Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

Е.О. Каракулина, Е.В. Спиридонова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания
к решению контрольной работы

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2010

УДК 519.2(07)
ББК 22.171я7
К 21

Рецензент – доцент, кандидат педагогических наук О.Н. Казакова

Каракулина Е.О.
К 21 Теория вероятностей: методические указания к решению контрольной работы / Е.О. Каракулина, Е.В. Спиридонова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2010. – 30с.

Основное содержание: классическое определение вероятности; комбинаторика; формула Бернулли; случайные величины, их распределения и числовые характеристики, интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Методические указания по курсу «Математический анализ» предназначены для выполнения контрольной работы для студентов заочного отделения специальности 280101.65.

УДК 519.2(07)
ББК 22.171я7

Содержание

Введение 4

1 Образец выполнения контрольной работы 4

2 Варианты контрольных заданий 12

Список использованных источников 28

Приложение А 29

Введение

Математика является одним из важнейших элементов в образовании современного инженера. Она является методом точного исследования и средством четкой формулировки понятий и проблем.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Данные методические указания содержат задания, которые соответствуют рабочей программе по математическому анализу специальности 280101.65, согласно которой теория вероятностей читается на втором году обучения в рамках дисциплины «Математический анализ».

Цель методических указаний – помочь студентам в освоении раздела «Теория вероятностей», научить их на практике применять теоретические знания. Приобретенные знания, умения и навыки используются при изучении таких дисциплин, как:

- математическая статистика;
- надежность технических систем и техногенный риск.

При выполнении работы и ее оформлении необходимо придерживаться следующих правил:

1) работа должна быть выполнена в тетради, имеющей поля для замечаний преподавателя;
2) на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы и номер варианта;
3) перед решением каждой задачи нужно привести полностью ее условие;
4) решать аккуратно и подробно. Решения задач сопровождать четкими пояснениями;
5) следует придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в задании.

1 Образец выполнения контрольной работы

Вариант 0

Задача 1.1. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

Решение:

Событие A – извлеченный шар оказался белым.

В соответствии с классическим определением вероятности, имеем

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $m = a$ – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

$n = a + b$ – число всех равновозможных элементарных исходов.

Таким образом $P(A) = \dfrac{a}{a+b}$.

Ответ: $\dfrac{a}{a+b}$.

Задача 1.2. Бросают два кубика. Суммируют число очков, выпавших на верхних гранях кубиков. Найти вероятность того, что сумма очков больше 9.

Решение:

Событие A – сумма очков больше 9.

Полную группу событий образуют равновозможные элементарные исходы $(k;l)$, $k,l = 1,2,3,4,5,6$, представленные в таблице 1.

Таблица 1

k	l					
	1	2	3	4	5	6
	$(k;l)$					
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

Элементарный исход $(k;l)$ означает, что на первом кубике выпало k очков, на втором l очков.

Таким образом, в этом испытании всего $6^2 = 36$ равновозможных элементарных исходов. Событию A благоприятствуют 6 исходов $(4;6), (5;5), (5;6), (6;4), (6;5), (6;6)$.

В соответствии с классическим определением вероятности, имеем

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $m = 6$ – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

$n = 36$ – число всех равновозможных элементарных исходов.

Таким образом $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задача 2. В пачке из k лотерейных билетов, из них p выигрышных $(p < k)$. Какова вероятность того, что среди s $(s < k)$ извлеченных наудачу билетов окажется t выигрышных $(t < s)$.

Решение:

Событие A – среди s извлеченных на удачу билетов t выигрышных.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь s билетов из k. Следовательно

$$n = C_k^s = \frac{k!}{s!(k-s)!}.$$

Определим число исходов, благоприятствующих появлению событию A. t выигрышных билетов из p имеющихся можно взять C_p^t способами, при этом остальные $(s-t)$ должны быть невыигрышными. Выбрать их из $(k-p)$ можно C_{k-p}^{s-t} способами. Следовательно, число благоприятных исходов

$$m = C_p^t \cdot C_{k-p}^{s-t} = \frac{p!}{t!\cdot(p-t)!} \cdot \frac{(k-p)!}{(s-t)!\cdot(k-p-s+t)!}.$$

Найдем искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_p^t \cdot C_{k-p}^{s-t}}{C_k^s} = \frac{p!\cdot s!\cdot(k-p)!\cdot(k-s)!}{t!\cdot k!\cdot(p-t)!\cdot(s-t)!\cdot(k-p-s+t)!}.$$

Ответ: $\frac{p!\cdot s!\cdot(k-p)!\cdot(k-s)!}{t!\cdot k!\cdot(p-t)!\cdot(s-t)!\cdot(k-p-s+t)!}$.

Задача 3. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой a белых шаров и b черных; во второй c белых шаров и d черных; в третьей только белые шары. Наугад из одной из урн вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение:

Событие A – появление белого шара.

Гипотезы:

H_1 – выбор первой урны;

H_2 – выбор второй урны;

H_3 – выбор третьей урны.

Вероятность искомого события найдем по формуле полной вероятности:

$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)$,

где $P_{H_1}(A)$ – вероятность того, что белый шар вынули из первой урны;

$P_{H_2}(A)$ – вероятность того, что белый шар вынули из второй урны;

$P_{H_3}(A)$ – вероятность того, что белый шар вынули из третьей урны;

Одну из трех урн можно выбрать с вероятностью

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Найдем условные вероятности:

$$P_{H_1}(A)=\frac{a}{a+b};\quad P_{H_2}(A)=\frac{c}{c+d};\quad P_{H_3}(A)=1.$$

Таким образом $P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{c+d}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right).$

Ответ: $\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right).$

Задача 4. Монета бросается 5 раз. Найти вероятность того, что герб появится: а) два раза; б) не менее четырех раз; в) менее четырех раз.

Решение:

Обозначим через X число гербов, выпавших при этих подбрасываниях. Вероятность появления герба при каждом подбрасывании $p=\frac{1}{2}$, а орла – $q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

а) Вероятность того, что герб появится два раза, найдем по формуле Бернулли:

$$P_m(k)=C_m^k\cdot p^k\cdot q^{m-k}.$$

По условию $m=5, k=2$, тогда

$$P(X=2)=P_5(2)=C_5^2\cdot p^2\cdot q^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\cdot\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3!}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}.$$

б) Найдем вероятность того, что герб появится не менее четырех раз

$$P(X \geq 4) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q + C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot (5+1) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

в) Событие, состоящее в том, что при пятикратном подбрасывании монеты герб появится не менее 4 раз (4, 5 раз) и событие – появления герба менее 4 раз (0, 1, 2, 3 раза) являются противоположными.

Поэтому имеем

$$P(X < 4) = 1 - P(X \geq 4) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}.$$

Ответ: $\frac{5}{16}, \frac{3}{16}, \frac{13}{16}$.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Решение:

Математическое ожидание найдем по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

Получаем

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 = 1{,}3.$$

Найдем дисперсию по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Составим вспомогательную таблицу:

x_i^2	0	1	4	9
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Найдем математическое ожидание квадрата величины X:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 = 2{,}5.$$

Таким образом,

$$D(X) = 2{,}5 - (1{,}3)^2 = 0{,}81.$$

Среднее квадратическое отклонение определим по формуле:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$.

Ответ: $M(X) = 1{,}3$**,** $D(X) = 0{,}81$**,** $\sigma(X) = 0{,}9$**.**

Задача 6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{при} \quad x \le -2, \\ 0{,}2 \cdot (x+2), & \textit{при} \quad -2 < x \le 3, \\ 1, & \textit{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(1 < X < 5)$.

Решение:

а) Сначала найдем плотность распределения $p(x)$ по формуле:

$$p(x) = F'(x).$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -2, \\ 0{,}2, & \text{при } -2 < x \le 3, \\ 0, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Математическое ожидание найдем по формуле:

$$M(X) = \int_a^\beta x p(x) dx.$$

Получаем

$$M(X) = \int_{-2}^{3} 0{,}2x dx = \left.\frac{0{,}2 \cdot x^2}{2}\right|_{-2}^{3} = \frac{0{,}2}{2} \cdot (9-4) = 0{,}5.$$

Найдем дисперсию по формуле:

$$D(x) = \int_\alpha^\beta x^2 p(x) dx - (M(X))^2.$$

$$D(x) = \int_{-2}^{3} 0{,}2x^2 dx - (0{,}5)^2 = \left.\frac{0{,}2x^3}{3}\right|_{-2}^{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{15} \cdot (27+8) - \frac{1}{4} = \frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 2{,}083.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2{,}083} \approx 1{,}443.$

б) Вероятность того, что случайная величина примет значения из интервала (α, β) равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах интервала, т.е.

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Имеем,

$P(1 < X < 5) = F(5) - F(1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Ответ: а) $M(X) = 0{,}5$**,** $D(X) = 2{,}083$**,** $\sigma(X) \approx 1{,}443$; **б)** $P(1 < X < 5) = 0{,}4$.

Задача 7.1. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = M(X) = 375\ г$, $\sigma = 25\ г$. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет от 300 до 400г.

Решение:

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервал (α, β) определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

По условию $a = M(X) = 375\ г$, $\sigma = 25\ г$, поэтому

$$P(300 < x < 400) = \Phi\left(\frac{400 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 375}{25}\right) = \Phi(1) - \Phi(-3) = \Phi(1) + \Phi(3)$$

Значения функции Лапласа $\Phi(1) = 0{,}3413$, $\Phi(3) = 0{,}49865$ (приложение А).

Таким образом $P(300 < x < 400) = 0{,}3413 + 0{,}49865 = 0{,}83995$.

Ответ: 0,83995.

Задача 7.2. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 20$. Найти $P(30 < X < 35)$, если $P(5 < X < 10) = 0{,}3$.

Решение:

Воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

По условию $P(5 < X < 10) = 0{,}3$, $a = M(X) = 20$, тогда имеем

$$P(5 < x < 10) = \Phi\left(\frac{10 - 20}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 20}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3,$$

$$P(30 < x < 35) = \Phi\left(\frac{35 - 20}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{30 - 20}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) =$$

$$= P(5 < X < 10) = 0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

Задача 7.3. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону распределения с параметром $\sigma = 10\ мм$.

Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 11 *мм*.

Решение:

Воспользуемся формулой

$$P(|X-\alpha|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Значения функции Лапласа представлены в приложении А.

В данном случае $\delta=11\ мм, \sigma=10\ мм$ поэтому

$$P(|X-a|<11)=2\Phi\left(\frac{11}{10}\right)=2\Phi(1{,}1)=2\cdot 0{,}3643=0{,}7286.$$

Ответ: 0,7286.

2 Варианты контрольных заданий

Вариант 1

Задача 1. В урне 2 белых и 4 черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

Задача 2. В пачке из 10 лотерейных билетов - 2 выигрышных. Какова вероятность того, что среди 5 извлеченных наудачу билетов окажется 2 выигрышных.

Задача 3. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой 5 белых шаров и 3 черных; во второй 4 белых шаров и 2 черных; в третьей только белые шары. Наугад из одной из урн вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Задача 4. Монета бросается 5 раз. Найти вероятность того, что герб появится 4 раза.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ 8x^3, & при \quad 0<x\le \frac{1}{2}, \\ 1, & при \quad x>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(1<X<3)$.

Задача 7. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону, причем $M(X)=25$. Найти $P(35<X<40)$, если $P(10<X<15)=0{,}2$.

Вариант 2

Задача 1. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

Задача 2. В пачке из 20 лотерейных билетов - 4 выигрышных. Какова вероятность того, что среди 5 извлеченных наудачу билетов окажется 3 выигрышных.

Задача 3. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой 7 белых шаров и 5 черных; во второй 4 белых шаров и 5 черных; в третьей только белые шары. Наугад из одной из урн вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Задача 4. Монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб появится более 3 раз.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,3	0,5	0,1	0,07	0,03

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le -4,\\ 0{,}2\cdot(x+4), & при \quad -4<x\le 1,\\ 1, & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(1<X<5)$.

Задача 7. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$, $D(X)=4$. Найти $P(12<X<14)$.

Вариант 3

Задача 1. В урне 7 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – черный.

Задача 2. В пачке из 30 лотерейных билетов - 6 выигрышных. Какова вероятность того, что среди 5 извлеченных наудачу билетов окажется 4 выигрышных.

Задача 3. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой 5 белых шаров и 7 черных; во второй 2 белых шаров и 6 черных; в третьей только белые шары. Наугад из одной из урн вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Задача 4. Монета бросается 4 раза. Найти вероятность того, что герб появится менее 2 раз.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины X. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	4	5	6
p_i	0,18	0,31	0,51

Задача 6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & при \quad -\frac{\pi}{2} < x \le 0, \\ 1, & при \quad x > 0. \end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P\left(-\frac{\pi}{3} < X < 0\right)$.

Задача 7. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$, $D(X)=4$. Найти $P(8 < X < 12)$.

Вариант 4

Задача 1. В урне 6 белых и 2 черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – черный.

Задача 2. В пачке из 30 лотерейных билетов - 15 выигрышных. Какова вероятность того, что среди 14 извлеченных наудачу билетов окажется 8 выигрышных.

Задача 3. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой 9 белых шаров и 5 черных; во второй 4 белых шаров и 7 черных; в третьей только белые шары. Наугад из одной из урн вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Задача 4. Монета бросается 7 раз. Найти вероятность того, что герб появится 3 раза.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

Задача 6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{3}, & \text{при} \quad 0<x\le 3,\\ 1, & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(1<X<5)$.

Задача 7. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=25$. Найти $P(30<X<35)$, если $P(10<X<15)=0{,}2$.

Вариант 5

Задача 1. В урне 5 белых и 4 черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

Задача 2. В пачке из 15 лотерейных билетов - 3 выигрышных. Какова вероятность того, что среди 5 извлеченных наудачу билетов окажется 3 выигрышных.

Задача 3. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой 3 белых шаров и 5 черных; во второй 2 белых шаров и 6 черных; в третьей только белые шары. Наугад из одной из урн вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Задача 4. Монета бросается 3 раза. Найти вероятность того, что герб появится 1 раз.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины X. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,5	0,2

Задача 6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ \sin x, & при \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & при \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(4 < X < 5)$.

Задача 7. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$. Найти $P(0 < X < 10)$, если $P(10 < X < 20) = 0{,}3$.

Вариант 6

Задача 1. Бросают два кубика. Суммируют число очков, выпавших на верхних гранях кубиков. Найти вероятность того, что сумма очков больше 6.

Задача 2. В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Наугад выбирают 7 шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров 3 голубых.

Задача 3. На фабрике изготовляющей болты, первая машина производит 30%, вторая – 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался стандартным.

Задача 4. Прибор состоит из 5 узлов. За время t каждый из узлов прибора выходит из строя, независимо от других, с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что за время t в приборе выйдет из строя 2 узла.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Задача 6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & при \quad 0 < x \le 2, \\ 1, & при \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(4 < X < 7)$.

Задача 7. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = M(X) = 375\ г, \sigma = 25\ г$. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет от 350 до 450г.

Вариант 7

Задача 1. Бросают два кубика. Суммируют число очков, выпавших на верхних гранях кубиков. Найти вероятность того, что сумма очков больше 7.

Задача 2. В ящике 10 шаров, из которых 4 голубых и 6 красных. Наугад выбирают 5 шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров 2 голубых.

Задача 3. На фабрике изготовляющей болты, первая машина производит 20%, вторая – 35%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 3%, 2%, 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался стандартным.

Задача 4. Прибор состоит из 10 узлов. За время t каждый из узлов прибора выходит из строя, независимо от других, с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что за время t в приборе выйдет из строя менее 3 узлов.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,3	0,4	0,24	0,06

Задача 6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 6,\\ x-6, & \text{при } 6<x\le 7,\\ 1, & \text{при } x>7.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(4<X<7)$.

Задача 7. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a=M(X)=275\ г, \sigma=25\ г$. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет от 200 до 300г.

Вариант 8

Задача 1. Бросают два кубика. Суммируют число очков, выпавших на верхних гранях кубиков. Найти вероятность того, что сумма очков больше 8.

Задача 2. В ящике 9 шаров, из которых 3 голубых и 6 красных. Наугад выбирают 4 шара. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров 2 голубых.

Задача 3. На фабрике изготовляющей болты, первая машина производит 15%, вторая – 50%, третья – 35% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 1%, 2%, 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался бракованным.

Задача 4. Прибор состоит из 8 узлов. За время t каждый из узлов прибора выходит из строя, независимо от других, с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что за время t в приборе выйдет из строя 5 узлов.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	6	7	8	9
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Задача 6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{при } x<5,\\ x-5, & \textit{при } 5\le x<6,\\ 1, & \textit{при } x\ge 6.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(4<X<8)$.

Задача 7. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a=M(X)=375\ г, \sigma=25\ г$. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет от 250 до 350г.

Вариант 9

Задача 1. Из колоды карт (36 карт) наугад вынимают одну. Найти вероятность того, что вынута пиковая карта.

Задача 2. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.

Задача 3. Имеется два ящика с деталями. В первом 10 деталей, из которых 8 стандартных. Во втором 15 деталей, из них 12 стандартных. Наугад из одного из ящиков вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что деталь оказалась стандартной.

Задача 4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,7 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 3 попадания в мишень.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(0<X<2)$.

Задача 7. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону распределения с параметром $\sigma = 10$ *мм*. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 *мм*.

Вариант 10

Задача 1. Из колоды карт (36 карт) наугад вынимают одну. Найти вероятность того, что вынута бубновая карта.

Задача 2. Среди 20 студентов группы, в которой 8 девушек, разыгрывается 5 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 3 девушки.

Задача 3. Имеется два ящика с деталями. В первом 12 деталей, из которых 9 стандартных. Во втором 14 деталей, из них 11 стандартных. Наугад из одного из ящиков вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что деталь оказалась стандартной.

Задача 4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,8 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 7 выстрелах произойдет не менее 5 попадания в мишень.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	2	3	4	5
p_i	0,5	0,3	0,15	0,05

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & при\ 0<x\le\pi,\\ 1, & при\ x>\pi.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$; б) $P\left(\frac{\pi}{2}<X<4\right)$.

Задача 7. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону распределения с параметром $\sigma=10\ мм$. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей $10\ мм$.

Вариант 11

Задача 1. Из колоды карт (36 карт) наугад вынимают одну. Найти вероятность того, что вынута дама.

Задача 2. Среди 15 студентов группы, в которой 5 девушек, разыгрывается 4 билета. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.

Задача 3. Имеется два ящика с деталями. В первом 20 деталей, из которых 10 стандартных. Во втором 18 деталей, из них 12 стандартных. Наугад из одного из ящиков вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что деталь оказалась стандартной.

Задача 4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,9 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 6 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	2	3	4
p_i	0,55	0,3	0,15

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, & \text{при } 1<x\le 3,\\ 1, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(1{,}5<X<2{,}5)$.

Задача 7. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону распределения с параметром $\sigma = 10$ *мм*. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 12 *мм*.

Вариант 12

Задача 1. Из колоды карт (36 карт) наугад вынимают одну. Найти вероятность того, что вынут туз.

Задача 2. Среди 30 студентов группы, в которой 15 девушек, разыгрывается 10 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 5 девушек.

Задача 3. Имеется два ящика с деталями. В первом 18 деталей, из которых 9 стандартных. Во втором 16 деталей, из них 4 стандартных. Наугад из одного из ящиков вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что деталь оказалась стандартной.

Задача 4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,85 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет не менее 4 попаданий в мишень.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{\textit{при} } x\le 2,\\ (x-2)^2, & \text{\textit{при} } 2<x\le 3,\\ 1, & \text{\textit{при} } x>3.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(1 < X < 2{,}5)$.

Задача 7. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону распределения с параметром $\sigma = 10$ *мм*. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 13 *мм*.

Вариант 13

Задача 1. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Наугад вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что вынута стандартная деталь.

Задача 2. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины.

Задача 3. Группа студентов состоит из 5 отличников, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена наугад вызывается один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

Задача 4. Кубик бросают 5 раз. Найти вероятность того, что 3 раза выпадет шестерка.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	6	9	12
p_i	0,23	0,07	0,7

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le -1,\\ 0{,}1x+0{,}1, & при\ -1<x\le 9,\\ 1, & при\ x>9.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(0<X<4)$.

Задача 7. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 4, примет значения в интервале $(5, 11)$.

Вариант 14

Задача 1. В партии из 20 деталей 5 стандартных. Наугад вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что вынута стандартная деталь.

Задача 2. В бригаде 5 женщины и 4 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 3 билета в театр. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 1 женщина и 2 мужчины.

Задача 3. Группа студентов состоит из 4 отличников, 12 хорошо успевающих и 5 занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена наугад вызывается один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

Задача 4. Кубик бросают 7 раз. Найти вероятность того, что 4 раза выпадет шестерка.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	2	3	4	5
p_i	0,3	0,08	0,5	0,12

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{3}, & при \quad 0 < x \le 3, \\ 1, & при \quad x > 3. \end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(2 < X < 4)$.

Задача 7. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 4, примет значения в интервале $(-1, 5)$.

Вариант 15

Задача 1. В партии из 18 деталей 6 стандартных. Наугад вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что вынута стандартная деталь.

Задача 2. В бригаде 6 женщины и 4 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 5 билета в театр. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 3 мужчины.

Задача 3. Группа студентов состоит из 3 отличников, 11 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена наугад вызывается один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

Задача 4. Кубик бросают 3 раза. Найти вероятность того, что 2 раза выпадет шестерка.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x \le 0, \\ \dfrac{x}{5} & при\ 0 < x \le 5, \\ 1, & при\ x > 5. \end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(1 < X < 6)$.

Задача 7. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 4, примет значения в интервале $(-3, 9)$.

Вариант 16

Задача 1. В партии из 14 деталей 7 стандартных. Наугад вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что вынута стандартная деталь.

Задача 2. В бригаде 5 женщин и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 3 женщины и 1 мужчина.

Задача 3. Группа студентов состоит из 2 отличников, 13 хорошо успевающих и 5 занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена наугад вызывается один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

Задача 4. Кубик бросают 4 раза. Найти вероятность того, что 3 раза выпадет шестерка.

Задача 5. Дан ряд распределения случайной величины *X*. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Задача 6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ x & при\ 0<x\le 1,\\ 1, & при\ x>1.\end{cases}$$

Найдите: а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; б) $P(5<X<6)$.

Задача 7. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 4, примет значения в интервале $(-2, 8)$.

Список использованных источников

1 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 11-е изд.,стер. – М.: Высш.шк., 2005. – 479 с.:ил. – ISBN 5- 06-004214-6.

2 Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для студ. втузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 448 с. – ISBN 5- 7695-1054-4.

3 Гусак, А.А. Теория вероятностей: справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – 4-е изд., стер. – Минск.: ТетраСистемс, 2003. – 288 с. - ISBN 985-470-138-7.

Приложение А

Таблица А.1 – Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1	2	3	4	5	6
0,00	0,0000	0,90	0,3159	1,80	0,4641
0,01	0040	0,91	3186	1,81	4649
0,02	0080	0,92	3212	1,82	4656
0,03	0120	0,93	3238	1,83	4664
0,04	0160	0,94	3264	1,84	4671
0,05	0199	0,95	3289	1,85	4678
0,06	0239	0,96	3315	1,86	4686
0,07	0279	0,97	3340	1,87	4693
0,08	0319	0,98	3365	1,88	4699
0,09	0359	0,99	3389	1,89	4706
0,10	0,0398	1,00	0,3413	1,90	0,4713
0,11	0438	1,01	3438	1,91	4719
0,12	0478	1,02	3461	1,92	4726
0,13	0517	1,03	3485	1,93	4732
0,14	0557	1,04	3508	1,94	4738
0,15	0596	1,05	3531	1,95	4744
0,16	0636	1,06	3554	1,96	4750
0,17	0675	1,07	3577	1,97	4756
0,18	0714	1,08	3599	1,98	4761
0,19	0753	1,09	3621	1,99	4767
0,20	0,0793	1,10	0,3643	2,00	0,4772
0,21	0832	1,11	3665	2,02	4783
0,22	0871	1,12	3686	2,04	4793
0,23	0910	1,13	3708	2,06	4803
0,24	0948	1,14	3729	2,08	4812
0,25	0987	1,15	3749	2,10	4821
0,26	1026	1,16	3770	2,12	4830
0,27	1064	1,17	3790	2,14	4838
0,28	1103	1,18	3810	2,16	4846
0,29	1141	1,19	3830	2,18	4854
0,30	0,1179	1,20	0,3849	2,20	0,4861
0,31	1217	1,21	3869	2,22	4868
0,32	1255	1,22	3888	2,24	4875
0,33	1293	1,23	3907	2,26	4881
0,34	1331	1,24	3925	2,28	4887
0,35	1368	1,25	3944	2,30	4893
0,36	1406	1,26	3962	2,32	4898
0,37	1443	1,27	3980	2,34	4904
0,38	1480	1,28	3997	2,36	4909
0,39	1517	1,29	4015	2,38	4913
0,40	0,1554	1,30	0,4032	2,40	0,4918
0,41	1591	1,31	4049	2,42	4922
0,42	1628	1,32	4066	2,44	4927

Продолжение таблицы А.1

1	2	3	4	5	6
0,43	1664	1,33	4082	2,46	4931
0,44	1700	1,34	4099	2,48	4934
0,45	1736	1,35	4115	2,50	4938
0,46	1772	1,36	4131	2,52	4941
0,47	1808	1,37	4147	2,54	4945
0,48	1844	1,38	4162	2,56	4948
0,49	1879	1,39	4177	2,58	4951
0,50	0,1915	1,40	0,4192	2,60	0,4953
0,51	1950	1,41	4207	2,62	4956
0,52	1985	1,42	4222	2,64	4959
0,53	2019	1,43	4236	2,66	4961
0,54	2054	1,44	4251	2,68	4963
0,55	2088	1,45	4265	2,70	4965
0,56	2123	1,46	4279	2,72	4967
0,57	2157	1,47	4292	2,74	4969
0,58	2190	1,48	4306	2,76	4971
0,59	2224	1,49	4319	2,78	4973
0,60	0,2257	1,50	0,4331	2,80	0,4974
0,61	2291	1,51	4345	2,82	4976
0,62	2324	1,52	4357	2,84	4977
0,63	2357	1,53	4370	2,86	4979
0,64	2389	1,54	4382	2,88	4980
0,65	2422	1,55	4394	2,90	4981
0,66	2454	1,56	4406	2,92	4982
0,67	2486	1,57	4418	2,94	4984
0,68	2517	1,58	4429	2,96	4985
0,69	2549	1,59	4441	2,98	4986
0,70	0,2580	1,60	0,4452	3,00	0,49865
0,71	2611	1,61	4463	3,10	49903
0,72	2642	1,62	4474	3,20	49931
0,73	2673	1,63	4484	3,30	49952
0,74	2703	1,64	4495	3,40	49966
0,75	2734	1,65	4505	3,50	49977
0,76	2764	1,66	4515	3,60	49984
0,77	2794	1,67	4525	3,70	49989
0,78	2823	1,68	4535	3,80	49993
0,79	2852	1,69	4545	3,90	49995
0,80	0,2881	1,70	0,4554	4,00	499968
0,81	2910	1,71	4564	4,50	499997
0,82	2939	1,72	4573	5,00	49999997
0,83	2967	1,73	4582		
0,84	2995	1,74	4591		
0,85	3023	1,75	4599		
0,86	3051	1,76	4608		
0,87	3078	1,77	4616		
0,88	3106	1,78	4625		
0,89	3133	1,79	4633		