МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

О.В. ОСТРАЯ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет" в качестве учебного пособия для студентов всех специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования.

Оренбург 2008

УДК 517.73 (075.8)
ББК 22.161.5 я73
О 76

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент И.К. Зубова

Острая О.В.

О76 Теория функций комплексного переменного: учебное пособие/ О.В. Острая, – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008 – 112 с

ISBN

В пособии излагается теория функций комплексного переменного. Вводятся основные понятия этой теории: дается определение функций комплексного переменного, определяются операции дифференцирования и интегрирования функции комплексного переменного, вводятся определения конформного отображения и вычетов. Предлагаются контрольные задания и решения «нулевого варианта».

Учебное пособие предназначено для преподавателей и студентов всех специальностей, изучающих теорию функции комплексного переменного.

$О\frac{1602070000}{}$

ББК 22.161.5 я73

ISBN

Содержание

Предисловие

Данное пособие предназначено для обучения студентов вузов по разделу курса высшей математики «Теория функций комплексного переменного».

В пособии рассматриваются следующие вопросы: комплексные числа, их геометрическое изображение, действия над ними в алгебраической и тригонометрической форме, геометрическое истолкование этих действий; основные элементарные функции комплексной переменной, дифференцирование и интегрирование в комплексной области, функциональные ряды с комплексной переменной, особые точки, вычеты, применение вычетов к вычислению интегралов от функции комплексного и действительного переменного.

Пособие имеет следующую структуру. В начале каждого параграфа приводятся теоретические сведения: определения основных понятий, формулировка теорем, соответствующие формулы. Далее следуют примеры решения типовых задач. Затем предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Пособие содержит краткий очерк истории возникновения и развития теории функций комплексной переменной, взятый из учебного пособия: Гусак А.А. «Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление». Оно включает биографический словарь, в котором приведены краткие сведения о жизни и деятельности ученых, названных в пособии, чьи научные исследования были посвящены теории функций комплексной переменной.

Основные обозначения

$A \in a$	– элемент a принадлежит множеству A
$A \notin a$	– элемент a не принадлежит множеству A
$A \subset B$	– множество A включено в множество B
$A = \{a, b, c\}$	– множество A состоит из элементов a, b, c
$A = \{x: \quad \ldots\}$	– множество A состоит из x, обладающих свойством, указанным после двоеточия
$\varnothing$	– пустое множество
$A \Rightarrow B$	– из высказывания A следует B
$A \Leftrightarrow B$	– высказывания A и B равносильны
$\boldsymbol{N}$	– множество натуральных чисел
$\boldsymbol{Z}$	– множество целых чисел
$\boldsymbol{Q}$	– множество рациональных чисел
$\boldsymbol{R}$	– множество действительных чисел
$\boldsymbol{C}$	– множество комплексных чисел
$[a; b]$	– отрезок с концами в точках a и b
$(a; b)$	– интервал с концами в точках a и b
$[a; b)$, $(a; b]$	– полуинтервалы с концами в точках a и b
∞	– бесконечно удаленная точка расширенной комплексной плоскости
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$	– сумма n слагаемых, $a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$
$n!$	– произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно
$M(x; y)$	– точка M плоскости с координатами x (абсцисса) и y (ордината)
$(x; y)$	– упорядоченная пара действительных чисел x и y
i	– мнимая единица
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	– действительная и мнимая части комплексного числа
$\bar{z}$	– число, сопряженное числу z
$\lvert z \rvert$	– модуль комплексного числа z
(z)	– комплексная плоскость

$\arg z$	– аргумент комплексного числа z
∂D	– граница области D
$\overline{D}$	– замыкание области D
$w = f(z)$	– функция комплексного переменного $z = x + iy$
$u(x;\, y)$, $v(x;\, y)$	– действительная и мнимая части функции $w = f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$	– предел функции $f(z)$ при $z \to z_0$
$f'(z) = \dfrac{df(z)}{dz}$	– производная функции $f(z)$ комплексного переменного z
$\dfrac{\partial u}{\partial x}$	– частная производная функции $u(x;\, y)$ по переменному x
$\int\limits_a^b f(x)\, dx$	– определенный интеграл от функции $f(x)$ действительного переменного
$\int\limits_{г} f(z)\, dz$	– интеграл от функции $f(z)$ комплексного переменного z по ориентированной кривой г
$\oint\limits_L f(z)\, dz$	– интеграл от функции $f(z)$ комплексного переменного z по замкнутому контуру L
$res\ f(a)$	– вычет функции $f(z)$ комплексного переменного z в точке a

Введение

Известно, что не на любом числовом множестве выполнима любая алгебраическая операция. Так, на множестве $\boldsymbol{Z}$ (целые числа) не всегда выполнима операция деления (например, $-\frac{3}{2}\notin \boldsymbol{Z}$). Но множество $\boldsymbol{Z}$ является частью множества $\boldsymbol{Q}$ – множества рациональных чисел, т.е. $\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$, и на множестве $\boldsymbol{Q}$ операция деления выполнима. Однако на нем не всегда выполнима операция извлечения корня, например, на множестве $\boldsymbol{Q}$ не имеет решения уравнение $x^2-2=0$. Множество $\boldsymbol{Q}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{R}$ – множества действительных чисел. Но на множестве $\boldsymbol{R}$ операция извлечения корня также не всегда выполнима, например, не имеют решений уравнения $x^2+2=0$ и $x^2+1=0$. ***Множество комплексных чисел*** вводится как расширение множества $\boldsymbol{R}$ таким образом, чтобы на нем эта операция была выполнима, т.е. чтобы было определено число, квадрат которого равен -1, и, следовательно, существовало решение простого уравнения $x^2+1=0$.

С другой стороны, множество комплексных чисел можно ввести из геометрических соображений. А именно, действительные числа интерпретируются точками числовой прямой: каждому числу $x\in\boldsymbol{R}$ соответствует точка на оси, а каждой точке – действительное число. Если рассмотреть эту задачу на плоскости xOy, то точке M, принадлежащей оси Ox, соответствует пара $(x;0)$. В общем случае любой точке плоскости соответствует пара $(x;y)$ действительных чисел, а множество таких пар можно рассматривать как расширение множества пар $(x;0)$. Если в таком множестве ввести алгебраические действия, так чтобы в частном случае, т.е. для $(x;0)$, они совпадали с операциями в $\boldsymbol{R}$, а в общем случае позволяли выполнить операцию извлечения корня (в том числе извлечения корня четной степени из отрицательного числа), то множество – искомое.

Итак, рассмотрим множество упорядоченных пар $(x;y)$ действительных чисел. Элемент множества обозначим $z=(x;y)$. Пары, образующие множество, – упорядоченные, т.е., например, пара $(2;1)$ не совпадает с парой $(1;2)$.

Два элемента назовем *равными,* если у них равны соответствующие компоненты, т.е. для $z_1=(x_1;y_1)$ и $z_2=(x_2;y_2)$ равенство $z_1=z_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Суммой элементов $z_1=(x_1;y_1)$ и $z_2=(x_2;y_2)$ назовем элемент $z=(x;y)$ такой, что $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$, а операцию сложения обозначим $z=z_1+z_2$.

Произведением элементов $z_1=(x_1;y_1)$ и $z_2=(x_2;y_2)$ назовем элемент $z=(x;y)$ такой, что $x=x_1x_2-y_1y_2$, $y=x_1y_2+y_1x_2$, а операцию умножения обозначим $z=z_1z_2$.

Можно убедиться, что введенные таким образом операции сложения и умножения удовлетворяют свойствам этих операций, известным на множестве $\boldsymbol{R}$. Например, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$ – переместительные законы сложения и умножения и др. Поэтому можно считать, что знаки, принятые в обозначениях суммы и произведения, – обычные знаки сложения и умножения.

Рассмотрим произведение $z_1 = (0;1)$ на $z_2 = (0;1)$. Результатом умножения будет число $z = (x; y)$, где $x = -1$, $y = 0$, т.е. $z = (-1;0)$ или $(0;1)\cdot(0;1) = -1$. Следовательно, элемент (0,1) построенного множества есть тот элемент, квадрат которого равен -1. Этот элемент обозначается буквой i, т.е. $i = (0;1)$ и $i^2 = -1$.

Таким образом, решены обе поставленные задачи:

- множество $\boldsymbol{R}$ является подмножеством построенного;
- в построенном множестве есть элемент, квадрат которого равен -1.

Это множество называется ***множеством комплексных чисел,*** и обозначается $\boldsymbol{C}$. Элементы z множества называются ***комплексными числами***: $z \in \boldsymbol{C}$.

Для удобства выполнения операций вводится алгебраическая форма записи комплексного числа следующим образом. В результате умножения чисел $i = (0;1)$ и $y = (0; y)$ получаем $i \cdot y = (0; y)$, а сумма чисел $x = (x;0)$ и $i \cdot y = (0; y)$ дает $x + iy = (x; y)$. Поэтому любое комплексное число можно записать в виде $z = x + iy$.

На множестве $\boldsymbol{C}$ вводятся понятия функции и ее предела таким образом, что соответствующие понятия действительного анализа рассматриваются как частный случай. Естественно, при этом сохраняются известные свойства функций действительного переменного: теоремы о пределах, правила дифференцирования, формулы интегрирования и т.д. Однако, благодаря расширению класса функций, частным случаем которых являются функции действительного переменного, появляются новые свойства. Например, доказывается, что из существования производной функции следует существование ее производных n-го порядка в области. Устанавливается, что все элементарные функции связаны между собой: тригонометрические функции выражаются через показательную функцию, а обратные тригонометрические – через логарифмическую. Значительно глубже, чем в анализе функций действительного переменного, развита геометрическая теория – конформные отображения. Благодаря сочетанию аналитических и геометрических методов теория функций комплексного переменного находит широкое применение в других разделах математики и прикладных задачах.

1 Комплексные числа. Алгебраические операции над комплексными числами

1.1 Определение комплексного числа. Формы записи комплексных чисел

Определение. **Комплексным числом** z называется пара действительных чисел $(x; y)$, записанных в определенном порядке: $z = (x; y)$. Одним из его обозначений служит запись вида

$$z = x + iy, \tag{1}$$

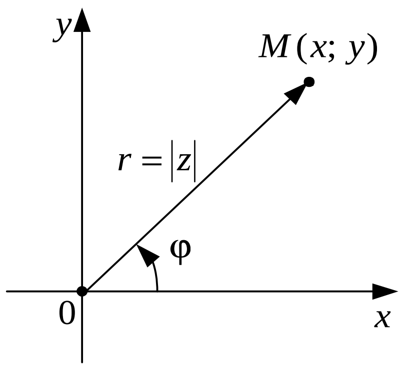


Рисунок 1

называемая **алгебраической формой записи комплексного числа** z. В записи (1) x называется действительной, y - мнимой частями комплексного числа z (употребляется также обозначения $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$); i называется "мнимой единицей".

Для геометрического изображения комплексного числа z вводят на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy; ось Ox называется действительной осью, Oy – мнимой, плоскость Oxy – комплексной плоскостью (z). Комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку $M(x; y)$ плоскости (z), либо вектор $\overline{OM}$ – и точка и вектор служат геометрическим изображением комплексного числа $z = z(x; y)$, $z = \overline{OM}$ (см. рисунок 1). Модуль вектора $\overline{OM}$ называется модулем комплексного числа z; он определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{2}$$

Угол φ между действительной осью Ox и вектором $\overline{OM}$ называется аргументом комплексного числа z: $\varphi = Arg\, z$. Значение φ, заключенное в промежутке $-\pi \le \varphi \le \pi$, называется главным значением аргумента и обозначается: $\arg z$.

$$-\pi \le \arg z \le \pi \qquad (3)$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n, \ (n = 0; \pm 1; \pm 2, ...) \ . \qquad (3')$$

Главное значение аргумента комплексного числа z можно определить по формуле:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, \textit{если} \quad x > 0; \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, \textit{если} \quad x < 0, \quad y \ge 0; \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, \quad \textit{если} \quad x < 0, \quad y < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Определение. Запись вида

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) \qquad (5)$$

называется – **тригонометрической формой** записи комплексного числа z.

Замечание. Комплексное число z записывается также в показательной форме

$$z = |z| e^{i(\arg z + 2\pi n)}. \qquad (5')$$

Для сравнения комплексных чисел z_1 и z_2 вводится лишь операция равенства: комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны $(z_1 = z_2)$ если равны соответственно их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Равенство чисел, записанных в тригонометрической форме, формулируется следующим образом: $z_1 = z_2$, если модули их равны: $|z_1| = |z_2|$, а аргументы связаны соотношением

$$\arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi n \qquad (6)$$

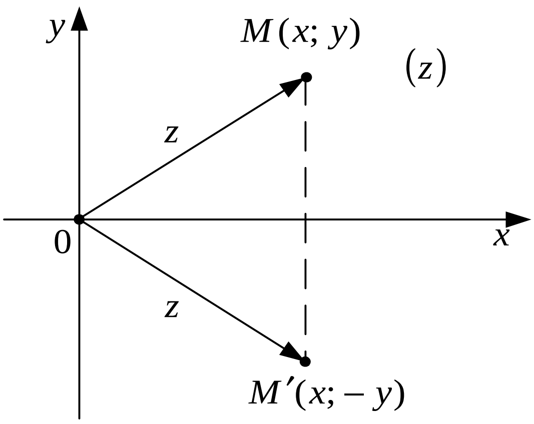


Рисунок 2

(следует обратить внимание на то, что здесь сравниваются не элементы множества, а сами бесконечные множества).

Определение. Два комплексных числа $x+iy$ и $x-iy$ называются **комплексно-сопряженными** числами. Для этого употребляют обозначение z и $\bar{z}$ (см. рисунок 2).

1.2 Действия над комплексными числами

Действия сложения и вычитания над комплексными числами определяются геометрически, т.е. как соответствующие действия над векторами (см. рисунок 3) и, следовательно, выполняются по формулам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{7}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{8}$$

– чтобы, например, сложить два комплексных числа, нужно сложить отдельно действительные и мнимые части. Получившиеся суммы будут соответственно действительной и мнимой частями суммы чисел.

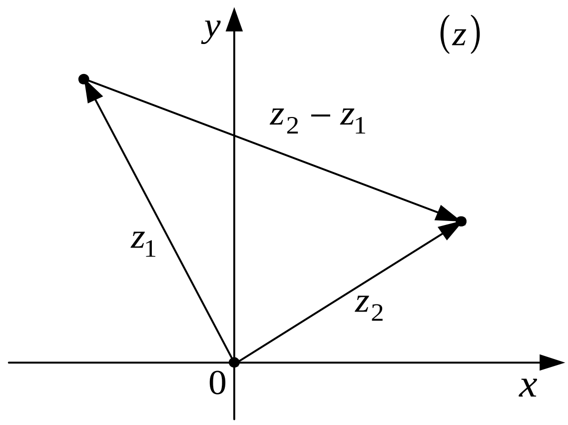


Рисунок 3

Из формул (7) и (8) находим

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}; \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{9}$$

Под произведением комплексных чисел z_1 и z_2 (обозначается $z_1 \cdot z_2$) понимается комплексное число z, равное

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{10}$$

Деление комплексных чисел z_1 и z_2 определяется через действие умножения и может быть проведено по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{11}$$

Так как по формуле (10) $z\overline{z_1} = |z|^2$, то деление удобно выполнять по следующей формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|\,z_2\,|^2} \tag{11$'$}$$

Введенные таким образом операции сложения и умножения комплексных чисел подчиняются известным пяти законам арифметики:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – коммунитативность сложения;

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ – ассоциативность сложения;

3) $z_1z_2 = z_2z_1$ – коммунитативность умножения;

4) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ – ассоциативность умножения;

5) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

Формула (10) "раскрывает смысл" "мнимой единицы" $i : i^2 = -1$. Таким образом, умножение комплексных чисел производится по обычным правилам алгебры с заменой i^2 на -1.

Приведем решение "типовых примеров" на введенные выше понятия.

Пример 1. Показать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

По определению суммы и ее свойств имеем:

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

$\overline{(z_1 + z_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_2) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Пример 2. Найти действительные решения уравнения $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$.

Запишем левую часть уравнения в алгебраической форме: $(4x + 2xi) + (5y - 3yi) = 13 + i$. По определению равенства комплексных чисел получим систему уравнений $4x + 5y = 13$, $2x - 3y = 1$, решением которой является пара чисел $x = 2$, $y = 1$.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (3 + 4i)z_1 + 2i \cdot z_2 = 3 - i; \\ (6 - 4i)z_1 + 3z_2 = 10 - 7i. \end{cases}$$

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 3+4i & 2i \\ 6-4i & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера. Имеем

$$\Delta_{z_1} = \begin{vmatrix} 3-i & 2i \\ 10-7i & 3 \end{vmatrix} = -5-23i; \ \Delta_{z_2} = \begin{vmatrix} 3+4i & 3-i \\ 6-4i & 10-7i \end{vmatrix} = 44+37i;$$

и, следовательно, $z_1 = \dfrac{\Delta_{z_1}}{\Delta} = -5-23i; z_2 = \dfrac{\Delta_{z_2}}{\Delta} = 44+37i.$

Пример 4. Для числа $z = -\sin\dfrac{\pi}{8} - i\cos\dfrac{\pi}{8}$:

а) построить геометрическое изображение;

б) найти модуль и главное значение аргумента;

в) записать число в тригонометрической форме;

г) записать число в показательной форме.

Число представлено, очевидно, в алгебраической форме (не имеет вида (5)): $x = -\sin\dfrac{\pi}{8}; y = -\cos\dfrac{\pi}{8}.$

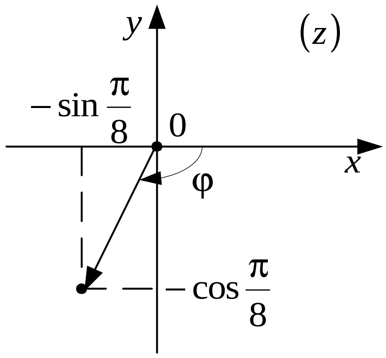


Рисунок 4

На рисунке 4 число представлено геометрически. Найдем модуль комплексного числа z. По формуле (2) имеем $|z| = \sqrt{\sin^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{\pi}{8}} = 1.$

Так как точка z расположена в третьем квадранте $(x < 0, y < 0)$, главное значение аргумента числа z следует вычислить по третьей строчке формулы (4):

$$\arg z = -p + arctg\left(ctg\,\frac{p}{8}\right) = -p + arctg\left[tg\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{8}\right)\right] =$$

$$= -p + arctg\left(tg\,\frac{3p}{8}\right) = -p + \frac{3p}{8} = -\frac{5p}{8}.$$

Таким образом, $\arg z = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi n \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Запишем z в тригонометрической форме: $z = \cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$ и показательной форме: $z = e^{-\frac{5\pi}{8}i}$.

1.3 Возведение комплексного числа в целую степень и извлечение корня из комплексных чисел

Произведение комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, находится по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (12)$$

– при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Деление выполняется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (13)$$

Возведение комплексного числа в натуральную степень n производится по формуле

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (14)$$

Следствием формулы (14) является формула Муавра (1667-1754)

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \quad (15)$$

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа z производится по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \quad (16)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ – корень n- ой степени из комплексного числа z имеет (только) n различных значений. Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат. Для геометрического определения корней (16) следует найти по данной формуле одно значение корня, поставить соответствующую точку на окружности, разбить затем окружность на n равных частей – таким образом могут быть построены остальные вершины n-угольника.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{59}$; решение записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Представим число $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

По формуле(4) находим:

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{59}=2^{59}\left(\cos\frac{59\cdot 2\pi}{3}+i\sin\frac{59\cdot 2\pi}{3}\right)=2^{59}\left[\cos\frac{(60-1)\cdot 2\pi}{3}+i\sin\frac{(60-1)\cdot 2\pi}{3}\right]=$$

$$=2^{59}\left[\cos\left(40\pi-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(40\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=2^{59}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Так как здесь $-\pi<-\frac{2\pi}{3}<\pi$, то последняя запись представляет исходное число в тригонометрической форме. В алгебраической форме записи число имеет вид: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{59}=2^{59}\left(1-i\sqrt{3}\right)$ и в показательной: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{59}=2^{59}e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

Пример 2. Вычислить $\sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}$.

Представим число $-\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме: $-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

По формуле (16) находим:

$$z=\sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$$

Полагая последовательно k равным 0, 1, 2 и 3, находим корни:

$$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right);\qquad z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{24}+i\sin\frac{17\pi}{24}\right);$$

$$z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{24}+i\sin\frac{29\pi}{24}\right);\ z_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24}+i\sin\frac{41\pi}{24}\right).$$

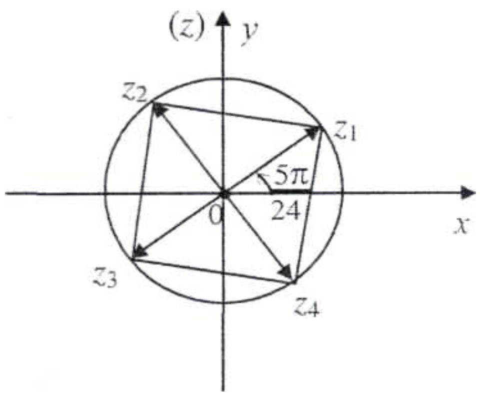


Рисунок 5

Для построения этих чисел на комплексной плоскости (z) проведем окружность радиуса $R=\sqrt[4]{2}$. На окружности отметим точку $z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$. Разбивая далее окружность на четыре равные части, изобразим остальные точки (рисунок 5; заметим, что $\frac{5\pi}{24}$ радиан соответствует угол равный 37°30').

Пример 3. Решить уравнение $z^2-(2+i)z+7i-1=0$.

Имеем $z=\frac{2+i}{2}+\sqrt{\frac{4-1+4i+4-28i}{4}}=\frac{2+i}{2}+\frac{\sqrt{7-24i}}{2}$.

Значение $\sqrt{7-24i}$ определим алгебраическим путем. Положим: $\sqrt{7-24i}=x+iy$ (x и y – действительные числа). Возводя в квадрат и используя определение равенства комплексных чисел, находим систему уравнений: $7+24i=x^2-y^2+2xyi$, $x^2-y^2=7$, $xy=-12$. Исключая y, приходим к уравнению $x^2-\frac{144}{x^2}-7=0$, или $x^4-7x^2-144=0$. Определим корни уравнения:

$$x^2=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49+576}{4}}=\frac{7+\sqrt{625}}{2}=16.$$

Знак минус перед корнем следует отбросить, так как x – действительное число. Далее находим: $x_1=4, x_2=-4$ и $y_1=3, y_2=-3$.

Запишем найденные решения: $\sqrt{7-4i}=4-3i$ и $\sqrt{7-4i}=4+3i$ и, окончательно,

$$z_1=\frac{2+i}{2}+\frac{4-3i}{2}=\frac{6-2i}{3}=3-i;\ z_2=\frac{2+i}{2}+\frac{-4+3i}{2}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i\cdot$$

Замечание. Решение квадратных уравнений (иногда) можно найти с помощью теоремы Виета. Пусть требуется решить уравнение $z^2-(1+i)z+i=0$. Если взять $z_1=1$ и $z_2=i$, то получим, что $z_1z_2=i$, $z_1+z_2=1+i$. На основании теоремы Виета устанавливаем, что 1 и i – корни исходного уравнения.

1.4 Множества точек на комплексной плоскости. Задание геометрических мест

Приведем некоторые примеры использования геометрического смысла модуля комплексного числа, его аргумента, введенных алгебраических операций.

Пример 1. Какое множество точек на плоскости (z) определяется условием $\operatorname{Im} z^2 > 2$?

Имеем $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ и, значит, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. По условию $2xy > 2$ или $xy > 1$. Последнее неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах, соответственно над и под гиперболой (рисунок 6).

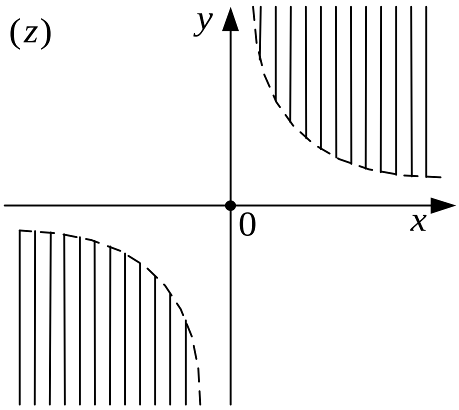


Рисунок 6

Пример 2. Какое множество точек на плоскости (z) определяется условием $-\frac{\pi}{2} \le \arg(z+1-i) \le \frac{3\pi}{4}$?

Комплексное число $z+1-i = z-(-1+i)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$ и концом – точка z. Угол между этим вектором и осью Ox есть $\arg(z+1-i)$ и он меняется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{4}$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью Ox углы в $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}$ (рисунок 7).

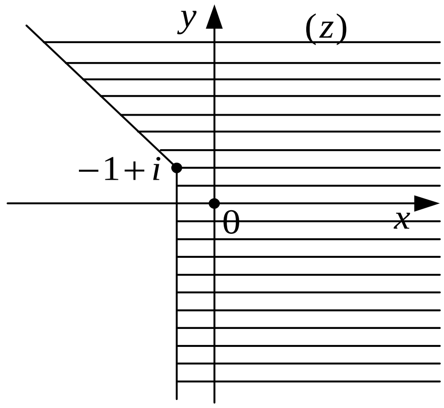


Рисунок 7

Пример 3. Какая кривая задается уравнением $|z+c|+|z-c|=2a$, где c и a – действительные положительные числа, причем $a>c$.

Модуль $|z+c|$ есть расстояние между точками z и $-c$, модуль $|z-c|$ – расстояние между точками z и c. По условию сумма расстояний от точки z до двух данных точек $-c$ и c есть величина постоянная. Значит, точка z лежит на эллипсе. Уравнение этого эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$ (рисунок 8).

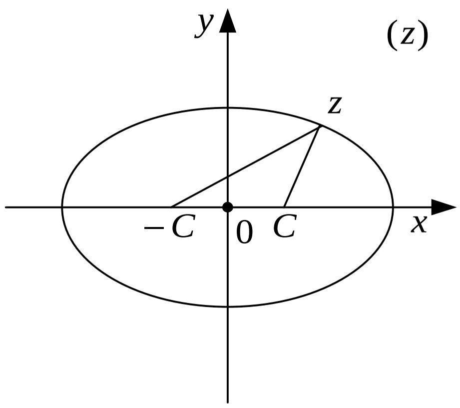


Рисунок 8

Пример 4. Какая кривая определяется уравнением $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4}$?

Имеем $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z+\bar{z}}{2z\bar{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}$. По условию $\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$ или $x^2+y^2-4x=0$ – это окружность $(x-2)^2+y^2=4$ (см. рисунок 9).

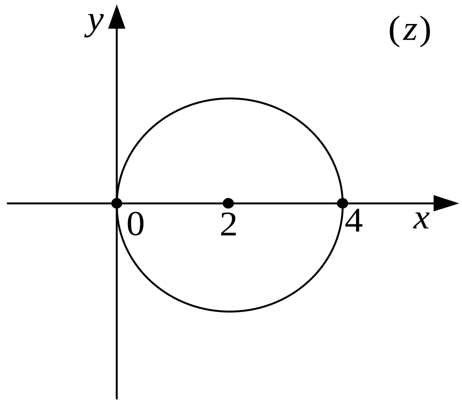


Рисунок 9

Пример 5. Написать в комплексной форме уравнение прямой $Ax + By + C = 0$.

Подставляя x и y по формуле (9) в уравнение прямой, получаем $A(\overline{z} + z) + Bi(\overline{z} - z) + 2C = 0$, или $(A + iB)\overline{z} + (A - iB)z + 2c = 0$. Обозначив $A + iB = a,\ 2C = b$, получим уравнение: $\overline{a}z + a\overline{z} + b = 0$ – уравнение прямой в комплексной форме.

1.5 Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать следующие соотношения:

а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

2. Найти:

а) $\dfrac{1}{i}$; б) $\dfrac{2}{1-3i}$; в) $\left(\sqrt{3} - i\right)^5$; г) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$.

3. Найти действительные решения уравнений:

а) $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$; б) $\dfrac{1}{z-i} + \dfrac{2+i}{1+i} = \sqrt{2}$.

4. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i; \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1+i)z_1 + iz_2 = -3 + 4i; \\ -iz_1 + (1-i)z_2 = 6 + i; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 0; \\ z_1 + (3-i)z_2 = 3 - 3i; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (3-i)z_1 + (4-2i)z_2 = 2 + 6i; \\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 5 + 4i. \end{cases}$

5. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

а) -2; б) $2i$; в) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; г) $4-3i$; д) $-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

6. Вычислить:

а) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^9$; б) $(-1+i)^{24}$; в) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$; г) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$;

д) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

7. Найти все значения корней:

а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt{2-2\sqrt{3}\cdot i}$; в) $\sqrt{-3-i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{3+4i}$; д) $\sqrt[3]{-1}$;

е) $\sqrt[3]{-1+i}$; ж) $\sqrt[3]{\dfrac{2i}{1+i}}$; з) $\sqrt[4]{-16}$; и) $\sqrt[5]{-1+3i}$; к) $\sqrt[8]{1}$.

8. Решить квадратные уравнения:

а) $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$; б) $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$;

в) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$.

9. Найти множества точек на плоскости (z), определяемые заданными условиями:

а) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\le 1$; б) $1\le|z+2+i|\le 2$; в) $|z|>1-\operatorname{Re}z$; г) $0<\arg z\le\dfrac{\pi}{4}$;

д) $|z|>2+\operatorname{Im}z$; е) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)<-\dfrac{1}{2}$; ж) $\dfrac{1}{4}<\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)+\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)<\dfrac{1}{2}$.

10. Какие линии определяются следующими уравнениями

а) $\operatorname{Re}\bar{z}^2=1$; б) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=1$; в) $2z\bar{z}+(2+i)z+(2i-)\bar{z}=2$;

г) $\operatorname{Re}(1+z)=|z|$; д) $z=\bar{z}$.

11. Написать в комплексной форме уравнение следующих линий:

а) координатных осей Ox и Oy; б) прямой $y=x$; в) гиперболы $x^2-y^2=a^2$; г) окружности $x^2+y^2+2x=0$.

2 Функции комплексного переменного

2.1 Основные геометрические понятия. Определение функции комплексного переменного. Геометрическая интерпретация функции комплексного переменного

Определение 1. **Открытым** называется множество, состоящее лишь из внутренних точек.

Определение 2. Точка z называется **внутренней точкой** множества, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью.

Определение 3. Под ε**-окрестностью** точки a понимается открытый круг радиуса ε с центром в точке a:

$$|z-a|<\varepsilon \cdot \qquad (17)$$

Определение 4. Множество называется **связным**, если любые две его точки z_1 и z_2 можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Определение 5. **Областью** в комплексной плоскости (z) называется открытое связное множество.

Определение 6. Область называется **ограниченной**, если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса R с центром в начале координат. Иначе она называется **неограниченной**.

Определение 7. **Границей** Γ области D называется совокупность точек, не принадлежащих области D, любая окрестность которых содержит точки, принадлежащие области D.

Определение 8. Область D вместе с границей Γ называется **замкнутой** областью; обозначается это $\overline{D}=D+\Gamma$.

Определение 9. Ограниченная область называется **односвязной** областью, если ее граница состоит из одной связной линии; **многосвязной** областью, если ее граница состоит из нескольких связных линий. **Связной** называется линия, из любой точки которой можно перейти по ней в любую другую ее точку.

Определение 10. Говорят, что в области D определена функция $w=f(z)$, если $\forall z\in D$ поставлено в соответствие (по некоторому закону соответствия) одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений w. Пусть $w=u+iv$. Тогда

$$w=u(x;\, y)+iv(x;\, y)=f(z) \qquad (18)$$

Функция комплексного переменного (18) не имеет графика: она соответствует заданию двух действительных функций переменных x и y:

$$u=u(x;\,y) \text{ и } v=v(x;\,y). \qquad (18')$$

Причем функция $u=u(x;\,y)$ называется **действительной частью** функции $w=f(z)$ и обозначается $\operatorname{Re} f(z)=u(x;\,y)$, функция $v=v(x;\,y)$ называется **мнимой частью** функции $w=f(z)$ и обозначается $\operatorname{Im} f(z)=v(x;\,y)$.

Геометрический смысл ее состоит в осуществлении отображения точек комплексной плоскости (z) на соответствующие точки комплексной плоскости (w) (формула (18')).

Пусть в плоскости (z) кривая задана уравнением $F(x;\,y)=0$. Чтобы найти уравнение образа $\Phi(u;\,v)=0$ этой кривой в плоскости (w) при отображении с помощью функции $w=f(z)=u+iv$, нужно исключить x и y из уравнений

$$\begin{cases} u=u(x,y); \\ v=v(x,y); \\ F(x,y)=0. \end{cases} \qquad (19)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t)$ или $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, то параметрические уравнения ее образа при отображении $w=f(z)=u+iv$ будут такими:

$$\begin{aligned} u&=u[x(t),y(t)]=u(t); \\ v&=v[x(t),y(t)]=v(t). \end{aligned} \qquad (19')$$

Пример 1. Даны множества точек: а) $|z+i|<3$; б) $1<|z|<2$; в) $\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi$; г) $|2z|<|1+z^2|$. Какие из этих множеств являются областями?

В соответствии с определениями 1–9 заключаем, что множество $|z+i|<3$ – открытый круг с центром в точке $-i$ радиуса 3, множество $1<|z|<2$ – открытое круговое кольцо с центром в начале координат, $\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi$ – открытый угол (рис. 7) – являются областями. Построив множество г) $\left[x^2+(y-1)^2-2\right]\cdot\left[x^2+(y+1)^2-2\right]>0$ (рисунок 10), убеждаемся, что оно не является областью (не выполняется для него условие связности).

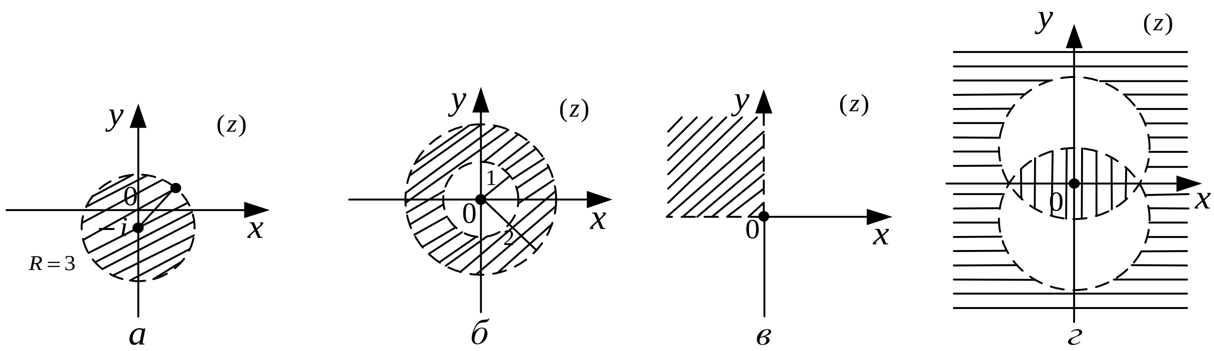


Рисунок 10

Пример 2. Найти действительную и мнимую части функции $w = z^3 - \overline{iz}$.

Имеем $w = u + iv = (x+iy)^3 - i(x+iy) = \left(x^3 - 3xy^2 - y\right) + i\left(3x^2y - y^3 - x\right)$; отсюда $u = x^3 - 3xy^2 - y$; $v = 3x^2y - x - y^3$.

Пример 3. В какую кривую отображается единичная окружность $|z| = 1$ с помощью функции $w = z^2$?

Получаем $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$. Исключая x и y из уравнений $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$; $x^2 + y^2 = 1$, получаем $u^2 + v^2 = 1$. Таким образом окружность $|z| = 1$ преобразуется при преобразовании $w = z^2$ в окружность $u^2 + v^2 = 1$ в плоскости (w). Так как $Argw = 2Argz + 2k\pi$, то, когда точка z описывает полную окружность $|z| = 1$, ее образ (точка w) описывает две полные окружности $|w| = 1$.

2.2 Основные элементарные функции комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного могут быть определены следующим образом.

1. Показательная функция e^z:

Если показатель степени является комплексным числом, то определение показательной функции теряет смысл. Поэтому показательная функция $W = e^z$ с комплексным показателем определяется с помощью равенства:

$$e^z = e^x(\cos y + i \cdot \sin y). \tag{20}$$

Показательную функцию определяют также соотношением:

$$e^z = \lim_{z \to \infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \text{ или}$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad |z| < \infty . \tag{20'}$$

Можно показать, что все три определения равносильны.

Функция обладает следующими свойствами:

1) Область определения показательной функции – все множество C, т.е. $D(e^z) = C$.

2) Найдем модуль и аргумент показательной функции. Из формулы (20) следует, что

$$e^z = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y,\ u = e^x \cos y, v = e^x \sin y,$$

$$\left|e^z\right| = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y} = \sqrt{e^{2x}} = e^x,$$

$$Arg\, e^z = y + 2\pi k,\ k \in Z .$$

3) Область значений показательной функции все множество C, кроме нуля, т.к. $\left|e^z\right| = e^x \neq 0$;

4) $\forall z_1, z_2 \in C : e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

5) $e^{z+2\pi k i} = e^z$; показательная функция периодическая с основным периодом $T = 2\text{p}i$.

6) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ – формула Эйлера (1707-1783).

2. Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$:

Для $\sin z$ и $\cos z$ приняты следующие определения:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, |z| < \infty \tag{21}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, |z| < \infty \tag{22}$$

Для функций e^z, $\sin z$ и $\cos z$ имеют место формулы Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{23}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{24}$$

Равенства (23) и (24) также принимаются за определения $\sin z$ и $\cos z$.

Эти функции обладают следующими свойствами:

1) Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ определены для $\forall z \in C$, т.к. для всех $z \in C$ определена показательная функция e^z.

2) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

3) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$,

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$.

Замечание 1. Обычным образом из основного тригонометрического тождества и теорем сложения можно получить обычные тригонометрические формулы: формулы приведения, $\sin z$ и $\cos z$ кратного аргумента, формулы понижения степени и т.д.

Замечание 2. $|\sin z|$ и $|\cos z|$ может быть больше 1.

4) Функции являются периодическими с периодом $T = 2\pi$.

3. Тригонометрические функции $tg\, z$ и $ctg\, z$ определяются равенствами

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} \tag{25}$$

Для тригонометрических функций сохраняются свойства "действительной" тригонометрии.

4. Гиперболические функции $sh\, z, ch\, z, th\, z, cth\, z$ определяются равенствами:

$$sh\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{26}$$

$$ch\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{27}$$

$$th\, z = \frac{shz}{chz} \qquad cth\, z = \frac{chz}{shz} \tag{28}$$

Между тригонометрическими и гиперболическими функциями устанавливается связь:

$$\begin{aligned} \cos iz &= chz; \quad & \sin iz &= ishz; \\ chiz &= \cos z; \quad & shiz &= i \sin z. \end{aligned} \tag{29}$$

Справедливы также соотношения

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{30}$$

$$e^z = chz + shz \qquad e^{-z} = chz - shz \tag{31}$$

5. Логарифмическая функция $w = Ln\, z$ $(z \neq 0)$ – комплекснозначный логарифм – определяется как функция, обратная показательной $z = e^w$. При этом

$$Ln\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \tag{32}$$

есть запись логарифмической функции в алгебраической форме.

Вводится понятие главного значения (однозначной ветви) $Ln\,z : Ln\,z = \ln|z| + i\varphi$, так как из формулы (32) следует, что $Ln\,z$ является бесконечнозначной функцией. Справедливы соотношения (свойства функции $Ln\,z$):

$$Ln(z_1 z_2) = Ln\,z_1 + Ln\,z_2;\ Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Ln\,z_1 - Ln\,z_2;$$

$$Ln\,z^n = n \cdot Ln\,z + 2\pi k i.$$

Заметим, что эти равенства следует понимать как равенства между множествами.

Свойства логарифмической функции:

1) Логарифмическая функция определена во всем множестве C кроме нуля.

2) $\forall z_1, z_2 \in C : Ln(z_1 \cdot z_2) = Ln\,z_1 + Ln\,z_2$.

3) $\forall z_1, z_2 \in C : Ln\dfrac{z_1}{z_2} = Ln\,z_1 - Ln\,z_2$.

4) $\forall z \in C : Ln\,z^n = n \cdot \ln z + i2\pi k,\ n \in N,\ k \in Z$.

Замечание. 1) Пусть z – положительное действительное число, значит $\mathrm{Lnz} = \ln|\mathrm{z}| + i \cdot (\arg z + 2\pi k) = \ln z + 2\pi k,\ k \in Z$.

В этом случае логарифмическая функция принимает бесконечное множество значений, одно из которых при $k = 0$ действительно, т.е. главное значение логарифма совпадает с логарифмической функцией действительного аргумента.

2) z – отрицательное действительное число, значит

$$Lnz = \ln(-z) + i \cdot (\pi + 2\pi k) = \ln(-z) + i\pi(1 + 2k),\ k \in Z.$$

Заметим, что ни при каких $k \in Z$ содержимое скобки в нуль не обращается, значит, логарифм отрицательного действительного числа имеет бесконечное множество значений, ни одно из которых не является действительным.

6. Обратные тригонометрические функции определяются как решения соответствующих уравнений (например, функция $w = Arc\sin z$ есть обратная по отношению к $\sin z$, т.е. это решение уравнения $z = \sin w$ и пр.) Все эти функции бесконечнозначны и выражаются через логарифмические функции:

$$Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \tag{33}$$

$$Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \tag{34}$$

$$Arctg\, z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+iz}{1-iz}; \tag{35}$$

$$Arcctg\, z = \frac{i}{2} Ln \frac{z-i}{z+i}. \tag{36}$$

7. Обратные гиперболические функции вычисляются по формулам:

$$Arsh\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right); \tag{37}$$

$$Arch\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right); \tag{38}$$

$$Arth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z}; \tag{39}$$

$$Arcth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{z-1}. \tag{40}$$

8.Общая степенная функция $w = z^a$ определяется по формуле

$$z^a = e^{aLnz} \quad (a,\ z \text{ – комплексные числа}). \tag{41}$$

Пусть $a = \alpha + i\beta$. Степенная функция бесконечнозначна, если $\beta \neq 0$ или α - число иррациональное.

9.Общая показательная функция $w = a^z$. По определению

$$a^z = e^{z \cdot Ln\, a}. \tag{42}$$

Из представления $a^z = e^{zLn\, a} e^{i2\pi kz}$ видно, что эта функция представляет собой совокупность отдельных функций, отличающихся друг от друга множителем $e^{i2\pi kz}$, $k \in Z$.

2.3 Предел и непрерывность

Определение 1. Число $A \neq \infty$ называется **пределом** функции $f(z)$ при $z \to z_0$ (обозначается $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что $\forall z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon. \tag{43}$$

Говорят, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что $\forall z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta$

$$|f(z)| > E. \tag{43'}$$

Замечание. Существование предела по любому фиксированному пути ($z \to z_0$) для функции еще не гарантирует существование предела при $z \to z_0$.

Теорема 1. Для того чтобы число $A = \alpha + i\beta$ было пределом функции $w = f(z) = u(x;u) + iv(x;y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы существовали $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x;y) = \alpha$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x;y) = \beta$.

Теорема 2. Для того чтобы функция $f(z)$ имела в точке z_0 конечный предел A необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\exists \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |A|$;

2) $\exists \lim\limits_{z\to z_0} \arg f(z) = \arg A \ (A \neq 0)$.

Из теоремы 1 следует, что известные теоремы о пределах функции действительной переменной, связанные с арифметическими операциями, остаются справедливыми для функции комплексного переменного, т.е. если функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют конечные пределы при $z \to z_0$, то

1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) + \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

3) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}, \left(\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0\right)$.

Пример. Показать, что для функции $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right) \ \nexists \lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

При r стремящемся к 0 по любому лучу $z = re^{i}$ имеет место следующее выражение $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \dfrac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right) = \sin 2\varphi$. Таким образом, эти пределы различны для различных направлений – они заполняют сплошь отрезок $[-1;1]$ и, следовательно, $\mathit{lim}_{z\to 0} f(z)$ не существует.

Определение 2. Функция называется **непрерывной в точке** z_0, если она определена в этой точке и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, т.е. любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Определение 3. $z - z_0 = \Delta z$ – называется **приращением аргумента**, а $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ называется **приращением функции**.

Определение 4. Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δz в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции Δw, т.е. $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \Delta w = 0$.

Можно показать, что два последних определения непрерывности функции комплексного переменного эквивалентны.

Определение 5. Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется **непрерывной в этой области**.

Приведем свойства непрерывных функций комплексного переменного:

1) Если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то в ней она достигает как своего наибольшего, так и наименьшего значения, т.е. $\exists\, z_1, z_2 \in D, \forall z \in D : |f(z_1)| \le |f(z)| \le |f(z_2)|$;

2) Если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она ограничена на этой области, т.е. $\exists\, M > 0, \forall z \in D : |f(z)| \le M$.

2.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразить множества и выяснить, какие из них являются областями, какие из них ограниченные области:

а) $\operatorname{Re} z = \alpha$; б) $\operatorname{Im} z > \delta$; в) $r \le |z - z_0| < R$.

2. Для указанных функций найти действительную и мнимую части:

а) $w = \bar{z} - iz^2$, б) $w = z^2 + i$; в) $w = i - z^3$; г) $w = \dfrac{1}{z}$; д) $\dfrac{\bar{z}}{z}$.

3. Найти образы данных точек при указанных отображениях:

а) $z_0 = -i,\ w = z^2$; б) $z_0 = 1 - i,\ w = (z-1)^2$; в) $z_0 = 1,\ w = \dfrac{1}{z - i}$;

г) $z_0 = 2 + 3i,\ w = \dfrac{\bar{z}}{z}$.

4. Выделить действительную и мнимую части у следующих функций:

а) $w = e^{-z}$; б) $w = \sin z$; в) $w = ch\,(z - i)$; г) $w = tg\ z$.

5. Вычислить:

а) $Ln\,(-1)$; б) $Ln(1 - i)$; в) $Ln(-i)$.

6. Записать в алгебраической форме:

а) $\sin \pi i$; б) $\cos \pi i$; в) $tg\dfrac{\pi i}{2}$; г) $ctg\,\pi i$.

6. Вычислить:

а) $Arc\sin i$; б) $Arctg\ 2i$; в) $Arc\cos i$.

7. Найти:

а) 3^{2+i}; б) $(1 - i)^{3-3i}$.

8. Решить уравнения:

а) $e^z + i = 0$; б) $4\cos z + 5 = 0$; в) $\sin z = \pi i$.

9. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2 - 4iz - 3}{z - i}$; б) $\lim\limits_{z\to -i} \arg z$; в) $\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{iz} + 1}$.

10. Доказать непрерывность на всей комплексной плоскости следующих функций:

а) $w = \bar{z}$; б) $w = |z| \operatorname{Re} z$; в) $w = e^{\bar{z}}$; г) $w = \cos|z|$.

3 Аналитические функции. Условия Коши-Римана

3.1 Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитичность функции

Определение 1. Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** $z \in D$, если существует предел

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (z + \Delta z \in D). \tag{44}$$

Этот предел называется **производной** функции $f(z)$ в точке z.

Для производной функции комплексного переменного вводятся обозначения $f'(z)$, $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Определение 2. Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется **дифференцируемой в этой точке**.

Теорема 1. Если функция дифференцируема в точке, то она в этой точке непрерывна.

Теорема, обратная данной, неверна, так как можно привести примеры функций, непрерывных в точке, но не являющихся в ней дифференцируемыми.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы приращение функции Δw можно было представить в виде: $\Delta w = A \cdot \Delta z + \varepsilon \cdot \Delta z$, где $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\varepsilon}{\Delta z} = 0$.

Теорема 3. Для того, чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы функции

$u = u(x;\, y)$, $v = v(x;\, y)$ были дифференцируемы в этой точке и выполнялись условия Коши-Римана (иногда их называют условиями Даламбера-Эйлера):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (45)$$

Определение 3. Функция $w = f(z)$ называется **аналитической (регулярной)** в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Определение 4. Функция $w = f(z)$ называется **аналитической в области** D, если она аналитична в каждой точке этой области.

Очевидно, что функция, аналитическая в точке, будет и дифференцируема в ней. Обратное может не иметь места.

Определение 5. Функция называется **аналитической в области** D, если она аналитична в каждой точке этой области.

Из определения следует, что функция аналитична в области D, если она дифференцируема в этой области.

Замечание. Так как все определения аналогичны определениям в случае функции действительной переменной, значит для функции комплексной переменной справедливы обычные правила дифференцирования и теоремы о производной сложной и обратной функций.

Для любой аналитической функции $f(z)$ имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (46)$$

Пример 1. Показать, что функция $f(z) = e^{2z}$ аналитична, и найти $f'(z)$.

Получаем $e^{2z} = e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y)$, т.е. $u(x, y) = e^{2x}\cos 2y$, $v(x, y) = e^{2x}\sin 2y$. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y$ и, следовательно, условия (45) выполняются во всей плоскости; по первой из формул (46) имеем $\left(e^{2z}\right)' = 2e^{2x}\cos 2y + i2e^{2x}\sin 2y = 2e^{2z}$.

Пример 2. Является ли функция $w = z \cdot \bar{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?

Получаем $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, так что $u = x^2 + y^2$, $v \equiv 0$. Условия Коши–Римана имеют вид: $2x = 0$, $2y = 0$ и выполняются только в точке $(0;0)$. Следовательно, функция $w = z \cdot \bar{z}$ дифференцируема только в точке $(0;0)$ и нигде не аналитична. По определению (44) запишем:

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta z\Delta\bar{z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta\bar{z}=\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta x-i\Delta y)=0$. Таким образом, производная $f'(0)$ существует и равна нулю.

3.2 Гармонические функции. Сопряженно-гармонические функции. Восстановление аналитической функции

Определение 1. Функция $u=u(x;\,y)$ называется **гармонической** в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и в этой области лапласиан $\Delta u=0$, т.е. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\right)$.

Определение 2. Две гармонические функции $u=u(x;\,y)$, $v=v(x;\,y)$, удовлетворяющие условию (45), называются **сопряженно-гармоническими** функциями.

Теорема. Для того чтобы функции $u=u(x;\,y)$, $v=v(x;\,y)$ были соответственно действительной и мнимой частями аналитической функции $f(z)=u+iv$, необходимо и достаточно, чтобы они были сопряженно-гармоническими функциями.

Пользуясь условиями Коши-Римана, аналитическую функцию $f(z)$ можно восстановить, если известна ее действительная $u=u(x;\,y)$ или мнимая часть $v=v(x;\,y)$.

Пример 1. При каких условиях трехчлен $u=ax^2+2bxy+cy^2$ является гармонической функцией?

Находим: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2a$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2c$. Лапласиан $\Delta u=0$ (т.е. $2a+2c=0$), если $a+c=0$ при любом b.

Пример 2. Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v=2x^2-2y^2+x$ при дополнительном условии $f(0)=0$.

Так как $\dfrac{\partial v}{\partial x}=4x+1, \dfrac{\partial v}{\partial y}=-4y$, то из условий Коши-Римана (45) находим производные $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-4y$ (1); $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-4x-1$ (2). Решив первое из этих уравнений, находим: $u=\int 4y\,dx=-4xy+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y. Для определения $\varphi(y)$ дифференцируем u по y и подставляем в (2): $-4x+\varphi'(y)=-4x-1$, откуда $\varphi'(y)=-1$ и $\varphi(y)=-y+C$. Следовательно, $u=-4xy-y+C$ и окончательно получим:

$$w=u+iv=-4xy-y+c+i(2x^2-2y^2+x)=$$
$$=2i(x^2-y^2+2ixy)+i(x+iy)+C=2iz^2+iz+C.$$

Определим C: $f(0)=2i\cdot 0+i\cdot 0+C$ и $C=0$; таким образом, $w=2iz^2+iz$.

3.3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то $k=|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ плоскости (z) на плоскость (w). Аргумент производной $f'(z_0)$ равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости (z), проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0=f(z_0)$.

Пример. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=z^2$ в точке $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Имеем $w'(z)=2z$, так что $w'(z_0)=2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$. Перейдя от алгебраической формы записи комплексного числа $w'(z_0)$ к тригонометрической, получим: $2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

т.е. $k=4$. угол поворота $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

3.4 Конформные отображения

Определение 1. Отображение $w=f(z)$ называется **конформным** в точке z_0, если оно сохраняет углы между кривыми и обладает свойством постоянства растяжений в точке z_0 по всем направлениям, выходящим из точки z_0.

Теорема 1. Если функция $w=f(z)$ аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то отображение является конформным в точке z_0.

Определение 2. Функция $w=f(z)$ называется **однолистной** в области D, если $f(z_1)\neq f(z_2)$ для любых $z_1\neq z_2$ из D.

Пример 1. Функция $w=z^4$ не является однолистной на всей комплексной плоскости, так как для $z_1=-2$ и $z_2=2$ $(z_1\neq z_2)$ выполняется условие $f(z_1) = f(z_2)$.

Определение 3. Отображение $w = f(z)$ называется **конформным в области** D, если оно конформно в каждой точке области D и функция $w = f(z)$ является аналитической и однолистной в области D.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть функция $w = f(z)$ – однолистная и аналитическая в области D и $f'(z_0) \neq 0$ в каждой точке области D. Тогда отображение $w = f(z)$ будет конформным в области D.

Доказательство: в силу условия $f'(z_0) \neq 0$ при $z \in D$ и теоремы 1. отображение, осуществляемое функцией $w = f(z)$, является конформным в каждой точке области *D*.

Следовательно, отображение $w = f(z)$ будет конформным в области D, так как выполняются все условия определения 3.

Таким образом, мы доказали, что условия аналитичности, однолистность и неравенство нулю производной функции является достаточными условиями конформности отображения, осуществляемого этой функцией.

3.5 Основная задача и общие теоремы теории конформных отображений

В настоящем параграфе приведем без доказательства ряд теорем, которые имеют большое значение при решении задач на конформные отображения.

Основной задачей теории конформных отображений является следующая задача.

Даны две области D и D^* комплексной плоскости; требуется найти функцию осуществляющую конформное отображение одной из этих областей на другую. Эта задача не всегда имеет решение. Например, невозможно взаимно-однозначное конформное отображение; многосвязной области на односвязную.

Таким образом, возникают вопросы об условиях существования и однозначного определения функции, конформно отображающей область D на область D^*.

Б.Риманом в 1851 году была доказана следующая теорема, которую называют основной теоремой теории конформных отображений.

Теорема 3. Пусть D и D^* – две произвольные односвязные области, границы которых состоят более чем из одной точки. Тогда существует и только одно конформное отображение $w = f(z)$ области D на область D^* такое, что

$$f(z_0) = w_0,\ \arg f'(z_0) = \alpha, \qquad (*)$$

где $z_0 \in D$, $w_0 \in D^*$, α – заданное действительное число (см. рисунок 11).

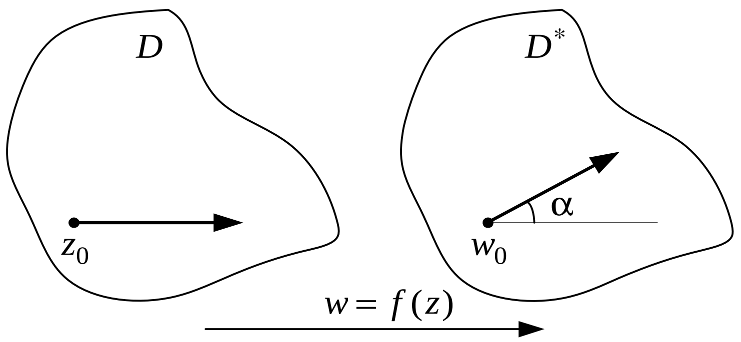


Рисунок 11

Условия (*) называются условиями нормировки конформного отображения. Вместо (*) можно задать другие условия. Например, можно задать

$$f(z_0) = w_0, \ f(z_1) = w_1,$$

где z_0, w_0 – внутренние, z_1, w_1 – граничные точки областей D и D^* соответственно, или

$$f(z_k) = w_k, \ (k = 1, 2, 3),$$

где z_1, z_2, z_3 – различные граничные точки области D, w_1, w_2, w_3 – различные граничные точки области D^*, причем точки z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 следуют в порядке положительного обхода границ ∂D и ∂D^* областей D и D^* соответственно.

Теорема Римана устанавливает факт существования функции, конформно отображающей область D на область D^*, но не дает удобного способа построения ее. Кроме того, эта функция выражается через элементарные функции лишь для простых областей. Поэтому изучение частных случаев отображений с помощью комбинаций элементарных функций имеет большое практическое значение.

Приведем без доказательства теорему о соответствии границ.

Теорема 4. Пусть G и D – односвязные области, причем их границы $\partial G = L$ и $\partial D = \Gamma$ – простые замкнутые кусочно-гладкие кривые.

Если функция $w = f(z)$ конформно отображает область G на область D, то

1) функцию $f(z)$ можно непрерывно продолжить на замыкание области G, т.е. можно доопределить $f(z)$ на L так, что получится непрерывная в $\overline{G}$ функция;

2) эта функция $w = f(z)$ отображает однозначно кривую L на кривую Γ с сохранением ориентации.

Для практики важен следующий в известном смысле обратный теореме 4. принцип соответствия границ.

Теорема 5. Пусть в односвязной области D, ограниченной контуром γ, задана однозначная аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная в $\overline{D}$ и осуществляющая взаимно однозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ плоскости (w). Тогда, если при заданном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение области D на внутреннюю область G, ограниченную контуром Γ.

Из принципа соответствия границ следует, что для того, чтобы определить область G, на которую аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает данную область D, достаточно найти контур, на который эта функция отображает границу области D и установить направление обхода этого контура.

Пример 1. Найти область G, на которую функция $w = 5z + i$ конформно отображает область D, ограниченную контуром γ:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

Решение: пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Тогда $w = 5z + i = 5(x + iy) = 5x + i(5y + 1)$. Отсюда $u = 5x$, $v = 5y + 1$, т.е. $x = \frac{u}{5}$, $y = \frac{v-1}{5}$.

Контур γ отображается в контур Γ.

$$\left(\frac{u}{5}\right)^2 + \left(\frac{v-1}{5}\right)^2 - 4\frac{u}{5} = 0$$

или

$$(u-10)^2 + (v-1)^2 = 100,$$

т.е. окружность радиуса 10 с центром в точке $M(10, 1)$.

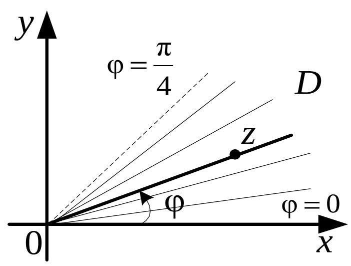
Легко убедиться, задав контуры параметрическими уравнениями, что положительное направление обхода контура γ соответствует положительному направлению обхода контура Γ.

Тогда на основании принципа соответствия границ, заключаем, что функция $w = 5z + i$ осуществляет конформное отображение внутренности рассматриваемой окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ на внутренность окружности

$$(u-10)^2 + (v-1)^2 = 100.$$

Пример 2. Найти функцию, которая отображает конформно угол $0 < \arg z < \frac{p}{4}$ плоскости (z) на угол плоскости (w) (рисунок 12).

Решение: поставленную задачу решает комплексная функция $w = z^4$, так как она произвольный луч Oz, $\arg z = ц$ отображает на луч O_1w, $\arg w = 4ц$. при изменении ц от 0 до $\frac{p}{4}$ луч Oz описывает открытый угол D, а его образ луч O_1w описывает открытый угол D_1 – верхнюю полуплоскость. Указанное отображение $w = z^4$ будет однолистным в D, аналитичным и $f'(z) = 4z^3$, если $z \in D$ (точка $0 \notin D$).



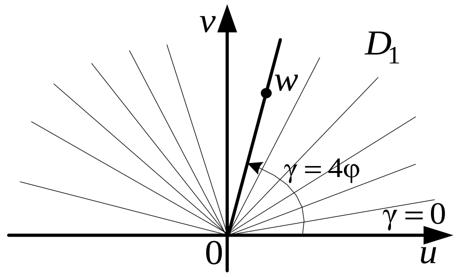


Рисунок 12

3.6 Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке.

а) $w = z^2\bar{z}$; б) $w = ze^z$; в) $w = |z|\bar{z}$; г) $w = \sin 3z - i$; д) $w = |z|\operatorname{Im} z$.

2. Найти области аналитичности функций и их производные:

а) $f(z) = \dfrac{z\cos z}{1+z^2}$; б) $f(z) = cth\, z$.

3. Показать, что следующие функции являются гармоническими:

а) $u = x^2 + 2x - y^2$; б) $u = 2e^x \cos y$; в) $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$;

г) $u = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

4. Проверить гармоничность приведенных ниже функций в указанных областях и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

а) $v = x^3 - 3xy$, $0 \le |z| < +\infty$, $f(i) = i$; б) $v = 2e^x \sin y$, $0 \le |z| < +\infty$;

в) $v = x^2 - y^2 - 1$, $0 \le |z| < +\infty$, $f(-1) = 0$; г) $u = 2xy + 3$, $0 \le |z| < +\infty$,

д) $v = arctg\dfrac{y}{x}$, $0 < |z| < +\infty$, $f(1) = 0$; е) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $0 < |z| < +\infty$, $f(1) = 0$.

5. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ для заданных отображении $w = f(z)$ в указанных точках:

а) $w = z^2$, $z_0 = i$; б) $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$; в) $w = \sin z$, $z_0 = 0$.

4 Интегрирование функции комплексного переменного

4.1 Интеграл по кривой и его вычисление

Определение 1. **Кривой** в комплексной плоскости называется образ отрезка $[a;b]$ при непрерывном отображении $z=\gamma(t)$, где $t\in[\alpha;\beta]$, тогда $\gamma(\alpha)$ называется **началом**, а $\gamma(\beta)$ называется **концом** кривой.

Определение 2. Кривая называется **гладкой**, если функция $\gamma(t)$ имеет во всех точках отрезка $[a;b]$ непрерывные производные, отличные от нуля.

Определение 3. Кривая называется **кусочно-гладкой**, если она может быть разбита на конечное число частей, каждая из которых представляет собой гладкую кривую.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D; L – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая кривая, лежащая в D.

По определению

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\sup|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1} f(\xi_k)\Delta z_k \,. \tag{47}$$

Теорема (достаточное условие существования интеграла). Пусть однозначная функция $w=f(z)$ непрерывна в области D, тогда интеграл от этой функции вдоль любой кусочно-гладкой кривой γ, содержащейся в D, существует.

Заметим, что функции u и v, будучи действительной и мнимой частями непрерывной функции, сами являются непрерывными функциями двух действительных переменных. Кривая γ – кусочно-гладкая, значит выполняются все условия теоремы существования обычного криволинейного интеграла, т.е. если $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy \tag{48}$$

– вычисление интеграла (47) сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов второго рода. Заметим, что интеграл (47) зависит, вообще говоря, от пути интегрирования L. Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ (или в комплексной форме $f(t)=x(t)+iy(t)$), начальная и конечная точки кривой L соответствуют значениям параметра $t=\alpha, t=\beta$.

Тогда

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \,. \tag{49}$$

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D, z_0, z_1 \in D$, $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для $f(z)$ $(\Phi'(z) = f(z))$, то имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)\,. \tag{50}$$

Справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz = [f(z)g(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)dz\,, \tag{51}$$

где $f(z)$, $g(z)$ – аналитические функции в односвязной области D, z_0, z_1 – произвольные точки этой области.

Замена переменных в интегралах от функции комплексного переменного аналогична случаю функции действительного переменного. Пусть аналитическая функция $z = g(w)$ отображает взаимно однозначно контур L в плоскости (z) на контур L' в плоскости (w). Тогда

$$\int_L f(z)dz = \int_{L'} f[g(w)]g'(w)dw \tag{52}$$

Если функция является многозначной, то для вычисления интеграла указывается, какая именно однозначная ветвь ее берется при этом. Это достигается заданием значения многозначной функции в некоторой точке контура интегрирования. Если контур интегрирования L замкнут, то начальной точкой z_0 пути интегрирования считается та, в которой задано значение подынтегральной функции.

Так как определение интеграла от функции комплексного переменного почти не отличается от определения криволинейного интеграла от функции действительного переменного, то и свойства криволинейного интеграла от функции действительного переменного можно перенести на случай комплексного переменного.

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_L (1 + i - 2\bar{z})dz$ по кривой $L: y = x^2$, соединяющей точки $z_0 = 0, z_1 = 1$.

Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2x\,dx$, $0 \le x \le 1$. По формуле (48)
$I = \int\limits_0^1 [1 - 2x - (1 + 2x^2)2x]dx + i\int\limits_0^1 [1 + 2x + (1 - 2x^2)2x]dx = -2 + i\dfrac{4}{3}$.

Пример 2. Вычислить $I = \int\limits_L (z + \bar{z})dz$, где L – дуга окружности $|z| = 1$,

$\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{3\pi}{2}$.

Положим $z(t) = e^{it}$, $\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{3\pi}{2}$. Тогда $z'(t) = ie^{it}$, и по формуле (49) находим:

$$I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (e^{it} + e^{-it}) ie^{it} dt = i\left(\frac{1}{2i} e^{2it} + t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \pi i.$$

Пример 3. Вычислить $I = \int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz$.

Так как подынтегральная функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ аналитична всюду, то по (50) найдем: $I = (z^3 + z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i$.

Пример 4. Вычислить $I = \int\limits_0^i z \cos z dz$.

Функции $f(z) = z$ и $g(z) = \sin z$ аналитичны всюду. По формуле (51) получим:

$$I = \int_0^i z(\sin z)' dz = (z \sin z)\Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = i \sin i + \cos z\Big|_0^i = sh1 + ch1 - 1 = e^{-1} - 1.$$

Пример 5. Вычислить $I = \int\limits_L \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}, L = \left\{ z : |z| = 1, -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \right\}$,

$\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Функция $\sqrt[3]{z}$ является многозначной: $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$; $\varphi = \arg z$. Условию $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ удовлетворяет та однозначная ветвь этой функции, для которой $k = 1$. Действительно, при $k = 1$ (и так как $\arg 1 = 0$) $\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{0+2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Полагая теперь $z(t) e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ на кривой L, находим $\sqrt[3]{z} = e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{3}}$, $z'(\varphi) = ie^{i\varphi}$ и, следовательно,

$$I=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{ie^{i\varphi}}{e^{i(\varphi+2\pi)/3}}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\left(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}id\varphi=\frac{3}{2}e^{i\left(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{3}{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\pi}\right)=\frac{9}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

4.2 Теорема Коши. Интегральные формулы Коши

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области, ограниченной контуром Γ, и γ – замкнутый контур в D, то

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=0. \qquad (53')$$

Если, помимо того, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}=\Gamma+D$, то

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz=0 \qquad (53)$$

– теорема Коши для односвязной области.

Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной внешним контуром Γ и внутренними контурами $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ и непрерывна в замкнутой области D, то (контур $\Gamma+\gamma_1+\ldots+\gamma_k$ обходится в положительном направлении)

$$\oint\limits_{\Gamma+\sum\limits_{m=1}^{k}\gamma_m} f(z)dz=0 \qquad (54)$$

– теорема Коши для многосвязной области. Дадим другую формулировку этой теоремы:

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz=\sum_{m=1}^{k}\oint\limits_{\gamma_m} f(z)dz \qquad (55)$$

– интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам (все контуры проходятся в одном и том же направлении).

Если $f(z)$ аналитична в области D, $z\in D$ и $\gamma\subset D$ – контур, охватывающий точку z, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}(\zeta\in\gamma). \qquad (56)$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \qquad (57)$$

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_{|z|=2} \frac{chiz \cdot dz}{z^2 + 4z + 3}$.

Внутри окружности $|z| = 2$ знаменатель дроби обращается в нуль в точке $z_0 = -1$. Для удобства применения формулы (56) перепишем интеграл в виде $I = \int\limits_{|z|=2} \frac{chiz \cdot dz}{(z+1)(z+3)} = \oint\limits_{|z|=2} \frac{\frac{chiz}{z+3}}{z-(-1)} dz$. Здесь $z_0 = -1$ и $f(z) = \frac{chiz}{z+3}$ аналитична в круге $|z| \le 2$. Тогда $I = [2\pi i \cdot f(-1)] = 2\pi i \frac{ch(-i)}{2} = \pi i \cos 1$.

Пример 2. Вычислить $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz$: по а) контуру $\Gamma : |z-2| = \frac{1}{2}$; б) $\Gamma : |z-2| = 3$.

а) в круге $\Gamma : |z-2| = \frac{1}{2}$ функция $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ аналитична; следовательно, по формуле (53) $I = 0$;

б) так как внутри контура интегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$, то для того, чтобы стало возможным применить формулы (56) и (57), рассмотрим многосвязную область D (рисунок 13), ограниченную окружностью $\Gamma = \{z : |z-2| = 3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1 = \{z : |z| = \rho\}$ и $\gamma_2 = \{z : |z-1| = \rho\}$ $\left(0 < \rho < \frac{1}{2}\right)$.

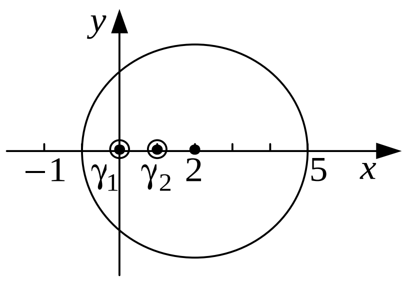


Рисунок 13

Тогда в области D функция $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ является аналитической, и по теореме (55) можно записать: $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz$. Для вычисления интегралов справа применим формулы (56) и (57):

$$\oint\limits_{\gamma_2}\frac{e^z dz}{z^3(z-1)}=\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1}dz=2\pi i\left.\frac{e^z}{z^3}\right|_{z=1}=2\pi ei;$$

$$\oint\limits_{\gamma_1}\frac{e^z dz}{z^3(z-1)}=\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)\right]_{z=0}=\pi ei\left.\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}\right|_{z=0}=-5\pi i$$ и,

таким образом, $I=\pi i(2e-5)$.

4.3 Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы по заданным контурам:

1. $\int\limits_L (2z+1)\bar{z}\,dz,\ L=\{z:|z|=1;\ 0\le\arg z\le\pi\}.$

2. $\int\limits_L \operatorname{Im} z\,dz,\ L=\{(x;y): y=2x^2,\ 0\le x\le 1\}.$

3. $\int\limits_L \left(iz^2-2\bar{z}\right)dz,\ L=\left\{z:|z|=2;\ 0\le\arg z\le\frac{\pi}{2}\right\}.$

4. $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(z+z^2\right)dz,\ L=\{(x;y): y=2x^2,\ 0\le x\le 1\}.$

5. $\int\limits_L \bar{z}e^z\,dz,\ L-$ отрезок от точки $z_0=1$ до точки $z_1=i$.

6. $\int\limits_L \frac{z}{\bar{z}}dz,\ L=\left\{z:|z|=1;\ 0\le\arg z\le\frac{\pi}{2}\right\}.$

7. $\int\limits_1^i ze^z\,dz$.

8. $\int\limits_1^i \left(3z^4-2z^3\right)dz$.

9. $\int\limits_1^i z\sin z\,dz$.

Применяя теоремы и интегральные формулы Коши, вычислить интегралы:

10. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}\,dz$.

11. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz$.

12. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$.

13. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z^2-z}\,dz$.

14. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$.

15. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2}\,dz$.

5 Ряды в комплексной области

5.1 Числовые ряды

Рассмотрим ряд с комплексными членами

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n\,. \tag{58}$$

Теорема. Для сходимости ряда $z_n=x_n+iy_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{58$'$}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \tag{58$''$}$$

Определение. Ряд (58) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд

$$|z_1|+|z_2|+...+|z_n|+... = \sum_{n=1}^{\infty}|z_n| \tag{59}$$

Ряды $(58')$, $(58'')$ и (59) являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$.

а) имеем $e^{in}=\cos n+i\sin n$. Таким образом, вопрос о сходимости данного ряда сводится к вопросу о сходимости рядов с действительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$. Так как каждый из рядов сходится абсолютно, то и данный ряд сходится абсолютно;

б) приведем другое решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость, для чего составим ряд $\left(\left|e^{in}\right|=\left|\cos n+i\sin n\right|=1\right)$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – этот ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать поведение ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ расходится, то расходится и исходный ряд.

5.2 Степенные, сходящиеся к ним и двусторонние ряды

Определение 1. Ряд вида

$$c_0+c_1z+c_2z^2+...+c_nz^n+... = \sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n, \tag{60}$$

где $c_0, c_1, c_2,...$ – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная, называется **степенным рядом** в комплексной области.

Определение 2. Ряд вида

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+...c_n(z-a)^n+... = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{61}$$

называется **степенным рядом общего вида**.

Определение 3. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n} \qquad (62)$$

называется рядом, **сходящимся к степенному общего вида**.

Определение 4. **Двусторонним** называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n\,. \qquad (63)$$

Область сходимости степенного ряда (58) есть круг с центром в начале координат: $|z|<R$, где R – радиус сходимости. В некоторых случаях он может быть определен по формулам

$$\text{а) } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \ (c_n\neq 0\forall n)\text{; б) } R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}\,. \qquad (64)$$

Для рядов (61) областью сходимости служит круг $|z-a|<R$. Область сходимости ряда (62) ищется после проведения замены: $\zeta=\dfrac{1}{z-a}$. Ряд вида (63) сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}=\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots, \qquad (65)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots \qquad (66)$$

Пусть ряд (65) сходится в области $|z-a|>r$, т.е. вне круга с центром в точке $z=a$ и радиуса r, а ряд (66) в круге $|z-a|>R$. Тогда, если: 1) $r>R$, то ряд (63) расходится всюду; 2) $r<R$, то ряд (63) сходится в кольце $r<|z-a|<R$. Здесь $r\geq 0$, $0<R<+\infty$.

Пример 1. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$.

Находим модуль коэффициента $c_n=(1+i)^n : |c_n|=\left|(1+i)^n\right|=(\sqrt{2})^n=2^{\frac{n}{2}}$. Применяя формулу б) из (64), находим $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin in}{(z+i)^n}$.

Имеем $c_{-n}=\sin in = i\cdot sh\, n$, $c_{-n-1}=i\cdot sh(n+1)$ и $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|i\, sh(n+1)|}{|i\, sh\, n|}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{sh(n+1)}{sh\, n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n+1}-e^{-n-1}}{e^{n}-e^{-n}}=e$. Следовательно, ряд сходится в области $|z+i|>e$, т.е. вне круга с центром в точке $a=-i$ радиуса $r=e$.

Пример 3. Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$.

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{(z+1)^n}$ имеем $c_{-n}=e^{in}$, $c_{-n-1}=e^{i(n+1)}$.

Следовательно, $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|e^{i(n+1)}\right|}{\left|e^{in}\right|}=1$. Первый ряд сходится в области $|z+1|>1$. Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$ имеем $c_n=e^{\frac{-in-1}{2}}$, $c_n=e^{\frac{-i(n+1)-1}{2}}$. Его радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{e^{\frac{-in-1}{2}}}{e^{\frac{-i(n+1)-1}{2}}}\right|=1$, т.е. второй ряд сходится в области $|z+1|<1$. Данный ряд расходится всюду.

Пример 4. Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z+2i}{6}\right)^n$.

Для первого из рядов имеем $c_{-n}=(3+4i)^n$, $c_{-n-1}=(3+4i)^{n+1}$, Следовательно, $r=\lim\limits_{n\to\infty}=\left|\dfrac{(3+4i)^{n+1}}{(3+4i)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|3+4i|=5$. Первый ряд сходится в области $|z+2i|>5$. Для второго ряда имеем $c_n=6^{-n}$, $c_{n+1}=6^{-n-1}$. Радиус его сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{6^{-n}}{6^{-n-1}}\right|=6$ – он сходится в области $|z+2i|<6$. Таким образом, данный ряд сходится в кольце $(r=5<R=6): 5<|z+2i|<6$.

5.3 Ряды Тейлора и Лорана

5.3.1 Ряд Тейлора

Однозначная и аналитическая в точке $z=a$ функция $f(z)$ разлагается в окрестности этой точки в степенной ряд – ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{67}$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{68}$$

Здесь Г – окружность с центром в точке $z=a$, целиком лежащая в области аналитичности $f(z)$. Областью сходимости ряда является круг с центром в точке разложения радиуса R. Этот радиус равен расстоянию от центра разложения до ближайшей особой точки – точки, в которой $f(z)$ теряет аналитичность. В круге сходимости этого ряда суммой его является функция $f(z)$.

Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-a|<R$, однозначно представима в нем своим рядом Тейлора (67), коэффициенты которого определяются по формулам (68).

Из этой теоремы и теоремы о возможности дифференцирования степенного ряда в круге сходимости любое число раз следует, что разложение функции в степенной ряд единственно. Это означает, что по любому методу разложения функции в степенной ряд мы получаем одно и то же разложение – ряд Тейлора. При $a=0$ ряд (67) называется рядом Маклорена.

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

1) $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ z\in(Z);$

2) $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z\in(Z);$

3) $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z\in(Z);$

4) $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\ |z|<1$ (69)

5) $arctg\, z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \ |z|<1;$

6) $(1+z)^{\alpha} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \ |z|<1, \alpha \in R;$

7) $\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2+...+(-1)^n z^n+... \ |z|<1;$

8) $\frac{1}{(1+z)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{1+z} \right).$

Пример 1. Разложить в ряд по степеням $(z+3)$ функцию $f(z) = \ln(2-5z)$.

Рассмотрим сначала следующее преобразование данной логарифмической функции: $\ln(2-5z) = \ln\left[17\left(1-\frac{5}{17}(z+3)\right)\right] = \ln 17 +$ $+\ln\left[1-\frac{5}{17}(z+3)\right]$. Воспользуемся разложением 4) из (69) для $\ln(1+u)$, полагая $u = -\frac{5}{17}(z+3)$. Так как разложение 4) имеет место при $|u|<1$, то наше разложение будет иметь место при $\frac{5}{17}|z+3|<1$. Таким образом, для $|z+3| < \frac{17}{5}: \ln(2-5z) = \ln 17 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(-\frac{5}{17}(z+3)\right)^n = \ln 17 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{17}\right)^n \frac{(z+3)^n}{n}$.

Часто при разложении функций в ряд удобно пользоваться дифференцированием или интегрированием известных разложений, а при разложении рациональной дроби – разложением ее на простейшие.

Пример 2. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z) = \frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)}$.

Разложим $f(z)$ на простейшие дроби: $f(z) = \frac{1}{2z+5} + \frac{2}{(z-3)^2}$.

По формуле суммы геометрической прогрессии 7) из (69) получаем:

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5} \frac{1}{1+\frac{2z}{5}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2z}{5}\right)^n, |z| < \frac{5}{2} \text{ и}$$

$$\frac{2}{z-3} = -\frac{2}{3} \frac{1}{1-z/3} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n, |z|<3.$$

замечая, что $\left[2(z-3)\right]' = -2(z-3)^{-2}$, и применяя теорему о возможном почленном дифференцировании степенного ряда в круге сходимости получаем:

$$\frac{2}{(z-3)^2} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{3^{n+1}}, |z| < 3.$$

Складывая ряды для $\frac{1}{2z+5}$ и $\frac{2}{(z-3)^2}$, получаем $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right)z^n, |z| < \frac{5}{2}$.

5.3.2 Ряд Лорана

Определение. **Рядом Лорана** называется ряд (63)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n. \tag{63}$$

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$ называется **главной частью** ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ – **правильной частью**. Если $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|} = r < R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$, то областью сходимости ряда (63) является кольцо $0 \le r < |z-a| < R$.

Теорема Лорана. Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 \le r < |z-a| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана (63), коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \quad (r < \rho < R;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{70}$$

Заметим, что из этой теоремы кольца разложимости определяются через расстояния от центра разложения до двух "соседних" особых точек $f(z)$. Вычисление контурных интегралов (70), как правило, затруднительно. Поэтому для разложения функций в ряды Лорана используются различные искусственные приемы.

Пример 1. Разложить в ряд Лорана в кольце $0 < |z-1| < 2$ функцию $f(z) = \frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}$.

Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)^2=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]. \qquad (*)$$

Первые два слагаемых в правой части $(*)$ имеют нужный вид, так как представляют собой степени разности $(z-1)$. Последние два слагаемых запишем в виде: $\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$, $\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{z-1}{2}\right)\right]^{-2}$.

Применив формулы 7), а затем 8) (из (69)), найдем

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right], \qquad (**)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1-(z-1)+3\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-4\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right]. \qquad (***)$$

Подставляя $(**)$ и $(***)$ в $(*)$, после несложных преобразований получаем разложение $f(z)$ в кольце $0<|z-1|<2$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{2^n}(z-1)^n\right].$$

Пример 2. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}$ в окрестности $a=0$.

Для любого комплексного ζ $\cos\zeta=1-\frac{\zeta^2}{2!}+\frac{\zeta^4}{4!}-\frac{\zeta^6}{6!}+\ldots$. Полагая $\zeta=\frac{1}{z}$, получаем: $z^2\cos\frac{1}{z}=z^2\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}+z^2+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+\ldots$.

Это разложение справедливо для любой точки $z\neq 0$. В данном случае "кольцо" представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z=0: 0<|z|<+\infty$ $(r=0,\ R=+\infty)$.

Пример 3. Получить различные разложения в ряд Лорана функции $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1=-2$ и $z_2=1$. Следовательно, имеется три "кольца" с центром в точке $a=0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической: а) круг $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $2<|z|<+\infty$ – внешность круга $|z| \le 2$. Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждом из этих "колец". Представим предварительно функцию в виде суммы простейших дробей:

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}. \qquad (*).$$

а) Разложение в круге $|z| < 1$. Преобразуем $(*)$ следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z}. \qquad (**)$$

Используя формулу 7) из (69), получаем: $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots, |z| < 1 \ (***)$;

далее $\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \ldots, |z| < 2 \ (****)$.

Подставляя эти разложения в $(**)$, получаем: $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \ldots - (1 + z + z^2 + \ldots) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{6}z^3 + \ldots$ – это разложение есть ряд Маклорена функции $f(z)$.

б) Разложение в кольце $1 < |z| < 2$. Ряд $(****)$ для функции $\frac{1}{1+z/2}$ остается сходящимся в этом кольце, так как $|z| < 2$. Ряд $(***)$ для функции $\frac{1}{1-z}$ расходится для $|z| > 1$. Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}. \qquad (*****)$$

Применяя формулу 7), получаем:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots. \qquad (******)$$

Этот ряд сходится, если $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т.е. при $|z| > 1$. Подставляя $(****)$ и $(******)$ в $(*****)$, найдем $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.

в) Разложение для $|z|>2$. Ряд $(****)$ для функции $\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}$ при $|z|>2$ расходится, а ряд $(******)$ для функции $\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}$ сходится, так как, если $|z|>2$, то и подавно $|z|>1$. Функцию $f(z)$ представим в таком виде:

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}}+\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right).$$

Используя формулу 7), получаем

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-...+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...\right)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+....$$

Замечание: этот пример показывает, что для одной и той же функции ряд Лорана, вообще говоря, имеет разный вид для разных колец.

Пример 4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ в окрестности ее особых точек.

Особые точки функции: $z_1=1, z_2=2$.

а) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_1=1$, т.е. в кольце $0<|z-1|<1$. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простейших дробей: $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}$. Правую часть преобразуем так: $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{1-(z-1)}$. Применяя разложение 7), в котором z заменим на – $(z-1)$, получим $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}-\left[1+(z-1)+(z-1)^2+...\right]$ или $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$.

б) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_2=2$, т.е. в кольце $0<|z-2|<1$. Имеем

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{z-2}+1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+...=$$

$$=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n.$$

5.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Тейлора, используя готовые разложения, и найти радиусы сходимости рядов:

а) $\sin(2z+1)$ по степеням $(z+1)$;

б) $\cos z$ по степеням $\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

в) $\dfrac{1}{3z+1}$ по степеням $(z+2)$;

г) $\ln(2+z-z^2)$ по степеням z.

2. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $a=0$ следующие функции:

а) $\dfrac{\sin^2 z}{z}$; б) $\dfrac{e^z}{z}$; в) $z^4\cos\dfrac{1}{z}$; г) $\dfrac{1+\cos z}{z^4}$.

3. Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

а) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, 1) $2<|z|<3$; 2) $3<|z|<+\infty$;

б) $\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, 1) $1<|z|<4$; 2) $4<|z|<+\infty$;

в) $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, 1) $|z|<1$; 2) $1<|z|<2$; 3) $2<|z|<+\infty$;

г) $\dfrac{z+2}{z^3-4z+3}$, $2<|z-1|<+\infty$;

д) $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $4<|z+2|<+\infty$.

6 Нули функции. Изолированные особые точки

6.1 Нули аналитической функции

Определение. Точка z_0 называется **нулем** аналитической функции $f(z)$ порядка (или кратности) n, если $f(z_0)=f'(z_0)=$ $=f''(z_0)=\ldots=f^{(n-1)}(z_0)=0$, $f^{(n)}(z_0)\neq 0$. В случае $n=1$ точка z_0 называется

простым нулем.

Теорема. Для того, чтобы точка z_0 была нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки имело место равенство $f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции $f(z) = 1 + \cos z$ и определить их порядки.

Из уравнения $1 + \cos z = 0$ находим точки $z_n = (2n+1)\cdot\pi$ $(n \in Z)$ – нули данной функции. Имеем: $f'[(2n+1)\pi] = -\sin[(2n+1)\pi] = 0$, $f''[(2n+1)\pi] = -\cos[(2n+1)\pi] = 1 \neq 0$, т.е. точки $z_n = (2n+1)\cdot\pi$ $(n \in Z)$ – нули второго порядка данной функции.

Пример 2. Найти нули функции $f(z) = \left(z^2+1\right)^3 \cdot sh\,z$ и определить их порядки.

Полагая $\left(z^2+1\right)^3 \cdot sh\,z = 0$, получаем, что $z^2+1=0$ или $sh\,z = 0$. Решая эти уравнения, находим нули функции $f(z): z = \pm i, z = n\pi i$ $(n \in Z)$. Пусть $z = -i$; тогда $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = (z+i)^3 \cdot \varphi(z)$, где функция $\varphi(z) = (z-i)^3 \cdot sh\,z$ является аналитической в точке $z = -i$, причем $\varphi(-i) = 8i \cdot sh\,i = -8 \cdot \sin 1 \neq 0$. Это означает, что точка $z = -i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что и точка $z = i$ является нулем третьего порядка. Исследуем нули $z = n\pi i$ $(n \in Z)$. Производная $f'(z) = 6z\left(z^2+1\right)^2 \cdot sh\,z + \left(z^2+1\right)^3 \cdot ch\,z$ в точках $z = n\pi i$ $(n \in Z)$ отлична от нуля. Следовательно, $z = n\pi i$ $(n \in Z)$ – простые нули функции $f(z)$.

6.2 Изолированные особые точки

Определение 1. Точка z_0 называется **особой точкой** аналитической функции $f(z)$, если в этой точке аналитичность функции нарушается.

Определение 2. Точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует окрестность $0 < |z - z_0| < \delta$ этой точки с исключенной точкой z_0, в которой $f(z)$ аналитична, кроме самой точки z_0.

Существует три типа изолированных особых точек. Приведем их определения.

Определение 3. Точка z_0 называется **устранимой особой точкой** функции $f(z)$, если разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержит главной части.

Определение 4. Точка z_0 называется **полюсом** кратности n функции $f(z)$, если в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 главная часть разложения содержит конечное число членов, причем младшим отличным от нуля коэффициентом является c_{-n} $(c_{-n} \neq 0)$.

Определение 5. Точка z_0 называется **существенно особой точкой** функции $f(z)$, если главная часть разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит бесконечное число членов.

Приведем критерии типа изолированных особых точек.

1) для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ $(|A| < +\infty)$;

2) для того чтобы точка z_0 была полюсом кратности n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z)(z - z_0)^n] = B$ $(|B| < \infty)$.

3) для того чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существовал.

Полезна следующая теорема.

Теорема (связь между нулями и полюсами). Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка n функции $f(z)$, нужно, чтобы она была нулем n-го порядка функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

Пример 1. Для функции $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$ особой точкой является $z_0 = 0$. Покажем это. $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1 - \cos z}{z^2} = \dfrac{1}{2}$; значит $z = 0$ есть устранимая особая точка.

Пример 2. Для функции $f(z) = \dfrac{1}{z^5}$ $z_0 = 0$ является особой точкой. Так как $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{z^5} = \infty$, z_0 – это полюс. Так как для функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = z^5$ точка $z_0 = 0$ является нулем пятого порядка, то $z_0 = 0$ – полюс пятого порядка функции $f(z) = \dfrac{1}{z^5}$.

Пример 3. Для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ $z=0$ является особой точкой. Разложение $f(z)$ в ряд Лорана: $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots$ в главной части содержит бесконечное число членов; это существенно особая точка.

Пример 4. Найти все особые точки функции $f(z)=\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ и определить их характер.

Особыми точками являются точка $z=0$ и точки, в которых знаменатель обращается в нуль. Имеем $e^{\frac{1}{z}}+1=0$, откуда $\left(\frac{1}{z}=Ln(-1)\right)$ $z_n=\frac{1}{(2n+1)\pi i}$, причем эти точки являются нулями первого порядка. Следовательно, в точках $z_n=\frac{1}{(2n+1)\pi i}$, $n\in Z$ функция $f(z)$ имеет простые полюса. Точка $z=0$ не является изолированной особой точкой, так как она является пределом полюсов: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$, это означает, что любая окрестность точки $z=0$ содержит бесконечное число особых точек $f(z)$.

6.3 Задачи для самостоятельного решения

1. У следующих функций найти нули и определить их порядки:

а) z^4+4z^2; б) $\frac{\sin z}{z}$; в) $(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$.

2. Определить характер особой точки $z_0=0$ для следующих функций:

а) $\frac{1}{z-\sin z}$; б) $\frac{1}{\cos z-1-\frac{z^2}{2}}$; в) $\frac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$.

3. Найти особые точки и определить их характер у следующих функций:

а) $\frac{1}{1-\sin z}$; б) $\frac{1-\cos z}{z^2}$; в) $e^{\frac{1}{z+2}}$; г) $\cos\frac{1}{z+2i}$; д) $\frac{z}{z^5+2z^4+z^3}$;

е) $z\cdot\sin\frac{1}{z}$; ж) $\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z^2}$; з) $\frac{z\cos\frac{1}{z}}{\cos z-1}$.

7 Вычеты. Применение их к вычислению интегралов

7.1 Вычет функции и его вычисление

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a.

Определение. **Вычетом** функции $f(z)$ относительно точки $z = a$ (обозначается $res\ f(a)$ или $\underset{z=a}{res} f(z)$) называется число, равное

$$res\ f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz, \tag{71}$$

где L – простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий внутри себя только одну особую точку a. В качестве L удобно брать окружность $|z-a| = \rho$ достаточно малого радиуса ρ. Из определения (71) вытекает, что вычет функции $f(z)$ совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения ее в ряд Лорана по степеням $(z-a)$:

$$res\ f(a) = c_{-1}. \tag{72}$$

Из представления (71) следует, что вычет в правильной и устранимой особой точках равен нулю. Вычет $f(z)$ в простом полюсе определяется по формуле

$$res\ f(a) = \lim_{z \to a} [f(z)(z-a)]. \tag{73}$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки a является частным двух аналитических функций

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем ц$(a) \neq 0$, ш$(a) = 0$, ш$'(a) \neq 0$ и a – простой полюс функции $f(z)$, то

$$res\ f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{74}$$

Вычет функции $f(z)$ в полюсе порядка m определяется по формуле

$$res\ f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z)(z-a)^m \right]. \tag{75}$$

Если точка a – существенно особая точка функции $f(z)$, то для определения вычета необходимо найти коэффициент c_{-1}, в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки a.

Пример 1. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$ в ее особых точках.

Особыми точками $f(z)$ являются точки $z=0$ и $z=\dfrac{\pi}{4}$.

В точке $z=0$ найдем: $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin^2 z}{z^2}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{1-\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{4}{\pi}$, т.е. точка $z=0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Поэтому $res\ f(0)=0$, в точке $z=\dfrac{\pi}{4}$ $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)=\infty$, т.е. точка $z=\dfrac{\pi}{4}$ - полюс (первого порядка) функции. По формуле (73) имеем $res\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\left[f(z)\cdot\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin z^2}{z^2}=\dfrac{16}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi^2}{16}$.

Пример 2. Определить вычет функции $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$ относительно точки $z=i$.

Точка $z=i$ является полюсом третьего порядка функции, т.к. $\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}=\dfrac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$. В соответствии с (75) получим:

$$res\ f(i)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[f(z)\cdot(z-i)^3\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3}=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[12(z+i)^{-5}\right]=-\frac{3i}{16}.$$

Пример 3. Найти вычет функции $f(z)=e^{\frac{3}{z-2}}$ в ее особых точках.

Особой для данной функции является точка $z=2$. Это – существенно особая точка (из свойств функции e^z следует, что существует $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$). Для определения вычета найдем коэффициент c_{-1} разложения функции $e^{\frac{3}{z-2}}$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$. Так как $e^{\frac{3}{z-2}}=1+\dfrac{3}{z-2}+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{3}{z-2}\right)^2+\ldots$, $0<|z-2|<+\infty$, следовательно $res\ f(2)=3$.

7.2 Основная теорема о вычетах и ее применение к вычислению контурных интегралов

Теорема Коши (основная теорема о вычетах). Если функция $f(z)$ аналитична на границе L области D и внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, то

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(\mathrm{a_k}) \tag{76}$$

Замечание. Теорему Коши о вычетах удобно использовать, когда внутри контура интегрирования находится небольшое число особых точек.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$, где $L: |z-2| = 2$.

Особыми точками подынтегральной функции являются $z=-2$ – полюс второго порядка, $z=\pm i$ – полюса первого порядка. Внутри окружности $|z-2|=2$ (рисунок 14) лежит лишь точка $z=-2$. Поэтому по формуле (76)

$$\int_L \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \operatorname{res} f(-2) = 2\pi i \lim_{z\to-2} \frac{d}{dz}\frac{1}{z^2+1} = 2\pi i \lim_{z\to-2} \frac{-2z}{\left(z^2+1\right)^2} = \frac{8\pi i}{25}.$$

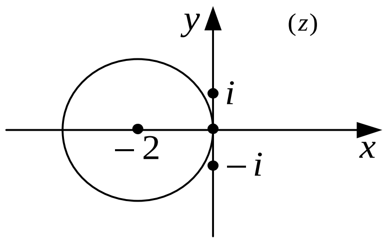


Рисунок 14

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int_L \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}dz, L: |z-i| = \frac{3}{2}$.

В области $D: |z-i| < \frac{3}{2}$ функция $f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$ имеет две особые точки: $z=i$ – полюс первого порядка и $z=0$ – существенно особую точку.

По формуле (74) $res\ f(i) = \left.\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{2z}\right|_{z=i} = (2ie)^{-1}$. Для нахождения вычета в точке $z=0$ необходимо иметь лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$. Из представления функции в виде

$f(z)=e^{1/z^2}\dfrac{1}{z^2}\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)^{-1}$ следует, что в ее лорановском разложении содержатся только четные степени z и $\dfrac{1}{z}$, так что $c_{-1}=0$ и $res\ f(0)=0$. По теореме Коши о вычетах (76) $I=\dfrac{\pi}{e}$.

7.3 Приложение вычетов к вычислению некоторых действительных интегралов

1. Если рациональная функция $R(x)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ не имеет полюсов на вещественной оси и степень знаменателя $Q(z)$, по крайней мере, на две единицы выше степени числителя $P(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{res } R(a_k) \tag{77}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – нули $Q(z)$, лежащие в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z>0$).

2. Пусть $R(\sin t, \cos t)=F(z)$, если положить $e^{it}=z$, где $t\in[0;2\pi]$, тогда $\cos t=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $\sin t=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$, $dz=i\cdot e^{it}dt$, $dt=\dfrac{dz}{iz}$.

Тогда

$$\int_{0}^{2\pi}R(\cos t, \sin t)dx=2\pi i\sigma, \tag{78}$$

где σ есть сумма вычетов функции $F(z)$ относительно полюсов, заключенных внутри окружности $|z|=1$.

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+9\right)^2}$.

Подынтегральная функция – четная, поэтому

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+9\right)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+9\right)^2}$$

Для функции $R(x)=\dfrac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}$: $P(z)=z^2$, $Q(z)=\left(z^2+9\right)^2$ – многочлены второй и четвертой степени $(m=2, k=4)$ и $k-m=2$. Нули функции $Q(z)$: $z=3i$ и $z=3i$ лежат вне вещественной оси, причем в верхней полуплоскости лежит лишь нуль $z=3i$. Условия формулы (77) выполнены для данной функции, и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+9\right)^2}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=3i}\frac{z^2}{\left(z^2+9\right)^2}=2\pi i\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+3i)^2}=2\pi i\lim_{z\to 3i}\frac{6iz}{(z+3i)^3}=\frac{\pi}{6}$$ и

$$I=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(a+b\cos t)^2}$ $(a>b>0)$.

Применяя $e^{it}=z$, получаем после преобразований $\left(\cos t=\frac{z^2+1}{2z}, dt=\frac{dz}{iz}\right)$ $I=\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(bz^2+2az+b\right)^2}=\frac{4}{i}2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}F(z_k)$. Внутри единичного круга $|z|=1$ при условии $(a>b>0)$ находится только один полюс (двукратный) $z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. Вычет функции $F(z)=\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$ относительно этого полюса

$$res\,F(z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]=\frac{a}{4}\left(a^2-b^2\right)^{-3/2}$$ и $$I=\frac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{3/2}}.$$

7.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Для следующих функций найти вычеты относительно ее конечных изолированных особых точек:

а) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$; б) $f(z)=\dfrac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$; в) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$;

г) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$; д) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$.

2. Вычислить контурные интегралы:

а) $\int_L\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$, $L:|z-i|=3$; б) $\int_L\dfrac{z}{e^z+3}dz$, $L:|z+1|=4$;

в) $\int\limits_L \frac{\sin \pi z}{(z-1)^5}dz,\quad L: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$; г) $\int\limits_L \frac{z^3}{2z^4+1}dz,\quad L: |z|=1$.

3. Вычислить действительные интегралы:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$;

г) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\cos t}$; д) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin t\, dt}{\frac{2}{3}+\cos t}$; е) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t\, dt}{2+\sin t+\cos t}$.

8 Варианты для самостоятельного решения

1 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{-16}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-2}{z+i}\right) > \mathrm{Im}\left(\dfrac{z-2}{z+i}\right)$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi]$): $\cos(2+i)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $u(x;y) = e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x$, $f(0) = 0$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \mathrm{Im}\, z\, dz$, где L – отрезок, соединяющий точки, $z_1 = 3$ и $z_2 = -3$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{dz}{z^2+1}$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-2)}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \dfrac{3z+1}{(z-2i)^2(z+3)} dz, \quad C: |z+2-i| = 3$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории

вычетов: $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\sin^2 t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.

2 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{6}$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): $\sin 2i$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x; y)$ или мнимой $v(x; y)$ и значению $f(z_0)$: $u(x; y) = x^2 - y^2 + 3x$, $f(0) = i$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int_L \operatorname{Im} z \, dz$, где L – полуокружность $|z| = 3$, $0 \le \arg z \le \pi$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint_{|z-1|=4} \frac{(z^2+1) \cdot \cos\frac{z}{3}}{z^2 + 4} dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = \frac{1}{(z-1)(2z-5)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \frac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных

особых точек: $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^2}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \dfrac{z}{(z+i)^2(z+4)}dz, \quad C:|z+2|=4$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{dt}}{\frac{5}{4}-\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$.

3 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1+i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $1<|z-3-2i|<2$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi]$): $\cos(1+i)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $u(x;y)=x^2-y^2+2x$, $f(i)=-1+2i$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \operatorname{Re} z\,dz$, где L – дуга параболы $y=2x^2$, начало которой в точке $z_1=0$ и конец в точке $z_2=1+2i$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z-2|=1}\dfrac{ze^z}{(z-2)^3}dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-5)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $\mathrm{f}(\mathrm{z})=\dfrac{\mathrm{z}^2+1}{(\mathrm{z}-1)^2(\mathrm{z}^2+4)}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \dfrac{z}{(z+2)^2(z-3i)}dz,\quad C:|z+1-2i|=3$.

11. Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{1+\frac{1}{2}\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{\left(x^2+4x-5\right)^2}dx$.

4 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1-i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $|z|\le 2,\ \arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi]$): $Ln(-2)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $v(x;y)=e^x\sin y+2xy+2y$, $f(0)=10$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \bar{z}\,dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=2+i$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{\left(z^2+1\right)^2} dz .$$

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = 2^{\frac{1}{z}} - 2$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \dfrac{e^z}{z\left(1-e^z\right)}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z) = \dfrac{z^4}{(z+1)^2}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \dfrac{e^z}{z^2(z-3i)} dz, \quad C: |z-1-2i| = 4$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{4\sin \mathrm{t} + 5}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2} dx$.

5 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[3]{i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $|z| > 2 + \operatorname{Re} z$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): e^{-3i}.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $u(x;y) = x^2 - y^2 - x$, $f(0) = 2$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L |z|dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 2 - i$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{z}{z^4 - 1} dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 (z-2)}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z) = \frac{2 + \sin z}{z(z+2i)}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \frac{2-z}{(z+2)^2 (z+4i)} dz, \quad C: |z + 2 + 3i| = 4$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2 + 4x + 13\right)^2} dx$.

6 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[3]{-1+i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $|z + 2 - i| < 3$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): $Ln\left(ie^2\right)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $v(x;y)=x+y$, $f(0)=i$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L z\cdot e^z\,dz$. где L – отрезок, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=\dfrac{\pi i}{2}$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z-1|=1}\dfrac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z^2}}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C\dfrac{1+2z}{(z-2i)(z-1)}dz,\quad C:|z+1-2i|=4$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{3-\sin t-\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{\left(x^2-2x-2\right)^2}dx$.

7 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt{-3-i\sqrt{3}}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $2|z|>\left|1-z^2\right|$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi])$: $\arcsin i$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $v = y - e^{2x}\sin y$, $f(0)=0$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_1^i z\cdot e^z dz$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z+1)}dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z)=\frac{1}{z-z^3}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z)=\frac{z^2}{(z-2)(z^2-1)}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}dz, \quad C: |z+1-i|=3$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\cos t-2}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$.

8 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[3]{-2-2i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $\operatorname{Im}\frac{1}{z}<-\frac{1}{2}$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi]$): $th\pi i$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $v=x^2-y^2-1$, $f(0)=0$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L (z-1)\cos z\,dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1=-\frac{\pi}{2}$ и $z_2=\frac{\pi}{2}$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z)=\frac{z+2}{z+z^2-2z^3}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z)=\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z)=\frac{\cos z}{\left(z^2+1\right)^2}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C\frac{z+z^2}{(z+i)^2(z+2)}dz,\quad C:|z+1+i|=2$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{5+3\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с

помощью теории вычетов: $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}dx$.

9 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1-i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $|z+1| \geq 2|z|$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $v = x^2 - y^2 + 3$, $f(0) = -1$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_L \sin z\, dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi i$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z) = \frac{z+2}{(z-2)(z+i)}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z) = \frac{z^2-2}{(z+i)(z-2)^2}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z+1)^2}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной кривой C: $\oint\limits_C \frac{z}{(z-1)^2(z-i)}dz, \quad C: |z-2-i| = 3$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int_{0}^{2\pi}\frac{dt}{2+\sin t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx$.

10 вариант

1 Найти все значения следующих корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{-1-i}$.

2 Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданному неравенству: $|z|+\operatorname{Re} z\le 1$.

3 Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi;\pi]$): $Ln\left(\sqrt{3}+i\right)$.

4 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ и значению $f(z_0)$: $u=-y(4x+1)$, $f(0)=0$.

5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\oint\limits_{|z|=1} z\cdot \operatorname{Re} z\,dz$.

6 С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл: $\int\limits_{L}\frac{\sin z}{(z+2)(z-i)}dz$.

7 Найти все лорановские разложения функции $f(z)$ по степеням z: $f(z)=z^2\cdot\sin\frac{1}{z}$.

8 Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип: $f(z)=\frac{1}{(z+i)^3}$.

9 Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек: $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

10 При помощи вычетов вычислить данный интеграл по заданной

кривой C: $\oint\limits_C \frac{3z+2}{(z-i)(z+5)}dz, \quad C: |z+3| = 5$.

11 Вычислить следующие определенные интегралы с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{10-6\cos t}$.

12 Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции с помощью теории вычетов: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{\left(4x^2+1\right)^2}dx$.

9 Решение задач «нулевого варианта»

1) Найти значения корней и изобразить их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение: корень n степени из комплексного числа z имеет n значений, которые находятся по формуле $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $k=0,1,2,\ldots,n-1$, $\varphi=\arg z$, $\sqrt[n]{|z|}$ - арифметический корень.

Представим комплексное число $z=1-i$ в тригонометрической форме: $|1-i|=\sqrt{2}$, $\arg(1-i)=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}$; $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Следовательно, по формуле имеем

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right).$$

Полагая $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$, найдем четыре значения корня (рисунок 15):

$$k=0,\quad w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right),\quad \varphi_0=-\frac{\pi}{16};$$

$$k=1,\quad w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right),\quad \varphi_1=\frac{7\pi}{16};$$

$$k=2,\quad w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right),\quad \varphi_2=\frac{15\pi}{16};$$

$$k=3,\quad w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right),\quad \varphi_3=\frac{23\pi}{16}.$$

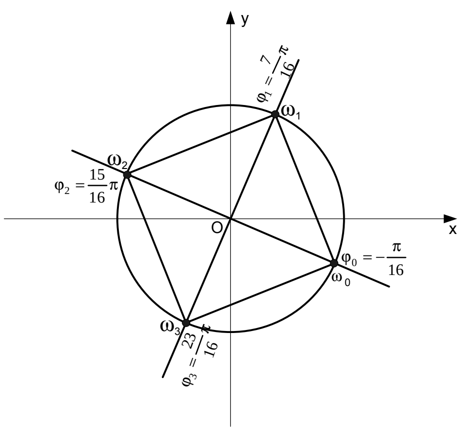


Рисунок 15

Ответ: $w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{p}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{p}{16}\right)\right)$,

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7p}{16} + i\sin\frac{7p}{16}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15p}{16} + i\sin\frac{15p}{16}\right),$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23p}{16} + i\sin\frac{23p}{16}\right).$$

2) Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $1 < |z+1| < 2$.

Решение: $|z+1| = |z-(-1)| = \rho((-1), z)$ - расстояние между точкой (-1) и точками $z \in M$. Это расстояние меньше 2, значит, точки множества M лежат внутри окружности $|z-(-1)| = 2$; $\rho((-1), z) > 1$, значит, точки множества M лежат вне окружности $|z-(-1)| = 1$. Итак, M – открытое кольцо (рисунок 16).

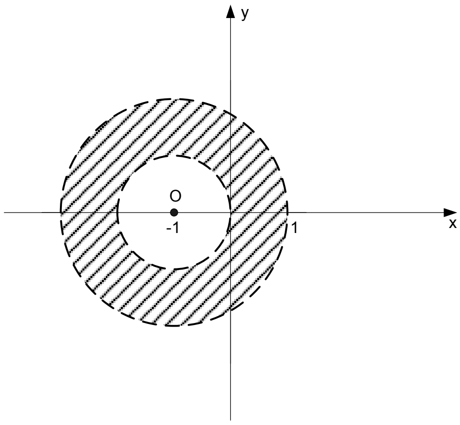


Рисунок 16

3) Представить в алгебраической форме следующие значения функций комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$): а) $e^{\frac{\pi i}{2}}$, б) $\cos(2-3i)$, в) $Ln\left(1+i\sqrt{3}\right)$, г) $(\sqrt{3}-i)^{2i}$.

Решение: а) $e^{\frac{\pi i}{2}} = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$. Здесь была применена формула Эйлера: $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

б) $\cos(2-3i) = \dfrac{e^{3+2i} + e^{-3-2i}}{2} = \dfrac{e^3(\cos 2 + i\sin 2) + e^{-3}(\cos(-2) + i\sin(-2))}{2} =$

$= \dfrac{\cos 2\cdot(e^3 + e^{-3})}{2} + i\dfrac{\sin 2\cdot(e^3 - e^{-3})}{2}$. Здесь применена формула $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

в) $Ln\, z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ki,\ k \in Z$. В нашем случае $z = 1 + i\sqrt{3}$, $|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, $\arg z = arctg\,\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, значит $Ln\left(1 + i\sqrt{3}\right) =$ $= \ln 2 + i\dfrac{\pi}{3} + i2\pi k,\ k \in Z$.

г) Применим логарифмическое тождество: $z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz}$.

$$(\sqrt{3} - i)^{2i} = e^{2i\cdot Ln\left(\sqrt{3} - i\right)} = e^{2i\left(\ln 2 + \frac{11\pi}{6}\pi i + 2\pi ki\right)} = e^{-\frac{11}{3}\pi - 4\pi k} \cdot e^{i\ln 4},$$

где $z = \sqrt{3} - i$, $|z| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$, $\arg z = arctg\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{11\pi}{6}$.

Найдем значение функции при $k = 0$ и представим его в алгебраической форме:

$$k = 0: \left(\sqrt{3} - i\right)^{2i} = e^{-\frac{11}{3}\pi} \cdot e^{i\ln 4} = e^{-\frac{11}{3}\pi}\left(\cos\ln 4 + i\sin\ln 4\right) = e^{-\frac{11}{3}\pi}\cos\ln 4 +$$
$$+ ie^{-\frac{11}{3}\pi}\sin\ln 4.$$

Ответ: а) $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$;

б) $\cos(2 - 3i) = \dfrac{\cos 2\cdot(e^{3} + e^{-3})}{2} + i\dfrac{\sin 2\cdot(e^{3} - e^{-3})}{2}$;

в) $Ln\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{3} + i2\pi k,\ k \in Z$;

г) $(\sqrt{3} - i)^{2i} = e^{-\frac{11}{3}\pi}\cos\ln 4 + ie^{-\frac{11}{3}\pi}\sin\ln 4$.

4) Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x; y)$ или мнимой $v(x; y)$ и значению $f(z_0)$: $v(x, y) = e^{y}\cos x$, $f(0) = 0$.

Решение: найдем действительную часть искомой функции $f(z) = u(x, y) + ie^{y}\cos x$, использую условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^{y}\cos x; \qquad (79)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^{y}\sin x. \qquad (80)$$

Ищем функцию в виде:

$$u(x, y) = \int e^{y}\cos x dx + \varphi(y). \qquad (81)$$

Здесь $\gamma(y)$ - произвольная неизвестная функция, зависящая от y.

Для функции u вида (81) очевидно, выполняется условие (80). Из (81) имеем $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^y \sin x + \varphi'(y).$

Но нам необходимо, чтобы $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ удовлетворяла условию (80).

Тогда $\varphi'(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y) = c = const, \quad u(x, y) = e^y \sin x + c,$

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (e^y \sin x + c) + ie^y \cos x = ie^y(\cos x - i \sin x) + c = ie^{-iz} + c$.

$f(0) = 0$, значит $f(0) = i \cdot e^0 + c$, $0 = i \cdot e^0 + c$, $c = -i$.

$f(z) = ie^{-iz} - i = i(e^{-iz} - 1)$.

Ответ: $f(z) = i(e^{-iz} - 1)$.

5) Вычислить интегралы от функции комплексного переменного по данной кривой:

а) $I = \int\limits_L (1 + i - 2\bar{z})dz$, где L – часть параболы $y = x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$;

б) $\int\limits_L e^{\bar{z}} dz$, где L – отрезок прямой $y = -x$, соединяющей точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = \pi - i\pi$ (рисунок 17).

Решение: а) для вычисления интеграла используем формулу

$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_L v(x, y)dx + u(x, y)dy$, где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Перепишем подынтегральную функцию в виде: $1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y)$.

Применим формулу и получим

$$I = \int\limits_L (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + i\int\limits_L (1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy.$$

Так как L – парабола $y = x^2$, то для параболы имеем: $dy = 2xdx, \quad 0 \le x \le 1$ и, значит,

$$I = \int\limits_0^1 \left[1 - 2x - (1 + 2x^2)2x\right]dx + i\int\limits_0^1 \left[1 + 2x^2 + (1 - 2x)2x\right]dx = -2 + \frac{4}{3}i.$$

б) для вычисления интеграла применим формулу

$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f[\sigma(t)]\sigma'(t)dt$, где $z = \sigma(t)$ – комплексное уравнение пути (кривой) интегрирования L, причем α - значение параметра t, которое отвечает началу пути интегрирования, β - концу пути интегрирования.

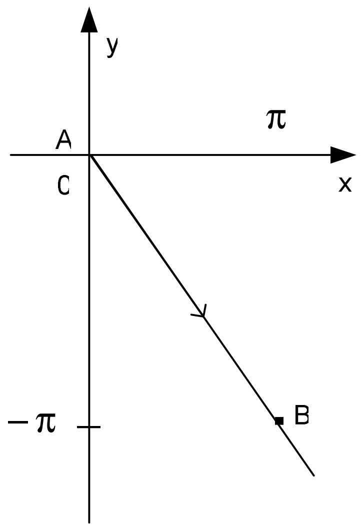


Рисунок 17

Запишем уравнение отрезка интегрирования L в комплексном виде $z = x + iy$; пусть $x = t$, $0 \le t \le \pi$, так как $y = -x$, то $y = -t$. Тогда $z = t - it \equiv \sigma(t)$ и $0 \le t \le \pi$ - комплексное уравнение отрезка интегрирования;

$$\bar{z} = t + it; \quad \sigma'(t) = (t - it)' = 1 - i; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 0;$$

$$f(z) = e^{\bar{z}}; \quad f[\sigma(t)] = e^{t+it}.$$

По формуле имеем

$$\int\limits_L e^{\bar{z}}dz = \int\limits_0^\pi e^{t+it}(1-i)dt = \int\limits_0^\pi e^{t(1+i)}(1-i)dt = (1-i)\int\limits_0^\pi e^{t(1+i)}dt =$$

$$= \left[(1-i)\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}\right]\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{1-i}{1+i}\left[e^\pi e^{i\pi} - 1\right] =$$

$$= \frac{(1-i)^2}{2}\left[e^\pi(\cos\pi + i\sin\pi) - 1\right] = i(e^\pi + 1).$$

Ответ: а) $I = \int\limits_L (1 + i - 2\bar{z})dz = -2 + \frac{4}{3}i$;

б) $\int\limits_L e^{\bar{z}}dz = i(e^{\mathrm{p}} + 1)$.

6) Вычислить интеграл, применив формулу Коши $I = \int\limits_{|z-i|=4} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{6}}dz$.

Решение: для вычисления воспользуемся формулой Коши

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dt}{z-z_0}.$$

Функция $w=\cos t$ аналитическая в круге $|z-i|\le 4$, значит в формуле можно положить $z_0=\frac{\pi}{6}$, $f(z)=\cos z$, $f(z_0)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (C – окружность $|z-i|=4$) и получим

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=4}\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{6}}dz;\qquad \int_{|z-i|=4}\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{6}}dz=2\pi i\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\pi\sqrt{3}i.$$

Ответ: $I=\int_{|z-i|=4}\frac{\cos z}{z-\frac{\text{p}}{6}}dz=\text{p}i\sqrt{3}.$

7) Найти все разложения данной функции $f(z)=\frac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана по степеням z.

Решение: дробь правильная. Найдем корни уравнения $z^2-2z-3=0$. Имеем два простых корня $z_1=-1$ и $z_2=3$ являются особыми точками функции $f(z)$.

Кольца аналитичности функции $f(z)$:

$$|z|<1,$$
$$1<|z|<3,$$
$$|z|>3.$$

Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\frac{5}{4}\frac{1}{z-3}.$$

В каждом кольце аналитичности элементарные дроби разлагаем в ряд, используя разложения в ряд Тейлора.

При $|z|<1$ получаем:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1,\quad \frac{1}{z-3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}},\quad |z|<3.$$

Следовательно, в круге $|z|<1$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\frac{5}{3^{n+1}}\right]z^n .$$

Этот ряд является рядом Тейлора, так как в точке $z=0$ функция $f(z)$ аналитична.

При $1<|z|<3$ получаем

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n}, \quad |z|>1.$$

Следовательно, в кольце $1<|z|<3$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot z^n}{4\cdot 3^{n+1}}.$$

При $|z|>3$ получаем

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z|>3.$$

Следовательно, в области $|z|>3$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\frac{1}{z^n}.$$

Итак,

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\frac{5}{3^{n+1}}\right]z^n, \quad |z|<1,$$

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot z^n}{4\cdot 3^{n+1}}, \quad 1<|z|<3,$$

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\frac{1}{z^n}, \quad 3<|z|<\infty.$$

Ответ: При $|z|<1$ $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\dfrac{5}{3^{n+1}}\right]z^n$,

при $1<|z|<3$ $\dfrac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{5\cdot z^n}{4\cdot 3^{n+1}}$,

при $|z|>3$ $\dfrac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\dfrac{1}{z^n}$.

8) Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип:

а) $f(z)=\dfrac{e^z}{z-z^3}$;

б) $f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z}}$.

Решение: а) разложим знаменатель дроби на простые множители, тогда функция примет вид $f(z)=\dfrac{e^z}{z-z^3}=\dfrac{e^z}{z(z-1)(z+1)}$. Находим нули знаменателя. Это точки $z_1=0, z_2=1, z_3=-1$. Причем все эти нули являются простыми, т.е. нулями первого порядка. Так как числитель дроби ни в одной из этих точек не обращается в нуль, то эти точки являются простыми полюсами исходной функции.

б) для функции $f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z}}$ – $z=0$ особая точка функции; во всех остальных точках функция аналитическая.

Для определения вида особой точки найдем разложение функции в ряд Лорана. Введем обозначение $t=\dfrac{1}{z}$. Тогда

$$e^{\frac{1}{z}}=e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}+\ldots;$$

$$z\cdot e^{\frac{1}{z}}=z+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots.$$

Главная часть разложения содержит бесконечное множество членов, $z=0$ – существенно особая точка.

Ответ: а) Для функции $f(z)=\dfrac{e^z}{z-z^3}$ точки $z_1=0, z_2=1, z_3=-1$ являются простыми полюсами.

б) Для функции $f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z}}$ точка $z=0$ является существенно особой точкой.

9) Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех ее изолированных особых точек:

а) $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$;

б) $f(z)=z^3\cdot\sin\dfrac{1}{z}$.

Решение: для вычисления вычетов относительно особых точек используют следующие формулы:

1) $res\, f(z_0)=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения в ряд Лорана

функции $f(z)$ в окрестности особой точки z_0;

2) $res\, f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$, если z_0 - простой полюс;

3) $res\dfrac{ц(z)}{ш(z)}=\dfrac{ц(z_0)}{ш'(z_0)}$, если $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$;

4) $res\, f(z_0)=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^n\right)^{(n-1)}$, если z_0 - полюс n-го порядка ($n\neq 1$).

а) особыми точками данной функции являются $z_1=-1$ и $z_2=3$.

В точке $z_1=-1$ получаем: $\lim\limits_{z\to -1} f(z)=\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{1}{(z+1)^2}\cdot\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{z+2}{z-3}=\infty$.

Следовательно, точка $z_1=-1$ – полюс второго порядка.

$$res\, f(-1)=\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}\cdot(z+1)^2\right)=\lim_{z\to -1}\left(\frac{z+2}{z-3}\right)'=\lim_{z\to -1}\frac{-5}{(z-3)^2}=-\frac{5}{16}.$$

В точке $z_2=3$ получаем: $\lim\limits_{z\to 3} f(z)=\infty$.

Следовательно, точка $z_2=3$ – полюс первого порядка функции $f(z)$.

По формуле получаем:

$$res\, f(3)=\lim_{z\to 3} f(z)(z-3)=\lim_{z\to 3}\left[\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}\cdot(z-3)\right]=\lim_{z\to 3}\frac{z+2}{(z+1)^2}=\frac{5}{16}.$$

б) особой точкой функции является точка $z=0$. Это существенно особая точка, так как разложение Лорана функции в окрестности точки $z=0$ имеет вид $f(z)=z^3\left(\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{1}{z^6}+\dfrac{1}{5!}\cdot\dfrac{1}{z^{10}}-\ldots\right)=z-\dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{5!}\cdot\dfrac{1}{z^7}-\ldots$, т.е. содержит бесконечное число отрицательных степеней z. Так как $c_{-1}=0$ в этом разложении, то $res\, f(0)=0$.

Ответ: а) $res\, f(-1)=-\dfrac{5}{16}$, $res\, f(3)=\dfrac{5}{16}$.

б) $res\, f(0)=0$.

10) При помощи вычетов вычислить данный интеграл $\oint\limits_{|z|=2} tgz\, dz$.

Решение: применим основную теорему о вычетах, по которой $\oint\limits_C f(z)\,dz=2\text{pi}\sum\limits_{k=1}^{n} res\, f(z_k)$, где z_k - особые точки функции $f(z)$, которые лежат внутри замкнутой кривой C.

В круге $|z|<2$ функция $tg\, z$ аналитична всюду кроме точек $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$, являющихся простыми полюсами. Все другие особые точки функции $tg\, z$ лежат вне окружности $|z|=2$ и поэтому не учитываются. Получаем:

$$res\, f\left(\frac{p}{2}\right)=\left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{p}{2}}=-1;\ res\, f\left(-\frac{p}{2}\right)=\left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\frac{p}{2}}=-1.$$

Поэтому $\oint\limits_{|z|=2} tgz\, dz=2\pi i((-1)+(-1))=-4\pi i$.

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} tgz\, dz=-4pi$.

11) Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3+\cos t}$ с помощью теории вычетов.

Решение: вводим подстановку $z=e^{it}$. Если t изменяется от 0 до 2π, то $z=e^{it}$ пробегает окружность $|z|=1$ в положительном направлении, так как $|z|=\left|e^{it}\right|=|\cos t+i\sin t|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1,\ dt=\frac{dz}{ie^{it}}=\frac{dz}{iz}$.

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3+\cos t}=\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}=\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z+3-2\sqrt{2}\right)\left(z+3+2\sqrt{2}\right)}.$$

Функция $ц(z)=\frac{1}{z^2+6z+1}$ внутри круга $|z|<1$ имеет единственный простой полюс $z_1=-3+2\sqrt{2}$. Находим

$$resц(-3+2\sqrt{2})=\lim_{z\to-3+2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\left(z+3+2\sqrt{2}\right)\left(z+3-2\sqrt{2}\right)}\cdot\left(z+3-2\sqrt{2}\right)\right]=\lim_{z\to-3+2\sqrt{2}}\frac{1}{z+3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{2p}\frac{dt}{3+\cos t}=\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}=2pi\cdot\frac{2}{i}\cdot\underset{z=-3+2\sqrt{2}}{res}\frac{1}{z^2+6z+1}=\frac{4p}{4\sqrt{2}}=\frac{p}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\int\limits_0^{2p}\frac{dt}{3+\cos t}=\frac{p}{\sqrt{2}}$.

12) Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ с помощью теории вычетов.

Решение: рассмотрим интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2}dz$, где γ - замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и полуокружности C верхней полуплоскости, опирающейся на отрезок $[-R, R]$. Найдем для $f(z)=\frac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2}$ полюсы: $z^2+1=0,\ z^2=-1,\ z_1=i,\ z_2=-i$.

Полюсы подынтегральной функции $z_1=i,\ z_2=-i$, являются полюсами второго порядка. Ни один полюс не лежит на действительной оси и степень числителя на три единицы ниже степени знаменателя. Нам нужны только те полюсы, которые находятся в верхней полуплоскости. Это будет $z_1=i$.

Используя соответствующую формулу, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=2\text{p}i\cdot\underset{z=i}{res}\frac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2}\text{, но}$$

$$\underset{z=i}{res}\frac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-i)^2(z-1)}{\left(z^2+1\right)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z-1}{(z+i)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{2+i-z}{(z+i)^2}=\frac{i}{4}.$$

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=2\pi i\left(\frac{i}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-\frac{\text{p}}{2}$.

Теория функций комплексной переменной росла и развивалась постепенно, по мере развития всего математического анализа. Чтобы представить себе, как формировалось понятие комплексного числа, представление о геометрическом смысле и функции комплексного переменного, приведем исторический очерк развития теории функций комплексного переменного, взятый из учебного пособия [2].

10 Из истории развития теории функций комплексного переменного

10.1 Первое появление комплексных чисел

На выражения вида $a+\sqrt{-b}$, где $b>0$, впервые обратил внимание итальянский ученый Джироламо Кардано (1501 – 1576). Кардано родился в Павии, окончил Павийский университет (1521), доктор медицины (1526), был практикующим врачом. Читал лекции по математике и медицине в Миланском университете (с 1534 г.). Профессор медицины Павийского университета с 1539 г.

Кардано был одним из тех математиков, которые открыли способы решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней. В 1545 г. вышла его книга «Великое искусство или о правилах алгебры», посвященная решению указанных уравнений. В книге рассматриваются и квадратные уравнения. Он обращает внимание на то, что при нахождении корней квадратного уравнения в некоторых случаях приходят к квадратному корню из отрицательного числа. Кардано рассматривал следующую задачу: найти два числа, сумма которых равна 10, а произведение равно 40. Эта задача сводится к решению системы уравнений

$$x+y=10,\ xy=40$$

или к решению квадратного уравнения $x^2-10x+40=0$. Решая это квадратное уравнение, он находит, что $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_1=5-\sqrt{-15}$. Очевидно $x_1+x_2=10$, должно быть также $\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=40$. Чтобы получить этот результат, необходимо принять, что $\left(-\sqrt{-15}\right)\left(\sqrt{-15}\right)=15$. Решения вида $a\pm\sqrt{-b}$ $(b>0)$ Кардано называл «софистически отрицательными». Он рассматривал такие решения как курьез и старался не пользоваться ими (считая, что в таких случаях задача не имеет решений).

Однако в дальнейшем ему снова пришлось рассматривать выражения $a+\sqrt{-b}$ $(b>0)$ при изучении кубических уравнений. Решая уравнение $x^3=ax+b$ $(a>0, b>0)$, он получал его корень по правилу, которое соответствует формуле

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}\,. \qquad (82)$$

По формуле (82) невозможно было найти корень, когда

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2<\left(\frac{a}{3}\right)^3. \qquad (83)$$

подкоренное выражение для квадратного корня оказывалось отрицательным; этот случай назвали неприводимым. Например, уравнение $x^3=15x+4$ имеет корень $x=4$, но по указанной формуле получаем $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Каким же образом из этой формулы извлечь число 4? Как объяснить это удивительное обстоятельство?

Чтобы ответить на подобные вопросы, математикам XVI-XVII вв., необходимо было научиться обращаться с выражениями вида $a+\sqrt{-b}$ $(b>0)$; в частности, изучить, как извлекать кубические корни из таких выражений. Сначала математики очень неохотно приступали к изучению этих выражений. Они называли выражения $a+\sqrt{-b}$ $(b>0)$ «мнимыми числами», «потайными решениями» уравнений. Считалось, что такие выражения не имеют реального содержания. Положение осложнялось тем, что к тому времени еще не успели как следует освоить и отрицательные числа. Как правило, отрицательных чисел стремились избегать. Об этом свидетельствует тот факт, что кубические уравнения, не содержащие члена с квадратом переменной, рассматривали в следующих трех видах:

$$x^3=ax+b,\ x^3+b=ax,\ x^3=ax+b,$$

где a и b – действительные положительные числа (а не в виде $x^3+px+q=0$, где p и q – действительные числа как положительные, так и отрицательные). Поскольку коэффициенты уравнения считались положительными, то необходимо было исследовать отдельно три указанных вида кубических уравнений. Даже в более позднее время отрицательные числа называли «ложными» (так как они меньше, чем ничто, т.е. меньше нуля). При рассмотрении выражений $a+\sqrt{-b}$ $(b>0)$ прибавлялась новая трудность – нужно извлекать квадратный корень из «ложного» числа. Получить что-нибудь реальное при такой операции не рассчитывали. Результаты этих операций считали бесполезными и старались их не применять.

Пользу мнимых величин первым оценил итальянский математик и инженер-гидравлик Бомбелли (1526-1573). Рафаэль Бомбелли родился в Болонье. Изучал математику в Болонском университете. Его научные исследования относились к алгебре и геометрии. В 1572 г. было опубликовано его сочинение «Алгебра». С помощью мнимых величин он объяснил, как получить действительные решения кубического уравнения $x^3=ax+b$ в неприводимом случае.

Он отмечал, что разность $\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3$ в этом случае является отрицательной, поэтому квадратный корень из нее не может быть ни положительным, ни отрицательным. Бомбелли предложил названия для такой величины: плюс от минуса *(piu di meno),* когда ее прибавляют и минус от минуса *(meno di meno),* когда ее вычитают. Таким образом, у Бамбелли *piu di meno R. q.* 3 означает $+\sqrt{-3}$, а *meno di meno R. q.* 5 означает $-\sqrt{-5}$. Далее в его книге приводятся правила умножения мнимых и действительных чисел. Эти правила даны в словесной формулировке, в современных обозначениях они записываются так:

$$(+1)(+i)=+i,(-1)(+i)=-i,(-1)(-i)=+i,$$

$$(+i)(+i)=-1,(+i)(-i)=1,(-i)(-i)=-1,\ (-i)(+i)=1.$$

Например, последнее правило имело такую формулировку: «Минус от минуса на плюс от минуса дает плюс». Указанными правилами были заложены камни фундамента теории комплексных чисел. Он провел ряд примеров на действия над комплексными числами: $8i+(-5i)=3i$.

Бомбелли обнаружил, что кубические корни из комплексно сопряженных чисел являются комплексно сопряженными числами. Этим он воспользовался для исследования неприводимого случая при решении кубического уравнения $x^3=ax+b$. Решение (821) этого уравнения он записал в виде

$$x=\sqrt[3]{p+\sqrt{-q}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{-q}} \tag{84}$$

и положил $\sqrt[3]{p+\sqrt{-q}}=u+\sqrt{-v}$, $\sqrt[3]{p-\sqrt{-q}}=u-\sqrt{-v}$; тогда $u^3=3uv+p$, $u^2+v=\sqrt[3]{p^2+q}$, откуда $4u^3=3cu+p$, $\left(c=\sqrt[3]{p^2+q}\right)$. Последнее уравнение имеет действительный корень. Таким образом, Бомбелли объяснил, как уравнение в неприводимом случае может иметь действительный корень, хотя он выражается через кубические корни из мнимых величин:

$$x=\left(u+\sqrt{-v}\right)+\left(u-\sqrt{-v}\right)=2u.$$

Необходимо отметить, что общего решения задачи Бомбелли не получил, поскольку для определения u он снова вынужден был рассматривать неприводимый случай: уравнение $4u^3=3cu+p$ совпадает с уравнением $x^3=ax+b$ при $u=\frac{x}{2}$, $p=\frac{b}{2}$, $c=\frac{a}{3}$. Путем проб он смог решить отдельные числовые примеры.

Вопрос об извлечении корней из комплексных чисел был рассмотрен Муавром в начале XVIII в. [2, с. 176–179]

10.2 Возникновение теории функций комплексного переменного

Первое применение комплексных чисел к решению задач математического анализа принадлежит Лейбницу и И. Бернулли. Именно в печатных работах и в научной переписке оба ученых, используя для интегрирования рациональных функций прием разложения на элементарные дроби, пришли к интегралам вида $\int \frac{dx}{ax+b}$, где a и b – комплексные числа, и рассматривали их как «мнимые логарифмы». Насколько, однако, смутными и противоречивыми были тогда сведения о комплексных числах видно, например, из того, что Лейбниц в 1702 году в одной из своих статей отзывается о мнимых числах как о «чуде анализа, ... двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием». В этой же статье он ставит следующий важный вопрос: можно ли любой многочлен с действительными коэффициентами представить в виде произведения множителей первой и второй степени? Лейбниц заявляет, что это не верно. В частности, он не заметил, что двучлен $x^4 + a^4$ можно разложить на множители $\left(x_2 + \sqrt{2}ax + a^2\right)$ и $\left(x_2 - \sqrt{2}ax + a^2\right)$, хотя и рассматривал возможность такого разложения.

Оперируя с логарифмами отрицательных и мнимых чисел, ни И. Бернулли, ни Лейбниц не знали, что нужно понимать под логарифмом комплексного числа. Это видно из спора между Лейбницем и Бернулли о логарифмах отрицательных чисел. Лейбниц утверждал, что логарифмы отрицательных чисел мнимы, а Бернулли пытался доказать, что они действительны. Хотя Лейбниц и занимал в этом споре формально правильную позицию, однако, по существу, был весьма далек от истины; он, так же как и его оппонент, и не подозревал, что логарифм многозначен. Теорию, устраняющую все затруднения, дал Эйлер в статье «Спор между Бернулли и Лейбницем о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (1749).

Бернулли утверждал следующее: поскольку $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$, то $\ln(-x) = \ln x$. Лейбниц возражал, что правило дифференцирования логарифмов справедливо только для положительных *x*. Эйлер не согласился с этим возражением Лейбница и отметил, что «аргумент И. Бернулли не доказывает того, что хочет доказать». Все дело в том, что из равенства дифференциалов двух функций $d\ln x$ и $d\ln(-x)$ следует лишь, что эти функции $\ln(-x)$ и $\ln x$ отличаются на постоянную. Постоянная эта равна $\ln(-1)$, так как $\ln(-x) = \ln((-1)x) = \ln(-1) + \ln x$; утверждение Бернулли означает, что $\ln(-1) = 0$, но это должно быть доказано.

Эйлер показал, что ни один из его предшественников, стоявших на противоположных позициях, не сумел обосновать свою точку зрения. Выяснив это и одновременно охарактеризовав всю трудность вопроса, он изложил правильное решение вопроса.

Леонард Эйлер сыграл важнейшую роль в развитии начал теории аналитических функций в XVIII в. Первый этап его изысканий заканчивается классическим сочинением «Введение в анализ бесконечных Т. 1» (1748). В начале этой книги автор подчеркивает, что «даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменной величины» и далее дает множество примеров плодотворности такого широкого толкования переменной. Таким образом, переменная величина у Эйлера является комплексной переменной. Во второй главе Эйлер формулирует теорему о том, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на множители первой и второй степени. Однако он не владеет полным доказательством этой важной теоремы. Фактически оно должно было бы основываться на доказательстве существования корня любого алгебраического уравнения с действительными коэффициентами: для такого доказательства математика XVIII в. еще не создала почвы. В седьмой главе «Введения в анализ» сообщаются установленные Эйлером формулы для показательной функции и логарифма, которые в современной записи выглядят так:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n, \ \ln z = \lim_{n\to\infty} n\left(z^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

В восьмой главе рассматриваются тригонометрические функции комплексной переменной $\sin z$, $\cos z$, $tg\, z$, $ctg\, z$; формула Муавра впервые в математической литературе появляется в явном виде

$$\left(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z\right)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

Здесь же Эйлер получает знаменитые формулы

$$\cos v = \frac{e^{+\sqrt{-1}v}+e^{-\sqrt{-1}v}}{2}, \ \sin v = \frac{e^{+\sqrt{-1}v}-e^{-\sqrt{-1}v}}{2\sqrt{-1}},$$

которые в настоящее время называют его именем, а также формулы

$$e^{+\sqrt{-1}v} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v, \ e^{-\sqrt{-1}v} = \cos v - \sqrt{-1}\sin v,$$

выражающие мнимые показательные количества через синусы и косинусы действительных дуг. Итак, Эйлер в течение 30-40-х годов XVIII в. разработал теорию элементарных функций комплексной переменной и к известным разложениям этих функций в степенные ряды добавил еще аппарат бесконечных произведений. В частности, он получил разложение функции $\sin z$ в бесконечное произведение

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{p^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4p^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9p^2}\right)\ldots.$$

Следующий этап в развитии теории функций комплексной переменной связан с открытием того фундаментального факта, что пары сопряженных гармонических функций, т.е. решения системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

могут быть получены как действительные и мнимые части произвольных аналитических функций $f(x+\sqrt{-1}y)$ комплексной переменой $x+\sqrt{-1}y$ и с приложениями этого факта к решению задач механики, картографии и интегрального исчисления. Основной предпосылкой для указанных исследований служило истолкование уравнения $P'_x = Q'_y$ условия, при котором выражение $Pdx+Qdy$ представляет полный дифференциал некоторой функции от x и y. Этот результат был получен Эйлером в 1734 г. (опубликован в 1740 г.).

В «Опыте новой теории сопротивления жидкости» (1752) Д' Аламбер, в связи с изучением обтекания твердого тела однородной невесомой жидкостью, решает задачу отыскания двух функций p и q по их полным дифференциалам

$$dq = Mdx + Ndz,\ dp = Ndx - Mdz.$$

Из сравнения этих дифференциалов он получает уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{dz}(=N),\ \frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial q}{dx}(=-M),$$

называемые обычно уравнениями Коши-Римана. Эти уравнения получил вновь (притом из весьма общих соображений) и существенно использовал Эйлер, поэтому исторически значительно правильнее называть их уравнениями Д'Аламбера-Эйлера.

В работах Д'Аламбера и Эйлера, в последующих трудах Эйлера и Лагранжа комплексные числа выступают как пары действительных чисел, имеющих тот или иной конкретный смысл – геометрический, физический или аналитический (пары функций). Опираясь на то или иное истолкование комплексных чисел, математики рассматривают соотношения между комплексными числами, как источник соотношений между действительными числами, как «сдвоенные» соотношения между последними.

Эйлер в связи с задачей о построении географических карт изучал проблему конформного отображения в общей постановке и использовал для этой цели комплексную переменную.

Таким образом, в XVIII в. был накоплен обширный материал по основам теории аналитических функций и выявлена плодотворность изучения функций комплексной переменной. Основную роль в этой работе играл петербургский академик Леонард Эйлер. [2, с. 179–182]

10.3 Уточнение концепции комплексного числа

В дальнейшей истории теории функций комплексной переменной существенную роль играло развитие и распространение представлений о комплексных числах как о векторах или точках плоскости. Весьма близок к таким представлениям был Эйлер в тех работах, где он переходил от записи комплексного числа в виде $x \pm \sqrt{-1}y$ к тригонометрической форме комплексного числа $s(\cos щ \pm \sqrt{-1}\sin щ)$, а также в статьях, где он переходил от точек $(x; y)$ плоскости (географической карты) к комплексным числам $x + iy$, выражал последние через долготу и широту точек сферы, а затем возвращался к координатам xOy.

Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и основных действий над ними впервые было предложено норвежцем Каспаром Весселем (1745–1818), работавшим геодезистом-картографом Датской академии наук. Оно содержится в его единственном математическом труде, представленном академии в 1797 г. и два года спустя напечатанном в ее записках: «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников». Целью Весселя было создать удобный аппарат решения геодезических задач, для чего он систематически разработал векторное исчисление на плоскости, тут же выступающее как геометрическая модель алгебры комплексных чисел. Идея выразить изменение направления отрезка (слово «вектор» введено позже) с помощью алгебраических символов формулируется совершенно отчетливо. «Настоящий опыт предпринимается с целью узнать, как аналитически представлять направление», и «посредством одного только уравнения, связывающего один неизвестный отрезок и несколько известных отрезков, получить такое выражение, которое сразу представляло бы искомый отрезок как по величине, так и по направлению». Обычные алгебраические операции позволяют изменить направление только на противоположное, т.е. положительное на отрицательное и наоборот. Создание исчисления отрезков, имеющих на плоскости произвольные направления, требует обобщения алгебры; нужно «расширить определения алгебраических операций, но так..., чтобы не было противоречия со старой теорией чисел...»

Применяя правило умножения к основным единицам, обозначаемым +1, –1, +ε, –ε, Вессель вывел следующие формулы:

$$(+1)(+1) = +1,\ (-1)(+1) = -1,\ (-1)(-1) = +1,$$
$$(+1)(+e) = +e,\ (+1)(-e) = -e,\ (-1)(+e) = -e,\ (-1)(-e) = +e,$$
$$(+e)(+e) = -1,\ (+e)(-e) = +1,\ (-e)(-e) = -1.$$

«Отсюда следует, – заключает Вессель, – что ε равно $\sqrt{-1}$».

Направленному отрезку ставится в соответствие комплексное число в тригонометрической форме $r(\cos v + e\sin v)$ и рассматриваются все операции над комплексными числами; формула Муавра доказывается и для дробного рационального показателя.

Таким образом, в «геометрическом анализе» Весселя нашли реальное истолкование и обоснование комплексные числа и действия над ними. Понятия, в течение двухсот пятидесяти лет представлявшиеся только удобными фикциями, получили ясный реальный смысл, а сам термин «мнимое число» стал всего лишь историческим пережитком.

К сожалению, замечательный труд Весселя стал известен широким кругам математиков только в конце XIX в., после того, как в 1897 г. Датская академия наук опубликовала его французский перевод. В конце XVIII вив начале XIX в. геометрическому истолкованию комплексных чисел и операций над ними пришли и другие ученые, среди которых живший в Париже уроженец Женевы Жан Робер Арган (1768–1822). Его сочинение «Опыт некоторого способа представления мнимых величин в геометрических построениях» было издано анонимно в Париже (1806). Оно оставалось незамеченным, пока Жозеф Диаз Жергонн (1771–1859), основатель журнала «Анналы чистой и прикладной математики», не опубликовал указанную работу в четвертом номере своего издания (1813). После этого сочинение Аргана получило широкую известность. Арган предложил краткое и элегантное доказательство основной теоремы алгебры.

В первой четверти XIX в. многие математики были весьма близки к геометрическому представлению комплексных чисел. Всеобщую известность и признание представления комплексных чисел в виде точек плоскости получило с 1831 г., когда было опубликовано сочинение Гаусса «Теория биквадратных вычетов», включавшее обоснование комплексных чисел и их геометрическую интерпретацию. Комплексные числа использовались Гауссом почти во всех его работах по арифметике, алгебре, теории функций, теории поверхностей (конформное отображение).

Долгий и сложный путь к геометрическому истолкованию комплексных чисел проделал Коши. Понимание им комплексных чисел менялось почти на протяжении всей его творческой деятельности. В «Алгебраическом анализе» (1821) он относит «мнимые выражения» (т.е. комплексные числа) и «мнимые уравнения» (т.е. равенства, содержащие комплексные числа) к разряду символических, понимая под последними такие, которые «взятые буквально не точны или лишены смысла, но из которых можно выводить точные результаты, модифицируя и меняя по определенным правилам либо сами уравнения, либо символы, в них содержащиеся». Он уточняет, что «всякое мнимое уравнение – это только символическое представление двух уравнений между двумя действительными количествами». Почти через четверть века Коши вновь обращается к выяснению понятия комплексного числа. Он снова повторяет прежнюю концепцию, ссылаясь на «Алгебраический анализ». Вместе с тем он продолжает искать иное, содержательное понимание комплексных чисел. Таким поискам посвящено несколько работ, опубликованных после 1847 г. Коши останавливается на геометрическом представлении комплексного числа, отдавая ему преимущество перед алгебраическим. Он предлагает «после новых и зрелых размышлений» полностью отказаться от знака $\sqrt{-1}$ и заменить теорию мнимых выражений теорией количеств, названных «геометрическими». При этом геометрическое количество r_p является вектором с длинной r (называемой модулем) и полярным углом p (аргумент или азимут). Геометрическое количество приводится к виду $x+iy$, который называется аффиксом точки $A(x;y)$.

В статье «О функциях геометрических количеств» Коши дал определение функции комплексной переменой. Если $z = x + iy$ аффикс подвижной точки A и $Z = X + iY$ – аффикс движущейся точки B, то «Z должно считаться функцией z, когда значение z определяет значение Z. Но для этого достаточно, чтобы X и Y были определенными функциями x и y. Тогда также положение движущейся точки A будет определять всегда положение движущейся точки B». Итак, Коши узаконил наглядное представление о функции комплексной переменной, которым он фактически (не вполне осознанно) пользовался в своих предыдущих исследованиях и которое вполне естественным представлялось Гауссу еще в 1811 г.

В заключение приведем некоторые сведения, относящиеся к символике и терминологии. Знак мнимой единицы i (от слова *imaginaire* – мнимый) предложил Эйлер в 1777 г. (опубликовано в 1794 г.), а в общее употребление ввел Гаусс в 1801 г.; Коши стал им пользоваться с 1847 г. Термин «комплексное число» встречается у Л. Карно (1803 г.), но в обиход вошло благодаря Гауссу (с 1831 г.). Слово «сопряженный» впервые применил Коши в 1821 г., «модуль» – Арган, за ним Коши. Слова «абсолютная величина» и запись $|a + bi|$ принадлежат Вейерштрассу (хотя об абсолютной величине $a + bi$ писал Арган). Термин «норма» $\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)$ для комплексного числа $a + bi$ предложен Гауссом. [2, с. 183–185]

10.4 Развитие комплексного интегрирования

Наибольшее значение для построения теории функций комплексной переменной имели исследования, в которых применялись и развивались эйлеровы методы вычисления определенных интегралов с использованием комплексной переменой.

Лаплас в цикле работ, опубликованных в 1782-1786 гг., развивал метод решения линейный разностных и дифференциальных уравнений, основанный на замене неизвестной функции $y(s)$ интегралами вида $\int \text{ц}(x) \cdot x^s dx$ или $\int \text{ц}(x) \cdot e^{-sx} dx$, где $\text{ц}(x)$ – новая неизвестная функция. Здесь же впервые встречается знаменитое преобразование Лапласа. Указанные интегралы берутся между пределами, удовлетворяющими некоторому уравнению – уравнению пределов, вообще неалгебраическому. Нередко корни этого уравнения оказывались мнимыми. Получив интегралы с «мнимыми пределами», Лаплас подвергал их различным преобразованиям, основанным на замене переменной интегрирования, и приходил к интегралам от действительных функций действительной переменной. Лаплас отмечал, что переходы от действительного к мнимому позволили ему найти значения многих определенных интегралов, и оценивал роль этих переходов как своего рода индукцию, признавая необходимой дополнительную проверку результатов, полученных на этом пути. Он указывал, что Эйлер одновременно с ним использовал переход от действительного к мнимому для вычисления интегралов, но что полученные

Эйлером результаты вышли в свет позднее соответствующих результатов Лапласа.

Проблема комплексного интегрирования в полном и совершенном виде была высказана Гауссом в его письме к Бесселю от 19 декабря 1811 г., которое, к сожалению, впервые было опубликовано вместе со всей перепиской двух ученых только в 1880 г. Гаусс писал следующее.

«Что нужно понимать под $\int ц(x)dx$ для $x = a + bi$. Очевидно, если хотят исходить из ясных понятий, нужно принять, что x, отправляясь от значения, для которого интеграл должен равняться нулю, посредством бесконечно малых приращений (каждое вида $a + bi$) переходит к $x = a + bi$ и тогда сложить все $ц(x)dx$. Так смысл вполне установлен. Но переход может совершаться бесконечно многими способами. Так же как совокупность всех действительных чисел можно мыслить в виде бесконечной прямой линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно сделать зримой посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой, определяемая абсциссой a и ординатой b, будет как бы представлять величину $a + bi$. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a + bi$ совершается поэтому по линии и, следовательно, возможен бесконечно многими способами. Я утверждаю теперь, что интеграл $\int ц(x)dx$ при двух различных переходах сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключенной между двумя линиями, представляющими переход, функция $ц(x)$ нигде не равна ∞. Это прекрасная теорема, нетрудное доказательство которой я дам при удобном случае. Она связана с другими прекрасными истинами, касающимися разложений в ряды. Переход в каждой точке следует производить так, чтобы ни разу не затронуть места, где $ц(x) = \infty$. Я настаиваю на том, что такие точки следует обходить, что для них, очевидно, первоначальное основное понятие интеграла $\int ц(x)dx$ теряет ясность и легко приводит к противоречиям.

Вместе с тем, отсюда ясно, как функция, порожденная посредством интеграла $\int ц(x)dx$ может иметь многие значения для одного и того же значения x, а именно в зависимости от того, будет ли при переходе $ц(x) = \infty$, допущен однократный или многократный обход вокруг точки, в которой или же такого обхода совсем не будет».

Здесь же Гаусс впервые дает полное объяснение многозначности логарифма, определяемого как $\int \frac{dx}{x}$.

Результаты исследований Коши, имеющие значение для истории теории функций комплексной переменной, первоначально изложены в его «Мемуаре о теории определенных интегралов» (представлен в 1814 г., опубликован в 1825 г.). В этом мемуаре нет еще того отчетливого понимания всей проблемы комплексного интегрирования, которое обнаруживается в цитированном письме Гаусса. Такое понимание складывалось у него постепенно, в течение почти трех десятилетий. Однако его труды были опубликованы в свое время (хотя и с некоторым опозданием), и именно они, а не идеи Гаусса, легли в фундамент систематического построения общей теории.

В «Мемуаре об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами» Коши определяет интеграл по аналогии с интегралом от функции действительной переменной как предел интегральной суммы. Определенный им интеграл от комплексной функции является интегралом вдоль некоторой кривой и посредством уравнений этой кривой сводится к обыкновенному определенному интегралу. Коши формулирует и доказывает здесь свою основную теорему: «Если $f(x+\sqrt{-1}y)$ конечна и непрерывна для $x_0 \le x \le X$ и $y_0 \le y \le Y$, то значение интеграла не зависит от природы функций $x = \text{ц}(t)$, $y = \text{щ}(t)$ (т.е. не зависит от кривой интегрирования, соединяющей в прямоугольнике $x_0 \le x \le X$, $y_0 \le y \le Y$ вершины $(x; y)$ и $(X; Y)$). Это и есть интегральная теорема для случая прямоугольной области.

В период с 1826 по 1829 г. Коши создает теорию вычетов. Название вычет (буквально: остаток) объясняется тем, что Коши пришел к этому понятию, отыскивая разность между интегралами, взятыми по таким двум путям, имеющим общее начало и конец, между которыми заключаются полюсы функции. В таком виде вычеты встречаются в указанных двух его мемуарах. Во втором из них уделяется наибольшее внимание анализу случаев, когда функция обращается в бесконечность внутри или на сторонах прямоугольника. Здесь интегралы по разным путям имеют вообще неравные значения, и Коши вычисляет разности между ними, делая различные предположения.

Сам термин и определение вычета встречаются впервые в его статье «О новом роде исчисления, аналогичного исчислению бесконечно малых» (1826). Коши вводит и определяет понятие следующим образом: «Если, после того как найдены значения *x*, обращающие $f(x)$ в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому через x_1, бесконечно малое количество ε и далее разложить $f(x_1 + \text{е})$ по возрастающим степеням этого количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени е и один из них будет произведением на конечный коэффициент, который мы назовем вычетом функции $f(x)$, относящимся к частному значению x_1 переменной x''.

Вслед за этой статьей Коши написал ряд других, в которых рассматривал приложения теории вычетов к вычислению интегралов, разложению функций в ряды и бесконечные произведения. [2, с. 186–188]

11 Биографический словарь

АРГАН Жан Робер (18.07.1708 – 13.08.1822) Швейцарский математик. Самоучка. Родился в Женеве. Работал счетоводом.

Основные работы относятся к геометрии. Опубликовал (1806) труд «Опыт способа представления мнимых величин в геометрических построениях», в котором независимо от К. Весселя предложил геометрическое истолкование комплексных чисел и операций над ними. Приложил свои геометрические идеи к доказательству некоторых теорем тригонометрии, геометрии и алгебры. [1, с. 20]

БЕРНУЛЛИ Иоганн I (27.08.1667 – 1.01.1748) Швейцарский математик. Родился в Базеле. Ученик Якоба I Бернулли. С 1695 – профессор математики Гронингенского (Голландия), с 1705 – Базельского университетов. Ведущий математик Европы XVIII в., учитель Г. Ф. А. Лопиталя и Л. Эйлера, а также своих сыновей Даниила I и Николая II. Развивал идеи Г. В. Лейбница в области дифференциального и интегрального исчислений.

Конспект лекций, читанных им Лопиталю, был положен в основу составленного Лопиталем «Анализа бесконечно малых для исследования кривых линий» (1696). В 1742 Бернулли издал «Курс интегрального исчисления».Основные исследования относятся к математическому анализу, теории дифференциальных уравнений и аналитической механике. В этих областях ему принадлежат следующие открытия: учение о показательных функциях, правило раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ (так называемое правило Лопиталя), интегрирование рациональных дробей; квадратура и спрямление различных кривых; теория каустик; определение понятия функции как аналитического выражения, составленного из переменных и постоянных, и другие. Открыл простейшую форму закона больших чисел. Вывел формулу для разложения функции в степенные ряды. Дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений. В области теории дифференциальных уравнений продвинул далее разработку методов их решения (однородное и линейное уравнения первого порядка, линейные уравнении с постоянными коэффициентами, так называемое уравнение Бернулли, задача о траекториях). Поставил и решил задачу о брахистохроне – одну из первых вариационных задач, совместно с Якобом I заложил основу вариационного исчисления, поставил задачу о геодезических линиях и нашел характерное геометрическое свойство геодезических линий. Известны его исследования в области механики: теория удара, движение тел в сопротивляющейся среде, учение о живой силе (совместно с Лейбницем), аналитическое правило равновесия, определение понятия работы, обобщение принципа виртуальных скоростей (для простейших случаев), задача о колебании натянутой струны, ценная линия. Основоположник математической физики. Оспаривал у Якоба I приоритет в постановке вариационной проблемы и у Даниила I – приоритет в постановке основной проблемы гидродинамики. Его научная корреспонденция составляет около 2500 писем.

Почетный член Петербургской АН (с 1725), член Французской АН. [1, с. 43–44]

БЕССЕЛЬ Фридрих Вильгельм (22.08.1784 – 17.03.1846) Немецкий астроном и математик, член Берлинской АН (с 1812). Родился в Миндене. Получил коммерческое образование, самостоятельно изучил астрономию и математику. В 1806 работал в частной обсерватории в Лилиентале, с 1810 – профессор Кёнигсбергского университета и директор астрономической обсерватории при университете.

Основные исследования относятся к астрономии. Вычислил орбиту кометы Галлея (1804), разработал теорию ошибок астрономических инструментов, открыл личное уравнение, т. е. систематическую ошибку, присущую конкретному наблюдателю. Проводил наблюдения за звездами и занимался математической обработкой результатов наблюдений, применял теорию вероятностей и метод наименьших квадратов. Разработал теорию солнечных затмений, определил массы планет. В области геодезии совместно с И. Я. Байером произвел триангуляцию в Восточной Пруссии, определил элементы земного сфероида. В области математики разработал теорию цилиндрических функций, введенных в 1766 Л. Эйлером (бесселевы функции).

Работы в области теории дифференциальных уравнений и небесной механики (уравнение Бесселя).

Почетный член Петербургской АН (с 1814). [1, с. 47–48]

БОМБЕЛЛИ Рафаэле (ок. 1530 – ок. 1572) Итальянский математик и гидравлик. Родился в Болонье. Изучал математику в Болонском университете.

Основные исследования относятся к алгебре. Написал трактат по алгебре, опубликованный в Болонье (1572), и трактат по геометрии. Алгебраический трактат явился важным шагом на пути к арифметизации математики. Бомбелли построил свою алгебру на базе теории чисел. Он ввел мнимые числа и установил законы действий над ними, разложил квадратные корни в непрерывные дроби, выявил взаимозависимость решения кубического уравнения и античных задач об удвоении куба и трисекции угла. Дал полную теорию кубических уравнений, биквадратного уравнения, а также уравнений, коэффициенты которых являются функциями неопределенной величины. Вместе с А. Пацци перевел первые пять книг «Арифметики» Диофанта. Написал комментарий к проблемам неопределенного анализа Диофанта. Усовершенствовал также алгебраическую символику, начал применять скобки, знак корня и величины $\pm i$. Предложил аксиомы действий с мнимыми и комплексными числами. Значительно опередил современную ему математику. [1, 59]

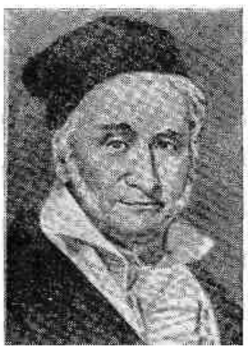
ВЕЙЕРШТРАСС Карл Теодор Вильгельм (31.10.1815 – 19.02.1897) Немецкий математик, член Берлинской АН (с 1856) и Мюнхенской АН (с 1863). Родился в Остенфельде. Изучал право в Боннском университете (1834 – 1838), затем математику в Кёнигсбергском университете. С 1856 – профессор Берлинского университета.

Основные работы посвящены математическому анализу, теории аналитических функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре. Построил логическое обоснование анализа, исходящее из предложенной им же теории действительных чисел. В области математического анализа установил систематическое использование понятий верхнего и нижнего пределов числовых множеств, развил учение о предельных точках, доказал теорему о возможности разложения любой непрерывной на отрезке функции в равномерно сходящийся ряд многочленов. Исследовал абелевы, эллиптические и аналитические функции. Нашел (1886) признак равномерной сходимости ряда или последовательности функций. Внес существенный вклад в теорию функций комплексного и действительного переменного, открыл функции, которые являются непрерывными в некотором промежутке, но не имеют производных в точках этого промежутка. В основу теории аналитических функций он положил степенные ряды, которыми пользовался и как средством изображения аналитических функций, и как аппаратом для исследования их свойств. Вейерштрассу принадлежат: теорема о том, что функцию комплексного переменного, аналитическую в круговом кольце, можно разложить в степенной ряд по целым (и в частности, отрицательным) степеням переменной (эту теорему независимо от него получил П. Л. Лоран), построение теории аналитического продолжения, теорема об аналитичности суммы равномерно сходящегося в некоторой области ряда аналитических функций, разложение целых функций в бесконечные произведения, новое построение теории эллиптических функций, основы теории функций многих переменных. Развил теорию билинейных и квадратичных форм, вывел правила сходимости рядов. В вариационном исчислении предложил (1879) необходимые и достаточные условия сильного экстремума. Ввел E-функции Вейерштрасса, которые лежат в основе классического вариационного исчисления. Ряд работ посвящен дифференциальной геометрии и линейной алгебре; они тесно связаны с его идеями в области анализа и теории функций. Вместе с Э. Э. Куммером организовал при Берлинском университете семинар по математике. Учениками Вейерштрасса были С. В. Ковалевская, М. Г. Миттаг-Леффлер, И. Л. Фукс и др.

Почетный член Петербургской АН (с 1895, чл.-кор. с 1864), член Парижской АН (с 1868). [1, с. 94–95]

ВЕССЕЛЬ Каспар (8.06.1745 – 25.03.1818) Датский математик. Родился в Ионеруде (Норвегия). По профессии землемер. Геодезист-картограф Датской АН.

В 1797 подал Датской АН мемуар «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников» (опубликован в 1799). В нем изложено систематически разработанное векторное исчисление на плоскости, представляющее собой геометрическую модель алгебры комплексных чисел. [1, с. 98]



ГАУСС Карл Фридрих (30.04.1777 – 23.02.1855) Немецкий математик, астроном, геодезист. Родился в Брауншвейге. В 1795 – 1798 учился в Гёттингенском университете. В 1799 работал в Брауншвейгском университете, с 1807 – в Гёттингенском университете, в 1807 – 1855 – одновременно директор университетской астрономической обсерватории.

Творчество Гаусса было чрезвычайно разносторонним. Его исследования посвящены высшей алгебре, теории чисел, дифференциальной геометрии, геодезии, небесной механике, теоретической астрономии, теории электричества и магнетизма. В 1801, будучи студентом, он написал работу «Арифметические исследования», излагающую вопросы теории чисел и высшей алгебры. В ней дана обстоятельная теория квадратичных вычетов, первое доказательство квадратичного закона взаимности – одной из центральных теорем теории чисел. Разработал новую арифметическую теорию квадратичных форм. Доказал основную теорему алгебры, исследовал уравнения, к которым приводит задача деления круга на равные части. Строго изложил теорию комплексных чисел. Заложил основы теории сходимости рядов. Важное значение имеет данное им решение двучленных уравнений вида $x^{2n+1}=1$ для случая, когда $2n+1$ – простое число. В астрономии с помощью специально разработанного вычислительного метода он с большой точностью установил местонахождение планеты Церера. Опубликовал (1809) работу «Теория движения небесных тел». В связи с проводимыми им астрономическими вычислениями, основанными на разложении интегралов соответствующих дифференциальных уравнений в бесконечные ряды, Гаусс предпринял исследование сходимости бесконечных рядов и разработал учение о гипергеометрическом ряде (1812). В 1820 ему было поручено произвести геодезическую съемку Ганновера. Для этого он разработал соответствующие вычислительные методы (в том числе метод наименьших квадратов), практически приведшие к созданию нового научного направления – высшей геодезии, и организовал съемку и составление карт. С практикой геодезии связаны и его геометрические исследования. Его основная работа в этом направлении «Общие изыскания о кривых поверхностях» (1827) содержит много новых для теории поверхностей положений, в частности определение общей кривизны в каждой точке поверхности, имеющее важное значение в теории деформации гибких поверхностей. Эта «гауссова кривизна» (произведение кривизны главных нормальных сечений) не изменяется при изгибаниях поверхностей. Около 1818 г. Гаусс пришел к идее о возможности неевклидовой геометрии. Доказал возможность построения с помощью циркуля и линейки правильных 17- и 257-угольников.

Исследования по математической и теоретической физике (1830 – 1840) в значительной части выполнены им совместно с физиком В. Вебером. Ими была создана абсолютная система электромагнитных единиц и сконструирован (1833) первый в Германии электромагнитный телеграф. В 1835 г. Гаусс основал при астрономической обсерватории Гёттингенского университета магнитную обсерваторию. Его работы в области физики касались также теории потенциала, учения о капиллярности и теоретической оптики. «В Гауссе мы видим человека с универсальными математическими способностями; им затрагивались почти все главные отрасли чистой и прикладной математики, причем всюду девизом автора было «немного, но зрело»; он оставил неопубликованными много работ, считая их недостаточно обработанными. Гаусс всегда стремился к оригинальности; когда Гаусс затрагивав ранее уже разрабатывавшийся вопрос, казалось, что он не знаком с предшествовавшими работами; настолько оригинальными были приемы и формы, которые Гаусс придавал изложению. К сожалению, эта оригинальность методов при излишней их лаконичности делает многие места сочинений Гаусса весьма трудными для читателя. Замечательная способность Гаусса к числовым выкладкам обнаружилась во многих его работах, о чем свидетельствуют посмертные рукописи…» (Д. А. Граве). Гётгингекская АН издала (начиная с 1908) 11 томов сочинений Гаусса, в частности его дневник и материалы по неевклидовой геометрии и теории эллиптических функций. [1, с. 121-123]

Д'АЛАМБЕР *Жан Лерон* (16.09.1717 – 29.10.1783) Французский математик, механик, философ, член Французской АН (с 1754. адъюнкт с 1741). Родился в Париже. Окончил Коллеж Мазарини (1735), где изучал право. Самостоятельно занимался математикой, написал и представил в Французскую АН работы о движении твердых тел в жидкости (1739) и об интегральном исчислении (1740).

Исследования относятся к механике, гидродинамике, математике. Его «Трактат о динамике» (1743) явился первой работой, в которой были сформулированы общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем, причем задача динамики сводилась к задаче статики. В области небесной механики Д'Аламбер исследовал (1746) общие причины ветра, свод их к влияниям Солнца и Луны на атмосферу Земли, изучал движения планет. В 1747 представил Французской АН мемуар о нарушениях эллиптического движения планет вокруг Солнца под влиянием их взаимного притяжения. Установил три основных принципа динамики: принцип инерции, принцип параллелограмма сил и принцип равновесия (принцип Д'Аламбера). Исследование этих принципов продолжил в 1769. Его «Трактат о равновесии и движении жидкостей» (1744) – одно из первых сочинений по гидродинамике; здесь он пользуется принципом равновесия. В этой и других работах по гидродинамике пытался применять к исследованию одновременно математику и эксперимент; таким образом, он стал одним из основоположников методов прикладной механики. Исследовал законы сопротивления при движении тел в жидкостях. Указал интегрируемый в квадратурах случай. Дал объяснение вихреобразования и явления разреженности в жидкости в процессе движения в ней твердого тела. Вместе с М. Ж- А. Н. Кондорсе и Ш. Боссю провел в 1775 – 1777 гг. ряд опытов по определению сопротивления тел, движущихся в каналах и в безграничной жидкости.

Основные математические исследования Д'Аламбера относятся к теории дифференциальных уравнений. Его работы вместе с исследованиями Л. Эйлера и Д. I Бернулли послужили основой математической физики. При решении одного из уравнений гидродинамики впервые применил функции комплексного переменного. Установил связь аналитических функций с гармоническими функциями. Стремился обосновать исчисление бесконечно малых с помощью теории пределов. Некоторые работы Д'Аламбера посвящены теории рядов, алгебре. Предложил (1748) решение уравнения колебания струны в форме, зависящей от двух произвольных функций.

Вместе с философом-просветителем Д. Дидро предпринял в 1751 г. издание «Энциклопедии наук, искусств и ремесел». Написал для нее вступительную статью «Очерк происхождения и развития наук», в которой предложил классификацию наук, и ряд статей. В 1757 г. отошел от издания «Энциклопедии».

Почетный член Петербургской АН (с 1764) и член ряда других академий наук. [1, с. 156–157]

ЖЕРГОНН *Жозеф Диас* (19.06.1771 – 4.05.1859) Французский математик, чл.-кор. Парижской АН. Родился в Нанси. Получил домашнее образование. С 1792 г. – артиллерийский офицер. В 1795 – 1815 – профессор Центральной школы в Ниме, с 1816 г. – ун-та в Монпелье.

Работы посвящены геометрии. Ввел (1810) термин «поляра». Предложил (1827) классификацию кривых. Сформулировал принцип дуальности в проективной геометрии (оспаривал приоритет Ж. В. Понселе в этом вопросе). Усовершенствовал аналитическую геометрию, доказывал преимущество аналитических методов перед синтетическими. Развил идеи Г. Монжа. В отличие от Понселе, который разрабатывал синтетические (чисто геометрические) методы, развивал методы аналитические. Решил задачу Аполлония. Получил также результаты в теории комбинаторики и теории линейных уравнений со многими неизвестными.

Основатель и редактор (1810 – 1832) первого во Франции математического журнала «Les annales de la mathematique pure et appliquee». [1, с. 182]

КАРДАНО Джироламо (Джеронимо) (24.09.1501 – 21.09.1576) Итальянский математик, механик, врач. Родился в Павии. Окончил Павийский университет (1521). Доктор медицины (1526). Был практикующим врачом. С 1534 г. читал в Миланском университете лекции по математике и медицине. С 1539 г. – профессор медицины Павийского университета. Около 1560 г. перешел в Болонский университет.

В 1570 г. был арестован и лишен права преподавания, после освобождения переехал в Рим.

Математические работы посвящены алгебре. В 1545 г. издал труд «Великое искусство», в котором привел решение уравнений третьей и четвертой степеней. Решение уравнения третьей степени ему сообщил Н. Тарталья, а решение уравнения четвертой степени – его ученик Л. Феррари. Открыл линейное преобразование корней, с помощью которого можно привести полное кубическое уравнение к виду, свободному от члена второй степени, и указал на зависимость между корнями и коэффициентами уравнения, а также на делимость многочлена на $x-a$, если a – его корень. В исследованиях Кардано впервые появляются мнимые числа; он первым допустил существование отрицательных корней уравнений, мнимые числа считал фиктивными. Вывел общие правила передачи движения применительно к зубчатым механизмам. Определил передаточное число, указал, что для изучения машины необходимо разложить ее на элементарные составляющие, сформулировал правила построения часовых механизмов. [1, с. 207–208]

КОШИ Огюстен Луи (21.08.1789 – 23.05.1857) Французский математик, член Института Франции (с 1816 г.) по назначению на место исключенного из него Г. Монжа. Родился в Париже. Окончил Политехническую школу (1807) и Школу мостов в дорог (1810) в Париже. В 1810 – 1813 работал инженером на сооружении военного порта в Шербуре.

С 1816 – профессор Политехнической школы, в 1816 – 1830 – Сорбонны, а в 1848 – 1857 – Коллеж де Франс.

Коши написал более 700 математических работ, в которых заложил основы современной математики – теории функций, математической физики, математического анализа. Развивал теорию рядов, теорию детерминантов, интегральное исчисление, теорию дифференциальных уравнений. Создал теорию функций комплексного переменного, предложив геометрическое представление комплексного переменного как точки, перемещающейся в плоскости по пути интегрирования, и дал выражение аналитической функции в виде интеграла (интеграл Коши), вывел отсюда разложение функции в степенной ряд. Определил понятие непрерывности функции. Заложил основы теории сходимости рядов, дал определение интеграла как предела сумм, доказал (1846) теорему об интеграле на замкнутом контуре. Разработал теорию вычетов и ее приложений к различным вопросам анализа. В теории дифференциальных уравнений ему принадлежит заслуга постановки одной из основных задач этой теории (задача Коши). Доказал основные теоремы существования решений для случая действительных и комплексных переменных (для последних он развил метод мажорант). Предложил метод интегрирования уравнений с частными производными первого порядка. Ряд работ в области геометрии, алгебры, теории чисел. Ввел понятие конечной группы.

В области теории упругости ввел понятие напряжения, составил дифференциальные уравнения равновесия для элементарного прямоугольного параллелепипеда, расширил понятие деформации, вывел соотношения между шестью компонентами напряжения и шестью компонентами деформации для изотропного тела. Исследовал также деформацию прямоугольных стержней, в частности задачу о кручении.

В оптике математически развил теорию Френеля и теорию дисперсии. Научному творчеству Коши свойствен «глобальный» подход к решению поставленных проблем: зная результаты для бесконечного числа значений исследуемого объекта (что графически изображается в виде кривой), он выводил общие свойства функции для любого значения объекта.

Почетный член Петербургской АН (с 1831). [1, с. 243–244]

ЛАПЛАС Пьер Симон (23.03.1749 – 5.03.1827) Французский математик, физик и астроном, адъюнкт Французской АН (с 1773 г.), член Национального института (с 1795 г.). Родился в Бомон-ан-Ож (Нормандия) в крестьянской семье. Учился в школе бенедиктинцев. Отличался замечательной памятью и способностями, благодаря чему быстро овладел несколькими языками, а также изучил математику и астрономию. В 1766 г. приехал в Париж, где при помощи Ж. Л. Д'Аламбера получил место профессора в Парижской артиллерийской школе (1775), а затем – экзаменатора Артиллерийского корпуса. После Великой французской революции принимал деятельное участие в реорганизации системы образования во Франции и в создании Высшей нормальной и Политехнической школ. В 1790 г. был председателем Палаты мер и весов, в 1795 г. вошел в состав руководства Бюро долгот, в 1799 – министр внутренних дел.

Научные интересы Лапласа были разносторонними. Важнейшие направления его исследований – математика, небесная механика и математическая физика. Математические исследования Лапласа относятся к теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической теории вероятностей. Наиболее важны его работы по дифференциальным уравнениям, в частности по интегрированию уравнений с частными производными методом каскадов. Лаплас является одним из создателей математической теории вероятностей, для разработки которой он ввел так называемые производящие функции и применил преобразование, носящее его имя (преобразование Лапласа). Доказал (1812) биномиальный закон распределения вероятностей и первые предельные теоремы теории вероятностей. Систематизировал и усовершенствовал методы и теории, существовавшие до него. Доказал предельную теорему о распределении отклонения частоты появления события при независимых испытаниях от его вероятности (теорема Лапласа). Развил теорию ошибок и метод наименьших квадратов. Разработал теорию шаровых функций. В алгебре доказал важную теорему о представлении определителей суммой произведений дополнительных миноров. Работал над созданием символического исчисления.

Лаплас завершил создание небесной механики на основе закона всемирного тяготения Ньютона. Он доказал, что этот закон полностью поясняет движение планет Солнечной системы, если представить их взаимные возмущения, носящие периодический характер, математическими рядами. Доказал устойчивость Солнечной системы, определяемую тем, что благодаря движению всех планет в одну сторону, малым эксцентриситетам и малым взаимным наклонам их орбит должна существовать неизменяемость средних расстояний планет от Солнца. Открыл причины периодических неравенств в движениях Юпитера и Сатурна и связь между движениями спутников Юпитера (законы Лапласа). Определил условия равновесия кольца Сатурна, доказал, что оно не может быть сплошным. Установил, что причина ускорения движения Луны зависит от периодических изменений эксцентриситета лунной орбиты, и по неравенствам в движении Луны определил сжатие земного сфероида. Разработал теорию приливов и отливов, установил ряд положений теории устойчивости. Результаты его исследований изложены в «Трактате о небесной механике» (т. 1–5, 1798–1825). Развил и обосновал космогоническую гипотезу И. Канта (гипотеза Канта – Лапласа) о возникновении Солнечной системы. Почетный член Петербургской АН (с 1802). [1, с. 271–272]

ЛЕЙБНИЦ Готфрид Вильгельм (1.07.1646 – 14.09.1716) Немецкий математик, физик, философ, изобретатель, юрист, историк, языковед. Основоположник математического анализа. Родился в Лейпциге. Изучал философию и право в Лейпцигском (1661–1666) и математику в Иенском (1663) университетах. Занимался в Майнце вопросами кодексации права. Был домашним учителем в Париже (1672 – 1676). В 1676–1716 – придворный библиотекарь и тайный советник юстиции герцога Ганноверского. В 1687–1690 совершил путешествие по Южной Германии, Австрии и Италии с целью сбора материала для истории Брауншвейга. Принял участие в создании Берлинской академии наук и был ее первым президентом (в 1700 г.). Способствовал открытию академий наук в Лейпциге, Вене и Петербурге. В 1711, 1712 и 1716 встречался с Петром I, работал над проектом организации образования в России. В 1712–1714 жил в Вене.

Основные математические работы Лейбница посвящены разработке дифференциального и интегрального исчислений. Опубликовал исследование о методе дифференциального (1684) и интегрального (1686) исчислений в лейпцигском журнале «Acta eruditorum». Частные и разрозненные приемы Лейбниц свел в единую систему взаимосвязанных понятий анализа, что позволило производить действия с бесконечно малыми по определенному алгоритму. Дал определения дифференциала и интеграла, ввел символы дифференциала d и интеграла $\int$, разработал правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, любой постоянной степени, функции от функции, дал определения экстремальных точек и точек перегиба; установил взаимно обратный характер основных операций анализа – дифференцирования и интегрирования. Лейбницу принадлежит формула для многократного дифференцирования произведения (формула Лейбница) и правила дифференцирования ряда важнейших трансцендентных функций. Заложил основы теории рядов и теории дифференциальных уравнений. Им предложены термины математического анализа, вошедшие с того времени во всеобщее применение, – функция, дифференциал, дифференциальное уравнение, алгоритм, абсцисса, ордината и др. Разработка основ математического анализа была выполнена Лейбницем независимо от И. Ньютона, но, несмотря на это, между ними разгорелся длительный и бесплодный спор о приоритете. Наряду с Ньютоном, Х. Гюйгенсом, Я. I Бернулли и И. I Бернулли Лейбниц решил задачу о брахистохроне. Вып одним из основоположником математической логики. По его мнению, универсальная математика должна стать истинно формальной логикой. Пытался создать символический аппарат логики. Начал разработку символического исчисления. Создал математическую школу, к которой принадлежали И. I и Я. I Бернулли, Г. Ф. А. Лопаталь, Л. Эйлер, Э. И. Чирнхаус.

Изучал движение. Утверждая относительность пространства, уточнил понятие силы, механику ввел понятие живой силы. Сформулировал принцип наименьшего действия. Исследовал теорию сопротивления балок изгибу. Внес также существенный вклад в создание механизмов для выполнения различных математических операций. Работал над созданием механизма для решения алгебраических уравнений. Изобрел некоторые оптические и пневматические механизмы. Работал над изобретением паровой машины. Изобрел счетную машину и первый интегрирующий механизм. Педагогические и философские идеи Лейбница в области математики развил его ученик Х. Вольф.

Другие работы Лейбница относились к праву, биологии, палеонтологии, языкознанию, политике, педагогике и пр.

Член Лондонского королевского общества (с 1679 г.) и Французской АН (с 1700 г.). [1, с. 278–279]

МУАВР Абрахам де (26.05.1667 – 2.11.1754) Английский математик, член Лондонского королевского общества (с 1697 г.). Родился и Витри-ле-Франсуа (Франция). Учился в Сорбонне у Ж. Озанама. В 1685–1688 находился в заключении как протестант, после чего эмигрировал в Англию. С 1703 был в дружбе с И. Ньютоном.

Обобщил результаты П. Р. Монмора по теории вероятностей, оспаривая в 1711 г. его приоритет в установлении вероятности выигрыша. Построил теорию рекуррентных рядов. Установил связь между рекуррентными последовательностями и разностными уравнениями, занимался решением однородных линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Известна формула Муавра для n-ой степени комплексного числа

$$z^n = \text{с}^n\left(\cos n\text{ц} + i\sin n\text{ц}\right).$$

Сформулировал теорему о биномиальных множителях уравнений вида $x^{2m} - 2px^m + 1 = 0$.

Развил проблему интегрирования рациональных алгебраических функций, поставленную Р. Котсом.

Член Французской и Берлинской АН. [1, с. 336–337]

РИМАН Георг Фридрих Бернхард (17.09.1826 – 20.07.1866) Немецкий математик. Родился в Брезеленце (Ганновер). Уже в средней школе начал читать труды Л. Эйлера, А. М. Лежандра и других математиков. В 1846 г. поступил в Гёттингенский университет, где слушал лекции К. Ф. Гаусса. В 1847 – 1849 гг. в Берлинском университете слушал лекции П. Г. Дирихле Лежена, Я. Штейнера, К. Г. Я. Якоби.

Его учителем и другом стал Дирихле, оказавший влияние на научное развитие Римана. В 1849 г. вернулся в Гёттинген, где сблизился с физиком В. Вебером. В 1854 – 1866 гг. работал в Гёттингенском университете (с 1857 – профессор). Научное наследие Римана было передано Р. Ю. В. Дедекинду, который частично опубликовал его. Полное собрание трудов издано в 1876 г.

Исследования относятся к теории функций, геометрии, математической и теоретической физике, теории дифференциальных уравнений. Риман является создателем геометрического направления теории аналитических функций. Он ввел носящие его имя поверхности (римановы поверхности) и разработал теорию конформных отображений. Изучил условия существования функций внутри областей различного вида (принцип Дирихле). Методы, разработанные Риманом, получили широкое применение в последующих его работах, в частности по теории алгебраических функций. Предложил (1876) рассматривать ж-функцию как функцию комплексного переменного, высказав по этому поводу пять гипотез. Пятая гипотеза Римана – о распределении нулей ж-функции – до настоящего времени не доказана и не опровергнута.

Создал (1854) риманову геометрию, которая является многомерным обобщением геометрии по поверхности и представляет собой теорию римановых пространств, где в малых областях приближенно имеет место евклидова геометрия. Развил идею о математическом пространстве, включив в него функциональные и топологические пространства. Обобщив результаты Гаусса по внутренней геометрии поверхностей, рассматривал геометрию как учение о непрерывных и n-мерных многообразиях. Ввел понятие обобщенных римановых пространств, частными случаями которых являются пространства геометрий Евклида, Лобачевского и Римана, характеризующиеся специальным видом линейного элемента. Ввел понятие носящей его имя кривизны (риманова кривизна); расширил применение мнимых величин, введя их в теорию трансцендентных функций. Ввел строгое понятие определенного интеграла и доказал его существование, развил теорию абелевых интегралов. Именем Римана названы: теорема Римана–Роха об алгебраических функциях, интеграл, интеграл Римана–Лиувилля, лемма Римана–Лебега о тригонометрических интегралах, метод интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. Аппарат теории квадратических дифференциальных форм, разработанный Риманом в 1861 г. и развитый его учениками, широко применяется в теории относительности. Работы Римана отличались насыщенностью новыми идеями. [1, с. 411–412]

ЭЙЛЕР *Леонард* (15.04.1707–18.09.1783) Математик, механик, физик и астроном, академик Петербургской АН (с 1726 г. по 1741 г. и с 1766 г.). Родился в Базеле. Его отец, пастор, был учеником Я.I Бернулли и защитил диссертацию но математике. Первые сведения по математике Эйлер получил от отца. Окончил Базельский университет (1724). Ученик И. I Бернулли. В 1726 г. Эйлер был приглашен в Петербургскую АН и в мае 1727 г. прибыл в Петербург. С 1726 – адъюнкт физиологии, позднее – математики, с 1731 – профессор физики и теоретической механики, в 1731–1741 – профессор математики. В 1741 г. переехал в Берлин, где прожил 25 лет. С 1744 – директор Математического класса Берлинской АН. В 1766 г. возвратился в Петербург. Вскоре почти полностью потерял зрение.

Научные интересы Эйлера относились ко всем основным областям естествознания, к которым можно было применить математические методы. В 1727–1741 подготовил к печати 80 и опубликовал 50 трудов по вариационному исчислению, интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, степенным рядам, специальным функциям, дифференциальной геометрии, теории чисел, гидродинамике, небесной механике, теории теплоты, оптике и по некоторым прикладным вопросам. Одновременно с А. К. Клеро дал (1739) условия интегрируемости линейных дифференциальных форм от двух и трех переменных. В 1736 г. вышел в свет его трактат по механике, в котором он впервые изложил динамику точки с помощью математического анализа и ввел понятие силы инерции.

Берлинский период жизни Эйлера был особенно продуктивным. Свои труды он печатал в Берлине и Петербурге. Опубликовал серию работ по астрономии. Его теоретические изыскания послужили основанием для составления таблиц движения Луны. Заложил основы математической физики, механики твердого тела, выполнил основополагающие работы по механике машин. Разобрал случай инерционного движения тяжелого твердого тела, закрепленного в центре тяжести (гироскоп Эйлера – Пуансо). В 1744 г. был опубликован его труд «Метод нахождения кривых линий...» – первая книга по вариационному исчислению, в которой, кроме того, содержалось первое систематическое изложение теории упругих кривых и результаты по сопротивлению материалов. Эйлер является одним из основоположников гидродинамики и гидравлики как отдельных наук. Написал «Введение в исчисление бесконечно малых» (1748), «Дифференциальное исчисление» (т. 1–2, 1755) и «Интегральное исчисление» (т. 1–3, 1768–1770). Ввел двойные интегралы.

Все эти книги служили основными руководствами для математиков. В 1749 г. Петербургская АН опубликовала написанную по ее заказу монографию Эйлера «Морская наука», в которой он заложил основы теории гидравлических реактивных турбин и предложил проект такой турбины. Занимался также вопросами баллистики: перевел с английского языка труд Б. Робинса «Новые начала артиллерии» и снабдил его своими «Добавлениями», в которых развил новую теорию полета снаряда.

По возвращении в Петербург продолжал интенсивно работать, подготовив за 17 лет около 400 научных работ. Он диктовал своим ученикам мемуары буквально по всем отраслям математики и механики, издал ряд монографий по теории чисел, навигации, диоптрике, философское произведение «Письма к одной немецкой принцессе».

Список трудов Эйлера содержит около 850 названий, в их числе ряд многотомных монографий; из них при его жизни было опубликовано около 550. С 1909 г. и до настоящего времени в Швейцарии издается Полное собрание его сочинений, рассчитанное на 72 тома. В издании принимают участие и советские ученые. Кроме того, лишь частично опубликована его научная переписка, охватывающая свыше 3000 писем.

Иностранный почетный член Петербургской АН (с 1742 по 1766), член Парижской АН, Берлинской АН, Лондонского королевского общества и многих других академий наук и научных обществ. [1, с. 543–544]

Список рекомендуемой литературы

1. **Боголюбов, А.Н.** Математики. Механики. Библиографический словарь – Киев: Наукова думка, 1983.

2. **Гусак, А.А.** Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова, Г.М. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 208 с.

3. **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. учеб. Пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Издательский дом «Оникс 21 век»: Мир и Образование, 2003. – 416 с.

4. **Краснов, М.Л.** Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.

5. **Пантелеев, А.В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова – М.: Высш.шк., 2001. – 445с.

6. **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике ч. 2 / Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

7. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / Под ред. А.И. Кирилова. – 2-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.

8. **Стельмашук, Н.Т.** Элементы теории аналитических функций. / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец – Минск: ДизайнПРО, 1997. – 192 с.