходится.

По первому признаку сравнения, сходится и ряд (4.16), а это значит, что ряд (4.13) при $|x|<|x_0|$ сходится абсолютно.

2) Методом от противного. Пусть $\exists x : |x|>|x_1|$ при котором ряд (4.13) сходится, тогда по только что доказанной первой части теоремы получаем, что ряд (4.13) сходится в x_1, т.к. $|x_1|<|x|$ получили противоречие с условием.

Значит, предположение неверно и за истину нужно принять то, что и требовалось доказать.

Вывод: если x_0 – точка сходимости степенного ряда (4.13), то во всех точках интервала $(-|x_0|;|x_0|)$ этот ряд сходится абсолютно.

А если x_1 – точка расходимости (4.13), то во всех точках, расположенных вне интервала $(-|x_1|;|x_1|)$, ряд расходится.

Следствие: Если степенной ряд (4.13) сходится не при всех значениях x и не только при x=0, то $\exists R>0$:

1) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - абсолютно сходится при $|x|< R$;

2) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - расходится при $|x|>R$.

Интервал ($-R$; R) называется интервалом сходимости степенного ряда. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Заметим: интервал сходимости некоторых степенных рядов охватывает всю числовую прямую: $R = \infty$, у других вырождается в одну точку: $R=0$.

При $x = R$, $x = -R$ ряд (4.13) может либо сходиться, либо расходиться. Этот вопрос решается для каждого конкретного ряда.

Способ определения радиуса сходимости степенного ряда указывает следующая теорема.

Теорема 4.3

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, то радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Доказательство:

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, по условию $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$. Тогда при каждом значении x степенной ряд становится числовым, и по признаку Даламбера: $d = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = |x|\cdot\frac{1}{R}$

1) ряд сходится, если $\frac{|x|}{R}<1 \Rightarrow |x|<R$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|\right) \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ - сходится, причем абсолютно, при $|x|<R$.

2) ряд расходится, если $\frac{|x|}{R}>1 \Rightarrow |x|>R$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ -расходится при $|x|>R$.

Таким образом, данный ряд абсолютно сходится внутри интервала ($-R;R$) и расходится вне его, т.е. радиус сходимости равен $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Заметим:

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $(-\infty;+\infty)$, т.е. $R=\infty$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится только при x=0, т.е. R=0.

Примеры: Найти области сходимости следующих степенных рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n;\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Решение:1) $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ - сходится в (-1; 1).

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости:

При x = -1 получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

При x = 1 получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$- расходится.

Рисунок 11

Ответ: областью сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ является промежуток $[-1;1)$;

2) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

Ответ: данный ряд сходится только в одной точке x = 0.

3) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$

Ответ: данный ряд сходится на всей числовой прямой, причем абсолютно.

Свойства степенных рядов

Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4.18}$$

радиус сходимости которого R, а интервал сходимости (-R;R). В этом случае говорят, что на (-R;R) функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (или ряд по степеням x).

1) Если $f(x)$ на (-R;R) разлагается в степенной ряд (4.18), то она дифференцируема на этом интервале и ее производная может быть найдена почленным дифференцированием ряда:

$$f'(x)=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)'=a_1+2a_2x+\ldots+n\cdot a_nx^{n-1}+\ldots$$

Аналогично могут быть найдены производные функции $f(x)$ любого порядка. При этом соответствующие ряды имеют тот же интервал сходимости, что и ряд (4.18).

2) Если $f(x)$ разлагается на (-R;R) в степенной ряд (4.18), то она интегрируема в $(-R;R)$ и интеграл от нее может быть найден почленным интегрированием ряда (4.18), т.е. если $x_1,x_2\in(-R;R)$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}a_0dx+\int_{x_1}^{x_2}a_1xdx+\ldots+\int_{x_1}^{x_2}a_nx^ndx+\ldots$$

Интерес представляет интегрирование степенного ряда (4.18) по отрезку [0,x], где $|x|<R$:

$$\int_0^x f(x)dx=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\ldots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

В этом случае снова получаем степенной ряд, интервал сходимости которого (-R;R).

4.5 Разложение функций в степенные ряды

Рассмотрим ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots \tag{4.19}$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – числовые коэффициенты.

Если в (4.19) ввести новую переменную $z = x - a$, то ряд (4.19) примет вид:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{4.20}$$

а это степенной ряд имеющий некоторую область сходимости.

Пусть радиус сходимости $R \neq 0$, тогда ряд (4.20) сходится в интервале (-R;R), т.е. -R<z<R или -R<x-a<R => a-R<x<a+R, таким образом, это интервал сходимости ряда (4.19) с центром в точке a.

Свойства степенных рядов по степеням x сохраняются и для рядов по степеням $(x - a)$. Степенной ряд (4.19) абсолютно сходится в интервале (a-R, a+R) и его суммой является функция непрерывная на этом интервале.

Степенной ряд (4.19) можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри его интервала сходимости, причем полученные ряды имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд (4.19).

На практике интервал сходимости рядов по степеням $(x - a)$ можно находить с помощью признака Даламбера.

Пример - найти область сходимости степенного ряда:

$$\frac{x-2}{1 \cdot 2} + \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 2^3} + ... + \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n} + ...$$

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда и применим признак Даламбера:

$$d = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow d = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{(x-2)^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot |x-2| < 1$$

$$|x-2|<2 \iff -2<x-2<2 \iff 0<x<4$$

Таким образом, интервал сходимости данного степенного ряда (0;4), в нем ряд сходится абсолютно. Исследуем сходимость ряда на концах этого промежутка:

При x=0 получаем числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ... + \frac{(-1)^n}{n} + ...$, который сходится по признаку Лейбница, следовательно, x=0 точка сходимости.

При x=4 получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится как гармонический ряд.

Ответ: областью сходимости данного ряда является промежуток [0;4).

Единственность разложения

До сих пор, рассматривая тот или иной ряд, мы устанавливали его область сходимости и решали задачу о нахождении его суммы $S(x)$. Теперь рассмотрим обратную задачу. Дана функция $f(x)$, требуется найти такой степенной ряд, который бы имел эту функцию в области его сходимости своей суммой.

Говорят, что функция $f(x)$ разлагается на данном промежутке L в степенной ряд, если существует такой степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$, который на этом промежутке сходится к данной функции так, что справедливо равенство:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \forall x \in L \tag{4.21}$$

При этом говорят, что в промежутке L функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням ($x-a$), а правую часть равенства (4.21) называют разложением функции $f(x)$ по степеням ($x-a$).

Теорема 4.4

Если в некотором интервале, содержащем данную точку a, функция $f(x)$ имеет разложение вида (4.21), то это разложение единственно.

Доказательство:

Пусть в (a-R, a+R) имеет место равенство (4.21), в котором коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ нам не известны, пользуясь свойством дифференцируемости степенных рядов, найдем эти коэффициенты, выразив их через данную функцию $f(x)$ и ее производные.

Так как $f(x)$ в (a-R, a+R) есть сумма степенного ряда, то она дифференцируема любое количество раз и ее производные можно найти путем почленного дифференцирования степенного ряда:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

$$\begin{cases} f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (x-a) + 3 \cdot a_3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + n \cdot a_n \cdot (x-a)^{n-1} + \ldots \\ f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot (x-a) + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x-a)^{n-2} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{n}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n + (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) \cdot a_{n+1} \cdot (x-a) + \ldots \end{cases} \tag{4.22}$$

В точке x=a получим:

$$\begin{cases} f'(a) = a_1 \\ f''(a) = 2\cdot a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^n(a) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_n \end{cases};$$

$$a_0 = f(a),\ a_1 = \frac{f'(a)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ldots, \text{ где } n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n \qquad (4.23)$$

Таким образом, коэффициенты ряда (4.21) однозначно определяются по (4.23), значит представление функции $f(x)$ степенным рядом в данном интервале единственно.

Ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке a, тогда по формулам (4.23) можно вычислить коэффициенты $a_n, \forall n = 0,1,2,\ldots$, которые ей соответствуют.

Степенной ряд с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (4.23), т.е. ряд вида:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + \ldots \qquad (4.24)$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ (независимо от того, является ли функция $f(x)$ его суммой или нет).

Если $a=0$, то

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \ldots \qquad (4.25)$$

этот ряд называется рядом Маклорена.

Таким образом, если функция в некоторой окрестности точки a разлагается в степенной ряд, то этим рядом непременно является ряд Тейлора.

Теорема 4.5

Для того, чтобы ряд Тейлора (4.24) функции $f(x)$ сходился к ней в интервале $(a-R,\ a+R)$ необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора стремился к нулю при всех $x\in(a-R,\ a+R)$ из этого интервала, когда n неограниченно возрастает.

Напомним формулу Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + R_n(x),$$

где остаточный член $R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$

Обозначим частичную сумму

$S_n(x)=f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$, тогда формула Тейлора примет вид: $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$

Доказательство:

Необходимое условие.

Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=f(x), \forall x\in(a-R,a+R)$

Требуется доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-S_n(x))=0$, т.к. $f(x)$ не зависит от n.

Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-S_n(x))=0$.

Достаточное условие.

Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$

Требуется доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=f(x), \forall x\in(a-R,a+R)$

$$\lim_{n\to\infty}(f(x)-S_n(x))=0\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$$

Доказанная теорема позволяет установить следующий план решения задач на разложение данной функции в ряд Тейлора.

1) Найти $f'(x)$ данной функции $f(x)$.

2) Вычислить значения $f(a), f'(a), f''(a),\ldots, f^{(n)}(a),\ldots$

3) Записать формально ряд Тейлора

$$f(x)\sim f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+\ldots$$

4) Найти интервал сходимости записанного ряда Тейлора

5) Записать остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора

6) Найти множество значений x, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ и для этих x записать равенство:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+\ldots$$

Примеры

1 Рассмотрим функцию $f(x)=e^x, a=0$.

$a_0 = f(0) = e^0 = 1,\ a_1 = f'(0)/1! = 1/1!,\ a_2 = f''(0)/2! = 1/2!, \ldots,\ a_n = f^{(n)}(0)/n! = 1/n!$

$$e^x \sim 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Сходится по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[|x|\cdot\frac{1}{n+1}\right] = 0 < 1,\ \forall x \in (-\infty;+\infty)$$

$R_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1} \to 0 \Rightarrow$ на множестве действительных чисел ряд Тейлора сходится.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \forall x \in (-\infty;+\infty)$$

(4.26)

2 $f(x) = sinx$ $\quad sinx = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots, \forall x \in (-\infty;+\infty)$ (4.27)

3 $f(x) = cosx$ $\quad cosx = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots, \forall x \in (-\infty;+\infty)$ (4.28)

Разложение для $f(x) = cosx$, получено из $cos\,x = [sin\,x]'$.

4 Биноминальный ряд.

$$f(x) = (1+x)^m,\ где\ \forall m \in R,\ a = 0$$

$$(1+x)^m = 1 + m\cdot x + \frac{m\cdot(m-1)\cdot x^2}{2!} + \ldots + \frac{m\cdot(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\cdot x^n + \ldots \forall x \in (-1;1) \quad (4.29)$$

Выделяется в частности $m = -1$.

$$m = -1:\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots \forall x \in (-1;1) \quad (4.30)$$

Если проинтегрировать обе части последнего равенства (4.30), то получим:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \forall x \in (-1;1) \quad (4.31)$$

5 $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2} + \ldots, \forall x \in (-1;1)$ (4.32)

Если проинтегрировать обе части последнего равенства (4.32), то получим:

$$arctgx=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(1-t^2+t^4-...+(-1)^{n-1}\cdot t^{2n-2}+...\right)dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{2n-1}+...$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1},\forall x\in(-1;1) \qquad (4.33)$$

Замечание.

Функция $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет своим рядом Тейлора ряд, состоящий из нулевых коэффициентов, сумма которого равна нулю. Однако сама функция $f(x)$ отлична от нуля во всех точках области определения (за исключением точки x=0). Таким образом, сумма ряда Тейлора, полученного из разложения данной функции, не всегда совпадает с самой функцией.

5 Вопросы для самоконтроля

1. Математическая символика. Определение интервала, дельта окрестности и выколотой дельта окрестности точки.
2. Понятие множества. Способы задания множеств. Операции над множествами.
3. Множество матриц. Основные понятия.
4. Операции над матрицами.
5. Определители и их свойства.
6. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
7. Обратная матрица (определение, два способа ее нахождения).
8. Система линейных алгебраических уравнений. Решение системы в случае $m=n$.
9. Система линейных алгебраических уравнений. Решение системы в случае $m\neq n$.
10. Теорема Кронекера-Капели (сформулировать и доказать).
11. Запись системы линейных алгебраических уравнений в матричной форме.
12. Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств.
13. Линейное пространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.
14. Линейные операторы. Основные понятия.
15. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

16. Квадратичные формы.
17. Числовые последовательности. Основные понятия.
18. Теорема о единственности предела числовой последовательности (сформулировать и доказать).
19. Теорема Вейерштрасса (сформулировать и доказать).
20. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства.
21. Теорема Больцано – Вейерштрасса (сформулировать и доказать).
22. Фундаментальные последовательности и их свойства.
23. Критерий Коши (сформулировать и доказать).
24. Предел функции одной переменной в точке. Левосторонний и правосторонний пределы функции.
25. Теорема (2.2.2) (сформулировать и доказать).
26. Теорема (2.2.3) (сформулировать и доказать).
27. Запишите два замечательных предела.
28. Бесконечно малые и бесконечно большие функции одной переменной.
29. Правила сравнения бесконечно малых и бесконечно больших функций.
30. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций.
31. Производные функции нескольких переменных.
32. Дифференциалы функции нескольких переменных.
33. Дифференцируемая в данной точке функция нескольких переменных. Теоремы о таких функциях.
34. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.
35. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных.
36. Инвариантность формы дифференциала первого порядка функции нескольких переменных.
37. Частные производные высшего порядка.
38. Дифференциалы функции нескольких переменных высшего порядка.
39. Локальный экстремум. Необходимое условие локального экстремума.
40. Локальный экстремум. Достаточное условие локального экстремума.
41. Числовые ряды. Их сходимость и расходимость (в частности геометрическая прогрессия, обобщенный гармонический ряды).
42. Свойства сходящихся числовых рядов.
43. Необходимое условие сходимости ряда (сформулировать и доказать).
44. Достаточные признаки сходимости (сформулировать и доказать два признака сравнения, признак Коши).
45. Достаточные признаки сходимости (сформулировать и доказать признак Даламбера, интегральный признак).
46. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов.
47. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
48. Функциональные ряды. Основные понятия.
49. Степенные ряды. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда.
50. Разложение функции одной переменной в степенной ряд.

6 Оформление контрольной работы

Выполненная контрольная работа должна соответствовать следующим требованиям:

- контрольная работа должна быть выполнена и представлена на рецензирование в срок, установленный графиком;
- лицевой бланк следует оформить согласно образцу, представленному в приложении;
- задачи следует решать в том порядке, в котором они приведены в варианте;
- решение задач следует сопровождать необходимыми формулами, подробными расчетами и пояснениями. Необходимо четко формулировать выводы, раскрывающие значение вычисленных показателей;
- работа должна быть написана разборчиво, без помарок, аккуратно оформлена. В работе допускаются лишь общепринятые сокращения, каждая страница должна иметь поля для замечаний;
- в конце работы нужно привести список используемой литературы (автор, название учебника), поставить подпись и дату выполнения работы;
- в случае отсутствия замечаний работа допускается к собеседованию. При наличии замечаний перед выходом на собеседование необходимо внести исправления. Собеседование оценивается зачетом.

Студенты, не получившие зачета по письменной работе, к экзамену не допускаются.

Если выполнение работы вызывает затруднения, следует обратиться за устной или письменной консультацией на кафедру.

7 Образец решения задач

Задача 1 Даны множества:

$$A=\{x:-1\le x\le 5\},B=\{x:x^2\le 9\},C=\{x:x^2-6x\le 0\}$$

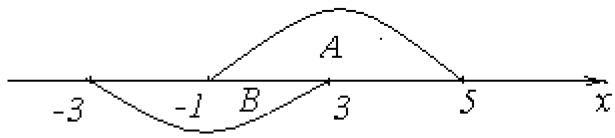
Найти $(A\cap B)\cup C'$ (Дополнение берется во множестве действительных чисел)

Решение: 1) Сначала уточним, что представляют собой множества *B* и *C*. Решив неравенство $x^2\le 9$ $\left(x^2\le 9\Rightarrow |x|\le 3\Rightarrow -3\le x\le 3\right)$ найдем, что $B=\{x:-3\le x\le 3\}$

Решив неравенство $x^2-6x\le 0$ $\left(x^2-6x\le 0\Rightarrow x(x-6)\le 0\Rightarrow 0\le x\le 6\right)$, найдем, что $C=\{x\text{: } 0\le x\le 6\}$.

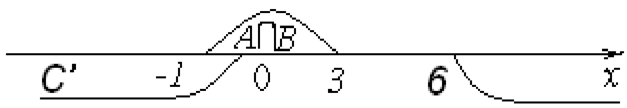
2) По определению дополнения $\boxed{C'=\{x: x\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty)\}}$

3) Изобразим множества *A* и *B* на числовой оси



По определению пересечения $A \bigcap B = \{x : -1 \le x \le 3\}$

4) Изобразим множества $(A \bigcap B)$ и C' на числовой оси



Найдем их объединение $(A \bigcap B) \bigcup C' = \{x : x \in (-\infty; 3] \bigcup (6; +\infty)\}$

Ответ: Искомое множество $(A \bigcap B) \bigcup C' = \{x : x \in (-\infty; 3] \bigcup (6; +\infty)\}$

Задача 2 Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений. Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение:

1) Найдем множество решений данной системы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 & -3 \\ & & \\ & & \\ & & \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sim$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ранг матрицы системы равен двум, т.е. $rang\ A = 2$.
Запишем систему соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Пусть x_1, x_2 будут базисными переменными $\left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8 \neq 0\right)$, а x_3, x_4, x_5 – параметрами.

Выразим базисные переменные через параметры

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2x_3 + 16x_4 - 3x_5 \\ 8x_2 = 7x_3 - 25x_4 + 4x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

Пространство решения данной системы

$$X = \left\{\left(\frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5; \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5; x_3; x_4; x_5\right)\right\}$$

2) Размерность пространства найдем по формуле $dim\ X = n - r$, где n- число неизвестных, r-ранг A.

Итак, $dim\ X$=5-2=3.

3) Какое-нибудь решение системы можно найти, придав параметрам произвольные значения.

Например: $x_3=0$, $x_4=8$, $x_5=-16$

Одно из решений X_0=(11; -33; 0; 8; -16)

4) Базис пространства найдем, придавая параметрам поочередно некоторое значение, например 8, полагая остальные равными 0.

X_1=(19; 7; 8; 0; 0)
X_2=(3; -25; 0; 8; 0)
X_3=(-4; 4; 0; 0; 8)

Ответ: $X=\left\{\left(\frac{19}{8}x_3+\frac{3}{8}x_4-\frac{1}{2}x_5;\frac{7}{8}x_3-\frac{25}{8}x_4+\frac{1}{2}x_5;x_3;x_4;x_5\right)\right\}$; $dim\,X=3$;

произвольное решение $X_0=(11; -33; 0; 8; -16)$ базис пространства $\{X_1,X_2,X_3\}$, где $X_1=(19; 7; 8; 0; 0)$, $X_2=(3; -25; 0; 8; 0)$, $X_3=(-4; 4; 0; 0; 8)$

Задача 3 Решить матричное уравнение $A\cdot X\cdot B=C$ относительно X, если

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&0&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Решение:

1) Сначала решим уравнение в общем виде. Умножим обе части справа на матрицу B^{-1}, слева на A^{-1}. Тогда искомая матрица выражается формулой $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$.

2) Выясним существуют ли обратные матрицы A^{-1}, B^{-1}.

$$det\,A=\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1&-1\\0&-1&0\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot0+0\cdot(-1)\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-(1\cdot1\cdot2+0\cdot(-1)\cdot0+1\cdot(-1)\cdot(-1))=0+0+1-$$

$-(2+0+1)=1-3=-2\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$;

$$det\,B=\begin{vmatrix}-2&0&1\\1&0&-1\\0&-1&3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-2&1\\1&-1\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}.$$

3) Обратную матрицу для данной можно находить разными способами: с помощью элементарных преобразований или с помощью теории определителей.

Матрицу A^{-1} найдем с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\-1&1&-1&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)(-2)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&-1&-2&-2&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&-2&-1&1&1\end{array}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&1/2&-1/2&-1/2\end{array}\right)(-1)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицу B^{-1} найдем с помощью теории определителей:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\cdot B^*,$$

$$\text{где } B^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0-1 = -1; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Находим матрицу X:

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} (-1)\cdot 1+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 1 & (-1)\cdot 0+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 \\ (-2)\cdot 1+(-2)\cdot 0+0\cdot 1 & (-2)\cdot 0+(-2)\cdot 2+0\cdot(-1) & (-2)\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+0\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 1 & (-1)\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2+3+1 & 2+6+2 & 0+1+0 \\ 2+12+0 & 2+24+0 & 0+4+0 \\ 0-3+1 & 0-6+2 & 0-1+0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 14 & 26 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -0.5 \\ -7 & -13 & -2 \\ 1 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Ответ: искомая матрица $X = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -0.5 \\ -7 & -13 & -2 \\ 1 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}$

Задача 4 Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 3\cdot x_1^2 - x_2^2 + 4\cdot x_1\cdot x_2$.

Найти квадратичную форму, полученную из данной линейным преобразованием:

$x_1 = 2\cdot y_1 - y_2, x_2 = y_1 + y_2$.

Решение:

1) Матрица данной квадратичной формы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

2) Матрица линейного преобразования имеет вид: $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) Искомая матрица $A^* = C'\cdot A\cdot C$, таким образом:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L(y_1, y_2) = 19\cdot y_1^2 - 10\cdot y_1\cdot y_2 - 2\cdot y_2^2.$$

Ответ: искомая квадратичная форма имеет вид

$$L(y_1, y_2) = 19\cdot y_1^2 - 10\cdot y_1\cdot y_2 - 2\cdot y_2^2.$$

Задача 5 Исследовать на экстремум функцию $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$,

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Решение:

1) Найдем точки возможного локального экстремума

$$\frac{\partial z}{\partial x} = cosx + 0 + cos(x+y)\cdot 1 = cosx + cos(x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + cosy + cos(x+y)\cdot 1 = cosy + cos(x+y)$$

$$\begin{cases} cos\,x + cos(x+y) = 0 \\ cos\,y + cos(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos\,x - cos\,y = 0 \\ cos\,x + cos(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cos\,x = cos\,y \\ cos\,x + cos(x+y) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = y \\ cos\,x + cos\,2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2cos^2 x + cos\,x - 1 = 0 \end{cases}$$

Найдем корни уравнения $2cos^2 x + cos\,x - 1 = 0$.

Заменим $cos\,x = a$, тогда $2a^2 + a - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$a_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$,

$a_2 = \frac{-1-3}{4} = -1.$

Сделаем обратную замену: $cos\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$;

$cos\,x = -1 \Rightarrow x = \pi$ – не удовлетворяет условию задачи $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Вернемся к решению системы $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow M_0 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

Таким образом $M_0 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ – точка возможного локального экстремума.

2) Применим теорему о достаточных условиях экстремума функции многих переменных, для чего найдем $d^2 z$; $d^2 z\big|_{M_0}$.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x+y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = -\sin\frac{\pi}{3} - \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin y - \sin(x+y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\sin(x+y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\partial^2 z\Big|_{M_0} = -\sqrt{3}dx^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot dxdy - \sqrt{3}dy^2 = -\sqrt{3}dx^2 + \sqrt{3}dxdy - \sqrt{3}dy^2.$$

Составим матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = \left|-\sqrt{3}\right| = -\sqrt{3} < 0,$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 - \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4} > 0.$

Следовательно, по критерию Сильвестра квадратичная форма $d^2z\big|_{M_0}$ отрицательно определенная и точка $M_0 = \left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ - точка локального максимума.

Ответ: функция $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$,$\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$ в точке $M_0 = \left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ имеет локальный максимум.

Задача 6 Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{3^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot 2^{-n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(n^2+1\right)^2}$.

Решение:

а) Используя неравенство $\sin x \le x$, справедливое для всех $x \ge 0$, найдем,

что $0 < 1-\cos\dfrac{\pi}{3^n} = 2\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{2\cdot 3^n} \le 2\cdot\left(\dfrac{\pi}{2\cdot 3^n}\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{1}{9^n}$, для n = 1, 2…

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{9^n}$ сходится (как ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{9} < 1$), то по первому признаку сравнения (здесь $\lambda = \dfrac{\pi^2}{2}$) сходится и данный ряд.

б) Воспользуемся признаком Коши.

Здесь $a_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

$$c = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} \Rightarrow c = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot e = \frac{e}{2} > 1,$$

следовательно, данный ряд расходится.

в) Воспользуемся признаком Даламбера.

Здесь $a_n = \dfrac{n^3}{3^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$.

Тогда $d = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow d = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{n^3}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{3}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3\right] = \dfrac{1}{3}\cdot 1 = \dfrac{1}{3} < 1,$

следовательно, данный ряд сходится.

г) Воспользуемся интегральным признаком.

Здесь $f(x) = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} = \lim_{R\to+\infty} \left[-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}\right]\Bigg|_1^R = \lim_{R\to+\infty}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2\left(R^2+1\right)}\right] = \frac{1}{4},$$

следовательно, интеграл сходится, а значит, данный ряд сходится.

Ответ: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - cos\dfrac{\pi}{3^n}\right)$ – сходится; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot 2^{-n}$ – расходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$ – сходится; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(n^2+1\right)^2}$ – сходится.

Задача 7 Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}.$$

Решение:

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится,

$$d = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$ абсолютно сходится.

Ответ: данный ряд абсолютно сходится.

Задача 8 Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^n}\cdot(x+2)^n$.
Найти радиус сходимости *R*, интервал сходимости (- *R, R*). Исследовать поведение ряда на границах интервала.

Решение: 1) $n=1, a_1=\frac{1}{2}$; $n=2, a_2=-\frac{1}{2\cdot 2^2}=-\frac{1}{8}$; $n=3, a_3=\frac{1}{3\cdot 2^2}=\frac{1}{24}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}\cdot(x+2)^n=\frac{1}{2}\cdot(x+2)-\frac{1}{8}(x+2)^2+\frac{1}{24}(x+2)^3-\ldots$$

2) Радиус сходимости найдем по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Имеем $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$, $a_{n+1}=\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$;

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n\cdot(-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2}{n}=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=2$$

3) Данный ряд сходится абсолютно на интервале $|x+2|<2$, или
$-2<x+2<2 \Rightarrow -4<x<0$.

Итак, интервал сходимости (- 4; 0).

4) При x = -4 получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}\cdot(-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

который расходится (гармонический ряд)

При x = 0 получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}\cdot 2^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, сходящийся условно.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}\cdot(x+2)^n$ сходится в области $-4<x\le 0$.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}\cdot(x+2)^n=\frac{1}{2}\cdot(x+2)-\frac{1}{8}(x+2)^2+\frac{1}{24}(x+2)^3-\ldots$, $R=2$; интервал сходимости (-4; 0); область сходимости (-4; 0].

Задача 9. Разложить функцию $\frac{1}{4-x}$ в ряд по степеням (x – 2).

Решение: Преобразуем данную функцию так, чтобы можно было использовать ряд $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$, $-1<x<1$ (4.5.11), для функции $\frac{1}{1-x}$.

Имеем $\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4-((x-2)+2)}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)}$.

Заменяя в формуле (4.29) x на $\frac{x-2}{2}$, получим

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x-2}{2}+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots\right]=\frac{1}{2}+\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}+\frac{(x-2)^3}{2^4}+\ldots.$$

Это разложение справедливо для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<x<4$, так

как $\frac{x-2}{2}<1\Leftrightarrow |x-2|<2\Leftrightarrow -2<x-2<2\Leftrightarrow 0<x<4$

Ответ $\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}+\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}+\frac{(x-2)^3}{2^4}+\ldots, 0<x<4$.

8 Варианты контрольной работы

Вариант 0

1. Даны множества A: $x^2+4x\le 0$

B: $|x|\le 3$

C: $x^2-1<0$

Найти пересечение множеств $(A\cup B')$ и $(A\cup C')$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$2x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0$$
$$x_1+4x_2+3x_3+x_4+2x_5=0$$
$$2x_1+6x_2+5x_3+x_4+x_5=0$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$ относительно X

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

4. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2 + 2x_2^2 + x_1x_3 + 3x_3^2.$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{5^n \cdot \sqrt[3]{n}}$. Найти R и $(-R; R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9. Разложить функцию $\sin x^2$ в ряд по степеням x.

Вариант 1

1. Даны множества А: $x^2 - 10x + 16 > 0$

В: $-4 < x < 7$

С: $|x - 2| > 3$

Найти пересечение множеств $(A \cup B)$ и $(A' \cup C')$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$ относительно X

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&5&1\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&2\\1&1&0\end{pmatrix}$$

4. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность

$$L(x_1,x_2,x_3)=3x_2x_3-x_1^2+2x_1x_3-2x_2^2-5x_3^2.$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3y^2(6-x-y)$.

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{1+2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+2}{2n+3}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{3^n}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\cdot x^n}{8^n\cdot\sqrt{n}}$. Найти R и $(-R;R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9. Разложить функцию ℓ^x в ряд по степеням $(x+2)$.

Вариант 2

1. Даны множества A: $x^2-15x+56<0$

B: $-3<x<5$

C: $|x-1|>4$

Найти пересечение множеств $(A\cup B')$ и $(A\cup C')$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned}&2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0\\&x_1-x_2+x_3+x_4-x_5=0\\&3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=0\\&4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=0\end{aligned}$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3. Решить матричное уравнение $A\cdot X\cdot B=C$ относительно X

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

4. $L(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^2-6x_1x_2$. Найти квадратичную форму, полученную из данной линейным преобразованием: $x_1=y_1-y_2$, $x_2=4y_1+y_2$.

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции заданной неявно $z^3+3xyz=a^3$, где $a=const$.

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\left(2^n+1\right)}\text{; б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\text{; в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\text{; г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}.$$

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10n+1}$.

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{7^n\cdot\sqrt[3]{n}}$. Найти R и $(-R;R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9. Разложить функцию $ln\frac{1+3x}{1-3x}$ в ряд по степеням x.

Вариант 3

1. Даны множества A: $x^2-7x+10>0$

B: $-2<x<3$

C: $|2x-5|>1$

Найти пересечение множеств $(A\cup C)$ и $(B'\cup C')$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{gathered}x_1+2x_2+x_3+x_4-5x_5=0\\ 3x_1-4x_2+x_3+2x_4+7x_5=0\\ 9x_1+6x_2+5x_3+2x_4+3x_5=0\end{gathered}$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3. Решить матричное уравнение $A\cdot X\cdot B=C$ относительно X

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $\widetilde{B}$ - линейный оператор в базисе $\{b_1, b_2\}$ задан матрицей $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\{\ell_1, \ell_2\}$, если $b_1 = (5;4)$, $b_2 = (-1;2)$

5. Найти полную производную функции $z = cos(2u + v - 3w)$, где $u = x^3, v = 3x^2, w = \frac{1}{7}x^7$.

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{3n+4} \right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ln\, n}{n\sqrt{n}}.$$

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot x^n}{5^n \cdot \sqrt{n}}$. Найти R и $(-R;R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9. Разложить функцию $\sqrt[7]{1+x}$ в ряд по степеням x.

Вариант 4

1. Даны множества A: $-3 \le x < 6$

B: $|x-3| \le 4$

C: $x^2 - 7x + 6 \ge 0$

Найти пересечение множеств $(A' \cup B')$ и $(A \cup C)$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$
$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0$$
$$8x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$ относительно X

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&5&1\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-2&2\\1&1&0\end{pmatrix}$$

4. $\widetilde{A}$ - линейный оператор в базисе $\{a_1,a_2\}$ задан матрицей $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\{\ell_1,\ell_2\}$, если $a_1=(-2;7)$, $a_2=(0;3)$.

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции заданной неявно

$$x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0.$$

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}.$$

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3^n\cdot\sqrt[4]{n}}$. Найти R и $(-R;R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9. Разложить функцию $\frac{1}{x}$ в ряд по степеням $(x-3)$.

Вариант 5

1. Даны множества A: $1\le x\le 4$

B: $|x-5|<24$

C: $x^2-12x+20=0$

Найти пересечение множеств $(A\cup B)$ и $(A'\cup C')$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned}3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5&=0\\6x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=0\\9x_1+3x_2+x_3+7x_4+9x_5&=0\end{aligned}$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3. Решить матричное уравнение $A\cdot X\cdot B=C$ относительно X

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Является ли оператор $\widetilde{B}$ - линейным? Если $\widetilde{B} : y = (y_1; y_2)$ $\widetilde{B}(y) = (y_2, y_1 + y_2)$. В случае линейности $\widetilde{B}$ найти его матрицу в единичном базисе.

5. Найти полную производную функции $m = \left(2n^2 - k - p\right)^5$, если $n = \cos t, k = \sin^2 t, p = \cos^2 t.$

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+2n}{n+1} \cdot 4\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n!}$. Найти R и $(-R; R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9. Разложить функцию $\cos x$ в ряд по степеням $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 6

1. Даны множества А: $x^2 - 4 \geq 0$

В: $-3 < x \leq 2$

С: $|x - 1| \leq 5$

Найти пересечение множеств $(A \cup B)$ и $(A' \cup C')$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \end{aligned}$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$ относительно X

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&5&4\\3&8&7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

4. Является ли оператор $\widetilde{A}$ линейным? Если $\widetilde{A}: x=(x_1;x_2)$ $\widetilde{A}(x)=(x_1-x_2, x_1+x_2)$. В случае линейности $\widetilde{A}$ найти его матрицу в единичном базисе.

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции заданной неявно $xy-ln\,y+z^3=a$, где $a=const$.

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+7n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(ln\,n)^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^2}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)\cdot 5^n}$. Найти R и $(-R;R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9. Разложить функцию ℓ^{-x} в ряд по степеням x

Вариант 7

1. Даны множества А: $-5\le x\le 3$

В: $x^2\ge 4$

С: $|x-2|\le 4$

Найти пересечение множеств $(A\cup B)$ и $(A'\cup C')$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$3x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0$$
$$6x_1+4x_2+3x_3+x_4+2x_5=0$$
$$9x_1+6x_2+5x_3+4x_4+x_5=0$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3. Решить матричное уравнение $A\cdot X\cdot B=C$ относительно X

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

4. $L(x_1,x_2)=x_1^2-5x_2^2+2x_1x_2$. Найти квадратичную форму, полученную из данной линейным преобразованием: $x_1=y_1+y_2,\quad x_2=y_1-2y_2$.

5. Найти полную производную функции $u=sin\left(\sqrt[3]{x}+zy+\ell^z\right)$, если

$$x=t^2+3, y=4-t^3, z=\frac{t}{27}.$$

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ell^{2n+1}}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,n\alpha}{n^2}$.

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{5n+2}\cdot x^n$. Найти R и $(-R;R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9. Разложить функцию ℓ^x в ряд по степеням $(x-2)$.

Вариант 8

1. Даны множества A: $x^2-6x\geq 10$

B: $x^2-9\leq 0$

C: $|x-3|\leq 4$

Найти пересечение множеств $(A\cup B)$ и $(A'\cup C')$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned}2x_1+2x_2+x_3+3x_4+2x_5&=0\\ x_1+4x_2+3x_3+5x_4+4x_5&=0\\ x_1+6x_2+5x_3+7x_4+x_5&=0\end{aligned}$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3. Решить матричное уравнение $A\cdot X\cdot B=C$ относительно X

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\2&-1&-1\\-1&3&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&5&1\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\3&-1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

4. Является ли оператор $\widetilde{B}$ линейным? $\widetilde{B}: y=(y_1,y_2)$ $\widetilde{B}(y)=(y_1,y_1-y_2)$. В случае линейности $\widetilde{B}$ найти его матрицу в единичном базисе.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{cos^2 n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-ln\,n}.$$

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\cdot x^n}{3n-2}$. Найти R и $(-R;R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9. Разложить функцию tgx в ряд по степеням $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 9

1. Даны множества A: $x^2-8x+15>0$
B: $0<x\le 7$
C: $|x+1|\ge 6$

Найти пересечение множеств $(A\cup C')$ и $(A'\cup B')$

2. Построить пространство решений однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned}3x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5&=0\\6x_1+x_2+3x_3+5x_4+2x_5&=0\\9x_1+x_2+5x_3+x_4+x_5&=0\end{aligned}$$

Указать размерность этого пространства, какое-нибудь решение, базис.

3 Решить матричное уравнение $A\cdot X\cdot B=C$ относительно X

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:

$$L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 - \frac{1}{5} y_1 y_2 + y_1 y_3$$

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$.

6. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arcsin^n \frac{1}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}$.

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}.$$

8. Написать три первых члена степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$. Найти R и $(-R; R)$. Исследовать поведение ряда на границах интервала.

9 Разложить функцию $y = sin^2 x - cos x$ в ряд по степеням x.

9 Рекомендуемая литература

1 Краснов М.Л., Киселев А.И. Вся высшая математика: учебник для вузов. Т.1 – Т.3 / М.Л. Краснов, А.И. Киселев. - М.; Эдиториал УРСС, 2000

2 Натансон И.П. Краткий курс высшей математики: учебник для высшей школы / И.П. Натансон. - СПб.: Лань, 1999

3 Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для немат. спец. вузов / В.С. Шипачев; под ред. акад. Тихонова А.Н. - М.: Высшая школа, 2002

4 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман; под ред. Арамановича Л.И. - М.: Эдиториал УРСС, 1999

5 Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. - М.: Юнити, 2004

Список использованных источников

1 Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. - Москва: Юнити, 2004

2 Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для немат. спец. вузов / В.С. Шипачев; под ред. акад. Тихонова А.Н. - Москва: Высшая школа, 2002

3 Шипачев В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев. - Москва: Высшая школа, 2002

4 Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики / Б.К. Пчелин. - Москва: Высшая школа, 1993

5 Краснов М.Л., Киселев А.И. Вся высшая математика: учебник для вузов. Т.1 – Т.3 / М.Л. Краснов, А.И. Киселев. - Москва; Эдиториал УРСС, 2000

6 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. - Москва: «Наука», 1985

7 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман; под ред. Арамановича Л.И. - Москва: Эдиториал УРСС, 1999

8 Натансон И.П. Краткий курс высшей математики: учебник для высшей школы / И.П. Натансон. - СПб.: Лань, 1999

Приложение А
(обязательное)

Образец оформления лицевого бланка контрольной работы

Министерство образования и науки Российской Федерации
(14 пт)
Федеральное агентство по образованию

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(14 пт)

Факультет вечернего и заочного обучения
(14 пт)

Кафедра математического анализа
(14 пт)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
(16 пт)
Вариант №
(14 пт)

Руководитель:
преподаватель (звание
должность, ФИО)

Исполнитель:
студент (группа, курс,
специальность, ФИО)

Оренбург 2008

Приложение Б

(справочное)

Таблица Б.1- Производные основных элементарных функций одной переменной

Функция	Производная
$y=C=const$	$y' = 0$
$y=x^{\alpha}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
$y=a^{x}$	$y' = a^{x} \ln a$
$y=e^{x}$	$y' = e^{x}$
$y=\log_{a}x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y=\ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y=\sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\frac{1}{2}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$

Функция	Производная
$y=\sin x$	$y' = \cos x$
$y=\cos x$	$y' = -\sin x$
$y=tg\,x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y=ctg\,x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y=\arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=arctg\,x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y=arcctg\,x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Приложение В

Табличные интегралы

1 $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, если $\alpha \neq -1$;

2 $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + C, \text{если } x > 0 \\ \ln(-x) + C, \text{если } x < 0 \end{cases}$;

3 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

4 $\int \cos x dx = \sin x + C$;

5 $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

7 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

8 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

9 $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$;

10 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

11 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$;

12 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$;

13 $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$;

14 $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$;

15 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$;

16 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Частные случаи

1 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

2 $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$;

3 $\int \ell^x dx = \ell^x + C$.