МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

А.Н. БЛАГОВИСНАЯ, С.Т. ДУСАКАЕВА, О.А. ТЯПУХИНА

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 51(07)
ББК 22.1 я7
Б 68

Рецензент
доктор технических наук, доцент И.П. Болодурина

Благовисная, А.Н.
Б 68 **Практикум по решению задач линейной алгебры и аналитической геометрии с экономическим содержанием: методические указания. / А.Н. Благовисная, С.Т. Дусакаева, О.А. Тяпухина. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 63 с.**

Практикум по решению математических задач с экономическим содержанием состоит из трех разделов по линейной алгебре и аналитической геометрии. Каждый раздел включает теоретические сведения, необходимые для решения задач, примеры решения задач с экономическим содержанием и задания для самостоятельного решения. К первым двум разделам написаны приложения по решению задач в математическом пакете Mathcad.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Линейная алгебра» для студентов специальности 080101 Экономическая теория и дисциплине «Математика» для студентов специальности 080505 Управление персоналом.

ББК 22.1 я7

Содержание

Введение 4
1 Матричные вычисления в задачах с экономическим содержанием 6
2 Системы линейных уравнений в задачах с экономическим содержанием 21
3 Аналитическая геометрия и векторная алгебра в экономике 35
Список использованных источников 48
Приложение А 49
Приложение Б 56

Введение

Современный этап развития науки и техники характеризуется интенсивной математизацией всех областей науки, проникновением математических методов в исследовательскую, конструкторскую, организаторскую и производственную деятельности. Знание математики становится обязательным для всех направлений научной и практической деятельности специалиста, а математическая подготовка - неотъемлемой и очень важной составной частью профессиональной компетентности специалиста. Доктрина государственной политики в области качества высшего образования, выделяя приоритеты развития до 2025 года, указывает на приоритет повышения качества математической подготовки будущих специалистов. Таким образом, возникает необходимость обновления математического образования в вузах: внесение изменений в его организацию и содержание. Один из путей обновления – строить содержание обучения математике таким образом, чтобы раскрывалась её роль в профессиональной деятельности. Эффективным средством реализации профессиональной направленности математической подготовки студентов экономических специальностей является решение студентами профессионально-ориентированных задач.

Предлагаемая работа является методическими указаниями по решению профессионально-ориентированных задач по линейной алгебре и аналитической геометрии для студентов специальностей 080101 Экономическая теория и 080505 Управление персоналом. Методические указания состоят из трех разделов: «Матричные вычисления в задачах с экономическим содержанием», «Системы линейных уравнений в задачах с экономическим содержанием», «Аналитическая геометрия и векторная алгебра в экономике». Каждый раздел содержит теоретические сведения по математике, необходимые для решения задач, примеры решения задач с экономическим содержанием, а также задачи для самостоятельного решения. Значительная часть задач направлена на глубокое усвоение основных математических понятий, а также закрепление умений и навыков решения стандартных математических задач (экономика выполняет здесь роль приложения). Данные задачи призваны сформировать у студентов понимание роли математики в будущей профессиональной деятельности и личностный смысл ее изучения. Решая математические задачи, связанные с объектами предстоящей профессиональной деятельности, студент осознает профессиональную значимость соответствующих математических понятий, и, кроме того, такие задачи в определенном смысле имитируют решение профессиональных задач математическими методами, формируя тем самым у будущего специалиста навыки математического моделирования. Повышение качества математической подготовки студентов невозможно без учета современных направлений развития и использования информационных технологий в вузе, поэтому к первым двум лабораторным работам приведены приложения по решению задач из соответствующих разделов в системе Mathcad. Авторами методических указаний предполагается использование пакета Mathcad как средства самоконтроля, как инструмента помощи студенту при самостоятельной работе.

Методические указания могут быть рекомендованы студентам других экономических специальностей.

1 Матричные вычисления в задачах с экономическим содержанием

Порядок выполнения работы:

1. Повторить теоретический материал по матрицам.
2. Записать условие задачи с экономическим содержанием в терминах теории матриц.
3. Ознакомиться с возможностями Mathcad согласно приложению А.
4. Решить задачи для самостоятельного выполнения. При необходимости воспользоваться математическим пакетом Mathcad. Номер варианта указывается преподавателем.
5. Составить отчет по практической работе.
6. Защитить практическую работу.

Содержание отчета по работе:

1 Тема, цели.
2 Задания для самостоятельного выполнения оформить следующим образом:

а) условие задачи;
б) ход решения (для каждой задачи);
в) ответ.

Теоретические сведения, необходимые для решения задач

1 Матрицей А размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы, состоящей из m строк и n столбцов:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кратко матрицу A записывают в виде $A = \left(a_{ij}\right),\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}$. Числа a_{ij}, составляющие данную матрицу называют ее элементами.

2 Если $m = n,$ то матрица называется квадратной, а число n порядком матрицы.

3 Совокупность элементов матрицы, для которых $i = j$ называется главной диагональю матрицы.

4 Квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю, называется диагональной.

5 Диагональная матрица, у которой ненулевые элементы равны единице называется единичной матрицей и обозначается:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6 Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

7 Матрица $A_{1\times n}$ называется матрицей-строкой, то есть

$$A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

8 Матрица $A_{m\times 1}$ называется матрицей-столбцом, то есть

$$A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

9 Суммой двух матриц одинаковой размерности называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых:

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}\text{, если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$$

10 Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на число λ называется матрица $D_{m\times n}$, каждый элемент которой равен соответствующему элементу матрицы А, умноженному на число λ:

$$D_{m\times n} = \lambda A_{m\times n}\text{, если } d_{ij} = \lambda a_{ij},\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$$

. 11 Умножение матрицы А на матрицу В определено, когда чисто столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ называется такая матрица С, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj},\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n.$$

12 Если в матрице A поменять местами строки и столбцы одного и того же номера, то полученная матрица называется транспонированной для данной и обозначается A^T

13 Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$ или определителем первого порядка, называется элемент a_{11}: $\det A = a_{11}$.

14 Определителем квадратной матрицы А второго порядка, или определителем второго порядка, называется число, которое можно вычислить по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

15 Определителем квадратной матрицы А третьего порядка, или определителем третьего порядка, называется число, которое можно вычислить по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \qquad (1.1)$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

16 Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы А n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы А вычеркиванием i-той строки и j-го столбца.

17 Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы А n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

18 Определитель квадратной матрицы n-го порядка может быть вычислен по теореме Лапласа

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам i-той строки; $i = 1,2,\ldots,n$)

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; $j = 1,2,\ldots,n$)

19 Определитель треугольной и, в частности, диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

20 Некоторые свойства определителей квадратных матриц:

а) определитель не изменяется при транспонировании матриц;

б) определитель меняет знак, если поменять местами любые две строки (или столбца) матрицы;

в) определитель равен нулю, если: все элементы любой строки (или столбца) равны нулю; элементы любых двух строк (или столбцов) пропорциональны либо (в частном случае) равны;

г) определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на число, отличное от нуля.

21 Квадратная матрица А называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля, то есть $det\, A \neq 0$

22 Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

23 *Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.* Всякая невырожденная матрица A имеет единственную обратную матрицу.

24 Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1) Найти определитель данной квадратной матрицы A.

Если $det\, A = 0$, то матрица A - вырожденная и обратной матрицы для нее не существует.

Если $det\, A \neq 0$, то существует единственная матрица A^{-1}.

2) Находим алгебраические дополнения матрицы A. Составляем присоединенную матрицу $\overline{A}$, состоящую из алгебраических дополнений, стоящих на местах элементов, к которым они относятся.

3) Находим союзную матрицу, полученную при транспонировании присоединенной матрицы: $A^{*} = \left(\overline{A}\right)^{T}$;

4) Находим обратную матрицу как $A^{-1} = \dfrac{1}{det} A^{*}$.

25 Экономический смысл матрицы - это упорядоченная система информации, представленная в виде матрицы.

Примеры решения задач с экономическим содержанием

Задача 1. Данные о производстве сельскохозяйственных продуктов трех видов – зерно, молоко, мясо (в условных единицах) в двух фермерских хозяйствах за 2007 и 2008 гг. приведены в виде матриц:

$$A_{2007} = \begin{pmatrix} 1340 & 357 & 205 \\ 1275 & 308 & 264 \end{pmatrix},\ A_{2008} = \begin{pmatrix} 1476 & 312 & 217 \\ 1245 & 308 & 285 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) объемы произведенной продукции за два года (2007 и 2008 гг.);

б) прирост объемов производства в 2008 году по сравнению с 2007 годом по видам продукции и фермерским хозяйствам;

в) матрицу среднегодового производства продуктов.

Пояснить экономический смысл элементов полученных матриц.

Решение

а) Объемы продукции за два года определяются суммой матриц:

$$B = A_{2007} + A_{2008} = \begin{pmatrix} 1340 & 357 & 205 \\ 1275 & 308 & 264 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1476 & 312 & 217 \\ 1245 & 308 & 285 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2816 & 669 & 422 \\ 2520 & 616 & 549 \end{pmatrix}$$

.

Поясним экономический смысл полученной матрицы.

Объемы продукции в первом фермерском хозяйстве составили 2816 у.е зерна, 669 у.е. молока и 422 у.е. мяса. Объемы продукции во втором фермерском хозяйстве составили 2520 у.е зерна, 646 у.е. молока и 549 у.е. мяса.

б) Прирост объемов производства в 2008 году по сравнению с 2007 годом определяется разностью матриц:

$$C = A_{2008} - A_{2007} = \begin{pmatrix} 1476 & 312 & 217 \\ 1245 & 308 & 285 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1340 & 357 & 205 \\ 1275 & 308 & 264 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 & -45 & 12 \\ -30 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

.

Отрицательные элементы полученной матрицы показывают, что в данном фермерском хозяйстве объем производства продукта уменьшился, положительные – увеличился, нулевые – не изменился.

в) Матрицу среднегодового производства продуктов найдем как среднее арифметическое матриц A_{2007} и A_{2008}:

$$D = \frac{1}{2}(A_{2007} + A_{2008}) = \frac{1}{2} B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2816 & 669 & 422 \\ 2520 & 616 & 549 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1408 & 334{,}5 & 211 \\ 1260 & 308 & 274{,}5 \end{pmatrix}$$

Поясним экономический смысл элементов полученной матрицы. Среднегодовое производство продуктов в первом фермерском хозяйстве составляет: зерна - 1408 у.е., молока – 344,5 у.е , мяса - 211 у.е.. Во втором фермерском хозяйстве среднегодовое производство продуктов составляет: зерна - 1260 у.е., молока - 308 у.е., мяса – 274,5 у.е.

Задача 2. Два предприятия производят коляски, велосипеды и самокаты. Количество продукции каждого вида, производимые за месяц, приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Предприятие	Количество продукции (шт.)		
	Коляски	Велосипеды	Самокаты
I предприятие	112	335	217
II предприятие	210	165	382

Данные о прибыли (в условных денежных единицах) от реализации единицы каждого вида изделий в каждый из трех месяцев приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Продукция	Прибыль (усл. ден. ед.)		
	Апрель	Май	Июнь
Коляски	43,2	67,2	55,3
Велосипеды	54,1	89,7	70,5
Самокаты	45,4	50,4	55,5

Составить матрицу прибыли каждого предприятия в каждый из трех месяцев. Пояснить экономический смысл результата.

Решение.

Составляем матрицы $A = \begin{pmatrix} 112 & 335 & 217 \\ 210 & 165 & 382 \end{pmatrix}$ - матрица количества продукции каждого вида, производимые за месяц каждым предприятием, и $B = \begin{pmatrix} 43,2 & 67,2 & 55,3 \\ 54,1 & 89,7 & 70,5 \\ 45,4 & 50,4 & 55,5 \end{pmatrix}$ - матрица прибыли от реализации единицы каждого вида продукции в разные месяцы. Матрицу прибыли каждого предприятия в любой из рассматриваемых месяцев находим как произведение матриц A и B:

$$P = A \cdot B = \begin{pmatrix} 112 & 335 & 217 \\ 210 & 165 & 382 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 43,2 & 67,2 & 55,3 \\ 54,1 & 89,7 & 70,5 \\ 54,4 & 50,4 & 55,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34766,7 & 48512,7 & 41854,6 \\ 38779,3 & 48165,3 & 44446,5 \end{pmatrix}.$$

Прибыль первого предприятия за реализацию колясок составит 34766,7 условных денежных единиц, за реализацию велосипедов 48512,7 условных денежных единиц, за реализацию самокатов 41854,6 условных денежных единиц. По второму предприятию соответствующие прибыли равны 38779,3; 48165,3; 44446,5 условных денежных единиц.

Задача 3. План по выпуску предприятием выпускает трех типов мягких игрушек составляет 1020 единиц собак, 1545 единиц кошек и 1270 единиц мишек. Для их изготовления используется пять видов сырья. Расход сырья, а также стоимость единицы каждого вида сырья (в условных денежных единицах) указаны в таблице 1.3. Найти:

а) необходимое количество каждого вида сырья для обеспечения плана;

б) стоимость сырья для единицы каждого вида продукции;

в) общую стоимость всего сырья для всей продукции.

Таблица 1.3

Типы игрушек	Типы сырья				
	I	II	III	IV	V
Собаки	5	10	3	9	2
Кошки	4	8	5	6	8
Медведи	6	12	4	3	10
Стоимость единицы сырья	7	4	5	10	2

Решение.

Составим матрицу-строку $X = (1020 \quad 1545 \quad 1270)$, характеризующую план предприятия, матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, характеризующую расход сырья на единицу продукции и матрицу-столбец $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ стоимости единицы каждого вида сырья (в условных денежных единицах).

а) Необходимое количество каждого вида сырья для обеспечения плана найдем как произведение матрицы X на матрицу A:

$$B = X \cdot A = (1020 \quad 1545 \quad 1270) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= (18900 \quad 37800 \quad 15865 \quad 22260 \quad 27100)$$

Первого вида сырья необходимо 18900 у.е, второго – 37800 у.е., третьего – 15865 у.е., четвертого – 22260 у.е. и пятого вида сырья – 27100 у.е.

б) Стоимость сырья для единицы каждого вида продукции найдем как произведение матриц A и C:

$$D = A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 184 \\ 161 \\ 160 \end{pmatrix}.$$

Для производства одной собаки необходимо 184 условных денежных единиц, одной кошки – 161 условных денежных единиц и одного медведя – 160 условных денежных единиц.

в) Общую стоимость всего сырья для всей продукции находим как произведение матрицы-строки, характеризующей план, и матрицы-столбца, характеризующей стоимость сырья для единицы каждого вида продукции:

$$Q = X \cdot D = \begin{pmatrix} 1020 & 1545 & 1270 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 184 \\ 161 \\ 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 639625 \end{pmatrix}.$$

Итак, всего для выполнения плана необходимо 639625 условных денежных единиц.

Задача 4. В городе имеются ателье индивидуального пошива женского легкого платья 1, 2, 3-го разрядов. Каждое ателье изготовляет 4 вида изделий: юбки, платья, блузки, брюки. Матрица расценок (в условных денежных единицах) имеет вид $D = \begin{pmatrix} 12 & 35 & 21 & 17 \\ 15 & 39 & 25 & 23 \\ 21 & 51 & 29 & 27 \end{pmatrix}$. Количество изделий, изготовленных каждым ателье за прошлый месяц, задано матрицей $P = \begin{pmatrix} 48 & 31 & 39 & 28 \\ 28 & 24 & 20 & 26 \\ 32 & 33 & 45 & 30 \\ 16 & 15 & 14 & 20 \end{pmatrix}$. Найти выручку за прошлый месяц для каждого ателье.

Решение.

Найдем матрицу выручки ателье за месяц как произведение матрицы расценок на матрицу выпущенной продукции:

$$T = D \cdot P = \begin{pmatrix} 12 & 35 & 21 & 17 \\ 15 & 39 & 25 & 23 \\ 21 & 51 & 29 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 & 31 & 39 & 28 \\ 28 & 24 & 20 & 26 \\ 32 & 33 & 45 & 30 \\ 16 & 15 & 14 & 20 \end{pmatrix} = .$$

$$= \begin{pmatrix} 2500 & 2160 & 2351 & 2216 \\ 2980 & 2571 & 2812 & 2644 \\ 3796 & 3237 & 3522 & 3324 \end{pmatrix}$$

Тогда выручка ателье первого разряда составляет 2500+2160+2351+2216=9227 условных денежных единиц, выручка ателье второго разряда составляет 2980+2571+2812+2644=11007 условных денежных единиц, выручка ателье третьего разряда составляет 3796+3237+3522+3324=13879 условных денежных единиц.

Задача 5. Расход сырья (в условных единицах) тремя предприятиями указан в таблице 1.4, а стоимость перевозок (в условных денежных единицах)– в таблице 1.5. Найти затраты на перевозку сырья каждым предприятиям по видам транспорта используют два вида сырья: уголь и древесину.

Таблица 1.4

Предприятия	Тип сырья	
	Уголь	Древесина
I	10	20
II	50	0
III	30	10

Таблица 1.5

Тип сырья	Тип транспорта		
	Автомобильный	Железнодорожный	Водный
Уголь	3051	5723	8119
Древесина	7120	2672	8119

Решение.

По таблице 1.4 составляем матрицу расхода сырья $X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 50 & 0 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$.

По таблице 1.5 составляем матрицу стоимостей перевозок $P = \begin{pmatrix} 3051 & 5723 & 8119 \\ 7120 & 2672 & 8119 \end{pmatrix}$.

Находим матрицу затрат по видам транспорта.

$$Y = X \cdot P = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 50 & 0 \\ 30 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3051 & 5723 & 8119 \\ 7120 & 2672 & 8119 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 172910 & 110670 & 243570 \\ 152550 & 286150 & 405950 \\ 162730 & 198410 & 324760 \end{pmatrix}.$$

Итак, первому предприятию необходимо затратить на перевозку сырья автомобильным транспортом 172910 условных денежных единиц, железнодорожным транспортом – 110670 условных денежных единиц, водным транспортом – 243570 условных денежных единиц.

Второму предприятию необходимо затратить на перевозку сырья автомобильным транспортом 152550 условных денежных единиц, железнодорожным транспортом – 286150 условных денежных единиц, водным транспортом – 405950 условных денежных единиц.

Третьему предприятию необходимо затратить на перевозку сырья автомобильным транспортом 162730 условных денежных единиц, железнодорожным транспортом – 198410 условных денежных единиц, водным транспортом – 324760 условных денежных единиц.

Задача 6. Три цеха предприятия выпускают продукцию трех видов: первый цех – продукцию первого вида, второй – продукцию второго вида, третий – продукцию третьего вида. Часть выпускаемой продукции идет на внутреннее потребление, остальная часть является конечным продуктом. Требуется выявить распределение между цехами продукции, идущей на внутреннее потребление и общие объемы выпускаемой продукции, если заданы параметры прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ и конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 155 \\ 105 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Решение.

Обозначим матрицу общих объемов выпускаемой продукции X. Поскольку выпускаемый продукт X используется как для внутреннего потребления в количестве $A \cdot X$, (матрица A - матрица прямых затрат), так и в качестве конечного продукта Y, то справедливо матричное уравнение $X - A \cdot X = Y$ или $(E - A) \cdot X = Y$, где E - единичная матрица. Решение этого уравнения находится по формуле $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,3 \\ -0,1 & 0,7 & -0,2 \\ -0,3 & -0,2 & 0,9 \end{pmatrix},$$

Найдем матрицу, обратную матрице $(E - A)^{-1}$.

1) $$\begin{aligned} det(E - A) &= 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 + (-0,1) \cdot (-0,2) \cdot (-0,3) + \\ &+ (-0,3) \cdot (-0,1) \cdot (-0,2) - (-0,3) \cdot 0,7 \cdot (-0,3) - \\ &- (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot 0,9 - 0,8 \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) = 0,388 \neq 0 \end{aligned},$$

следовательно, существует единственная обратная матрица $(E - A)^{-1}$.

2) Составляем присоединенную матрицу, состоящую из алгебраических дополнений, стоящих на месте элементов, к которым они относятся:

$$\overline{E - A} = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,15 & 0,23 \\ 0,15 & 0,63 & 0,19 \\ 0,23 & 0,19 & 0,55 \end{pmatrix}.$$

3) Строим союзную матрицу, полученную при транспонировании присоединенной матрицы:

$$(E-A)^* = \left(\overline{E-A}\right)^T = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,15 & 0,23 \\ 0,15 & 0,63 & 0,19 \\ 0,23 & 0,19 & 0,55 \end{pmatrix}.$$

4) Обратную матрицу получим по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^*$:

.

$$\left(E-A\right)^{-1} = \frac{1}{0,388} \begin{pmatrix} 0,59 & 0,15 & 0,23 \\ 0,15 & 0,63 & 0,19 \\ 0,23 & 0,19 & 0,55 \end{pmatrix}.$$

Значит, $X = \frac{1}{0,388} \begin{pmatrix} 0,59 & 0,15 & 0,23 \\ 0,15 & 0,63 & 0,19 \\ 0,23 & 0,19 & 0,55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 155 \\ 105 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 200 \end{pmatrix}.$

Таким образом, общий выпуск продукции первого цеха составляет 300 единиц, второго – 250 единиц, третьего – 200 единиц. Распределение продукции между цехами на внутреннее потребление определяется формулами $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, т.е.

$$x_{11} = 0,2 \cdot 300 = 60 \quad x_{12} = 0,1 \cdot 250 = 25 \quad x_{13} = 0,3 \cdot 200 = 60$$

$$x_{21} = 0,1 \cdot 300 = 30 \quad x_{22} = 0,3 \cdot 250 = 75 \quad x_{23} = 0,2 \cdot 200 = 40$$

$$x_{31} = 0,3 \cdot 300 = 90 \quad x_{32} = 0,2 \cdot 250 = 50 \quad x_{33} = 0,1 \cdot 200 = 20$$

Итак, плановая модель выпуска продукции (общего и конечного продукта) с учетом внутреннего потребления представлена таблицей 1.6.

Таблица 1.6

Цех	Внутреннее потребление			Конечная продукция	Общая продукция
	1	2	3		
1	60	25	60	155	300
2	30	75	40	105	250
3	90	50	20	40	200
Условно чистая продукция	120	100	80	300	-
Общая продукция	300	250	200	-	750

Задания для самостоятельного выполнения.

N – номер варианта.

Задание 1. Данные о производстве одежды 6 видов (платья, туники, брюки, юбки, жилеты, блузы) на четырех швейных фабриках за 2006, 2007 и

2008 г.г. приведены в виде матриц A_{2006}, A_{2007} и A_{2008}. Найти: а) объемы продукции, выпущенной за три года; б) прирост объемов производства в 2008 году по сравнению с 2007 годом по видам продукции и фермерским хозяйствам; в) матрицу среднегодового производства продуктов. Составить план производства продукции на 2009 год, если планируется выпускать продукции на $(0{,}12 \cdot N + 0{,}55)\%$ больше, чем в 2008 году. Пояснить экономический смысл элементов полученных матриц.

$$A_{2006} = \begin{pmatrix} 21N+1789 & 96N+2901 & 16N+4767 & 38N+2890 & 45N+2398 & 20N+3200 \\ 35N+1364 & 65N+3135 & 94N+5632 & 46N+1300 & 52N+4310 & 55N+3256 \\ 18N+1700 & 42N+2348 & 74N+4756 & 51N+3400 & 54N+2187 & 34N+2178 \\ 86N+1480 & 32N+2570 & 90N+4663 & 64N+4300 & 23N+7643 & 45N+4290 \end{pmatrix}$$

$$A_{2007} = \begin{pmatrix} 25N+1709 & 96N+3910 & 26N+2766 & 39N+1890 & 45N+2698 & 25N+3200 \\ 25N+1245 & 65N+5135 & 92N+3632 & 56N+1112 & 52N+4670 & 65N+3256 \\ 19N+1789 & 42N+1347 & 79N+4754 & 41N+6400 & 54N+3870 & 44N+2178 \\ 96N+1452 & 32N+3572 & 91N+3663 & 67N+4100 & 23N+6431 & 55N+4290 \end{pmatrix}$$

$$A_{2008} = \begin{pmatrix} 29N+1719 & 86N+4830 & 27N+2897 & 43N+1891 & 51N+2698 & 27N+3200 \\ 24N+3245 & 74N+4135 & 82N+6327 & 58N+1000 & 53N+4670 & 66N+1257 \\ 34N+1789 & 43N+1347 & 78N+7542 & 43N+6004 & 52N+6870 & 45N+2000 \\ 86N+3452 & 35N+2257 & 92N+3663 & 68N+4145 & 25N+6431 & 56N+2156 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Данные о реализации товаров в 3-х магазинах представлены матрицами *A, B, C.* В строках указаны суммы, вырученные за каждый сезон (весна, лето, осень, зима), а в столбцах – выручка от продажи трех видов товаров (платья, костюмы, ботинки). Требуется:

а) сравнить в каждом сезоне выручку первого и третьего магазинов, вместе взятых и второго по всем видам товаров;

б) найти общие суммы продажи всех трех магазинов по сезонам;

в) сумму выручки по всем магазинам.

$$A = \begin{pmatrix} 12N+1500 & 14{,}5N+1678 & 11{,}8N+1528 \\ 12{,}5N+1800 & 12{,}2N+1425 & 12{,}4N+1719 \\ 13{,}3N+1600 & 13{,}1N+1542 & 12N+1412 \\ 15N+1750 & 13N+1390 & 14N+1345 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 15N+1517 & 4{,}6N+1150 & 21N+610 \\ 12{,}4N+1620 & 5{,}5N+1180 & 18N+775 \\ 11{,}8N+1413 & 4{,}5N+1116 & 32N+801 \\ 12{,}5N+1501 & 7N+954 & 15N+707 \end{pmatrix},$$

$$
C = \begin{pmatrix} 21N + 1600 & 43N + 1678 & 34N + 1742 \\ 16N + 1236 & 34N + 2165 & 18N + 1935 \\ 22N + 1845 & 15N + 1829 & 19N + 1687 \\ 51N + 620 & 23N + 1883 & 24N + 1755 \end{pmatrix}.
$$

Задание 3. Четыре садоводческих предприятия выращивают черешню, алычу, персики, груши, сливу. Количество продукции каждого вида, реализуемые за месяц, приведены в таблице 1.7.

Таблица 1.7

Предприятие	Количество продукции (кг.)				
	Черешня	Алыча	Персики	Груши	Слива
I предприятие	200N+67	500N+80	650N+55	500N+25	650N+35
II предприятие	500N+76	850N+60	700N+80	600N+56	880N+65
III предприятие	800N+57	900N+50	950N+55	900N+60	950N+60
IV предприятие	350N+69	550N+80	1050N+55	1000N+50	550N+80

Данные о прибыли от реализации каждого вида продукции в каждый из 3-х месяцев приведены в таблице 1.8.

Таблица 1.8

Вид продукции	Прибыль (усл. ден. ед.)		
	Июнь	Июль	Август
Черешня	250	200	220
Алыча	150	100	120
Персики	60	55	70
Груши	50	45	55
Слива	80	75	75

Найти прибыль каждого предприятия в каждом из трех месяцев.

Задание 4. В области имеется 6 пасек. Каждая пасека реализует мед, прополис, мед в сотах, пчелиное молочко. Расценки для каждого вида продукции приведены в таблице 1.9 (в условных денежных единицах). Известно, что прибыль составляет 15% от расценок за продукцию. Реализация продукции по месяцам указана в таблице 1.10.

Определить:

а) итоговую выручку каждой пасеки за четыре месяца.

б) прибыль каждой пасеки за четыре месяца.

Таблица 1.9

Продукция	Цены на продукцию (усл.ден.ед.)			
	июнь	июль	август	сентябрь
Мед	0,23N+134	0,07N+135	0,25N+133	0,09N+134
Прополис	0,15N+197	0,18N+196	0,1N+195	0,12N+196
Мед в сотах	0,06N+121	0,05N+121	0,15N+120	0,21N+118
Пчелиное молочко	0,11N+203	0,12N+202	0,11N+204	0,14N+203

Таблица 1.10

Пасека	Продукция			
	Мед	Прополис	Мед в сотах	Пчелиное молочко
I	0,1N+510,9	0,12N+297,2	0,36N+154,2	0,71N+23,5
II	0,08N+690,6	0,28N+210,3	0,35N+121,5	0,82N+20,2
III	0,12N+534,2	0,12N+295,9	0,51N+120,5	0,93N+20,9
IV	0,15N+633,2	0,23N+296,1	0,52N+118,7	0,81N+29,4
V	0,16N+435	0,09N+295,3	0,12N+119,2	0,95N+20,1
VI	0,19N+674	0,05N+294,2	0,11N+119,7	0,84N+20,3

Задание 5. Для изготовления трех видов изделий необходимы детали трех типов, потребности в которых заданы в таблице 1.11. Потребность в сырье для изготовления деталей заданы в таблице 1.12. Определить:

а) потребности в сырье для изготовления (20N+260) изделий 1-го вида, (16N+150) изделий 2-го вида, (11N+310) изделий 3-го вида;

б) сколько изделий каждого вида получится, если использовано $(6N^2+6N-5)$ втулок, $(12N+2)$ колес, $3N$ корпусов.

Таблица 1.11

Наименование деталей	Вид изделий		
	I	II	III
1. Втулка	2N+3	3N-2	N+3
2. Колесо	6	4	2
3. Корпус	1	1	1

Таблица 1.12

Материал	Тип детали		
	1	2	3
Дерево	5N+1	N	2N+13
Сталь	N	N+8	3N+5

Задание 6. Три цеха предприятия выпускают продукцию трех видов: первый цех – продукцию 1 вида, второй – продукцию 2 вида, третий –

продукцию 3 вида. Часть выпускаемой продукции идет на внутреннее потребление, остальная часть является конечным продуктом. Требуется выявить распределение между цехами продукции, идущей на внутреннее потребление и общие объемы выпускаемой продукции, если заданы матрицы прямых затрат A и конечного продукта Y (таблица 1.13).

Таблица 1.13

Цех	Коэффициенты затрат			Конечная продукция	Цех	Коэффициенты затрат			Конечная продукция
	1	2	3	Y_i		1	2	3	Y_i
Вариант N 1					Вариант N 2				
1	0,1	0,2	0,3	260	1	0,2	0,1	0,3	310
2	0,2	0,3	0,1	40	2	0,3	0,2	0,1	70
3	0,3	0,1	0,2	20	3	0,1	0,3	0,2	20
Вариант N 3					Вариант N 4				
1	0,3	0,2	0,1	120	1	0,1	0,2	0,1	160
2	0,2	0,1	0,3	85	2	0,3	0,1	0,2	95
3	0,1	0,3	0,2	35	3	0,2	0,3	0,3	45
Вариант N 5					Вариант N 6				
1	0,2	0,3	0,1	240	1	0,3	0,1	0,2	270
2	0,3	0,1	0,2	20	2	0,1	0,2	0,3	115
3	0,1	0,2	0,3	60	3	0,2	0,3	0,1	35
Вариант N 7					Вариант N 8				
1	0,1	0,3	0,2	135	1	0,2	0,1	0,3	155
2	0,3	0,2	0,1	70	2	0,1	0,3	0,2	105
3	0,2	0,1	0,3	35	3	0,3	0,2	0,1	40
Вариант N 9					Вариант N 10				
1	0,3	0,2	0,1	220	1	0,1	0,2	0,4	310
2	0,1	0,3	0,2	60	2	0,2	0,3	0,1	90
3	0,2	0,1	0,3	40	3	0,1	0,1	0,2	80
Вариант N 11					Вариант N 12				
1	0,1	0,2	0,3	260	1	0,2	0,1	0,3	310
2	0,2	0,3	0,1	40	2	0,3	0,2	0,1	70
3	0,3	0,1	0,2	20	3	0,1	0,3	0,2	20
Вариант N 13					Вариант N 14				
1	0,3	0,2	0,1	120	1	0,1	0,2	0,1	160
2	0,2	0,1	0,3	85	2	0,3	0,1	0,2	95
3	0,1	0,3	0,2	35	3	0,2	0,3	0,3	45
Вариант N 15									
1	0,2	0,3	0,1	240					
2	0,3	0,1	0,2	20					
3	0,1	0,2	0,3	60					

2 Системы линейных уравнений в задачах с экономическим содержанием

Порядок выполнения работы:

1 Повторить теоретический материал по системам линейных уравнений.

2 Записать условие задачи с экономическим содержанием в терминах теории систем линейных уравнений.

3 Ознакомиться с возможностями Mathcad согласно приложению Б.

4 Решить все задачи для самостоятельного выполнения. При необходимости воспользоваться пакетом Mathcad. Номер варианта указывается преподавателем.

5 Составить отчет по практической работе.

6 Защитить практическую работу.

Содержание отчета по лабораторной работе:

1 Тема, цели.

2 Задания для самостоятельного выполнения оформить следующим образом:

а) условие задачи;

б) ход решения (для каждой задачи);

в) ответ.

Теоретические сведения, необходимые для решения задач

1 Общий вид системы m линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Решением линейной системы называют упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, который при подстановке в каждое уравнение системы обращает его в верное равенство. Множество всех решений системы называют ее общим решением. Решить систему означает найти ее общее решение.

2 В матричной форме система (2.1) имеет вид $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ a_{m1} & a_{m2} & K & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрица системы, $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \Lambda \\ x_n \end{pmatrix}$$ - матрица-столбец переменных, $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ K \\ b_m \end{pmatrix}$$ - матрица-столбец свободных членов.

3 Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Если определитель матрицы системы (2.2) отличен от нуля, то есть $det\, A = \Delta \neq 0$ (матрица А – невырожденная), то единственное решение системы определяется:

а) *с помощью обратной матрицы* по формуле $X = A^{-1}B$

б) *по формуле Крамера* $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где Δ - определитель матрицы системы А), Δ_j - определитель, получаемый из матрицы А заменой j-го столбца столбцом свободных членов, $j = 1,2 \ldots n$.

4 Над системой можно проводить *элементарные преобразования*:

1) перестановка уравнений;

2) вычеркивание из системы уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$;

3) умножение обеих частей одного из равнений системы на число, отличное от нуля;

4) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число.

При выполнении элементарных преобразований над системой может возникнуть уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i, \quad b_i \neq 0$. Ясно, что это уравнение не имеет решений, будем называть такое уравнение противоречивым.

Система, содержащая противоречивое уравнение, несовместна, то есть не имеет решение.

5 Решение системы (2.2) можно найти, используя *метод Гаусса*.

Суть метода заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы либо получают систему, содержащую противоречивое уравнение (и тогда система оказывается несовместной), либо система приводится к некоторому специальному виду.

Сформулируем основную *идею метода Гаусса*.

1) Путем элементарных преобразований добиваются, чтобы в первом уравнении при первой неизвестной коэффициент был отличен от нуля.

2) С помощью элементарных преобразований получают коэффициенты, равные нулю, при первой неизвестной во втором, третьем и т. д. уравнениях.

3) Добиваются, чтобы во втором уравнении при второй неизвестной коэффициент был отличен от нуля.

4) С помощью элементарных преобразований получают коэффициенты, равные нулю, при второй неизвестной во втором, третьем и т. д. уравнениях.

5) ....

6) Получают уравнение с одной неизвестной, найдя которую, совершают обратный ход по системе вверх и последовательно определяют значения всех остальных неизвестных.

Преобразования Гаусса можно проводить не только с уравнениями системы, но и с матрицей их коэффициентов.

6 В общем случае при исследовании системы могут встретиться только три случая:

-система имеет единственное решение (система является определенной);

- система имеет бесчисленное множество решений (система является неопределенной);

- система не имеет решений (несовместна).

Вопрос о совместности системы линейных уравнений (2.1) полностью решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (2.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы-системы.

Совместная система имеет единственное решение, если ранг матрицы системы равен количеству неизвестных системы.

Совместная система имеет бесконечно много решений, если ранг матрицы системы меньше количества неизвестных системы.

7 Правило нахождения решений неопределенной системы линейных уравнений.

Пусть дана совместная система линейных уравнений (2.1) и пусть основная матрица A этой системы имеет ранг r, меньший числа неизвестных n. Выбираем в матрице A r линейно независимых строк и оставляем в системе (2.1) лишь уравнения, коэффициенты которых вошли в выбранные строки. В этих уравнениях оставляем в левых частях такие r неизвестных, что определитель из коэффициентов при них отличен от нуля, а остальные неизвестные объявляем свободными и переносим в правые части уравнений.

Давая свободным неизвестным произвольные числовые значения и вычисляя значения остальных неизвестных любым из методов, приведенных в пунктах 3 и 5, мы получим все решения системы (2.1).

Примеры решения задач с экономическим содержанием.

Задача 1. Для отделки мягкой мебели предприятие закупило 50 метров ткани первого и 60 метров ткани второго и 40 метров ткани третьего вида. Стоимость покупки составила 21000 денежных единиц. Найти стоимость одного метра каждой ткани, если 40 метров первого вида ткани стоит столько же, сколько 60 метров второго вида, а 20 метров ткани третьего вида на 300 денежных единиц дешевле 30 метров ткани первого вида.

Решение.

Пусть x_1, x_2 и x_3 денежных единиц – стоимость 1 метра ткани соответственно первого, второго и третьего вида. В соответствии с условием задачи составим три уравнения: $50x_1 + 60x_2 + 40x_3 = 21000$, $40x_1 = 60x_2$, $30x_1 - 20x_3 = 300$

Данные условия выполняются одновременно, поэтому получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 50x_1 + 60x_2 + 40x_3 = 21000 \\ 40x_1 - 60x_2 = 0 \\ 30x_1 - 20x_3 = 300 \end{cases}.$$

Найдем решение данной системы.

Составим определитель матрицы системы и найдем его по правилу треугольника:

$$\det A = \begin{vmatrix} 50 & 60 & 40 \\ 40 & -60 & 0 \\ 30 & 0 & -20 \end{vmatrix} = 50 \cdot (-60) \cdot (-20) + 60 \cdot 0 \cdot 30 + 40 \cdot 40 \cdot 0 -$$

$$-40 \cdot (-60) \cdot 30 - 60 \cdot 40 \cdot (-20) - 50 \cdot 0 \cdot 0 = 60000 + 0 + 0 + 72000 +$$

$$+48000 - 0 = 180000 \neq 0$$

Определитель матрицы системы не равен нулю, следовательно, решение системы существует и оно единственное. Найдем решение с помощью обратной матрицы, то есть по формуле $X = A^{-1}B$, где $A = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 40 \\ 40 & -60 & 0 \\ 30 & 0 & -20 \end{pmatrix}$ - матрица системы, $B = \begin{pmatrix} 21000 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных.

Найдем обратную матрицу, то есть A^{-1}.

Составляем присоединенную матрицу, состоящую из алгебраических дополнений, стоящих на месте элементов, к которым они относятся:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1200 & 800 & 1800 \\ 1200 & -2200 & 1800 \\ 2400 & 1600 & -5400 \end{pmatrix}.$$

Строим союзную матрицу, полученную при транспонировании присоединенной матрицы:

$$A^* = \left(\overline{A}\right)^T = \begin{pmatrix} 1200 & 1200 & 2400 \\ 800 & -2200 & 1600 \\ 1200 & 1800 & -5400 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу получим по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^*$:

$$A^{-1} = \frac{1}{180000} \begin{pmatrix} 1200 & 1200 & 2400 \\ 800 & -2200 & 1600 \\ 1200 & 1800 & -5400 \end{pmatrix}.$$

Находим X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{180000} \begin{pmatrix} 1200 & 1200 & 2400 \\ 800 & -2200 & 1600 \\ 1200 & 1800 & -5400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21000 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{180000} \begin{pmatrix} 1200 \cdot 21000 + 1200 \cdot 0 + 2400 \cdot 300 \\ 800 \cdot 21000 - 2200 \cdot 0 + 1600 \cdot 300 \\ 1200 \cdot 21000 + 1800 \cdot 0 - 5400 \cdot 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ 96 \\ 201 \end{pmatrix}$$

Итак, стоимость одного метра ткани первого вида — 144 денежных единицы, второго вида – 96 денежных единиц, а третьего – 201 денежная единица.

Задача 2. Фирма продает сухофрукты - курагу по 86 денежных единиц за килограмм и чернослив по 131 денежных единицы за килограмм. Так как спрос на чернослив был меньше, экономист фирмы предложил смешать два вида сухофруктов в некоторой пропорции и продать смесь по 111 денежных единиц за килограмм. Сколько килограммов кураги надо смешать с 20 кг чернослива, чтобы общая выручка не изменилась?

Решение.

Пусть x_1 — количество килограммов кураги в смеси, x_2 - общее количество смеси. Так как смесь составлена из x_1 кг кураги и 20 кг чернослива, то составим уравнение $x_2 = x_1 + 20$. Чтобы выручка не изменилась, должно выполняться равенство:

(количество кураги)*(цена 1кг кураги) + (количество чернослива)* (цена 1 кг чернослива) = (количество смеси) * (цена 1кг смеси)

$$\begin{pmatrix} количество \\ кураги \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} цена 1кг \\ кураги \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} количество \\ чернослива \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} цена 1кг \\ чернослива \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} количество \\ смеси \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} цена 1кг \\ смеси \end{pmatrix},$$

то есть $x_1 \cdot 86 + 131 \cdot 20 = x_2 \cdot 111$

Получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -20 \\ 86x_1 - 111x_2 = -2620 \end{cases}$$

Составим и найдем определитель матрицы системы: $det\, A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 86 & -111 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-111) - (-1) \cdot 86 = -25 \neq 0$ Определитель матрицы системы не равен нулю, следовательно решение системы существует и оно единственно. Решим систему решим по формуле Крамера: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, где Δ - определитель матрицы системы А (причем, $\Delta \neq 0$), Δ_j - определитель, получаемый из матрицы А заменой j-го столбца столбцом свободных членов (в нашей задаче $j = 1,2$).

Получаем $\Delta = det\, A = -25$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -20 & -1 \\ -2620 & -111 \end{vmatrix} = (-20) \cdot (-111) - (-1) \cdot (-2620) = -400;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -20 \\ 86 & -2620 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2620) - (-20) \cdot 86 = -900$$

Найдем теперь значения неизвестных x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-400}{-25} = 16;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-900}{-25} = 36$$

Итак, 20 кг кураги надо смешать с 16 кг чернослива.

Задача 3. Строительной фирме для отделки помещений было выделено 2888 условных денежных единиц для покупки 20 банок краски темно-бирюзового, бирюзового и светло-бирюзового оттенков по цене 120, 148 и 200 денежных единиц за банку соответственно. Однако на момент на покупки краски выяснилось, что на краску темно-бирюзового и светло-бирюзового оттенков в результате скидок цены уменьшились на 5 и 7 процентов соответственно. После покупки краски от выделенной суммы осталось 116 условных денежных единиц. Выяснить, какое количество банок каждой краски купили.

Решение.

Пусть x_1, x_2 и x_3 - количество приобретенных банок краски темно-бирюзового, бирюзового и светло-бирюзового оттенков соответственно. Всего куплено банок $x_1 + x_2 + x_3 = 20$.

По условию задачи планировалось произвести покупку по ценам без скидок $120x_1 + 148x_2 + 200x_3 = 2888$.

В результате приобрели краски на сумму 3200 условных денежных единиц по ценам $0{,}95 \cdot 120 = 114$ и $0{,}93 \cdot 200 = 186$ на краску темно-бирюзового и светло-бирюзового оттенков соответственно. Получим третье условие задачи: $114x_1 + 148x_2 + 186x_3 = 2772$.

В результате имеем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 120x_1 + 148x_2 + 200x_3 = 2888 \\ 114x_1 + 148x_2 + 186x_3 = 2772 \end{cases}$$

Исследуем данную систему на совместность по теореме Кронекера-Капелли. Составим расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 20 \\ 120 & 148 & 200 & | & 2888 \\ 114 & 148 & 186 & | & 2772 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду.

Шаг 1. $a_{11} \neq 0$. Получаем в первом столбце ниже элемента a_{11} нулевые элементы. Умножаем все элементы первой строки матрицы $\overline{A}$ на (-120) и складываем их с соответствующими элементам второй. Умножаем все элементы первой строки матрицы $\overline{A}$ на (-114) и прибавляем их к соответствующим элементам третьей строки. Получаем матрицу, эквивалентную матрице $\overline{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 20 \\ 0 & 28 & 80 & | & 488 \\ 0 & 34 & 72 & | & 492 \end{pmatrix}.$$

Упростим полученную матрицу, умножив все элементы второй строки на $\frac{1}{4}$, а третьей строки на $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 20 \\ 0 & 7 & 20 & | & 122 \\ 0 & 17 & 36 & | & 246 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. $a_{22} \neq 0$. Получаем нулевые элементы во втором столбце полученной матрицы ниже элемента a_{22}. Для этого умножаем все элементы второй строки на $\left(-\frac{17}{7}\right)$ и складываем с соответствующими элементами третьей строки. Получаем матрицу, эквивалентную матрице $\overline{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 20 \\ 0 & 7 & 20 & | & 122 \\ 0 & 0 & -\frac{88}{7} & | & -\frac{352}{7} \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу.

В качестве базисного минора как для матрицы системы, так и для расширенной матрицы системы можно выбрать

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & 40 \\ 0 & 0 & -\frac{88}{7} \end{vmatrix} = 1 \cdot 14 \cdot \left(-\frac{88}{7}\right) = -176 \neq 0.$$

Итак, $r(A) = r(\overline{A}) = 3$. По теореме Кронекера-Капелли система совместна. Количество неизвестных системы равно трем и равно рангу матрицы системы, следовательно, система имеет единственное решение. Найдем его методом Гаусса.

Прямой ход метода Гаусса мы уже выполнили, когда приводили расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Запишем систему, эквивалентную данной, соответствующую последней матрице, полученной в результате элементарных преобразований матрицы $\overline{A}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 7x_2 + 20x_3 = 122 \\ -\frac{88}{7}x_3 = -\frac{352}{7} \end{cases}.$$

Выполняем обратный ход метода Гаусса. Из последнего уравнения системы находим $x_3 = 4$ Из второго уравнения, подставляя найденное значение для x_3, находим $x_2 = \frac{1}{7}(122 - 20 \cdot 4) = 6$. И, наконец, из первого уравнения найдем $x_1 = 20 - 6 - 4 = 10$.

Таким образом, количество приобретенных банок краски темно-бирюзового, бирюзового и светло-бирюзового оттенков соответственно равно 10, 6 и 4.

Задача 4. На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице 2.1 указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов. Найти условия выбора технологий при производстве из 129 единиц сырья 469 изделий А и 1050 изделий Б.

Таблица 2.1

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
А	3	5	4	5
Б	11	2	7	12

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3 и x_4 количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание. Получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 129 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 469 \\ 11x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 12x_4 = 1050 \end{cases}$$

Исследуем данную систему на совместность по теореме Кронекера-Капелли. Составим расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 129 \\ 3 & 5 & 4 & 5 & | & 469 \\ 11 & 2 & 7 & 12 & | & 1050 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду.

Шаг 1. $a_{11} \neq 0$. Получаем в первом столбце ниже элемента a_{11} нулевые элементы. Умножаем все элементы первой строки матрицы $\overline{A}$ на (-3) и складываем их с соответствующими элементам второй строки. Умножаем все элементы первой строки матрицы $\overline{A}$ на (-11) и прибавляем их к соответствующим элементам третьей строки. Получаем матрицу, эквивалентную матрице $\overline{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 129 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & | & 82 \\ 0 & -9 & -4 & 1 & | & -369 \end{pmatrix}$$

Шаг 2. $a_{22} \neq 0$. Получаем нулевые элементы во втором столбце полученной матрицы ниже элемента a_{22}. Для этого умножаем все элементы второй строки на $\left(\frac{9}{2}\right)$ и складываем с соответствующими элементами третьей строки. Получаем матрицу, эквивалентную матрице $\overline{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 129 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & | & 82 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 10 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Получили ступенчатую матрицу.

В качестве базисного минора как для матрицы системы, так и для расширенной матрицы системы можно выбрать

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \neq 0 .$$

Итак, $r(A) = r(\overline{A}) = 3$. По теореме Кронекера-Капелли система совместна. Количество неизвестных системы равно четырем и больше ранга матрицы системы, следовательно, система имеет бесконечно много решений. Найдем общее решение системы.

x_1, x_2, x_3 - базисные неизвестные, x_4 - свободное неизвестное. Запишем систему, эквивалентную данной, соответствующую последней матрице, полученной в результате элементарных преобразований матрицы А. При этом базисные переменные в уравнениях запишем в левых частях равенств, а свободные перенесем в правые:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 129 - x_4 \\ 2x_2 + x_3 = 82 - 2x_4 \\ \frac{1}{2} x_3 = -10x_4 \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы находим $x_3 = -20x_4$ Из второго уравнения, подставляя найденное значение для x_3, находим $x_2 = \frac{1}{2}\left(82 - (-20x_4) - 2x_4\right) = 41 + 9x_4$. И, наконец, из первого уравнения найдем $x_1 = 129 - (41 + 9x_4) - (-20x_4) - x_4 = 88 + 10x_4$.

С математической точки зрения система имеет бесчисленное множество решений. С учетом реального экономического содержания x_1, x_2, x_3 и x_4 не могут быть отрицательными. Тогда из $x_3 = -20x_4$ получаем $x_3 = x_4 = 0$ и (88, 41,0, 0) является решением данной системы.

Таким образом, количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание составляет 88 – по первой технологии и 41 по второй.

Задача 5. Фермер вложил в прошлом году в зерноводство, животноводство и овощеводство всего 2 миллиона денежных единиц и получил 180 тысяч денежных единиц прибыли. В текущем году он собирается увеличить вложения в овощеводство в 3 раза, в животноводство в 2 раза, а вложения в зерноводство оставить на прежнем уровне. На все это фермер выделяет 4 миллиона денежных единиц. Какую прибыль собирается получить фермер в текущем году, если зерноводство приносит 7% прибыли на вложенные средства, животноводство 8% и овощеводство 9 %?

Решение.

Пусть x_1, x_2 и x_3 - вложения фермера в зерноводство, животноводство и в овощеводство в прошлом году (в миллионах денежных единиц).

По условию задачи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 0{,}07x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}9x_3 = 0{,}18 \end{cases}$$

В результате имеем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Исследуем данную систему на совместность по теореме Кронекера-Капелли. Составим расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0{,}07 & 0{,}08 & 0{,}09 & | & 0{,}18 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду. Умножим все элементы третьй строки матрицы $\overline{A}$ на 10. Получим матрицу, эквивалентную данной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 7 & 8 & 9 & | & 18 \end{pmatrix}$$

$a_{11} \neq 0$. Получаем в первом столбце ниже элемента a_{11} нулевые элементы. Умножаем все элементы первой строки матрицы $\overline{A}$ на (-1) и складываем их с соответствующими элементам второй. Умножаем все элементы первой строки матрицы $\overline{A}$ на (-7) и прибавляем их к соответствующим элементам третьей строки. Получаем матрицу, эквивалентную матрице $\overline{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 16 \end{pmatrix}.$$

$a_{22} \neq 0$. Получаем нулевые элементы во втором столбце полученной матрицы ниже элемента a_{22}. Для этого умножаем все элементы второй строки на (-1) и складываем с соответствующими элементами третьей строки. Получаем матрицу, эквивалентную матрице $\overline{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 14 \end{pmatrix}.$$

В преобразованной матрице системы последняя строка состоит их нулей. В качестве базисного минора матрицы системы можно выбрать $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то есть $r(A) = 2$.

В качестве базисного минора расширенной матрицы системы можно выбрать

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 14 = 14 \neq 0, \text{ то есть } r(\overline{A}) = 3$$

Итак, $r(A) \neq r(\overline{A})$ следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна и задача не имеет решений.

Задания для самостоятельного выполнения:

N – номер варианта.

Задание 1. Фирма «Орехи» израсходовала $100 \cdot N$ денежных единиц на закупку фундука и арахиса. При продаже фундука фирма получила m% прибыли, а при продаже арахиса — $(m-2)$%. Общая прибыль составила K денежных единиц. Определить, какие суммы вложены фирмой в покупку фундука и в покупку арахиса в отдельности? Составив математическую модель задачи, решить ее а) по формуле Крамера; б) с помощью обратной матрицы.

$$m = \begin{cases} \dfrac{N+10}{2}, \text{если } N - \text{четное},\ N < 8 \\ \dfrac{N+1}{2}, \text{если } N - \text{нечетное}, N < 9 \\ N, \text{если } N - \text{четное},\ N \geq 8 \\ N-1, \text{если } N - \text{нечетное}, N \geq 9 \end{cases},$$

$$K = \begin{cases} 0{,}5 \cdot N^2 + 4{,}2 \cdot N, \text{если} \ \ N - \text{четное}, N < 8 \\ 0{,}5 \cdot N^2 - 0{,}3 \cdot N, \text{если} \ \ N - \text{нечетное}, N < 9 \\ N^2 - 0{,}7 \cdot N, \text{если} \ \ N - \text{четное}, N \geq 8 \\ N^2 - 1{,}7 \cdot N, \text{если} \ \ N - \text{нечетное}, N \geq 9 \end{cases}.$$

Задание 2. Предприятие за три дня произвело продукцию трех видов. Известны объемы выпуска продукции за три дня, которые приведены в таблице 2.2. Денежные затраты на производство в первый, второй и третий дни составили соответственно $(4.5N^2 + 6.26N + 0.76)$, $(5.36N^2 + 4.26N + 1)$ и $(4.15N^2 + 2.62N + 3.12)$ тысячи условных денежных единиц. Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

Таблица 2.2

День	Объем выпуска продукции (единиц)		
	I вид продукции	II вид продукции	III вид продукции
Первый	$10 \cdot N$	23	$N+4$
Второй	24	$3 \cdot N$	$5 \cdot N-2$
Третий	9	26	N

Математическую модель задачи решить тремя способами: а) по формуле Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

Задание 3. У завода есть четыре потребителя, которым ежедневно отгружается готовая продукция. Груз доставляется каждому потребителю упакованным в ящики, маркированные в зависимости от вида продукции, на автомашине. Однажды, когда автомашины были уже отправлены, но еще находились в пути, обнаружилось, что один из четырех видов груза был отправлен по ошибке и его следует возвратить (причем в полной сохранности и без нарушения целостности остальных грузов). Одновременно выяснилось также, что по недосмотру служащего не осталось никаких сведений о том, как именно маркирована та партия ящиков, в которой находился этот подлежащий возврату груз. Однако известно количество маркированных ящиков каждого вида, общий вес груза в каждой машине (см. таблицу 2.3), а также и то, что ящики с возвращаемым грузом должны быть тяжелее остальных.

Дать рекомендации по изъятию этого груза без распаковки и дополнительного взвешивания.

Полученную математическую модель задачи решить а) по формуле Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

Таблица 2.3

Номер автомашины	Количество ящиков первого вида	Количество ящиков второго вида	Количество ящиков третьего вида	Количество ящиков четвертого вида	Общий вес, кг
I	2	11	7	N	$N^2+22N+11$
II	12	3	5	$2N$	$2N^2+24N+3$
III	15	12	N	9	$N^2+36N+30$
IV	3	$2N-1$	6	8	$2N^2+18N+15$

Задание 4. Фермер вложил в прошлом году в зерноводство, животноводство и овощеводство всего $(0{,}9 \cdot N+0{,}5)$ миллиона денежных

единиц и получил $(0{,}069 \cdot N + 0{,}043)$ миллиона денежных единиц прибыли. В текущем году он собирается увеличить вложения в в животноводство 3 раза, в овощеводство в 2 раза, а вложения в зерноводство оставить на прежнем уровне. На все это фермер выделяет $(1{,}7 \cdot N - 1{,}1)$ миллиона денежных единиц. Какую прибыль собирается получить фермер в текущем году, если зерноводство приносит 5% прибыли на вложенные средства, овощеводство 8% и животноводство 11%?

Задание 5. На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий A, B, C и D из некоторого сырья. В таблице 2.4 указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов. Найти условия выбора технологий при производстве из $12 \cdot (N + 1)$ единиц сырья $15 \cdot (3 \cdot N - 2)$ изделий A, $3 \cdot (4 \cdot N - 1)$ изделий B, $78 \cdot N$ изделий C и $(312 \cdot N - 102)$ изделий D.

Таблица 2.4

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
A	N	6	N	1
B	N+1	5	N+7	2
C	2	4	10	$2 \cdot N$
D	N+5	19	N+23	$6 \cdot N$

3 Аналитическая геометрия и векторная алгебра в экономике

Порядок выполнения работы:

1 Повторить теоретический материал по аналитической геометрии и векторной алгебре.

2 Решить все задачи для самостоятельного выполнения. Номер варианта указывается преподавателем.

3 Составить отчет по практической работе.

4 Защитить практическую работу.

Содержание отчета по работе:

1 Тема, цели.

2 Задания для самостоятельного выполнения оформить следующим образом:

а) условие задачи;

б) ход решения (для каждой задачи);

в) ответ.

Теоретические сведения, необходимые для решения задач.

1 Арифметическим n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$.

Обозначение: $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Числа $a_1, a_2, ..., a_n$, задающие вектор $\overline{a}$, называют координатами вектора.

Два вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ равны, только тогда, когда $a_i = b_i$ $((i = 1,2...n)$.

2 Суммой двух векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ называется вектор $\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$.

Произведением вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на число λ, называется вектор $\lambda\overline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$

Сложение векторов и умножение вектора на число называются линейными операциями над векторами.

3 Множество всех n-мерных арифметических векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на число, называется арифметическим n-мерным векторным пространством и обозначается R^n.

4 Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными, если существует число k такое, что $\overline{a} = k\overline{b}$.

Условие коллинеарности векторов в пространстве R^n в координатной форме: если $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \parallel \overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

5 Скалярным произведением двух векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ из пространства R^n называется число, равное $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n$.

Обозначение: $(\overline{a}; \overline{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n$.

6 Векторы $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ из пространства R^n называются ортогональными, если $(\overline{a}; \overline{b}) = 0$.

Говорят, что вектор $\overline{b}$ ортогонален системе векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, если он ортогонален каждому вектору этой системы.

7 Уравнение прямой:

• с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b:

$$y = kx + b$$

• проходящей в данном направлении (с угловым коэффициентом k) через данную точку $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

• проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

(с угловым коэффициентом $k = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$)

• в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(где a и b — соответственно отрезки, отсекаемые на осях Ox и Oy);

• общее:

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$.

Примеры решения задач с экономическим содержанием

Задача 1. Пусть завод производит продукцию четырех видов: А, Б, В и Г. Известно количество продукции каждого вида, произведенное за 2007 год:

300, 250, 90 и 120 штук продукции видов А, Б, В и Г соответственно. Записать вектор объема производства за 2007 год.

Решение

Вектор объема производства будет иметь вид $\overline{V} = (300;250;90;120)$.

Задача 2. Известно, что первый завод 2007 году выпустил 1100 женских, 1300 мужских и 550 детских велосипедов, второй завод в этом же году выпустил 900 женских, 850 мужских и 670 детских велосипеда. Найти объем продукции, выпущенной двумя заводами, в 2007 году.

Решение.

Объем выпуска велосипедов первого завода в 2007 году составил $V_1 = (1100;1300;550)$.

Объем выпуска велосипедов второго завода в 2007 году составил $V_2 = (900;850;670)$.

Тогда объем продукции, выпущенной двумя заводами, найдем как сумму двух векторов объемов производства первого и второго заводов:

$V = V_1 + V_2 = (2000;2150;1220)$.

Задача 3. Швейная фабрика в 2007 году выпустила 1250 костюмов, 510 плащей и 875 курток. В 2008 году фабрика планирует удвоить выпуск продукции. Найти планируемый объем продукции. Найти планируемый вектор роста объемов выпуска продукции в 2008 году по сравнению с 2007 годом

Решение.

Объем выпуска продукции в 2007 году составил $V_{2007} = (1250;510;875)$.

Объем планируемого выпуска продукции найдем как произведение вектора V на число 2. Получим $V_{2008} = (2500;1020;1750)$.

Планируемый вектор роста объемов выпуска продукции найдем как разность между векторами V_{2008} и V_{2007}:

$$V = V_{2008} - V_{2007} = (1250;510;875).$$

Задача 4. Известно, что за один фунт стерлингов можно купить 2 доллара 31 цент или 1 франк 72 сантима. Составить таблицу обменных курсов валют.

Решение.

Каждый столбец в таблице обменных курсов валют выражает курсовую стоимость единицы соответствующего вида валюты. Любые два столбца и любые две строки этой таблицы пропорциональны, то есть любые векторы-столбцы и любые векторы-строки коллинеарны. Заполняем первый столбец данной таблицы и главную диагональ (таблица 3.1).

Итак, первый вектор-столбец имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}72 \\ 2{,}31 \end{pmatrix}$. Обозначим неизвестные координаты второго вектора-столбца через y_1 и y_3. Получаем вектор-столбец с координатами $\begin{pmatrix} y_1 \\ 1 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Так как первый и второй векторы-столбцы пропорциональны, то неизвестные координаты найдем из пропорции $\frac{1}{y_1} = \frac{1{,}72}{1} = \frac{2{,}31}{y_3}$, то есть $y_1 = 0{,}58$, $y_3 = 1{,}34$. Заполняем второй столбец таблицы 4.1. Обозначаем неизвестные координаты третьего вектора-столбца через z_1 и z_2. Получаем вектор-столбец с координатами $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Из условия пропорциональности векторов-столбцов таблицы получаем $\frac{1}{z_1} = \frac{1{,}72}{z_2} = \frac{2{,}31}{1}$, откуда $z_1 = 0{,}43$ и $z_2 = 0{,}74$. Заполняем третий столбец таблицы 3.1

Проверим правильность вычислений, воспользовавшись условием коллинеарности векторов-строк, то есть, проверяем, будут ли коллинеарны векторы-строки таблицы $(1;0{,}58;0{,}43)$, $(1{,}72;1;0{,}74)$ и $(2{,}31;1{,}34;1)$. Из пропорций $\frac{1}{1{,}72} = \frac{0{,}58}{1} = \frac{0{,}43}{0{,}74} = 0{,}58$ и $\frac{1}{2{,}31} = \frac{0{,}58}{1{,}34} = \frac{0{,}43}{1} = 0{,}43$ видно, что векторы-строки коллинеарны, а значит строки полученной таблицы пропорциональны.

Таблица 3.1

	1£	1$	1SF
1£	1	0,58	0,43
1$	1,72	1	0,74
1SF	2,31	1,34	1

Задача 5. Группа студентов совершила туристическую поездку по европейским странам. К концу путешествия студенты обнаружили, что у них накопились остатки валюты: 13 швейцарских франков, 15 британских фунтов стерлингов, 16 датских крон и 30 шведских крон. Туристы решили перевести валюту в рубли и организовать банкет. На обменном пункте они узнали курсы валют:

1 швейцарский франк – 22,8 рублей,

1 британский фунт стерлингов – 41,4 рублей,

1 датская крона – 4,6 рублей,

1 шведская крона – 3,4 рублей

Определить сколько рублей будет у студентов на банкет.

Решение.

Представим остатки валюты в виде вектора: $\overline{a} = (13;17;16;30)$.

Обменные курсы валют представим в виде вектора $\overline{b} = (22,8;41,4;4,6;3,4)$.

Количество рублей, которые получат студенты в результате обмена валюты, найдем как скалярное произведение полученных векторов:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 13 \cdot 22,8 + 15 \cdot 41,4 + 16 \cdot 4,6 + 30 \cdot 3,4 = 1093.$$

Итак, у студентов будет 1093 рубля.

Задача 6. По таблице 3.2, которая представляет собой фрагмент потребительской корзины, вычислить индекс цен и индекс инфляции для определенного месяца по отношению к предыдущему месяцу.

Таблица 3.2

Вид товара	Количество	Цена единицы товара в текущем месяце	Цена единицы товара в предыдущем месяце
Хлеб	10	10,5	9,8
Молоко	5	21	20
Мыло	3	11	10,7

Решение.

Обозначим через $\overline{q} = (10;5;3)$ - вектор количества потребляемых товаров, $\overline{c}_{тек} = (10,5;21;11)$ - вектор цен в текущем периоде, $\overline{c}_{пред} = (9,8;20;10,7)$ - вектор цен в предыдущем периоде.

Индекс цен определяется как коэффициент p, который делает вектор $\overline{q}$ ортогональным вектору $100\overline{c}_{тек} - p\overline{c}_{пред}$. Тогда $(100\overline{c}_{тек} - p\overline{c}_{пред}, \overline{q}) = 0$, отсюда $100(\overline{c}_{тек}, \overline{q}) = p(\overline{c}_{пред}, \overline{q})$. Итак, индекс цен найдем по формуле $p = \dfrac{(\overline{c}_{тек}, \overline{q})}{(\overline{c}_{пред}, \overline{q})} \cdot 100\%$.

Получаем $p = \dfrac{10,5 \cdot 10 + 21 \cdot 5 + 11 \cdot 3}{9,8 \cdot 10 + 20 \cdot 5 + 10,7 \cdot 3} \cdot 100\% = \dfrac{243}{230,1} \cdot 100\% = 105,6\%$.

Индекс инфляции можно найти по формулам $i = p - 100$ или $i = \dfrac{(\overline{c}_{тек} - \overline{c}_{пред}, \overline{q})}{(\overline{c}_{пред}, \overline{q})} \cdot 100\%$.

Получаем, что индекс инфляции составил $i = 5{,}6\%$.

Задача 7. В прошлом году средняя цена данного товара была 15 денежных единиц, а в настоящем году – 18 денежных единиц. Найти зависимость цены товара от номера года, при условии, что тенденция роста сохраниться, то есть цена будет увеличиваться на одно и то же число. Составить прогноз средней цены на три года вперед.

Решение.

Составим уравнение, связывающее номер года x и цену товара y, как уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(1;15)$ и $B(2;18)$:

$$\frac{y-15}{18-15} = \frac{x-1}{2-1} \text{ или } y = 3x+12$$

Так как номер прошлого года равен 1, а текущего – 2, то через три года, то есть при $x = 5$, цена товара составит $y = 3 \cdot 5 + 12 = 27$ денежных единиц.

Задача 8. Предприниматель взял в банке кредит на 150000 денежных единиц под 12% простых годовых. (Простым процентом в банковской практике называют процентные деньги, начисляемые только на основной капитал по истечении каждого установленного договором промежутка времени). Найти количество денежных единиц долга через полгода, три года.

Решение.

Если на основной капитал B начисляются простые проценты из расчета $R\%$ годовых, то процентные деньги за один год составят $\frac{RB}{100} = rB$, где $r = \frac{R}{100}$. За t лет процентные деньги составят rBt. Обозначим наращенную сумму за t лет через S. Получим, что S есть линейная функция от времени t:

$$S(t) = rBt + B = B(1+rt).$$

По условию $B = 150000$ денежных единиц, $r = 0{,}12$.

Тогда $S = 18000t + 150000 = 150000(1+0{,}12t)$.

При $t = 6\,месяцев = 0{,}5\,года$ $S = 150000(1+0{,}12 \cdot 0{,}5) = 159000$ денежных единиц.

При $t = 3\,года$ $S = 150000(1+0{,}12 \cdot 3) = 204000$ денежных единиц.

Задача 9. Предложение S и спрос D на муку в период 1920-1935 г.г. выражены функциями:

$$S = 0{,}8p + 0{,}5\,;\ D = -0{,}4p + 1{,}5\,,$$

где p - цена муки – измеряется в долларах, а S и D в центнерах. Найти рыночную цену муки. (Рыночная цена товара – это цена, при которой его предложение на рынке и спрос совпадают).

Решение.

Рыночная цена определяется условием $S = D$, то есть является решением уравнения $0{,}8p + 0{,}5 = -0{,}4p + 1{,}5$ и равна $p_0 = 0{,}83$ доллара.

На рисунке 1 изображены графики функций S и D (по оси абсцисс откладывается цена товара p, по оси ординат – количество товара Q). Рыночная цена муки p_0 является абсциссой точки пересечения этих графиков.

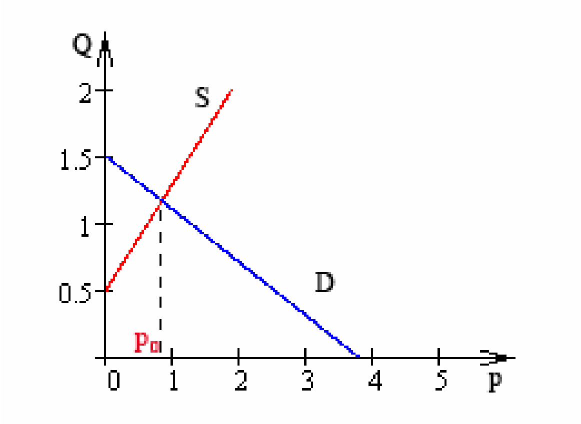

Рисунок 1

Задача 10. Издержки y (в рублях) на изготовление партии деталей находятся в линейной зависимости от объема партии x. Для первого варианта технологического процесса известно, что $y = 210x + 5600$. Для второго варианта известно, что $y = 29000$ (рублей) при $x = 120$ (деталей) и $y = 105500$ (рублей) при $x = 460$ (деталей). Провести оценку двух вариантов технологического процесса и найти себестоимость продукции для обоих вариантов при $x = 225$ (деталей).

Решение.

Для второго варианта технологического процесса найдем уравнение, описывающее зависимость издержек от количества деталей.

Рассмотрим два способа составления такого уравнения.

I способ.

Так как по условию известно, что эта зависимость линейная, то уравнение имеет вид $y = ax + b$. Найдем параметры a и b из системы уравнений:

$$\begin{cases} 29000 = a \cdot 120 + b \\ 105500 = a \cdot 460 + b \end{cases}$$

Откуда $a = 225$ и $b = 2000$, то есть $y = 225x + 2000$.

II способ.

Составим уравнение как уравнение прямой, проходящей через две известные точки $M_1(120;29000)$ и $M_2(460;105500)$:

$$\frac{y - 29000}{105500 - 29000} = \frac{x - 120}{460 - 120}$$

или

$$\frac{y - 29000}{76500} = \frac{x - 120}{340}$$

Тогда $y = 220x + 2000$.

Найдем точку пересечения двух прямых, описывающих зависимость издержек от количества деталей:

$$\begin{cases} y = 210x + 5600 \\ y = 225x + 2000 \end{cases},$$

откуда $x_0 = 240$, $y_0 = 56000$.

Итак, при объеме партии $x < 240$ выгоднее второй вариант технологического процесса, при $x > 240$ - первый вариант.

Себестоимость выпуска 225 деталей первым технологическим способом находим как $y(225) = 210 \cdot 225 + 5600 = 52850$ условных денежных единиц. Для второго технологического способа себестоимость составит $y(225) = 220 \cdot 225 + 2000 = 51500$ условных денежных единиц.

Задания для самостоятельного выполнения.

N – номер варианта.

Задание 1

Вариант 1.

Хлебопекарня выпускает хлеб пяти видов: подовый, дарницкий, бородинский, формовой и круглый. Объемы производства хлеба в день составляют 1500, 1250, 910, 2100, 1150 штук подового, дарницкого, бородинского, формового и круглого хлеба соответственно. Записать вектор объема производства хлеба а) в день; б) в текущий месяц (учитывая, что хлеб выпекается каждый день в одних и тех же количествах)

Вариант 2.

Заработная плата шести работников крупной компании за первый квартал приведена в таблице 3.3. В апреле этим работникам предоставили отпуск, заплатив им по среднему заработку за предыдущий квартал. Найти вектор зарплаты данных работников за апрель. Найти вектор роста зарплат в марте по сравнению с январем.

Таблица 3.3

Фамилия И.О.	Начисленная заработная плата (усл. ден. ед.)		
	Январь	Февраль	Март
Антонов А.А.	10095	12232	13034
Владимиров В.В.	13111	15617	15405
Иванов И.И.	16412	17558	16023
Матвеева М.М.	11077	13206	13957
Петров П.П.	12530	17020	17899
Сидорова С.С.	16740	17401	17052

Вариант 3.

Объемы производства продукции обувной фабрики за третий квартал составили 1150, 1230, 920, 510 и 415 пар женских сапог, мужских ботинок, детских сапог, женских туфель и мужских полусапог соответственно. Записать вектор объема производства обуви за первое полугодие, если объемы производства за третий квартал есть среднее арифметическое первых двух кварталов. Найти вектор роста объемов выпущенной продукции за третий квартал по сравнению со вторым кварталом.

Вариант 4

Молокозавод выпустил за текущий месяц 5150 литров молока, 3270 литров варенца, 1250 литров ряженки, 4080 литров кефира, 9300 литров сметаны. Объемы производства данной продукции за предыдущий месяц были на 0,25% меньше, чем в текущем месяце. Записать вектор объема производства продукции за предыдущий месяц, а также планируемый вектор объема производства в следующий месяц как среднее арифметическое двух предыдущих месяцев.

Вариант 5.

Оптовый склад продает фрукты. За неделю было продано 200 ц. яблок, 120 ц. апельсинов, 130 ц. груш, 105 ц. винограда и 130 ц. абрикосов. Записать вектор объема продаж за месяц, а также вектор планируемых объемов продаж за три месяца, если за неделю было продано яблок, абрикосов на 2% и 5% соответственно больше, груш на 4% меньше планируемых, а объемы продаж апельсинов и винограда совпали с планируемыми объемами продаж.

Вариант 6.

Имеются данные о начисленной зарплате 6 работников фирмы (таблица 3.4) за II квартал. Ежемесячно с начисленной заработной платы взимается подоходный налог в размере 13%. Найти вектор налогов, уплаченных каждым работником фирмы за квартал.

Таблица 3.4

Фамилия И.О.	Начисленная заработная плата (усл. ден. ед.)		
	Апрель	Май	Июнь
Алексеев А.А.	13490	12456	13039
Борисова Б.Б.	15632	15600	15411
Данилов Д.Д.	11854	13217	13212
Захаров З.З.	19854	18765	19876
Михайлов М.М.	12789	12345	13542
Терентьева Т.Т.	16543	17766	17050

Вариант 7.

Оптовый склад продает овощи. За предыдущий месяц было продано 800 ц. моркови, 480 ц. свеклы, 1300 ц. картофеля, 1050 ц. лука и 510 ц. капусты. Известно, что среди постоянных покупателей овощей у оптового склада есть торговый комплекс, который приобрел в прошлом месяце 21% от всего объема продаж оптового склада. Экономист оптового склада предложил предоставить скидку торговому комплексу как постоянному покупателю. В результате получения скидки торговый комплекс торговый комплекс приобрел продукции у оптового склада на 16% больше, чем в предыдущем месяце. Записать вектор объема продаж оптового склада за текущий месяц, если остальные покупатели оптового склада объемы покупок не изменили.

Вариант 8.

Предприятие выпускает бытовую химию. Объемы выпуска продукции по месяцам указаны в таблице 3.5. Найти вектор планируемого выпуска продукции на IV квартал, если предприятие планирует увеличить объемы выпуска по сравнению с предыдущим кварталом на 4%.

Таблица 3.5

Наименование продукции	Количество выпущенной продукции (шт.)		
	Июль	Август	Сентябрь
Мыло туалетное	3546	3412	3869
Мыло хозяйственное	3412	3526	3617
Порошок стиральный	5413	5221	5314
Средство для мытья посуды	1425	1523	1698
Отбеливатель	789	945	842

Вариант 9.

Хлебопекарня выпускает хлеб пяти видов: подовый, дарницкий, бородинский, формовой и круглый. Объемы производства хлеба в будний день составляют 1150, 1120, 190, 1200, 1150 штук подового, дарницкого, бородинского, формового и круглого хлеба соответственно, а в выходные и праздничные дни хлеба выпускается на 7% от объема производства хлеба больше. Найти вектор объема выпуска продукции в текущий месяц, а также вектор роста объемов выпущенной продукции в выходной день по сравнению с будним днем.

Вариант 10.

Объемы выпуска продукции мебельной фабрики по месяцам указаны в таблице 3.6.

Таблица 3.6

Наименование продукции	Количество произведенной продукции (шт.)		
	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Столы	549	611	869
Стулья	1278	1450	1617
Шкафы-купе	541	522	514

Наименование продукции	Количество произведенной продукции (шт.)		
	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Кровати	425	523	168
Диваны	78	45	42
Кресла	154	98	95

Найти вектор роста объема выпуска продукции в декабре по сравнению с октябрем. Найти вектор выпуска продукции за третий квартал, если известно, что в четвертом квартале было выпущено продукции на 14% больше.

Вариант 11.

Объемы производства продукции обувной фабрики за второй квартал составили 4234, 3256, 1920, 1510 и 1415 пар женских сапог, мужских ботинок, детских сапог, женских туфель и мужских полусапог соответственно. Записать вектор объема производства обуви за первое полугодие, если объемы производства за второй квартал превышают объемы производства за первый квартал на 5%. Найти вектор роста объемов выпущенной продукции за второй квартал по сравнению с первым.

Вариант 12.

Молокозавод выпустил за второй квартал 15105 литров молока, 13027 литров варенца, 11205 литров ряженки, 14008 литров кефира, 19784 литра сметаны. Объемы производства данной продукции за первый квартал были на 3 % меньше, чем во втором квартале, и на 2% больше, чем в четвертом квартале. Записать вектор объема производства в год, если объемы производства в третьем квартале есть среднее арифметическое объемов производств первых двух кварталов.

Вариант 13.

Имеются данные об окладах работников фирмы (таблица 3.7), а также размеры премий в процентном соотношении от оклада за три месяца. Премия выплачивается в конце квартала. Найти вектор премий работников за квартал.

Таблица 3.7

Фамилия И.О.	Оклад (ден. ед.)	Размер премии (%)		
		Июль	Август	Сентябрь
Александрова А.А.	6723	25	20	0
Григорьев Г.Г.	5689	23	20	25
Егорова Е.Е.	7632	25	0	23
Ильин И.И.	5430	0	20	25
Леонидова Л.Л.	6318	24	18	25
Устинов У.У.	6750	25	19	21

Вариант 14.

Оптовый склад продает фрукты. За месяц было продано 800 ц. яблок, 670 ц. апельсинов, 650 ц. груш, 430 ц. винограда и 440 ц. абрикосов. Известно, что за предыдущий месяц было продано яблок и апельсинов на 2% больше, абрикосов и винограда на 1,5% меньше, объем продаж груш совпал с данным месяцем. Найти планируемый объем продаж на следующий месяц как среднее арифметическое двух предыдущих месяцев.

Вариант 15.

Предприятие выпускает бытовую технику. Объемы выпуска продукции по месяцам указаны в таблице 3.8. Известно, что 32% выпущенной продукции предприятие отправляет напрямую в магазины и торговые центры, а остальную продукцию приобретают оптовые склады. Найти вектор объема продукции, приобретенной оптовыми складами за квартал.

Таблица 3.8

Наименование продукции	Количество выпущенной продукции (шт.)		
	Апрель	Май	Июнь
Пылесос	1254	1329	1326
Электрический чайник	2412	2526	2617
Соковыжималка	2413	2221	1314
Утюг	3425	3523	3698
Стиральная машинка	789	945	842

Задание 2. Известно, что за один рубль можно купить $0{,}37 \cdot (4 \cdot m - 0{,}91)$ условных единиц первой валюты, $0{,}54 \cdot (0{,}3 \cdot m + 2{,}18)$ условных единиц второй валюты и $0{,}78 \cdot N + 0{,}51$ условных единиц третьей валюты. Составить таблицу обменных курсов валют.

$$m = \begin{cases} \dfrac{N+10}{2}, \text{если } N - \text{четное, } N < 8 \\ \dfrac{N+1}{2}, \text{если } N - \text{нечетное, } N < 9 \\ N, \text{если } N - \text{четное, } N \geq 8 \\ N-1, \text{если } N - \text{нечетное, } N \geq 9 \end{cases}$$

Задание 3. Предприятие выпускает 4 вида продукции P_1, P_2, P_3, P_4. В количествах $160 \cdot N - 120$, $80 \cdot N + 70$, $2400 - 10 \cdot N$, $15 \cdot (28 \cdot N - 12)$ единиц. При этом нормы расхода сырья составляют соответственно $0{,}5 \cdot N$; $3{,}5 \cdot N - 3{,}4$; $0{,}4 \cdot N + 0{,}7$; $6{,}9 \cdot N - 5{,}8$ кг. Определить суммарный расход сырья и его изменение при изменениях выпуска продукции P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно на $8 - N$, $N - 5$, $2 \cdot N - 9$, $15 - 3 \cdot N$ единиц.

Задание 4. По таблице 3.9 вычислить индекс цен и индекс инфляции для текущего квартала по отношению к предыдущему кварталу.

Таблица 3.9

Вид товара	Количество (кг)	Цена товара в текущем квартале (за 1 кг)	Цена товара в предыдущем квартале (за 1кг)
Гречневая крупа	1	$20{,}5 - 0{,}01 \cdot N$	$19{,}8 - 0{,}01 \cdot N$
Макароны	1	$35{,}2 - 0{,}02 \cdot N$	$34{,}5 - 0{,}02 \cdot N$
Масло сливочное	0,2	$152{,}9 - 0{,}03 \cdot N$	$151{,}5 - 0{,}03 \cdot N$
Масло растительное	0,9	$60 - 0{,}01 \cdot N$	$59 - 0{,}01 \cdot N$
Мясо	2,5	$200 - 0{,}02 \cdot N$	$198 - 0{,}02 \cdot N$
Рыба	1,5	$185 - 0{,}03 \cdot N$	$185 - 0{,}03 \cdot N$
Сахар	1	$25 - 0{,}01 \cdot N$	$24{,}3 - 0{,}01 \cdot N$
Соль	0,1	$7 - 0{,}005 \cdot N$	$6{,}9 - 0{,}005 \cdot N$
Хлеб	5	$20 - 0{,}02 \cdot N$	$20 - 0{,}02 \cdot N$
Яблоки	2,5	$60 - 0{,}03 \cdot N$	$58{,}7 - 0{,}03 \cdot N$

Задание 5. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются уравнениями $y = 15(3 \cdot N + 4) + 4 \cdot N \cdot x$ и $y = 12(3 \cdot N + 5) + 7 \cdot N \cdot x$, где x - расстояние в сотнях километров, y - транспортные расходы. Начиная с какого расстояния более экономичен первый вид транспорта.

Задание 6. Изменение объема производства y линейно зависит от производительности труда x. Составить уравнение этой зависимости, если при $x = 7 \cdot N - 4$ $y = 21 \cdot N - 10$, а при $x = 5 \cdot N + 2$ $y = 15 \cdot N + 8$. Определить объем производства при производительности труда равной $40 \cdot N - 6$.

Список использованных источников

1 Дьяконов, В. Mathcad 2001: специальный справочник./ В. Дьяконов. – СПб.: Питер, 2002. – 832с. – ISBN 5-318-00362-1

2 Карасев, А.И. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики: учебное пособие. / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер. - М.: ВЗФЭИ, 1989. – 100 с.

3 Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 471 с. – ISBN 5-238-00030-8

4 Кремер, Н.Ш. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, [и др.] – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 423 с. – ISBN 5-238-00459-1

5 Малыхин, В.И. Математика в экономике: учебное пособие / В.И. Малыхин – М.: ИНФРА-М , 2002. – 352 с. – ISBN 5-16-000872-1

6 Плис, А.И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с. – ISBN 5-279-02550-X

7 Солодовников, А.С. Математика в экономике: учебник: В 2-х ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2003. Ч.1. - 384 с. – ISBN 5-279-02640-9

Приложение А

Выполнение матричных операций (сложение матриц, умножение матрицы на действительное число, умножение матриц, нахождение обратной матрицы) в среде Mathcad.

Работа с матрицами в Mathcad.

Большинство операций с матрицами в Mathcad можно выполнить тремя способами – с помощью панелей инструментов, выбором операций в меню или обращением к соответствующей функции.

Панель операций с матрицами и векторами Matrix находится в панели математических инструментов (рисунок А.1):

Рисунок А.1

Открыть эту панель можно щелчком по соответствующей кнопке . За каждой кнопкой панели закреплены функции. Рассмотрим лишь необходимые нам кнопки и их функции:

 определение размеров матрицы;

 ввод нижнего индекса;

 нахождение обратной матрицы;

 вычисление определителя матрицы;

 выделение n-го столбца матрицы М (нумерация начинается с нуля).

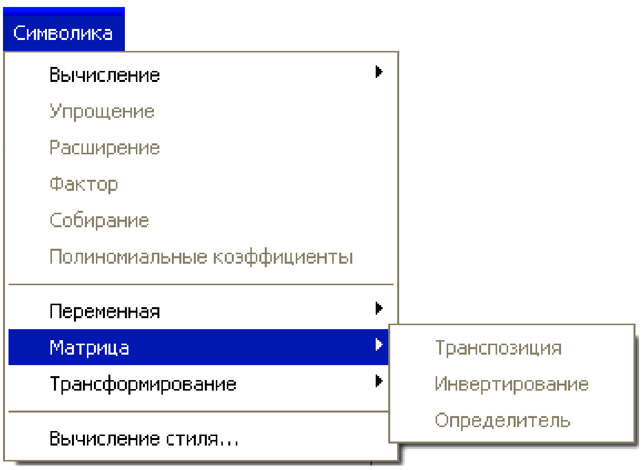

Рисунок А.2

Для того чтобы выполнить какую-либо операцию с помощью панели инструментов, нужно выделить матрицу и щелкнуть по кнопке операции либо щелкнуть по кнопке в панели и ввести в помеченной позиции имя матрицы. Меню символьных операций с матрицами (рисунок А.2) содержит три функции – транспонирование, обращение матрицы и вычисление определителя матрицы. Чтобы произвести эти операции через меню нужно выделить матрицу и щелкнуть в меню по строке операции.

Функции, предназначенные для работы с матрицами, находятся в разделе Vector and Matrix в пункте «Функция» в меню «Вставка» (рисунок А.3).

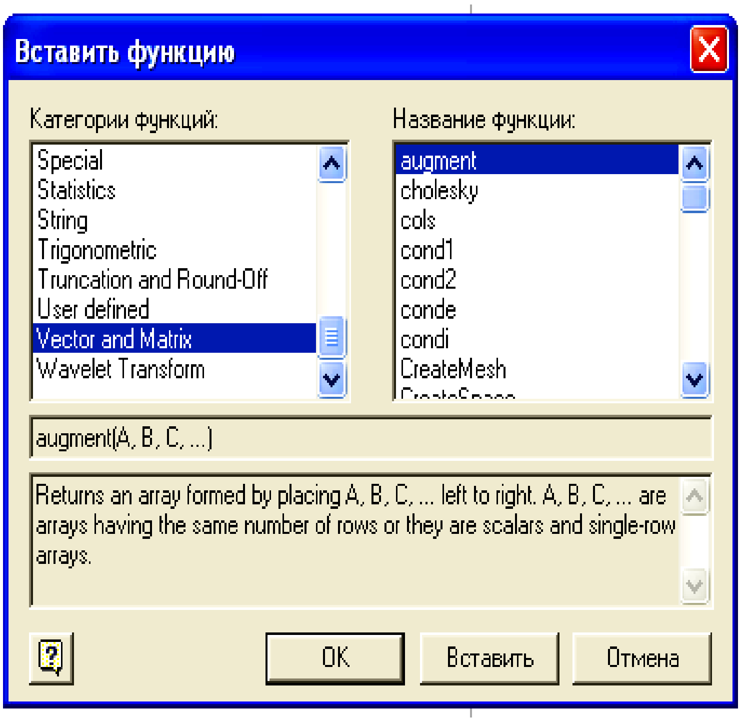

Рисунок А.3

Рассмотрим ряд необходимых нам функций.

Функции определения матриц и операции с блоками матриц:

matrix(m, n, f) – создает и заполняет матрицу размерности mxn, элемент которой, расположенный в i-той строке, j-том столбце, равен значению $f(i, j)$ функции $f(x,y)$;

diag(v) – создает диагональную матрицу, элементы главной диагонали которой хранятся в векторе v;

identity(n) – создает единичную матрицу порядка n;

augment(A,B) – формирует матрицу, в первых столбцах которой содержится матрица A, а в последних – матрица B (матрицы A и B должны иметь одинаковое число строк);

stak(A,B) – формирует матрицу, в первых строках которой содержится матрица A, а в последних – матрица B (матрицы A и B должны иметь одинаковое число столбцов).

Функции вычисления числовых характеристик матриц:

rows(A) – вычисление числа строк в матрице A;

cols(A) – вычисление числа столбцов в матрице A;

max(A) – вычисление наибольшего элемента в матрице A;

min(A) – вычисление наименьшего элемента в матрице A;

rank(A) – вычисление ранга матрицы A.

Функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры:

rref(A) – приведение матрицы к ступенчатому виду с единичным базисным минором (выполняет элементарные операции со строками матрицы).

lsolve(A,B) – решение системы линейных уравнений $AX=B$.

Задание 1. Задайте матрицу A с использованием панели операций с матрицами и векторами Matrix и матрицу B того же размера с помощью функции определения матриц. Найдите $12A$-$16B$ (рисунок А.4).

Ход работы:

1. Задаем матрицу А с использованием панели операции с матрицами и векторами Matrix.
2. Задаем матрицу В того же размера с помощью функции определения матриц.
3. Находим 12А-16В.

Задание 2. Задайте матрицу C размера 4х3 любым из описанных выше способов. Найдите транспонированную ей матрицу с помощью панели операций с матрицами и векторами Matrix, а также с использованием меню символьных операций с матрицами. Решение задания приведено на рисунке А.5.

Ход работы:

1. Задаем матрицу А.
2. Находим транспонированную матрицу с помощью панели операции с матрицами.
3. Находим транспонированную матрицу с использованием меню.
4. Сравниваем полученные результаты.

Задание 3. Задайте матрицы P размера 6х8 и H размера 8х2. Найдите произведение матриц PH. Решение данного задания приведено на рисунке А.6.

Ход работы:

1. Задаем матрицу P.
2. Задаем матрицу H.
3. Находим произведение матриц PH.

Задание 4. Задайте квадратную матрицу D четвертого порядка и матрицу-столбец F с четырьмя строками любым из описанных выше способов, а также единичную матрицу соответствующей размерности с использованием функции определения матриц. Найдите произведения *DF*, *DE* и *ED* (рисунок А.7).

Ход работы:

1. Задаем матрицу D.
2. Задаем матрицу F.
3. Задаем матрицу E с помощью функции определения матриц.
4. Находим произведение матриц DF.
5. Находим произведение матриц DE.
6. Находим произведение матриц ED.

Задание 5. Задайте квадратную матрицу *G* четвертого порядка. Найдите обратную матрицу для матрицы *G*. Сделайте проверку. Решение задания на рисунке А.8.

Ход работы:

1. Задаем матрицу G.
2. Находим матрицу G^{-1} (чтобы получить результат в символьном виде после G^{-1} наберите знак символьных вычислений – стрелка вправо).
3. Для проверки находим произведение GG^{-1}.

Задание 6. Найти $15AB\text{-}29CE+D^3\text{-}18FG^m+38H^{-1}$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 8 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 1 \\ -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 12 & 4 & -6 & 1 \\ 48 & -5 & 24 & 3 \\ 11 & 3 & -12 & -19 \\ 0 & 1 & 2 & -23 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -7 \\ 3 & -4 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$F=\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 9 & -8 \\ -4 & 0 & -1 & 9 \\ 2 & -7 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица соответствующей размерности. Решение задания на рисунке А.9.

Ход работы:

1. Задаем матрицы A, B, C, D, F, G, H.
2. Находим матрицу E с помощью функции определения матрицы.
3. Находим $15AB\text{-}29CE+D^3\text{-}18FG^m+38H^{-1}$.

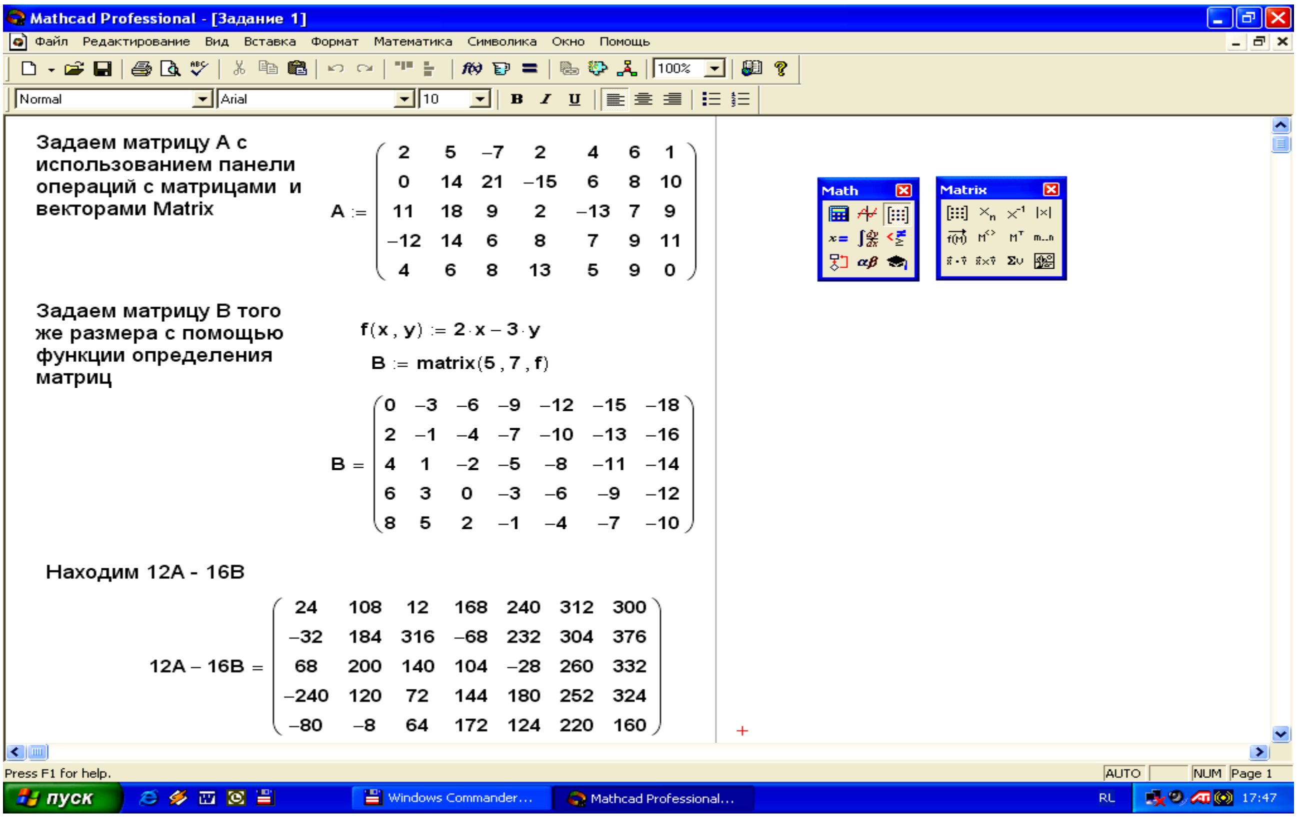

Рисунок А.4

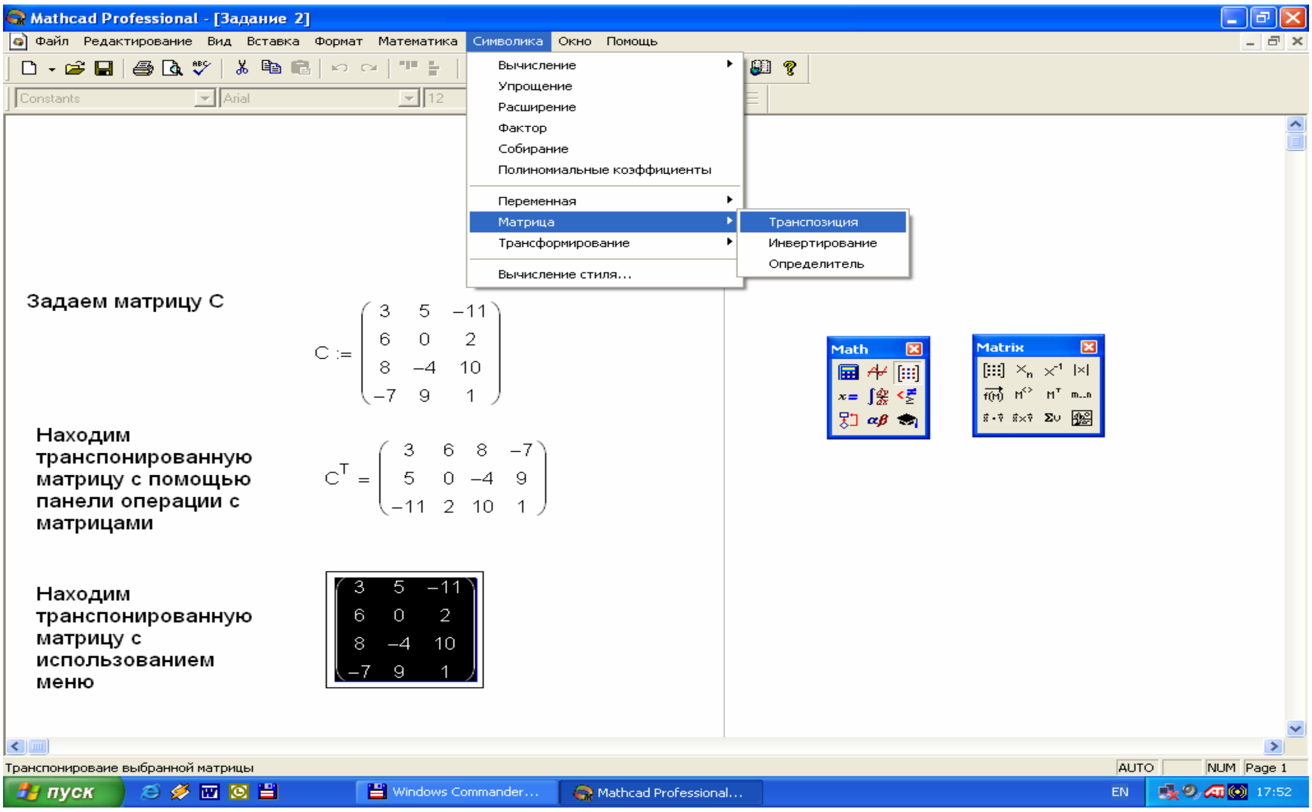

Рисунок А.5

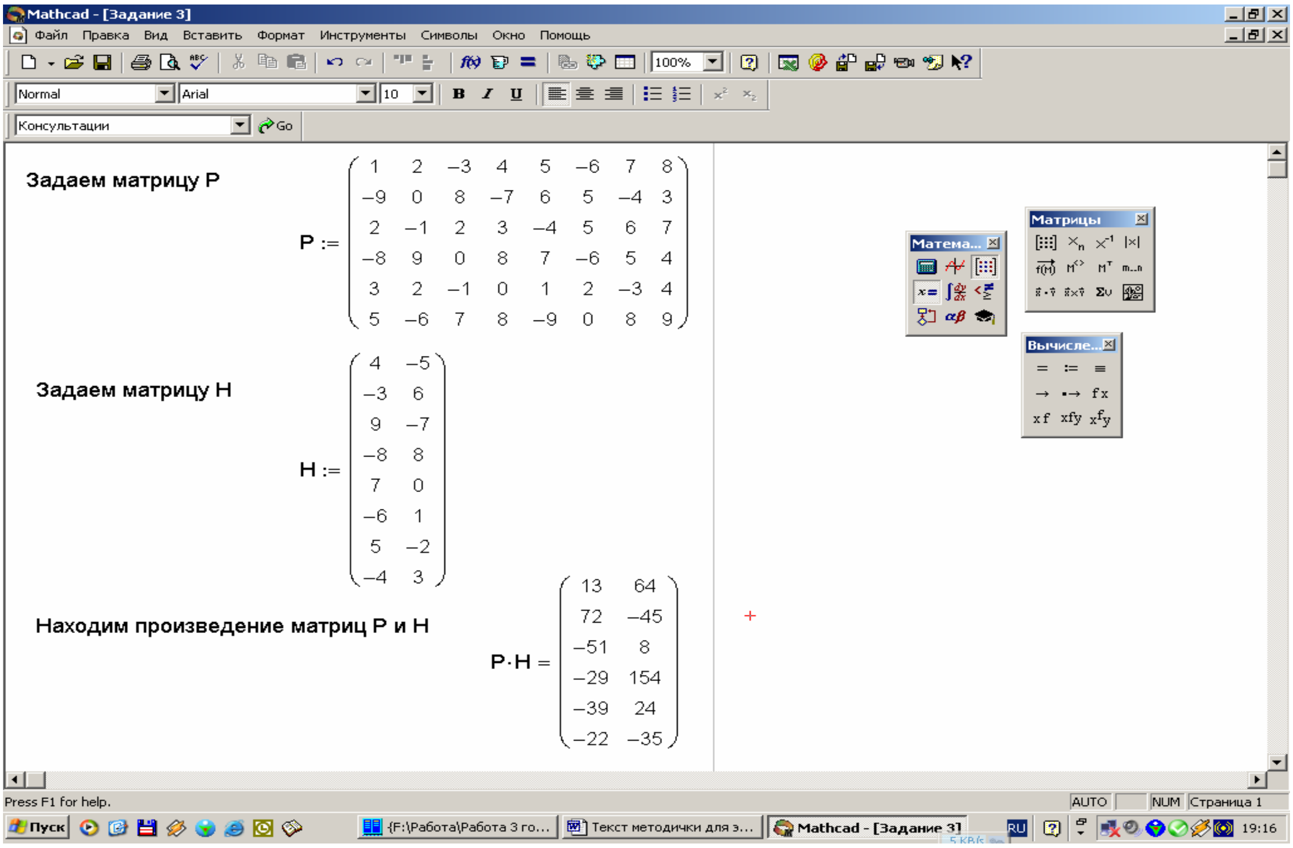

Рисунок А.6

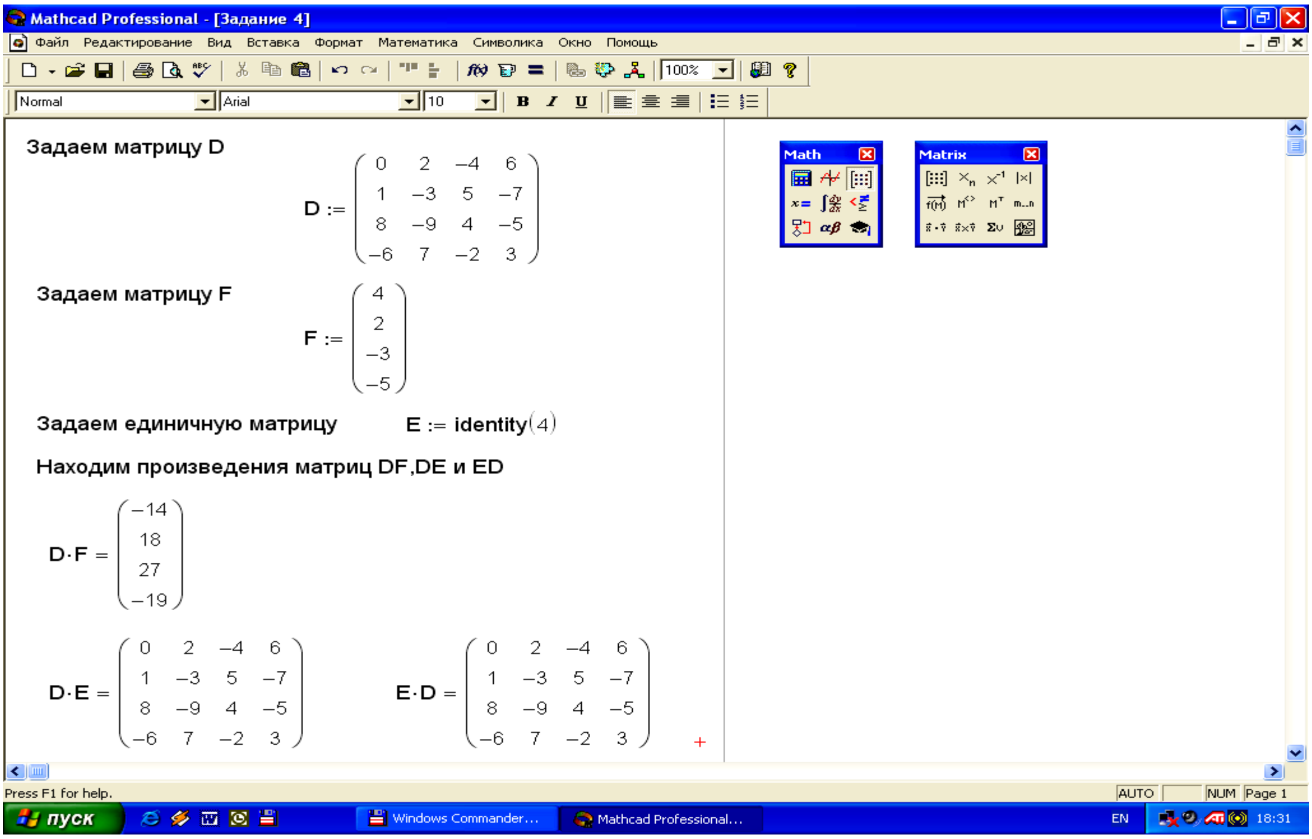

Рисунок А.7

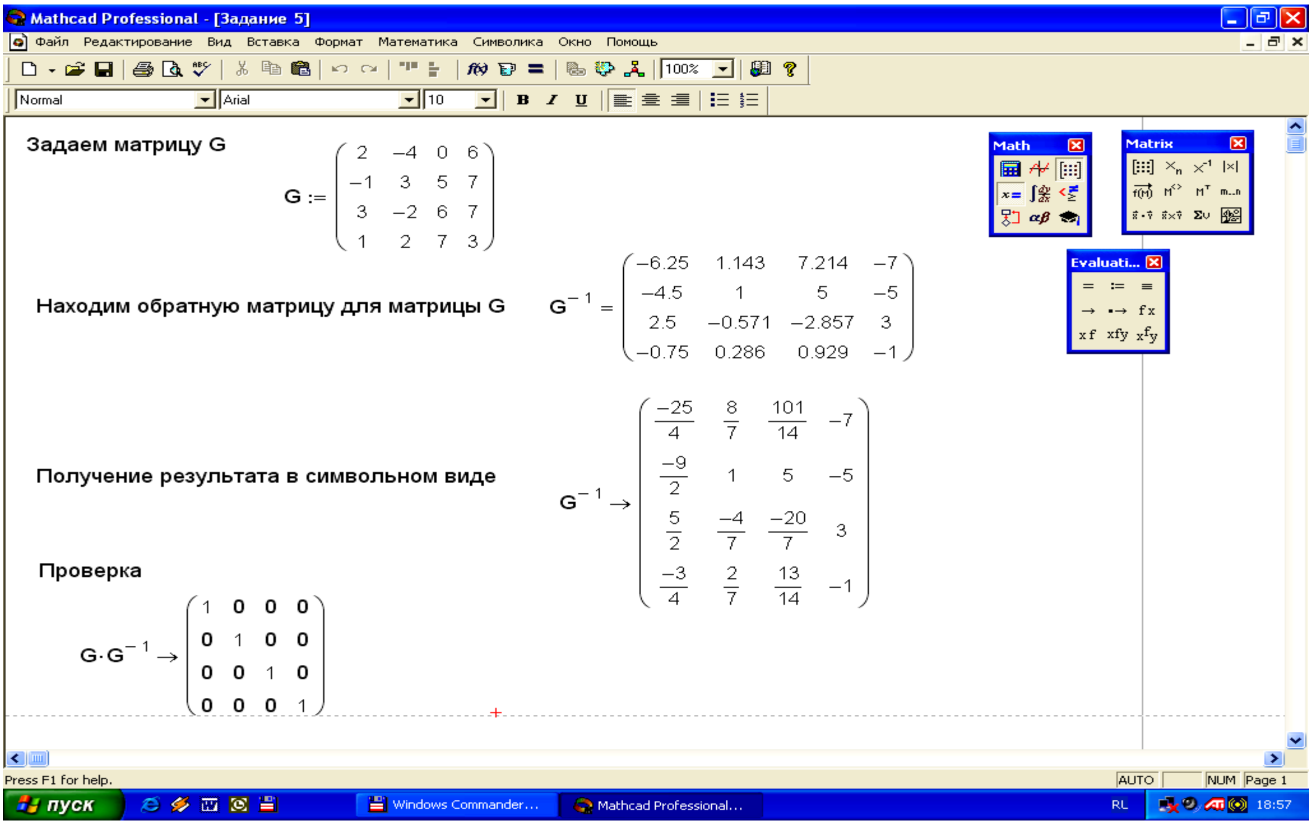

Рисунок А.8

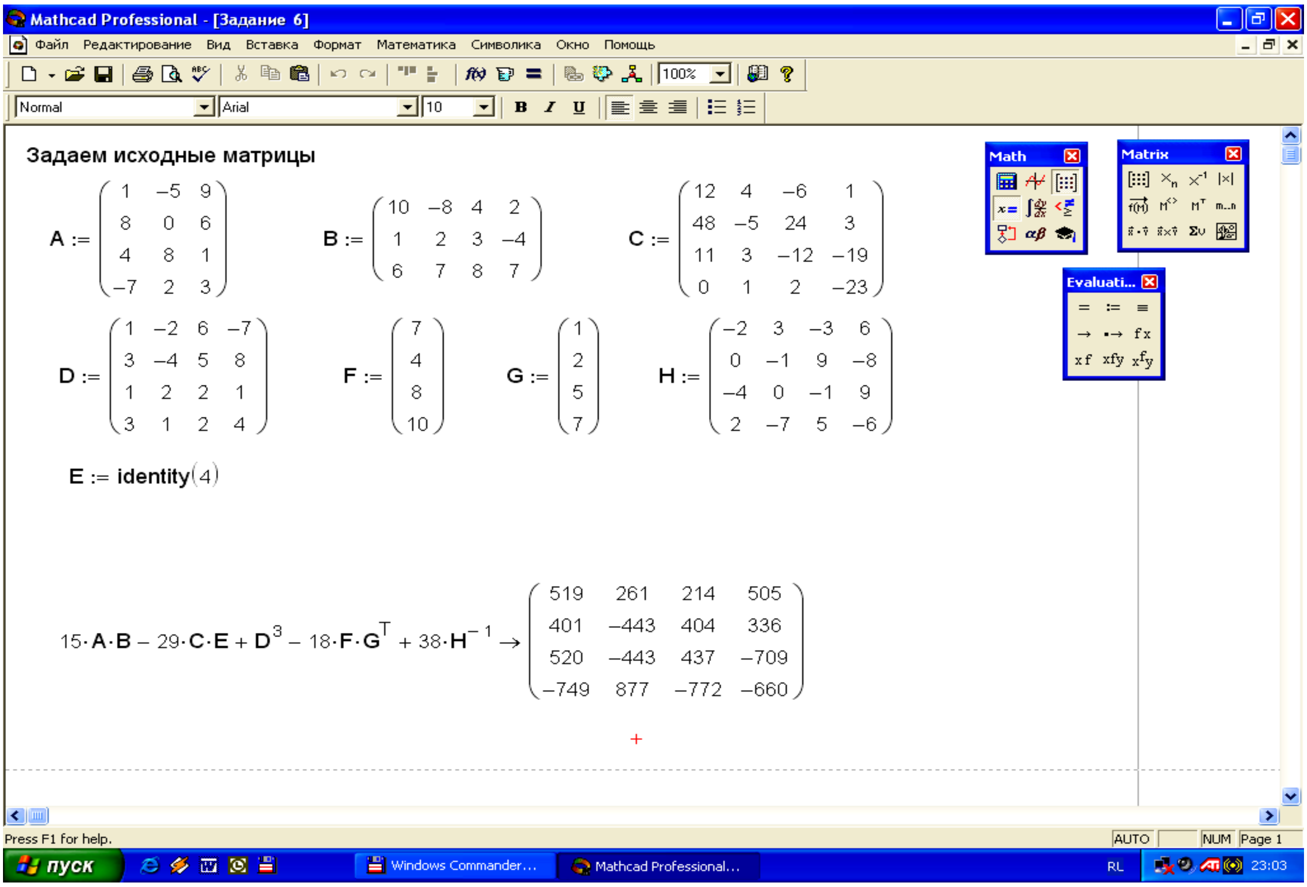

Рисунок А.9

Приложение Б

Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы, методами Крамера и Гаусса в среде Mathcad.

Векторные и матричные операторы и функции системы Mathcad позволяют решать широкий круг задач линейной алгебры.

Решение системы линейных уравнений **с помощью обратной матрицы**.

Если заданы матрица A и матрица-столбец B (называемая в Mathcad вектором) для системы линейных уравнений в матричной форме $AX=B$, то решение можно получить из очевидного выражения $X=A^{-1}B$.

Задание 1. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 - 2x_3 = 1. \end{cases}$ матричным способом.

Решение задания показано на рисунке Б.1.

Ход работы:

1. Задаем матрицу системы A.
2. Задаем столбец свободных членов B.
3. Находим X= $A^{-1}B$.
4. Делаем проверку полученного решения подстановкой в уравнение AX=B.

Кроме рассмотренного матричного метода решения систем линейных алгебраических уравнений, существует еще ряд методов решения таких систем. Рассмотрим, каким образом реализуются в Mathcad методы Крамера и Гаусса.

Метод Крамера.

Для нахождения решения методом Крамера необходимо научиться вычислять определитель матриц. Вычисление определителя матрицы в системе Matcad относится к матричным операциям и эту операцию можно выполнить несколькими способами: с использованием панели операций с матрицами и векторами Matrix и с помощью меню.

Задание 2. Найдите определитель матрицы *A* четвертого порядка несколькими способами. Решение задания показано на рисунке Б.2.

Ход работы:

1. Находим определитель, не задавая матрицы.
2. Задаем матрицу A
3. Находим определитель с помощью панели операций с матрицами.
4. Находим определитель с использованием меню.
5. Сравниваем полученные результаты.

Задание 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -7 \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 == 13 \end{cases}$. Решение задания на рисунке Б.3.

Возможности Mathcad позволяют использовать метод Крамера не только при нахождении решения невырожденной системы, но и для нахождения общего решения системы, имеющей бесконечно много решений. Для этого используется нахождение определителя как функции, зависящей от свободных переменных.

Ход работы:

1. Задаем определитель матрицы системы.
2. Находим определитель матрицы системы.
3. Задаем вспомогательные определители.
4. Находим вспомогательные определители.
5. Находим решение по формуле Крамера.

Задание 4. Решить систему $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 = 4 \end{cases}$ методом Крамера. Решение задания на рисунке Б.4.

Ход работы:

1. Задаем определитель матрицы системы.
2. Находим определитель матрицы системы.
3. Задаем вспомогательные определители.
4. Находим вспомогательные определители.
5. Находим базисный минор.
6. Определяем базисные и свободные неизвестные.
7. Задаем главный определитель, соответствующий базисному минору.
8. Задаем вспомогательные определители, соответствующие базисному минору.
9. Задаем формулы для нахождения базисных неизвестных, зависящих от свободных.
10. Находим решение по формуле Крамера.

Метод Гаусса в системе Mathcad можно осуществить с помощью функции rref.

Задание 5. Найдите решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 15 \\ 6x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 8x_5 = -34 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 13 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 8x_4 + x_5 = 28 \end{cases}$$ с помощью функции rref. Решение задания на рисунке Б.5.

Ход работы:

1. Задаем матрицу системы.
2. Задаем матрицу-столбец свободных членов.
3. Формируем расширенную матрицу системы с помощью функции augment.
4. Приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду с помощью функции rref.
5. Выделяем последний столбец полученной ступенчатой матрицы с помощью кнопки определения столбца матрицы  и получаем решение.
6. Делаем проверку полученного решения подстановкой в уравнение AX=B.

Не всегда система линейных уравнений имеет решения, и даже если система имеет решение, то оно может быть не единственным. Для исследования систем линейных уравнений на совместность необходимо научиться находить ранг матрицы системы.

Задание 6. Найдите ранг матрицы размера 12x7. Решение задания на рисунке Б.6.

Ход работы:

1. Задаем матрицу А.
2. С помощью функции rank находим ранг матрицы системы.

Задание 7. Исследовать систему $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 13 \\ -x_1 - 5x_2 - x_3 - 9x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 19 \end{cases}$$ на совместность. Если система совместна, то найти ее общее решение. Решение задания на рисунке Б.7.

Ход работы:

1. Задаем матрицу системы.
2. Задаем матрицу-столбец свободных членов.
3. Находим ранг матрицы системы.

4. Формируем расширенную матрицу системы.
5. Находим ранг расширенной матрицы системы.
6. Выясняем, совместна ли система и сколько имеет решений.
7. Используя символьные вычисления Given-Find находим общее решение системы.

Внимание! Для того, чтобы решить систему с помощью символьных вычислений Given-Find необходимо

1) Ввести с клавиатуры Given;
2) Правее и ниже ввести уравнения системы, причем знак равенства в уравнениях вводится с помощью сочетания клавиш **Ctrl** и **=**;
3) Ниже с клавиатуры ввести Find, перечислив в скобках имена переменных, и знак символьных вычислений (стрелка вправо);
4) Щелкнуть по свободному месту в рабочем документе.

Возможен еще один способ решения системы линейных уравнений в Mathcad с помощью функции lsolve.

Задание 8. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -12x_1 - 22x_2 + 33x_3 + 44x_4 + 52x_5 = 26 \\ 16x_1 + 17x_2 + 37x_3 + 26x_4 + 18x_5 = 57 \\ 12x_1 + 32x_2 + 24x_3 - 25x_4 - 26x_5 = -31 \\ 14x_1 + 21x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 10x_5 = 17 \\ -24x_1 - 15x_2 + 17x_3 + 18x_4 + 12x_5 = -3 \end{cases}$$

с применением функции lsolve.

Решение задания на рисунке Б.8.

Ход работы:

1. Задаем матрицу системы.
2. Задаем матрицу-столбец свободных членов.
3. Находим решение системы с помощью функции lsolve.

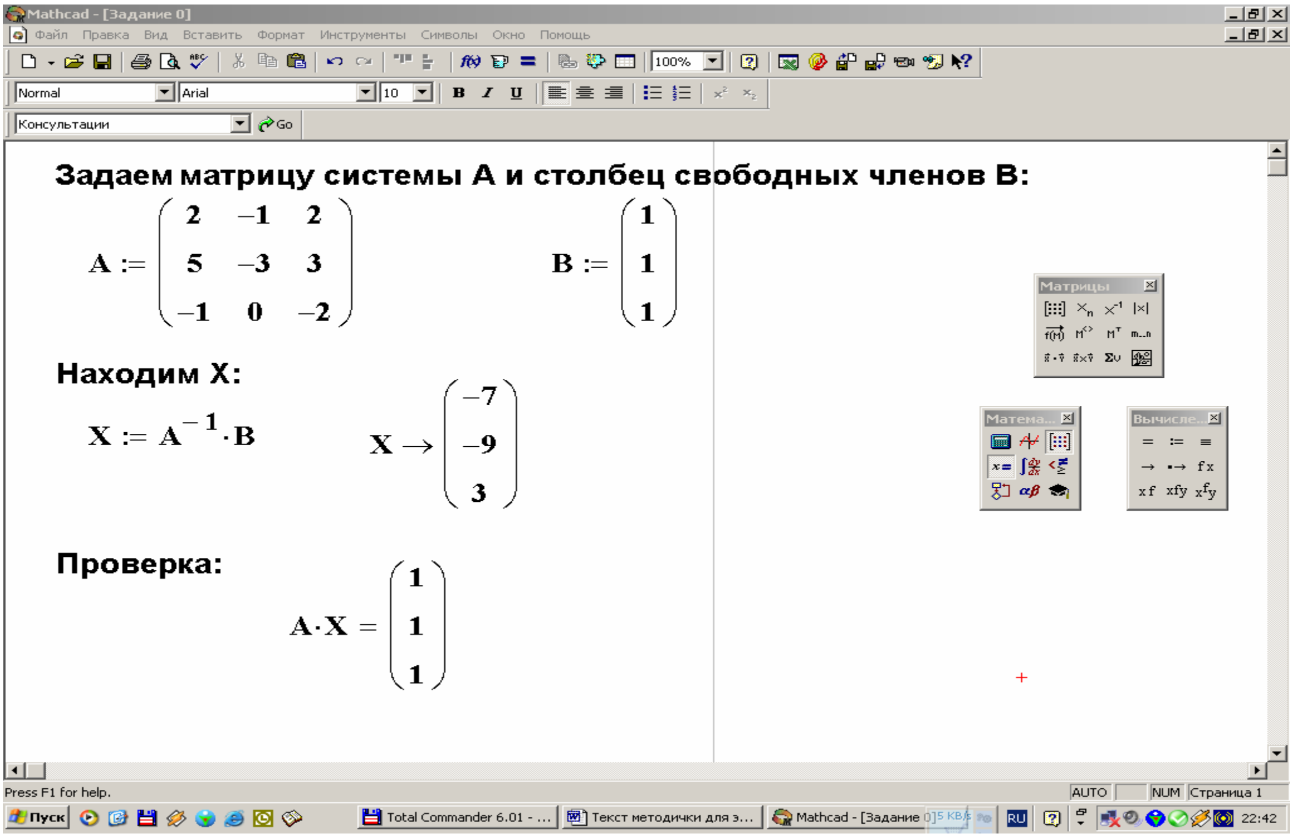

Рисунок Б.1

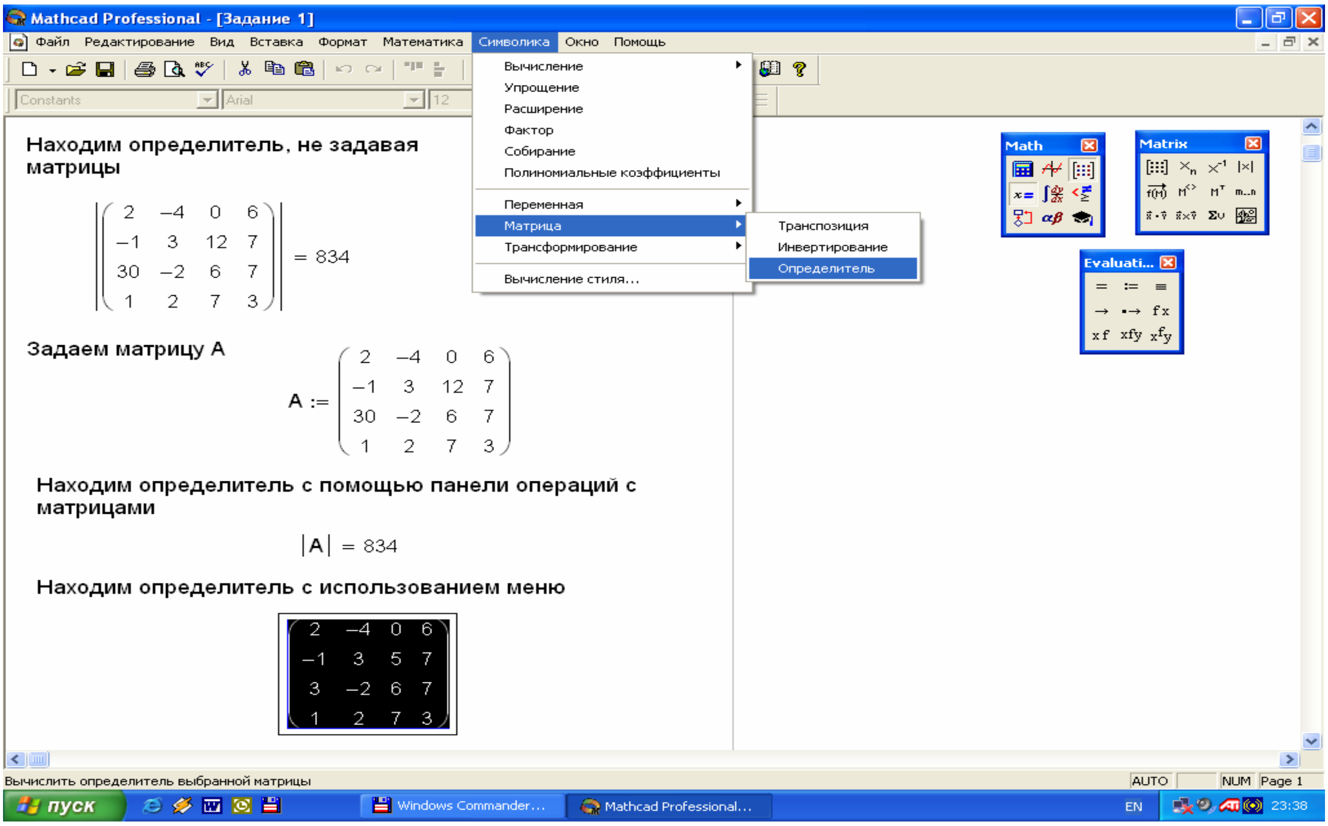

Рисунок Б.2

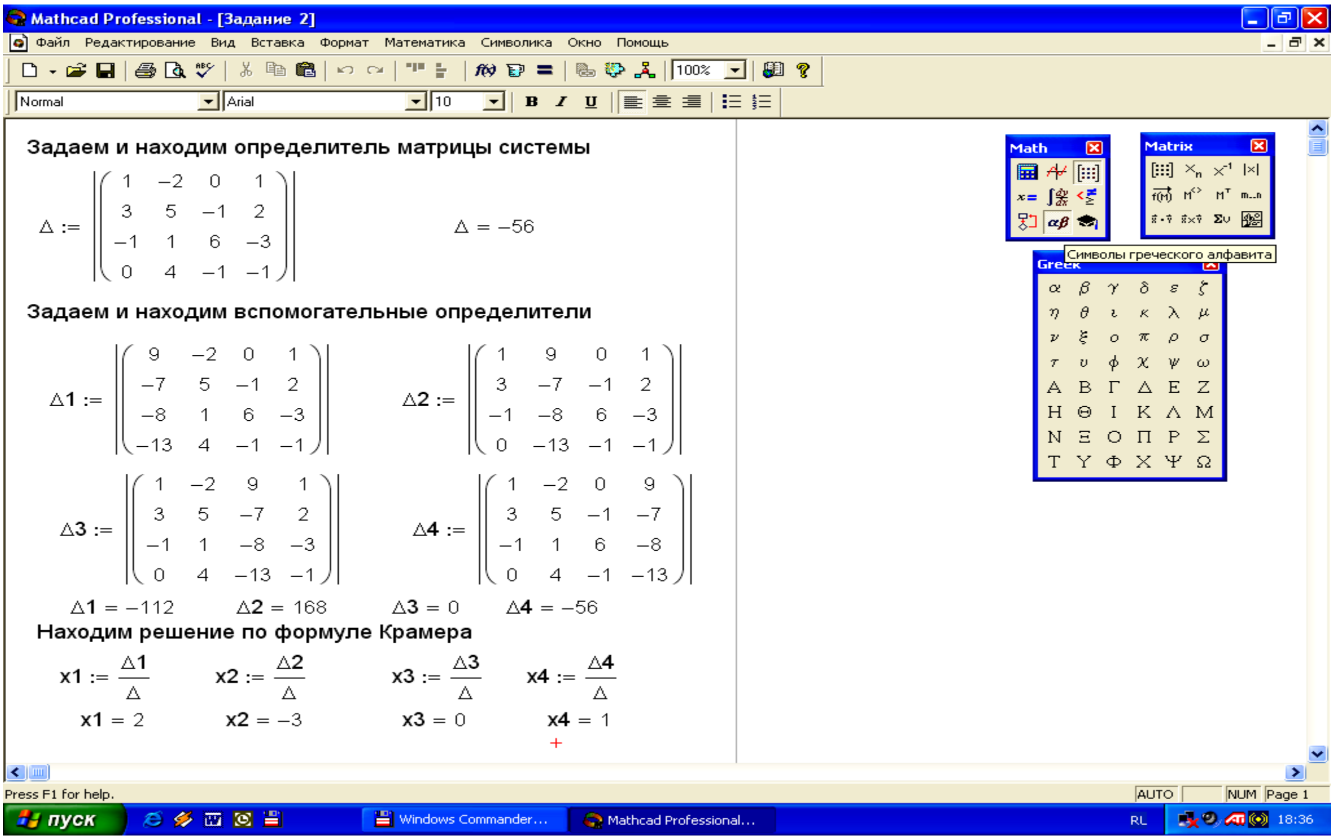

Рисунок Б.3

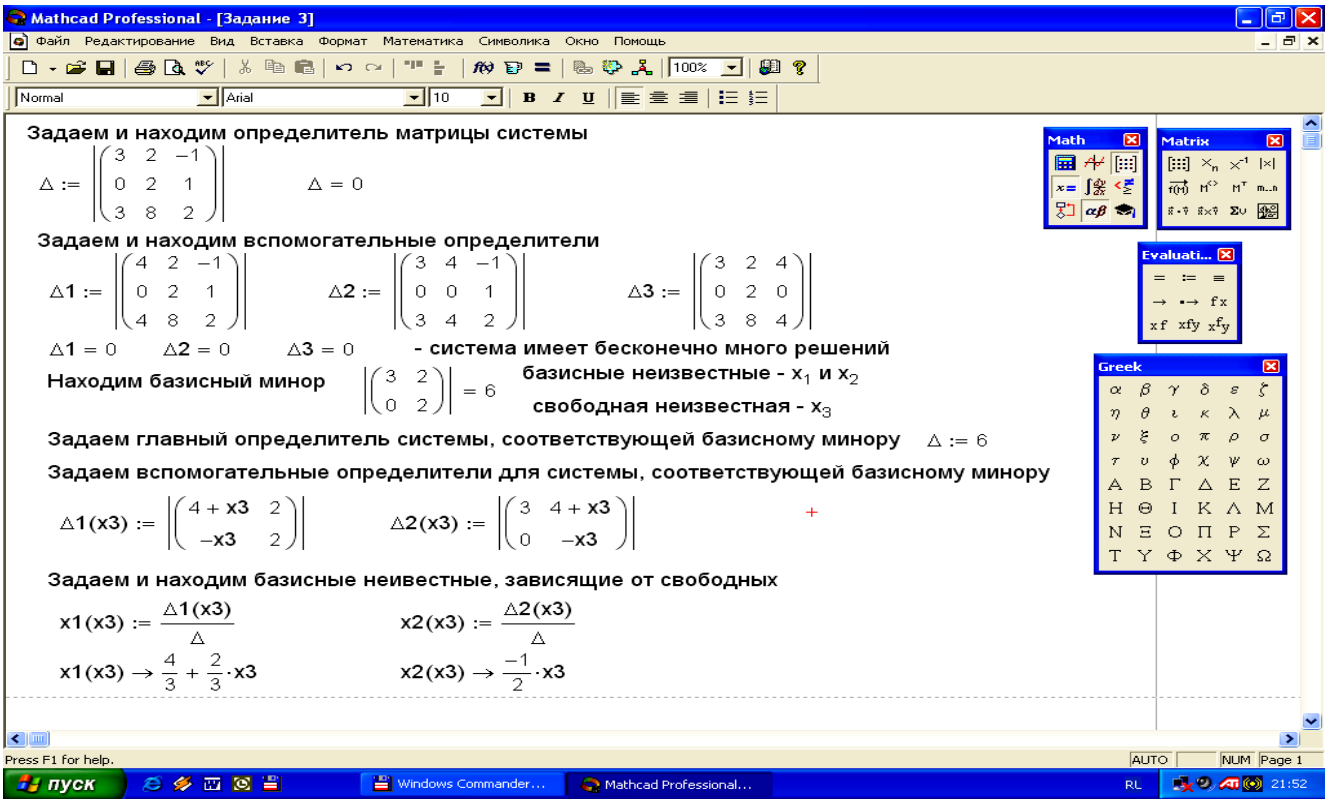

Рисунок Б.4

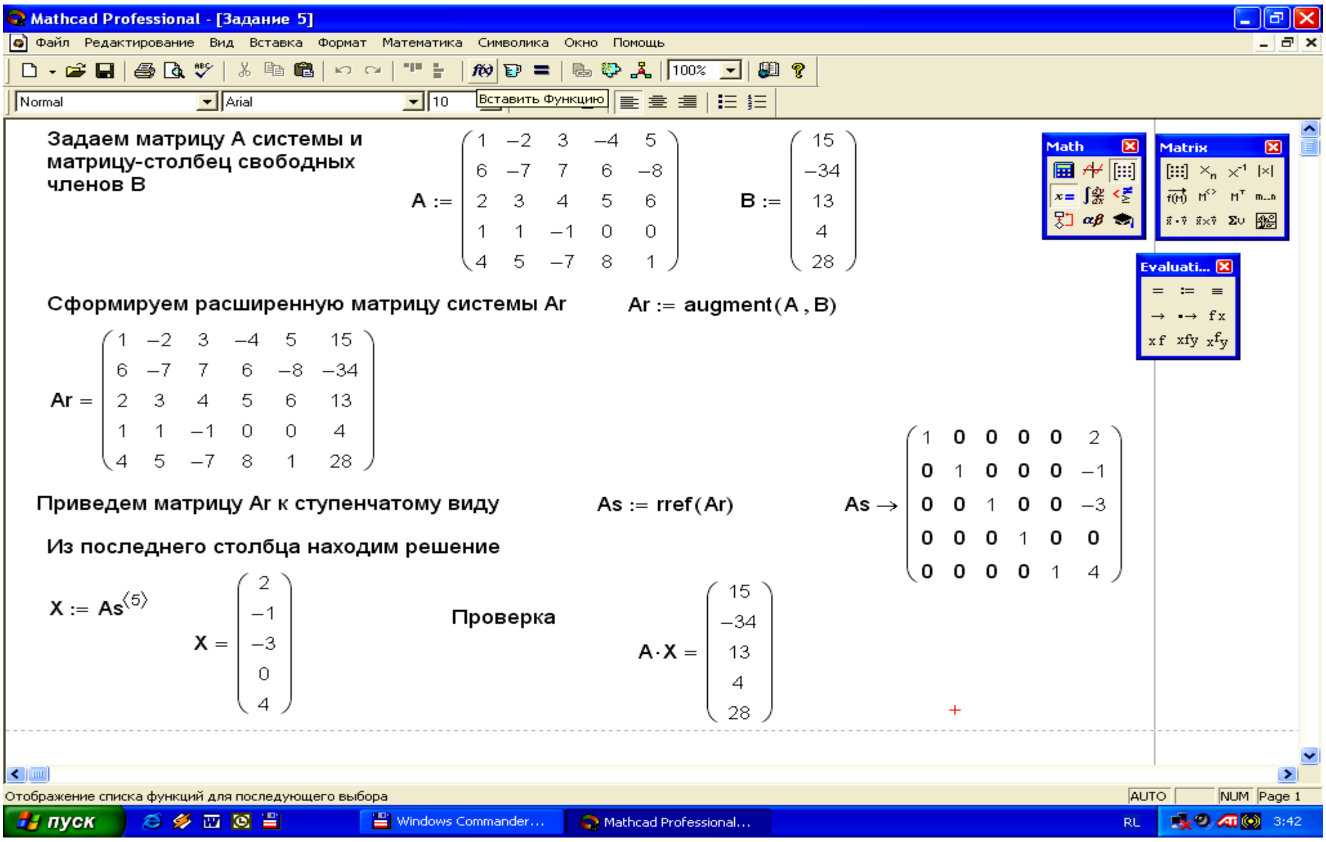

Рисунок Б.5

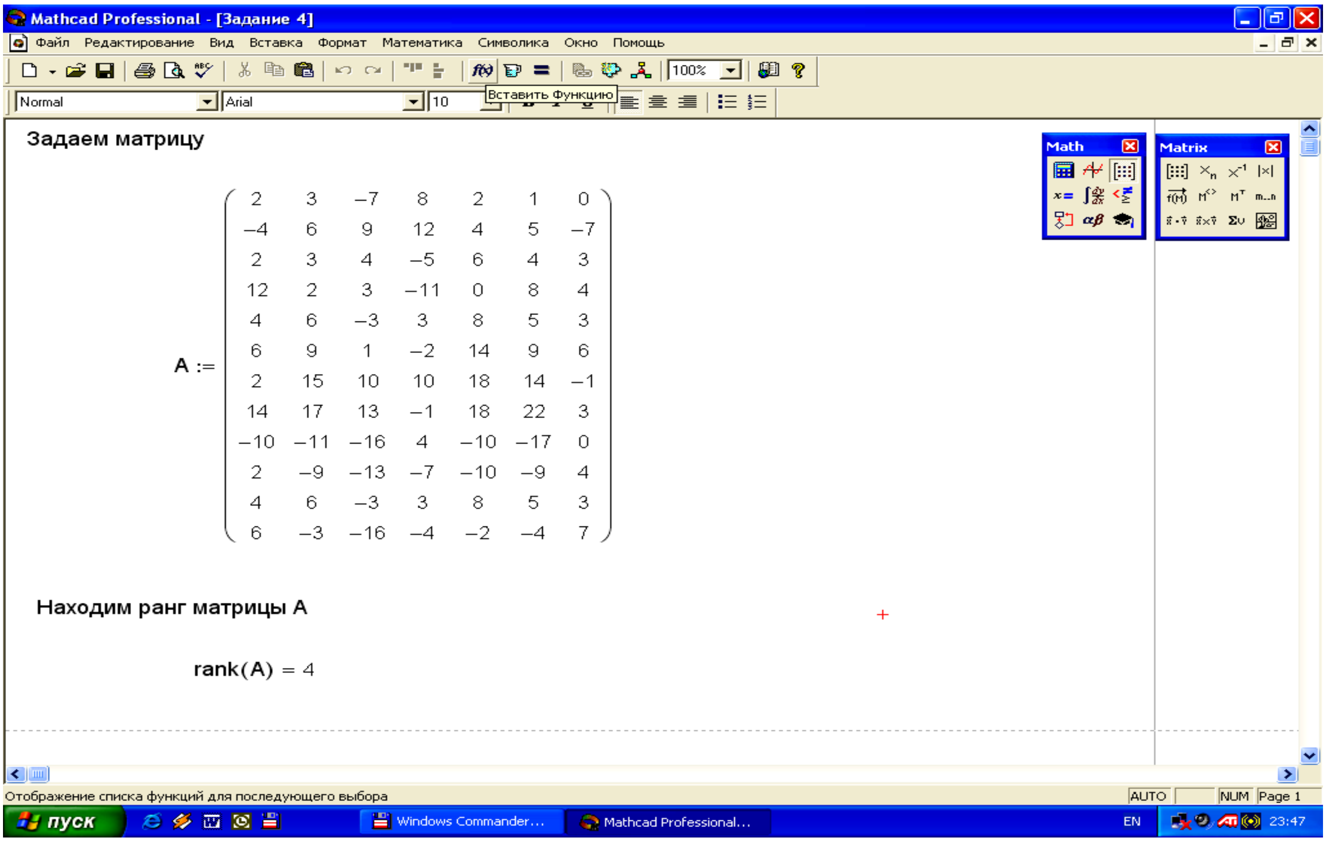

Рисунок Б.6

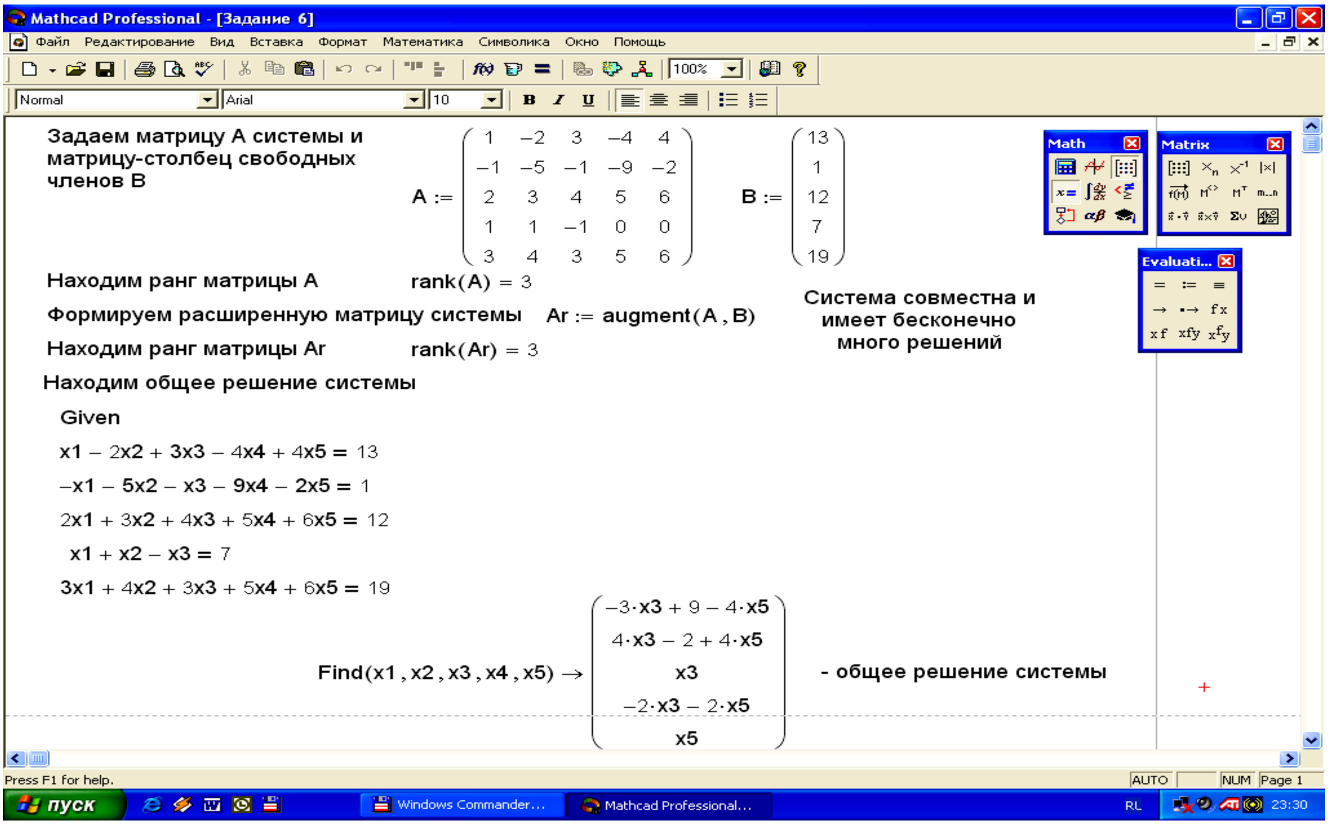

Рисунок Б.7

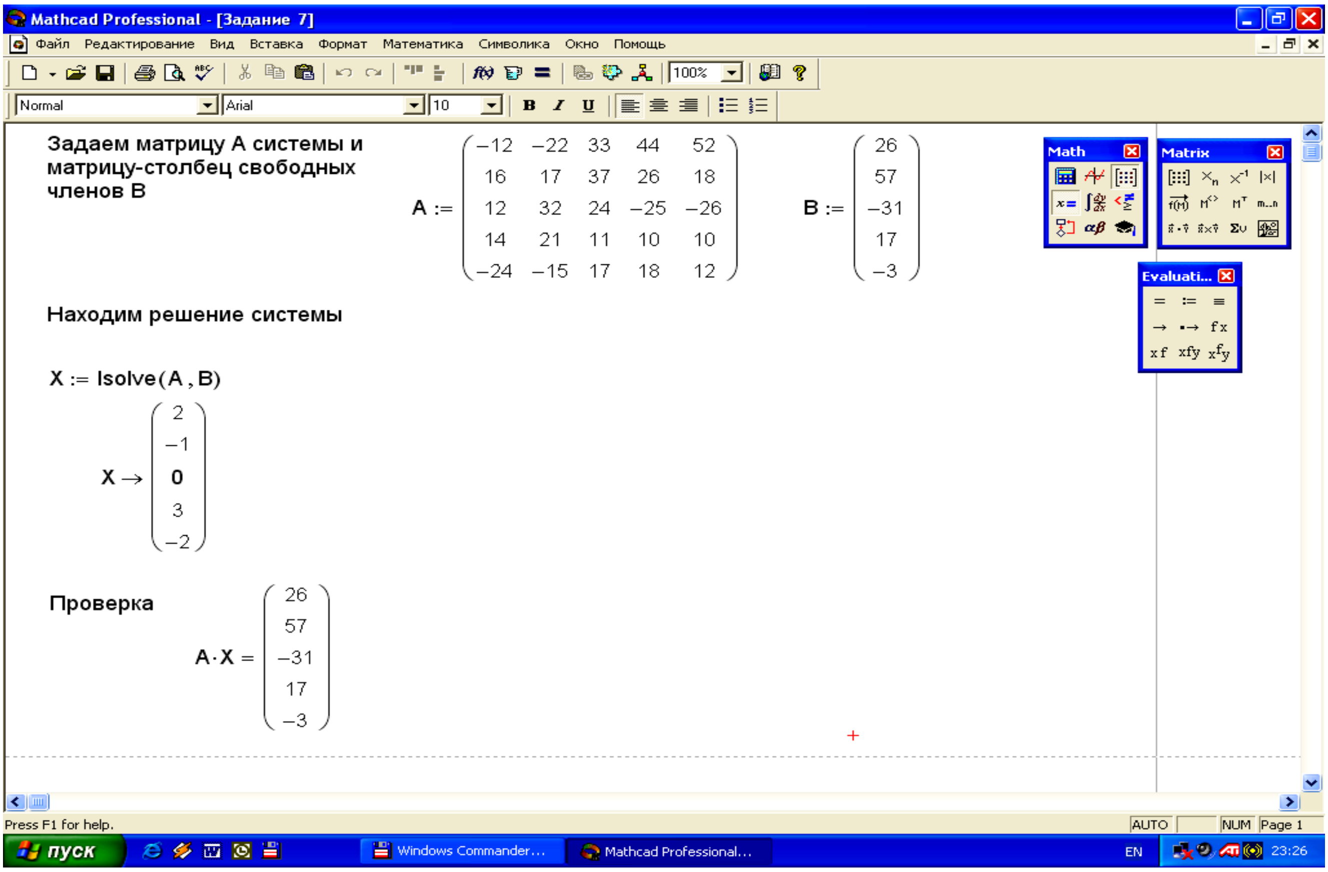

Рисунок Б.8