УДК 624.32

Колоколов С.Б.
Оренбургский государственный университет
E-mail: klklsb@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ АРОЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ КАК СПОСОБ ОЦЕНКИ ЕЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Численным методом рассмотрен процесс деформирования трехшарнирной металлической арки, нагруженной радиальной равномерно распределенной сжимающей нагрузкой, с учетом изменения внутренних усилий в процессе деформирования. Показано, что при поэтапном определении перемещений процесс при некоторой величине нагрузок становится расходящимся, что может служить оценкой устойчивости конструкции.

Ключевые слова: конструкция, арка, деформирование, устойчивость.

Идея оценки устойчивости арочной конструкции родилась из рассмотрения процесса деформирования стержня, имеющего небольшое отклонение от прямолинейности (погибь). При сжатии стержня сосредоточенной силой, линия действия которой проходит через концы стержня, в стержне кроме продольной силы возникает изгибающий момент, величина которого определяется величиной отклонения от прямолинейности. Несмотря на малую величину этого момента, он вызывает дополнительное перемещение стержня в поперечном направлении. Учет этого дополнительного перемещения вызывает, в свою очередь, рост изгибающего момента. Последовательное введение поправок к величине перемещения и величине внутренних усилий в процессе деформирования приводит к следующей формуле для определения значения отклонения от прямолинейности:

$$f = f_0 \cdot \sum_{k=1}^{n} F^k, \tag{1}$$

где f – величина отклонения на n этапе уточнения,

f_0 – начальная величина отклонения,

F – комбинация из геометрических, физических и силовых факторов.

Если стержень шарнирно закреплен по концам и отклонение от прямолинейности описывается полуволной синусоиды, то величина F описывается формулой:

$$F = \frac{P \cdot L^2}{\pi^2 \cdot E \cdot J}, \tag{2}$$

где P – сжимающая стержень сила,

L – расстояние между концами стержня,

E – модуль упругости материала стержня,

J – момент инерции сечения стержня.

Понятно, что процесс уточнения сходится при значении $F < 1$. Значению $F = 1$ соответствует величина силы

$$P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L^2}, \tag{3}$$

известная под названием критическая.

Заметим, что при $F = 1$ перемещение становится неограниченно большим независимо от величины начального отклонения от прямолинейности, в том числе и бесконечно малого. В действительности идеально прямолинейного стержня не существует; невозможно также приложить нагрузку строго по оси стержня. Поэтому потеря устойчивости прямолинейного стержня – это появление достаточно больших отклонений от прямолинейности, при которых либо нарушаются эксплуатационные функции стержня, либо появляются значительные пластические деформации.

Таким образом, последовательно, шаг за шагом, уточняя величину отклонения от прямолинейности, можно сделать вывод о работоспособности стержня, не решая задачи о нахождении величины критической силы [1]. Естественно, что определение критической силы путем решения дифференциального уравнения изогнутой оси приводит к результату значительно быстрее. Но применение современных вычислительных средств лишает аналитическое решение этого преимущества. В тех же случаях, когда получить аналитическое решение трудно, а иногда и невозможно, только исследование процесса деформирования позволяет оценить работоспособность конструкции. Представляется, что такой подход рационален и при расчете арочных систем.

Таблица 1. Результаты уточнения перемещений при нагрузке 40 кН/м

Параметры	Без уточнения	Номера этапов уточнения					
		1	2	3	5	10	20
M_1, кНм	0,1818	0,0662	0,0327	0,0013	-0,0056	-0,0149	-0,0153
N_1.кН	-120,1	-120,1	-120,1	-120,1	-120,1	-120,1	-120,1
f_1,мм	1,37	1,34	1,32	1,31	1,30	1,30	1,30
f_2,мм	3,10	3,40	3,58	3,69	3,75	3,83	3,84
σ_1 ,МПа	-110,7	-109,9	-109,5	-109,2	-109,3	-109,5	-109,5

Рассмотрим в качестве примера трехшарнирную круговую полуциркульную арку, нагруженную равномерно распределенной радиальной нагрузкой. Такой характер нагружения приводит к равномерному сжатию стержня при отсутствии изгибающих моментов и порождает опасность потери устойчивости. Выбор примера связан с наличием аналитического решения этой задачи в виде величины критического значения интенсивности нагрузки [2]

$$p_{кр} = \frac{3 \cdot E \cdot J}{R^3}, \tag{4}$$

где R – величина радиуса оси арки.

Выполним численное моделирование процесса деформирования арки при следующих условиях: радиус арки 3м; арка изготовлена из двутавра 12Б1 с площадью сечения 11,03 см^2, моментом инерции 257 см^4. Для этих условий теоретическое критическое значение интенсивности нагрузки равно 58,8 кН/м.

Ось арки представим в виде правильного 49-угольника, вершины которого (узлы) находятся на контуре, очерченном радиусом 3 м. Отклонение середины каждого участка от этого контура составляет 2 мм. Таким образом модель имеет по сравнению с идеальной аркой вполне допустимое в реальности отклонение. Наличие такого отклонения вызывает при расчете арки по недеформированной схеме небольшие изгибающие моменты (эксцентриситеты составляют величину, не превышающую 3 мм).

Методика моделирования процесса деформирования следующая. Вначале определяются перемещения узлов арки с использованием правила Симпсона вычисления интегралов Мора. Для этого вычислялись изгибающие моменты от нагрузки в 99 сечениях и продольные силы на 49 участках арки. На каждом этапе уточнения перемещений определялись новые координаты узлов арки

$$x_{ik} = x_{i0} + f_{xi}, \tag{5}$$

$$y_{ik} = y_{i0} + f_{yi}, \tag{6}$$

где x_{ik} и y_{ik} – координаты узла i после k-того уточнения,

x_{i0} и y_{i0} – координаты узла i в начале деформирования,

f_{xi} и f_{yi} – горизонтальное и вертикальное перемещения, найденные на k-том уточнении.

Численное моделирование выполнялось по специально составленной программе для нагрузок от 40 до 80 кН/м. Проследим вначале за процессом деформирования арки при нагрузке 40 кН/м. В качестве контрольных сечений примем сечение №1 в узле с координатами x=0,716 м и y=1,945 м, находящееся примерно на середине левой полуарки, и сечение №2 – в узле, ближайшем к ключевому шарниру (шарнир находится в середине ключевого участка арки). В таблице 1 приведены результаты первых десяти уточнений перемещений для этих сечений. Здесь M_1 – значение изгибающего момента в расчетном сечении №1, N_1 – значение продольной силы в этом же сечении, f_1 – вертикальное перемещение этого сечения, f_2 – вертикальное перемещение сечения №2, σ_1 – наибольшее нормальное напряжение в сечении №1. Перемещение вниз – со знаком плюс.

Как видно из рассмотрения таблицы, изгибающие моменты в арке ничтожно малы. Этого следовало ожидать, так как появление отличных от нуля изгибающих моментов связано с наличием небольших по длине прямолинейных участков. Изучаемую модель можно считать соответствующей реальной арке, имеющей малые отклонения от теоретической оси. Учет деформации арки ведет к изменению моментов, которые, оставаясь малыми, постепенно меняют знак: более нагруженными становятся не наружные волокна, а внутренние. Процесс изменения моментов – затухающий. Продольные силы в течение всего процесса деформирования остаются практически неизменными (изменения происходят в пятой значащей цифре их числовой величины). Наибольшая величина вертикальных перемещений – в ключевом сечении. На каждом этапе уточнения перемещения возрастают, что можно объяснить изменением изгибающих моментов. Так же как изменение изгибающих моментов, изменение перемещений постепенно затухает. Можно считать, что примерно к 20-му уточнению деформированная ось арки является окончательно установленной. Стабилизируются и напряжения в арке. В целом по полученным при данном нагружении результатам видно, что деформационный расчет не дает видимого уточнения, а расчет по недеформированной схеме приносит достаточно точные результаты.

По мере увеличения интенсивности нагружения арки картина начинает меняться. Очевидно, что при возрастании нагрузки возрастают и величины внутренних усилий, и перемещения. Причем при расчете по недеформированной схеме это возрастание пропорционально величине нагрузки. Поэтому для сопоставимости результатов, полученных для разных интенсивностей нагружения, все они приводятся к соответствующим результатам нагружения с интенсивностью 40 кН/м по недеформированной схеме. В таблице 2 приводятся относительные величины вертикальных перемещений ключевого сечения на различных этапах уточнения при разных уровнях нагружения (здесь f_{pk} – перемещение при нагрузке p кН/м на этапе уточнения k, $f_{40,0}$ – перемещение без уточнения при нагрузке p =40 кН/м).

Анализ результатов, приведенных в таблице, позволяет сделать вывод о том, что сходимость процесса уточнения уменьшается с увеличением нагрузки на арку. Начиная с интенсивности 60 кН/м сходимость становится слабой, а при нагрузке 80 кН/м процесс стремительно расходится. Характерно, что нагрузка 60 кН/м близка к критической, полученной для идеальной полуциркульной арки.

Приведем еще для иллюстрации значения относительной величины напряжений в расчетном сечении №1, полученные на десятом этапе уточнения деформированной схемы (таблица 3). Здесь σ_0 обозначена величина наибольшего в сечении нормального напряжения при расчете по недеформированной схеме, а σ_{10} – та же величина на десятом этапе уточнения. Как видно, при малых нагрузках изменение напряжений

Таблица 2. Значения $\dfrac{f_{pk}}{f_{40,0}} \cdot \dfrac{40}{p}$

p, кН/м	Без уточнения	Значения $\dfrac{f_{pk}}{f_{40,0}} \cdot \dfrac{40}{p}$ на этапах уточнения								
		1	2	3	4	5	6	7	20	30
40	1	1,10	1,15	1,19	1,21	1,22	1,23	1,23	1,24	1,24
50	1	1,12	1,21	1,28	1,33	1,36	1,39	1,41	1,46	1,46
55	1	1,12	1,23	1,32	1,39	1,45	1,49	1,53	1,68	1,69
60	1	1,15	1,28	1,40	1,50	1,59	1,67	1,74	2,15	2,22
65	1	1,17	1,32	1,47	1,61	1,74	1,87	2,00	3,11	3,69
70	1	1,17	1,34	1,53	1,72	1,91	2,11	2,31	5,35	9,14
80	1	1,20	1,43	1,70	20,2	2,40	2,84	3,37	27,44	1175,0

Таблица 3. Относительная величина напряжений в расчетном сечении №1 на десятом этапе уточнения

p, кН/м	40	50	55	60	65	70	80
σ_{10}/σ_0	0,99	1,02	1,04	1,08	1,12	1,24	1,66

Таблица 4. Горизонтальные перемещения сечения №1 при нагрузке 80 кН/м

Число уточнений	Без уточнения	1	3	5	10	15	18	20
f_{x1}	1,44	0,99	0,43	-1,99	-9,95	-28,89	-52,44	-78,64

находится в пределах допустимой погрешности расчетов, а при больших выходит далеко за эти пределы.

Интерес представляет также наблюдение за процессом деформирования оси арки при больших нагрузках. Расчетное сечение №1, переместившееся при расчете по недеформированной схеме внутрь арки, при уточнении начинает двигаться наружу (таблица 4) с возрастающей интенсивностью: налицо выпучивание арки в бока, т. е. реализуется одна из форм потери устойчивости арки.

Подводя итог проведенному анализу процесса деформирования трехшарнирной арки, можно утверждать, что деформационный расчет позволяет не только уточнить напряженно-деформированное состояние арки, но и оценить ее устойчивость без традиционного определения величины критической нагрузки. Представляется, что такое исследование необходимо осуществлять во всех случаях, которые невозможно свести к стандартным схемам определения критических нагрузок.

19.12.2009 г.

Список использованной литературы:

1. Колоколов С.Б. К вопросу об оценке работоспособности сжато-изогнутых стержней / С.Б. Колоколов, В.С. Соколов / / Вестник ОГУ, 2006. - №6. С. 181-184.
2. Безухов Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. - М.: Стройиздат, 1969. – 424 с.

Колоколов Сергей Борисович, профессор кафедры строительных конструкций архитектурно-строительного факультета Оренбургского государственного университета, доктор технических наук, профессор

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 3126, E-mail – klklsb@yandex.ru

Kolokolov S.B.

STUDY OF DEFORMATION OF ARCH STRUCTURE AS A METHOD FOR EVALUATION OF ITS STABILITY

The paper calculates the process of deformation of the three-hinged metallic arch being under radial uniformly distributed pressing load with consideration of the changes in internal forces in the deformation process. It is shown that in the phased determination of the movements, the process becomes divergent as the load increases, which can be used for evaluation of structure stability.

Key words: structure, arch, deforming, stability.

Bibliography:

1. Kolokolov S.B. About evaluation of capacity of compressed curved pivots / S.B.Kolokolov, V.S.Sokolov // Vestnik OGU, 2006. – No 6, p. 181-184
2. Bezuhov N.I. Stability and dynamics of constructions in samples and cases. / N.I.Bezuhov, O.V.Luzhin, N.V.Kolkunov. – M.: Strojizdat, 1969. – 424s.