

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»**

А.М. КУТАРЁВ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Рекомендовано Учёным советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования - «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия по программе высшего профессионального образования по специальности 140601 «Электромеханика» направления подготовки дипломированных специалистов «Электротехника, электромеханика и электротехнологии»

Оренбург 2008

УДК 621.313(075.8)

ББК 31.261я73

К 95

Рецензент

доктор технических наук, профессор Н.Г. Никиян

Кутарев А.М.

**К-95 Специальный курс электрических машин: учебное пособие/
А.М. Кутарёв – Оренбург : ГОУ ОГУ, 2008.– 128 с.
ISBN 978-5-7410-0800-3**

В пособии рассмотрены методы математического описания и исследования электрических машин. Приведены дифференциальные уравнения для трансформаторов, машин постоянного тока, синхронных и асинхронных машин.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения специальности 140601 – Электромеханика и может быть полезно для аспирантов, занимающихся исследованием режимов работы электрических машин.

ББК 31.261 я 7

К $\frac{2202070100}{6Л9 - 08}$

ISBN 978-5-74100800-3

© Кутарев А.М., 2008
© ГОУ ОГУ, 2008

Содержание

Введение.....	5
1 Общие вопросы.....	6
1.1 Основные допущения, принимаемые при исследовании переходных процессов.....	6
1.2 Системы координатных осей.....	7
1.3 Системы относительных единиц.....	10
2 Приведение обмоток электрических машин.....	14
2.1 Определение коэффициента приведения тока обмотки ротора, исходя из условия равенства основных гармонических МДС в воздушном зазоре машины, созданных реальной и приведённой обмотками.....	14
2.2 Определение коэффициента приведения тока обмотки ротора, исходя из условия равенства основных гармонических индукции в воздушном зазоре машины.....	16
2.3 Определение коэффициентов приведения напряжений и сопротивлений роторных контуров к обмотке статора.....	20
3 Замена короткозамкнутой обмотки ротора машины переменного тока эквивалентной двухфазной обмоткой.....	22
3.1 Определение числа витков эквивалентных двухфазных обмоток ротора.....	23
3.2 Параметры эквивалентных роторных контуров.....	27
4 Математические модели и исследование электрических машин с взаимно неподвижными осями обмоток и полюсов.....	30
4.1 Дифференциальные уравнения машины постоянного тока.....	30
4.2 Самовозбуждение генератора постоянного тока параллельного возбуждения.....	32
4.3 Безреостатный пуск двигателя постоянного тока параллельного возбуждения.....	40
4.4 Дифференциальные уравнения двухобмоточного трансформатора.....	45
4.5 Расчёт токов короткого замыкания двухобмоточного трансформатора.....	45
4.6 Расчёт тока включения трансформатора графоаналитическим методом.....	55
5 Математические модели и исследование электрических машин с взаимно перемещающимися осями обмоток и полюсов.....	61
5.1 Уравнения синхронной машины в системе координат a, b, c статора и d, q ротора.....	61
5.2 Анализ коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции обмоток статора и ротора.....	63
5.3 Уравнение равенства моментов в относительных единицах.....	68
5.4 Расчёт токов короткого замыкания однофазного синхронного генератора.....	69
5.5 Метод преобразования координат.....	73

5.6	Уравнения синхронной машины с приведённой обмоткой ротора.....	79
5.7	Операторные уравнения и сопротивления синхронной машины.....	80
5.8	Преобразование операторных индуктивных сопротивлений синхронной машины.....	83
5.9	Выражение электромагнитного момента в системе координат $d - q - 0$	86
5.10	Комплексные дифференциальные уравнения синхронной машины.....	87
5.11	Система координатных осей α и β	88
6	Обобщенная электрическая машина.....	90
6.1	Схема обобщенной электрической машины.....	90
6.2	Переход от трёхфазной системы координат к двухфазной.....	92
6.3	Уравнения обобщенной электрической машины.....	94
7	Устойчивость синхронных машин.....	95
7.1	Общая характеристика устойчивости синхронных машин.....	95
7.2	Типы нарушений статической устойчивости.....	96
7.3	Линеаризация основных уравнений машины.....	96
7.4	Методы исследования статической устойчивости на основе малых гармонических колебаний.....	99
7.5	Влияние параметров синхронной машины на устойчивость при сползании и самораскачивании	102
7.6	Самовозбуждение синхронной машины при наличии ёмкости в цепи обмотки статора.....	104
7.7	Динамическая устойчивость синхронной машины.....	108
7.8	Анализ динамической устойчивости методом площадей.....	111
8	Частотный метод исследования машин переменного тока.....	114
8.1	Общие вопросы.....	114
8.2	Частотные характеристики и параметры машины.....	115
8.3	Построение частотной характеристики машины переменного тока по осциллограмме затухания постоянного тока в обмотке статора при неподвижном роторе и замкнутой обмотке возбуждения.....	118
8.4	Графический метод построения частотной характеристики.....	123
8.5	Определение параметров машин и переходных токов при помощи частотных характеристик.....	124
	Список использованных источников.....	128

Введение

При изменении напряжений, параметров и моментов во время работы электрической машины возникают переходные процессы. Электромеханические переходные процессы возникают при пуске, реверсе, торможении и регулировании. Электромагнитные переходные процессы возникают при включении трансформаторов и при самовозбуждении электрических машин. Переходные процессы сопровождают аварийные режимы.

Длительность переходных процессов обычно невелика и находится в пределах от 0.1 с до 0.3 с. Например, безреостатный пуск двигателя постоянного тока длится 0.2 – 0.5 с.

Несмотря на ограниченность во времени, переходные процессы оказывают заметное влияние на работу электрической машины и энергосистемы в целом. Так, например, от поведения синхронных генераторов в аварийных режимах зависит работа энергетической системы. Ударный ток в обмотках генераторов при внезапных коротких замыканиях в 10-15 раз превышает номинальный ток, и узлы машины в аварийных режимах испытывают значительные динамические усилия. Например, на лобовые части синхронных генераторов при коротких замыканиях действуют силы до 10 тонн. При выпадении из синхронизма ток превышает номинальный в несколько раз. Выпадение из синхронизма опасно вследствие возрастания потерь мощности. Кратность пускового тока асинхронного двигателя достигает 5-7.

Мощность современных тепловых электростанций составляет 3000-4000 мВт, а гидравлических станций – до 6000 мВт. Возрастает единичная мощность турбогенераторов. В эксплуатации находятся турбогенераторы мощностью 1200 мВт. В проекте единичная мощность турбогенераторов возрастёт до 2000 мВт. Мощность гидрогенератора при полном водяном охлаждении составит 1000 мВА. Всё это указывает на острую необходимость изучения нестационарных режимов работы электромеханических преобразователей энергии.

Электрические и механические процессы сопровождают друг друга. Общность заключается в том, что они основаны на законе электромагнитной индукции. Любая электрическая машина может быть представлена совокупностью контуров, связанных взаимной индукцией. Переходные процессы в электрических машинах описываются системой дифференциальных уравнений, которая в общем случае является нелинейной. В исходном виде эта система уравнений настолько сложна, что аналитическое исследование не может быть проведено без упрощений.

Для исследования переходных процессов применяют аналитические методы, например классический или операторный, численные методы, реализуемые на цифровых вычислительных машинах. Для решения некоторых переходных процессов используют графоаналитический метод. Широко используются экспериментальные исследования переходных процессов и исследования на аналоговых вычислительных машинах. Последнее время широко используется частотный метод исследования машин переменного тока.

1 Общие вопросы

1.1 Основные допущения, принимаемые при исследовании переходных процессов

Явления, происходящие в электрических машинах при переходных процессах, сложны и их математическое описание и исследование в общем виде без упрощений невозможно. Сложность исследования обусловлена тем, что электрические машины представляют нелинейную систему. Например, магнитная индукция является нелинейной функцией напряженности магнитного поля; параметры машины зависят от токов в обмотках; намагничивающая сила распространена в пространстве несинусоидально. Учет всех взаимодействующих связей приводит к громоздкой системе нелинейных уравнений. Задача решается с некоторым приближением, благодаря выявлению главных факторов и пренебрежению второстепенными факторами.

В настоящее время при теоретических исследованиях электрическую машину идеализируют и делают ряд допущений, которые считаются общепринятыми. Идеализированная машина характеризуется:

- а) отсутствием насыщения;
- б) отсутствием потерь мощности на вихревые токи и гистерезис, отсутствием гистерезиса и вытеснения тока в обмотках;
- в) синусоидальным распределением в пространстве намагничивающей силы и магнитной индукции;
- г) независимостью индуктивностей рассеяния от положения ротора;
- д) полной симметрией статора машин переменного тока и якорей машин постоянного тока.

Пренебрежение насыщением и потерями мощности на гистерезис и вихревые токи позволяет пользоваться линейной зависимостью между магнитным потоком и намагничивающей силой. Результирующий магнитный поток находится по суммарной МДС, а также как сумма магнитных потоков отдельных контуров. При отсутствии потерь в стали, магнитный поток совпадает по фазе с намагничивающей силой и током. Пренебрежение высшими гармоническими составляющими магнитного потока сводит систему множества уравнений к одному уравнению для первой гармоники.

Если необходимо учесть какой-либо фактор в уравнении для идеализированной машины вводят поправочные коэффициенты. Например, влияние насыщения на параметры машины учитываются выбором параметров, соответствующих насыщенному состоянию магнитной цепи. Влияние высших гармоник магнитного поля, индуктирующих в обмотках ЭДС основной частоты, учитывают изменением индуктивности рассеяния обмоток.

Указанные допущения не всегда могут быть приняты. Например, насыщение учитывается при исследовании самовозбуждения электрической машины, при исследовании форсированного возбуждения, при рассмотрении влияния реакции якоря на основное поле машины и т.д.

Отличием идеализированной машины от реальной является тот факт, что каждая обмотка или часть заменяется в идеализированной машине одной катушкой. Например, трехфазная обмотка статора заменена тремя катушками, расположенными под углом 120 градусов. Успокоительная обмотка ротора синхронной машины заменяется двумя контурами. В машине постоянного тока якорь заменяют одной неподвижной катушкой.

Указанные замены и допущения позволяют сохранить действительную картину процессов, протекающих в реальной машине. В большинстве случаев, кроме допущений, характерных для идеализированной машины, могут быть применены следующие допущения:

а) сеть постоянного и переменного тока является сетью бесконечной мощности;

б) приложенное к обмотке напряжение является синусоидальным, а постоянное напряжение лишено пульсаций.

В тех случаях, когда эти допущения неприемлемы, приложенное напряжение представляется в виде суммы составляющих напряжения и проводят исследование для каждой составляющей в отдельности, применяя принцип наложения;

г) в случае, если индуктивные сопротивления обмоток машины значительно больше их активных сопротивлений применяют принцип постоянства потокосцепления.

1.2 Системы координатных осей

При математическом описании процессов, происходящих в электрической машине, записывают уравнения напряжений, потокосцеплений обмоток и уравнение равновесия моментов на валу машины. Выбранная форма записи должна обеспечивать наибольшую простоту решения системы уравнений. Во многом это определяется выбором системы координатных осей и системных величин.

За положительное направление тока в обмотке принимается направление тока от конца обмотки к началу. За положительное направление оси обмоток принимается направление МДС катушек при протекании по ним токов в положительном направлении. Например, при питании симметричной трехфазной обмотки статора симметричным трехфазным напряжением вектора МДС образуют трехлучевую звезду (рисунок 1.1). На рисунке 1.1 ud и uq – индексы успокоительной обмотки, а индекс f – индекс обмотки возбуждения.

Для статорной обмотки выбор трехлучевой звезды (система координатных осей $a - b - c - 0$) не является обязательным. Для синхронных машин широко используется ортогональная система координатных осей $d - q - 0$, неподвижных относительно ротора.

Ось ротора d (продольная ось ротора) совпадает с осью обмотки возбуждения. Поперечная ось q опережает продольную ось на 90 электрических градусов. При наличии на роторе успокоительной обмотки, если не ставится зада-

ча определения токов в стержнях обмотки, она заменяется двумя эквивалентными катушками. При протекании тока по эквивалентной успокоительной обмотке по продольной оси в положительном направлении ось обмотки совпадает с продольной осью ротора. При протекании тока по эквивалентной успокоительной обмотке по поперечной оси в положительном направлении ось обмотки совпадает с поперечной осью ротора.

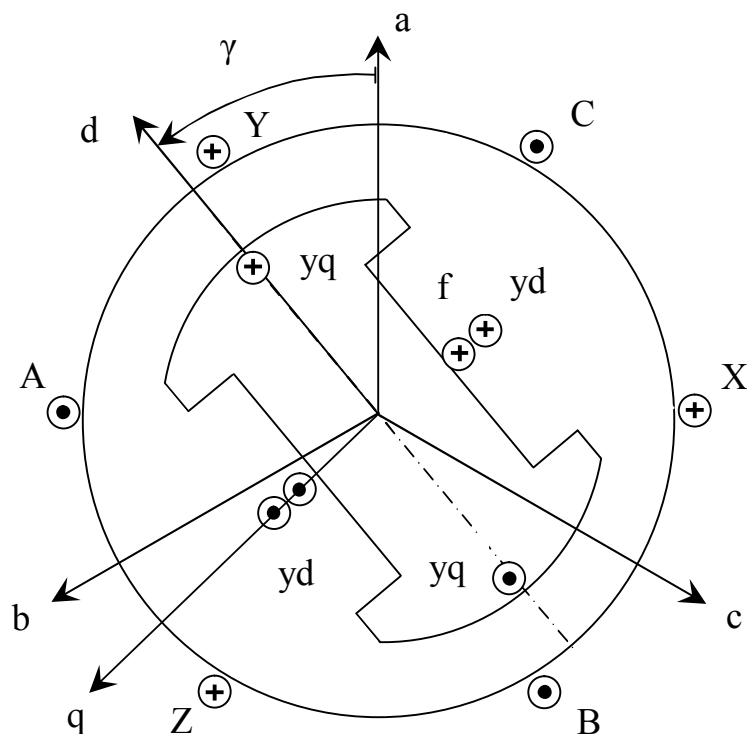


Рисунок 1.1 – Координатные оси $a - b - c - 0$

За положительное направление вращения ротора принимается направление вращения против часовой стрелки. За положительное направление отсчёта угла γ принимается направление, совпадающее с положительным направлением вращения ротора. Угол γ определяется как угол между осью a фазы статора и продольной осью d ротора.

Для анализа переходных процессов в асинхронных машинах может быть рекомендована ортогональная система синхронно вращающихся осей $u - v - 0$, не связанная ни с ротором, ни со статором, или ортогональная система координатных осей $\alpha - \beta - 0$, неподвижная относительно статора. Ось α совпадает с осью a фазы обмотки статора. Кроме названных систем координатных осей находит применение ортогональная система координатных осей $x - y - 0$, вращающихся с произвольной скоростью.

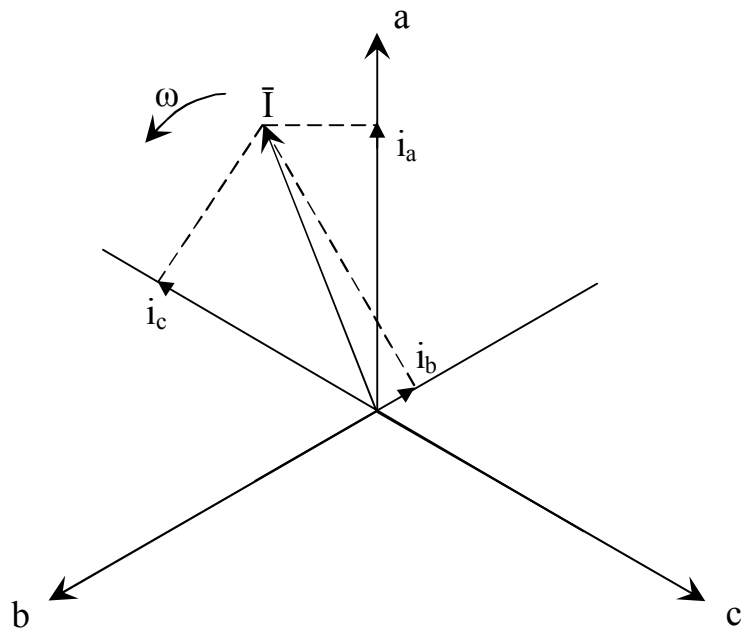


Рисунок 1.2 – Пространственная диаграмма токов

Ток, напряжение, потокосцепление и ЭДС удобно представлять в системе координатных осей $a - b - c - 0$ с помощью изображающих векторов. Мгновенное значение величины получают проектированием изображающего вектора, например вектора тока \bar{I} , на ось фазы (рисунок 1.2).

$$\begin{aligned}
 i_a &= I \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma) \\
 i_b &= I \cdot \cos(\omega \cdot t - 120^\circ + \gamma) \\
 i_c &= I \cdot \cos(\omega \cdot t + 120^\circ + \gamma)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Для трёхфазной системы токов мгновенное значение тока в фазе определяется как проекция вектора тока на ось времени (рисунок 1.3).

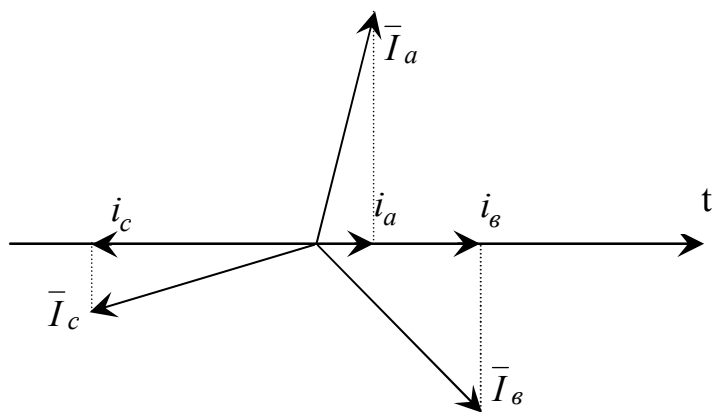


Рисунок 1.3 – Временная диаграмма фазных токов

Расположение изображающих векторов тока, напряжения, потокосцепления в пространстве относительно системы координатных осей совпадает с результирующими векторами тока, напряжения, потокосцепления, но их амплитуда меньше. Например, между результирующим вектором тока трёхфазной системы токов \bar{I}_{31} и изображающим вектором тока \bar{I}_1 имеется связь

$$\bar{I}_{31} = 1.5 \cdot \bar{I}_1. \quad (1.2)$$

1.3 Системы относительных единиц

При анализе различных переходных процессов в электрических машинах приходится пользоваться относительными единицами. Если в системе физических единиц все величины выражаются в именованных единицах, чем облегчается раскрытие физического смысла, то в системе относительных единиц все величины безразмерные.

Преимущество применения системы относительных единиц:

- а) система уравнений принимает простой вид;
- б) расчет ведется с числами, близкими к единице (важно при расчетах на ЭВМ);
- в) облегчается контроль правильности расчетов. Отклонение какой-либо величины от нормы легко обнаружить;
- г) облегчается сравнение различных по мощности электрических машин в различных режимах работы;
- д) при применении системы относительных единиц многие величины выражаются одним числом. Например, потокосцепление, магнитный поток, магнитная индукция, ЭДС в относительных единицах выражаются одним числом; МДС обмотки и ток обмотки в относительных единицах – одно и тоже число; индуктивность (взаимная индуктивность) и индуктивное сопротивление – одно число; и т.д.

В системе относительных единиц d/dt является одновременно и $d/d\tau$.

1.3.1 Базисные единицы для статорных величин

При применении системы относительных единиц для трансформаторов и электрических машин в качестве базисных для первичной обмотки трансформатора и для обмотки статора машины переменного тока применяются следующие величины:

- а) за базисное напряжение принимается амплитуда номинального фазного напряжения

$$U_{\sigma} = U_{\text{тнф}}; \quad (1.3)$$

б) за базисный ток принимается амплитуда номинального фазного тока

$$I_{\bar{\sigma}} = I_{m\text{нф}}; \quad (1.4)$$

в) за базисную мощность принимается номинальная мощность

$$P = m \cdot I_{\text{н}} \cdot U_{\text{н}} = 0.5 \cdot m \cdot I_{m\text{н}} \cdot U_{m\text{н}} = 0.5 \cdot m \cdot I_{\bar{\sigma}} \cdot U_{\bar{\sigma}}; \quad (1.5)$$

г) за базисную частоту принимается номинальная частота

$$f_{\bar{\sigma}} = f_{\text{н}}; \quad (1.6)$$

д) за базисную угловую частоту принимается

$$\omega_{\bar{\sigma}} = \omega_c = 2 \cdot \pi \cdot f_{\text{н}}; \quad (1.7)$$

е) за базисную частоту вращения ротора (базисная угловая скорость) принимается

$$\Omega_{\bar{\sigma}} = \omega_{\bar{\sigma}} / p; \quad (1.8)$$

ж) за базисный момент принимается момент, создающий базисную мощность при базисной частоте вращения

$$M_{\bar{\sigma}} = P_{\bar{\sigma}} / \Omega_{\bar{\sigma}} = p \cdot P_{\bar{\sigma}} / \omega_{\bar{\sigma}}; \quad (1.9)$$

и) за базисную единицу времени принимается время, за которое синхронно вращающийся ротор повернется на один электрический радиан

$$t_{\bar{\sigma}} = 1 / \omega_{\bar{\sigma}}; \quad (1.10)$$

к) за базисную энергию принимается энергия, вырабатываемая при базисной мощности и базисной угловой частоте в течение времени, равного времени поворота ротора на один радиан

$$W_{\bar{\sigma}} = P_{\bar{\sigma}} \cdot p \cdot t_{\bar{\sigma}} = p \cdot P_{\bar{\sigma}} / \omega_{\bar{\sigma}}; \quad (1.11)$$

л) за базисное сопротивление принимается

$$Z_{\bar{\sigma}} = U_{\bar{\sigma}} / I_{\bar{\sigma}} = U_{m\text{н}} / I_{m\text{н}} = U_{\text{н}} / I_{\text{н}}; \quad (1.12)$$

м) за базисную индуктивность принимается

$$L_{\bar{\sigma}} = Z_{\bar{\sigma}} / \omega_{\bar{\sigma}}; \quad (1.13)$$

н) за базисное потокосцепление принимается потокосцепление, индуцирующее в обмотке статора базисное напряжение при базисной угловой частоте

$$\Psi_{\bar{\sigma}} = U_{\bar{\sigma}} / \omega_{\bar{\sigma}}. \quad (1.14)$$

Базисные единицы для статорных величин в разных системах принимаются одни и те же. Поэтому различие между системами относительных единиц обусловлено разницей базисных единиц, относящихся к ротору.

1.3.2 Практическая система единиц Парка

Наиболее широко используется так называемая практическая система единиц Парка. В этой системе за базисную единицу тока любой роторной цепи принимается такой ток, который при отсутствии токов в других роторных цепях создает при холостом ходе на зажимах обмотки статора базисное напряжение $U_{\bar{\sigma}}$. При этом характеристика холостого хода - прямолинейная, а частота вращения - базисная.

Таким образом, базисный ток любого роторного контура “к” равен

$$I_{k\bar{\sigma}} = E_{\bar{\sigma}} / X_{ak} = U_{\bar{\sigma}} / X_{ak}. \quad (1.15)$$

По базисному току контура определяются базисные напряжения, потокосцепления и магнитные потоки:

$$\begin{aligned} U_{k\bar{\sigma}} &= I_{k\bar{\sigma}} \cdot r_k; \\ \Psi_{k\bar{\sigma}} &= I_{k\bar{\sigma}} \cdot X_k; \\ \Phi_{k\bar{\sigma}} &= \Psi_{k\bar{\sigma}} / w_{k\bar{\sigma}}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $w_{k\bar{\sigma}}$ - число витков.

В системе единиц Парка, например, уравнение для потокосцепления Ψ_d в относительных единицах будет выглядеть следующим образом

$$\Psi_d = X_d \cdot i_d + i_f + \sum_{i=1}^n i_{kd}. \quad (1.17)$$

За базисную мощность k-ой обмотки принимается базисная мощность статора, так как в этом случае можно будет складывать в относительных единицах мощности статора и ротора.

За базисное сопротивление $X_{к\bar{b}}$ принимается приведенное сопротивление $X_{\bar{b}}$.

Важно отметить, что вид, например, уравнения для потокосцепления Ψ_d - проще и не требуется знание $X_{к\bar{b}}$. В то же время, в установившемся режиме

$$U_f = r_f \cdot I_f. \quad (1.18)$$

С учетом $U_{f\bar{b}} = I_{f\bar{b}} \cdot r_f$ в О.Е. получим

$$U_f^* = I_f^*, \quad (1.19)$$

что затрудняет понимание физического смысла.

1.3.3 Система с равными взаимными индуктивностями

Система с равными взаимными индуктивностями предложена Ренкиным А. В этой системе сопротивления взаимной индукции между статорными и роторными обмотками принимаются равными друг другу. При этом между базисными величинами для k-ой обмотки ротора имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} I_{к\bar{b}} &= U_{к\bar{b}} / X_{к\bar{b}}; \\ \Psi_{к\bar{b}} &= I_{к\bar{b}} \cdot X_{к\bar{b}}; \\ \Psi_{\bar{b}} &= U_{\bar{b}} = X_{ак\bar{b}} \cdot I_{к\bar{b}}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

За базисный ток роторной цепи принимают такой ток, который создает в k-ой обмотке МДС, пространственная амплитуда первой гармоники которой равна базисной МДС статора $F_{\bar{b}}$, т.е.

$$0.5 \cdot m_k \cdot k_k \cdot W_k \cdot I_{к\bar{b}} = 0.5 \cdot m \cdot k \cdot W \cdot I_{\bar{b}}. \quad (1.21)$$

Отсюда находят базисный ток k-го контура.

Данная система иногда называется системой X_{ad} (системой с равными взаимными индуктивностями). В этой системе, как и при статорной системе единиц, физическая сущность отдельных членов уравнений сохраняется, что является важным преимуществом этой системы.

Используемые на практике системы относительных единиц, в частности X_{ad} , органически включают в себя понятие приведенных величин, устраняя, таким образом, необходимость приведения обмоток, если задача решается в относительных единицах (О.Е.).

При выборе системы О.Е. для роторных цепей необходимо стремиться к тому, чтобы соотношения между базисными величинами, математические выражения и вычисления были, по возможности, более простыми и не терялся физический смысл уравнений машины.

Наиболее полно этим требованиям удовлетворяет применение для обмоток ротора той же системы относительных единиц, что и для статора. Для этого роторные обмотки должны быть приведены к обмотке статора.

2 Приведение обмоток электрических машин

Приведение обмоток электрических машин рационально во многих случаях. Целесообразность приведения определяется:

- возможностью применения одной системы О.Е. для статора и ротора;
- возможностью построения схем замещения, векторных и круговых диаграмм.

Для практических расчетов более удобно приводить обмотки ротора к статорной обмотке. Приведение обмоток заключается в том, что роторные обмотки пересчитываются на число фаз и число витков статорной обмотки. При этом электрические соотношения в машине должны оставаться без изменения. Для того чтобы привести роторную обмотку к статорной обмотке, нужно определить коэффициенты приведения токов m_i , напряжений m_u и сопротивлений m_z .

В настоящее время получили распространение два способа определения коэффициента приведения токов обмоток ротора к обмотке статора:

- в основу первого способа положено условие равенства основных гармоник МДС в воздушном зазоре, создаваемых реальной и приведенной обмотками;
- в основу второго способа положено условие равенства основных гармонических индукций в воздушном зазоре, создаваемых реальной и приведенной обмотками ротора.

Первый способ проще, так как отпадает необходимость в расчете магнитного поля. Этот способ используется, например, при приведении роторных обмоток асинхронных машин, успокоительных обмоток синхронных машин.

2.1 Определение коэффициента приведения тока обмотки ротора, исходя из условия равенства основных гармонических МДС в воздушном зазоре машины, созданных реальной и приведённой обмотками

Для многофазной обмотки статора амплитуда первой гармоники МДС

$$F_{m1} = \frac{m_1}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1 k_{об1}}{2p} I_{m1}, \quad (2.1)$$

где m_1 – число фаз обмотки статора;

w_1 - число витков на фазу обмотки статора;

$k_{об1}$ – обмоточный коэффициент для первой гармоники;

I_{m1} – амплитудное значение номинального фазного тока обмотки статора;

$2p$ – число полюсов.

В случае многофазного ротора имеем:

$$F_{m2} = \frac{m_2}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_2 k_{об2}}{2p} I_{m2}. \quad (2.2)$$

Поскольку процесс приведения состоит в замене реальной обмотки на эквивалентную обмотку с числом фаз m_1 и эффективным числом витков $w_1 k_{об1}$, то для приведённой обмотки ротора будем иметь

$$F'_{m2} = \frac{m_1}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1 k_{об1}}{2p} I'_{m2}, \quad (2.3)$$

где I'_{m2} - амплитуда приведенного тока.

Приведенный ток обмотки ротора I'_{m2} , протекая по приведенной обмотке, должен создавать МДС F'_{m2} , равную МДС реальной обмотки ротора F_{m2} . Следовательно, должно выполняться условие $F'_{m2} = F_{m2}$. Исходя из этого равенства, будем определять коэффициент приведения тока обмотки ротора к обмотке статора m_i как отношение приведенного тока обмотки ротора к току реальной обмотки:

$$m_i = \frac{I'_{m2}}{I_{m2}} = \frac{\frac{m_2}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_2}{2p} k_{об2}}{\frac{m_1}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1}{2p} k_{об1}} = \frac{m_2 \cdot w_2 \cdot k_{об2}}{m_1 \cdot w_1 \cdot k_{об1}}. \quad (2.4)$$

Для однофазных и двухфазных обмоток ротора ($m \leq 2$), число фаз принимают равным двум ($m = 2$):

$$m_i = \frac{2}{m_1} \frac{w_2 \cdot k_{об2}}{w_1 \cdot k_{об1}}. \quad (2.5)$$

Если обмотка ротора сосредоточенная, то

$$m_i = \frac{2}{m_1} \frac{w_2}{w_1 \cdot k_{об1}}. \quad (2.6)$$

2.2 Определение коэффициента приведения тока обмотки ротора, исходя из условия равенства основных гармонических магнитной индукции в воздушном зазоре машины, созданных реальной и приведённой обмотками

Предполагаем, что обмотка статора многофазная и распределена по окружности внутренней поверхности статора. Амплитуда первой гармонической МДС этой обмотки

$$F_{m1} = \frac{m_1}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1}{2p} k_{об1} \cdot I_{m1}. \quad (2.7)$$

Ротор машины явнополюсный, обмотка ротора однофазная сосредоточенная. Максимальное значение МДС такой обмотки

$$F_{mf} = w_f \cdot I_f, \quad (2.8)$$

где w_f - число витков обмотки возбуждения на полюс.

Проводимость воздушного зазора по оси полюса (ось d)

$$\lambda_\delta = \frac{1}{\delta \cdot k_\delta}. \quad (2.9)$$

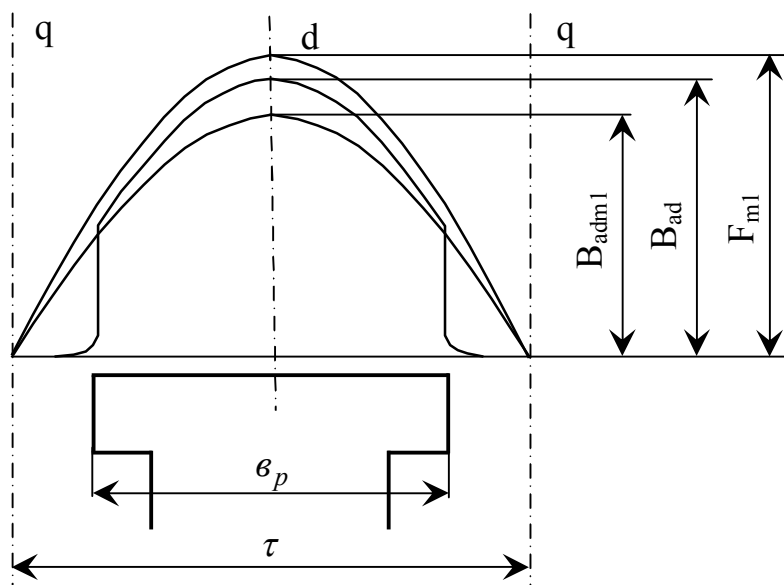


Рисунок 2.1

Максимальные значения индукции в воздушном зазоре, созданных МДС обмоток статора B_{adm} (рисунок 2.1) и возбуждения B_{fm} (рисунок 2.2):

$$B_{adm} = \mu_o \cdot \lambda_{\delta} \cdot F_{m1} ; \quad B_{fm} = \mu_o \cdot \lambda_{\delta} \cdot F_{mf} . \quad (2.10)$$

В результате разложения в ряд Фурье кривых распределения индукции в зазоре (магнитных полей статора и ротора) могут быть выделены основные гармонические индукции B_{adm1} и B_{fm1} .

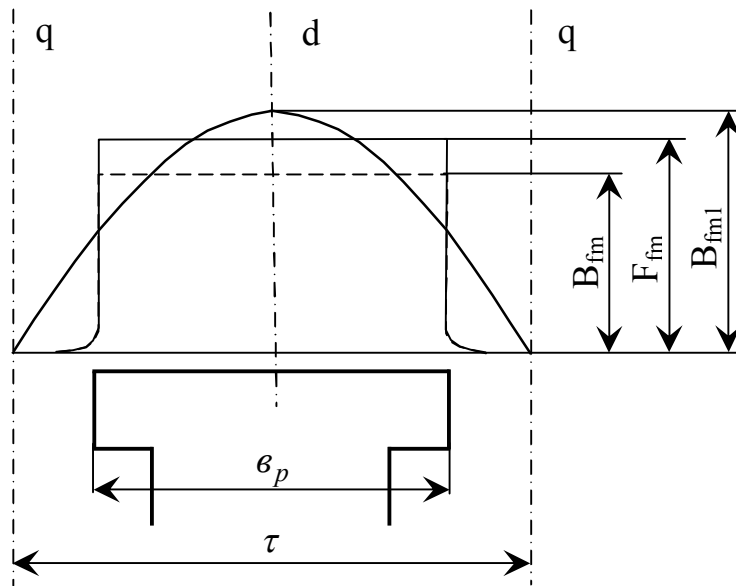


Рисунок 2.2

Коэффициент формы поля возбуждения

$$k_f = \frac{B_{fm1}}{B_{fm}} . \quad (2.11)$$

Коэффициент формы поля якоря по продольной оси

$$k_d = \frac{B_{adm1}}{B_{adm}} . \quad (2.12)$$

Следовательно,

$$B_{adm1} = k_d \cdot B_{adm} ; \quad B_{fm1} = k_f \cdot B_{fm} ; \quad (2.13)$$

или с учётом (2.10)

$$B_{adm1} = \lambda_{\delta} \cdot \mu_0 \cdot F_{m1} \cdot k_d; \quad B_{fm1} = \lambda_{\delta} \cdot \mu_0 \cdot F_{mf} \cdot k_f; \quad (2.14)$$

Выражение для нахождения основной гармонической индукции магнитного поля в воздушном зазоре машины, создаваемого приведенной обмоткой ротора, имеет вид

$$B'_{fm1} = \lambda_{\delta} \cdot \mu_0 \frac{m_1}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1}{2p} k_{об1} \cdot I'_f \cdot k_d. \quad (2.15)$$

Коэффициент приведения тока обмотки ротора к обмотке статора определяется из условия $B_{fm1} = B'_{fm1}$. Определяя коэффициент приведения тока как отношение $\frac{I'_f}{I_f}$, получим

$$m_i = \frac{I'_f}{I_f} = \frac{w_f \cdot k_f}{\frac{m_1}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1}{2p} k_{об1} \cdot k_d}. \quad (2.16)$$

Коэффициент реакции якоря по продольной оси

$$k_{ad} = \frac{k_d}{k_f}. \quad (2.17)$$

Коэффициент приведения тока обмотки ротора к обмотке статора

$$m_i = \frac{I'_f}{I_f} = \frac{w_f}{\frac{m_1}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1}{2p} k_{об1}} \frac{1}{k_{ad}}. \quad (2.18)$$

где w_f - число витков обмотки возбуждения на один полюс.

Можно показать, что для ненасыщенной магнитной цепи полученное решение (2.18) совпадает с ранее полученным выражением для коэффициента приведения тока ротора.

Для явнополюсной машины коэффициент формы поля возбуждения

$$k_f = \frac{4}{\pi} \sin\left(\alpha_\delta \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.19)$$

где $\alpha_\delta = b_p / \tau$.

Величина $\sin(\alpha_\delta \cdot \pi/2)$ является коэффициентом укорочения для обмотки возбуждения явнополюсной синхронной машины (α_δ - расчетный коэффициент полюсной дуги).

На основании этого можно записать $k_{обf} = k_{yf} = \sin(\alpha_\delta \pi/2)$

$$k_f = \frac{4}{\pi} k_{обf}. \quad (2.20)$$

Для неявнополюсной машины $k_d = 1$, т.к. воздушный зазор равномерный. Коэффициент формы поля обмотки возбуждения равен

$$k_f = \frac{4}{\pi} \frac{\sin\left(\gamma \frac{\pi}{2}\right)}{\gamma \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} k_{pf} = \frac{4}{\pi} k_{обf}, \quad (2.21)$$

где k_{pf} – коэффициент распределения.

С учетом последнего выражения для неявнополюсной синхронной машины коэффициент приведения по току примет вид

$$m_i = \frac{m_f}{m_1} \frac{2pw_f k_{обf}}{w_1 k_{об1}}, \quad (2.22)$$

где $m_f = 2$ – число фаз обмотки возбуждения;

$2pw_f$ – полное число витков обмотки возбуждения.

2.3 Определение коэффициентов приведения напряжений и сопротивлений роторных контуров к обмотке статора

Коэффициент приведения напряжений находится из условия, что полная мощность реальной и приведенной обмоток равны.

Полная мощность реальной обмотки ротора

$$S_2 = m_2 \cdot U_2 \cdot I_2. \quad (2.23)$$

Полная мощность приведённой обмотки ротора

$$S'_2 = m_1 \cdot U'_2 \cdot I'_2. \quad (2.24)$$

По условию определения коэффициента приведения напряжений имеем

$$S_2 = S'_2 \quad (2.25)$$

или

$$m_2 \cdot U_2 \cdot I_2 = m_1 \cdot U'_2 \cdot I'_2. \quad (2.26)$$

Приняв коэффициент приведения напряжений равным отношению приведённого напряжения к напряжению реальной обмотки, получим

$$m_u = \frac{U'_2}{U_2} = \frac{m_2 I_2}{m_1 I'_2} = \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{m_i}. \quad (2.27)$$

Коэффициент приведения активных сопротивлений определяют из условия равенства потерь мощности в реальной и приведенной обмотках.

Потери мощности в реальной обмотке ротора

$$P_{эл2} = m_2 \cdot I_2^2 \cdot r_2. \quad (2.28)$$

Потери мощности в приведённой обмотке ротора

$$P'_{эл2} = m_1 \cdot I_2'^2 \cdot r_2'. \quad (2.29)$$

По условию определения коэффициента приведения активных сопротивлений имеем

$$P_{эл2} = P'_{эл2} \quad (2.30)$$

или

$$m_2 I_2^2 r_2 = m_1 I_2'^2 r_2' . \quad (2.31)$$

Приняв коэффициент приведения активных сопротивлений равным отношению приведённого сопротивления к сопротивлению реальной обмотки, получим

$$m_z = \frac{r_2'}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{I_2}{I_2'} \right)^2 \quad (2.32)$$

или

$$m_z = \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{m_i^2} = \frac{m_u}{m_i} . \quad (2.33)$$

Приведение индуктивных сопротивлений рассеяния обмоток ротора производится исходя из условия сохранения фазовых соотношений, т.е.

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x_2}{r_2} = \frac{x_2'}{r_2'} = \operatorname{const} . \quad (2.34)$$

Как следует из этого равенства, коэффициенты приведения активных сопротивлений r_2 и индуктивных сопротивлений x_2 – совпадают

$$\left(\frac{x_2'}{x_2} = \frac{r_2'}{r_2} = m_z \right) .$$

Для нахождения приведённых значений индуктивности взаимной индукции (индуктивных сопротивлений взаимной индукции) рассмотрим систему уравнений двух магнитосвязанных контуров, замкнутых на периодически изменяющиеся напряжения

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (r_1 + j\omega \cdot L_{11}) \dot{I}_1 + j\omega \cdot L_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = (j\omega \cdot L_{21} \dot{I}_1) + (r_2 + j\omega \cdot L_{22}) \dot{I}_2 \end{cases} \quad (2.35)$$

В уравнениях системы электрические величины и параметры вторичного контура заменим приведёнными значениями. При этом равенства не изменятся.

В первом уравнении системы в правой части равенства второе слагаемое умножим и разделим на коэффициент приведения тока вторичного контура к первичному контуру:

$$\dot{U}_1 = (r_1 + j\omega \cdot L_{11})\dot{I}_1 + j\omega \cdot L_{12}\dot{I}_2 \frac{m_i}{m_i}. \quad (2.36)$$

Анализируя второе слагаемое в правой части полученного равенства, и учитывая, что произведение тока вторичного контура на коэффициент приведения тока есть приведённый ток вторичного контура ($I_2 m_i = I_2'$), можно прийти к выводу, что отношение $\frac{L_{12}}{m_i}$ является индуктивностью взаимной индукции вторичного контура с первичным, приведённой к первичному контуру $L_{12}' = \frac{L_{12}}{m_i}$.

Второе уравнение системы умножим на коэффициент приведения напряжения вторичного контура к первичному контуру. Учитывая, что $m_u = m_i \cdot m_z$, получим

$$\dot{U}_2 \cdot m_u = j\omega \cdot L_{21} \cdot m_u \cdot \dot{I}_1 + (r_2 \cdot m_z + j\omega \cdot L_{22} \cdot m_z) \cdot \dot{I}_2 \cdot m_i \quad (2.37)$$

или

$$\dot{U}_2' = j\omega \cdot L_{21}' \cdot \dot{I}_1 + (r_2' + j\omega \cdot L_{22}') \cdot \dot{I}_2', \quad (2.38)$$

где $L_{21}' = L_{21} \cdot m_u$ - взаимная индуктивность первичной обмотки с вторичной обмоткой, приведённая к первичной обмотке.

3 Замена короткозамкнутой обмотки ротора машины переменного тока эквивалентной двухфазной обмоткой

В тех случаях, когда не ставится задача определения токов в стержнях, короткозамкнутые обмотки роторов машин переменного тока заменяются двумя эквивалентами короткозамкнутыми обмотками, оси которых смещены на 90° (например, оси d-q).

Короткозамкнутые обмотки могут выполняться на роторе, как в асинхронных машинах, так и синхронных машинах. Учитывая различие конструкции роторов синхронных и асинхронных машин, приведение роторных обмоток этих машин к эквивалентным обмоткам рассмотрим отдельно.

3.1 Определение числа витков эквивалентных двухфазных обмоток ротора

Строим развернутые схемы распределения токов в стержнях успокоительной обмотки явнополюсной синхронной машины по продольной «d» и поперечной оси «q».

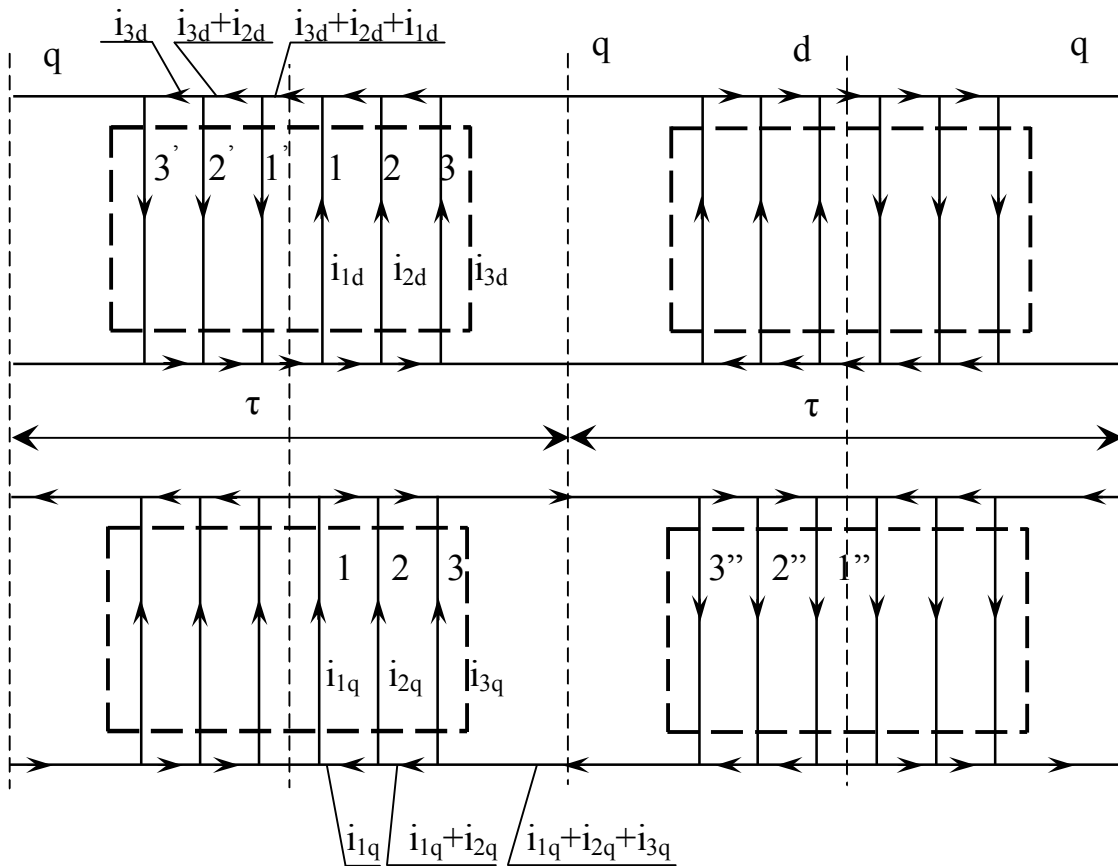


Рисунок 3.1 – Схема демпферной обмотки

На рисунке 3.1 приняты следующие обозначения: i_{kd} , i_{kq} – продольная и поперечная составляющие токов в k -ом стержне успокоительной обмотки. Успокоительная обмотка по продольной оси представлена совокупностью электрически связанных контуров 1 – 1', 2 – 2', 3 – 3', а по поперечной оси – 1 – 1'', 2 – 2'', 3 – 3''.

Замену реальных успокоительных обмоток на эквивалентные производят исходя из условия равенства основных гармонических МДС, созданных реальной и эквивалентной обмотками. Для определения МДС успокоительной обмотки необходимо знать распределение токов по её стержням. Решение этой задачи производим с использованием теории двух реакций. Основную (первую) гармоническую МДС реакции якоря раскладываем на две составляющие: продольную F_d и поперечную F_q .

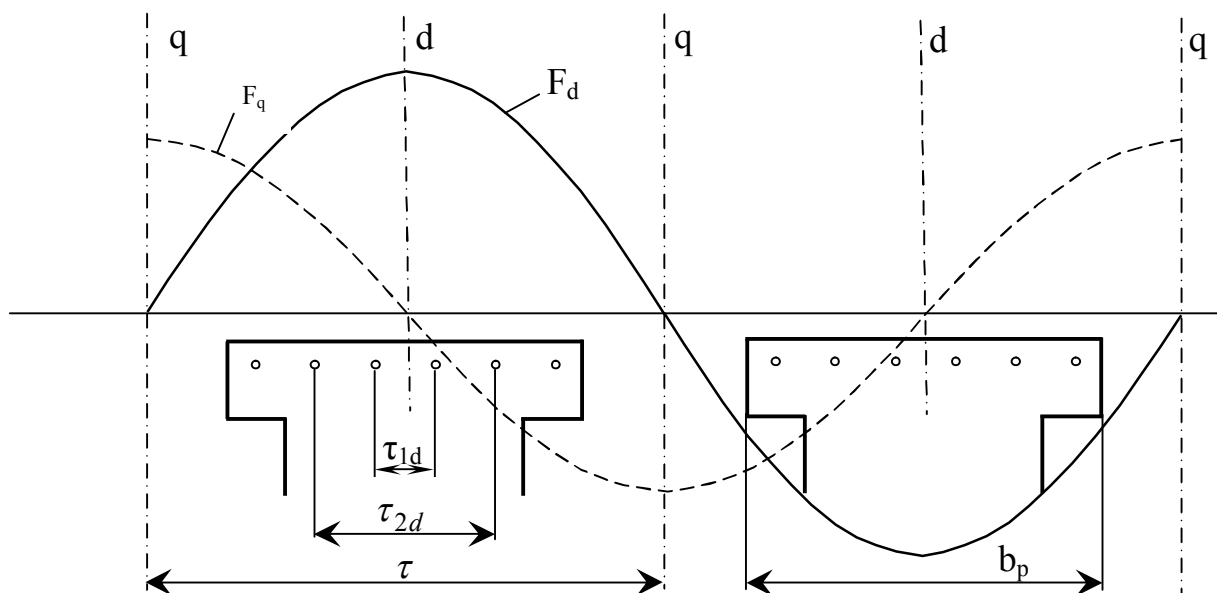


Рисунок 3.2 – Составляющие МДС обмотки якоря

Составляющие токов в стержнях успокоительной обмотки по продольной оси возникают под влиянием поля реакции якоря, созданного F_d (более точно под влиянием изменяющегося поля по продольной оси, созданного МДС F_d). Максимальное значение токов будет в стержнях, смещенных от оси d на половину полюсного деления $\tau/2$. В первом приближении можно принять, что при синусоидальном распределении МДС F_d (или F_q) распределение токов по стержням будет синусоидальным. Причем, ток в k -ом стержне, смещенном от оси полюса на $\tau_k/2$, будет пропорционален $\sin\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right)$. Следовательно

$$I_{mkd} = I_{myd} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right), \quad (3.1)$$

где I_{myd} - ток в стержнях, удаленных от оси полюса на $\frac{\tau}{2}$.

Величину $\sin\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right)$ можно рассматривать как коэффициент укороче-

ния

$$k_y = \sin\left(\frac{\tau_k}{\tau} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\beta \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\beta = \frac{\tau_k}{\tau}$ - относительный шаг обмотки.

Ток I_{mkd} , протекая в k -ом контуре успокоительной обмотки, создаёт МДС, которая распределена в пространстве по квазипрямоугольному закону. Первая гармоническая такой МДС определяется следующим образом:

$$F_{m1kd} = \frac{4}{\pi} \cdot I_{mkd} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right) \quad (3.2)$$

или

$$F_{m1kd} = \frac{4}{\pi} \cdot I_{myd} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right). \quad (3.3)$$

Амплитуда первой гармонической МДС успокоительной обмотки по продольной оси определится как сумма первых гармоник МДС всех контуров по оси полюса:

$$F_{m1yd} = \frac{4}{\pi} \cdot I_{myd} \sum_{k=1}^{n_c/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right), \quad (3.4)$$

где n_c - количество стержней успокоительной обмотки на один полюс.

В синхронных машинах стержни успокоительной обмотки, как правило, распределяются равномерно. Обозначим угол между соседними стержнями α_c . Тогда можно выполнить следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_c/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_2}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_3}{2}\right) + \dots + \\ &+ \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_{n_c/2}}{2}\right) = \frac{n_c}{4} - \frac{\sin(n_c \alpha_c)}{4 \cdot \sin(\alpha_c)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнение МДС F_{m1yd} примет следующий вид:

$$F_{m1yd} = \frac{4}{\pi} I_{myd} \left(\frac{n_c}{4} - \frac{\sin(n_c \alpha_c)}{4 \cdot \sin(\alpha_c)} \right). \quad (3.6)$$

Подобные преобразования не зависят от числа стержней на один полюс.

Если принять число витков эквивалентной успокоительной обмотки по продольной оси $w_{эд}$, то первая гармоническая МДС, создаваемая такой обмоткой, определяется следующим образом:

$$F_{m1\text{эд}} = \frac{4}{\pi} I_{myd} \cdot w_{\text{эд}}. \quad (3.7)$$

Приравнивая МДС F_{m1yd} и $F_{m1\text{эд}}$, получим:

$$w_{\text{эд}} = \frac{n_c}{4} \left\{ 1 - \frac{\sin(n_c \alpha_c)}{n_c \cdot \sin(\alpha_c)} \right\}. \quad (3.8)$$

Аналогичные преобразования можно выполнить и для успокоительной обмотки по поперечной оси:

$$F_{m1kq} = \frac{4}{\pi} \cdot I_{mkq} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right), \quad (3.9)$$

где $I_{mkq} = I_{myq} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right)$,

Амплитуда первой гармоники МДС контура k по оси ротора q

$$F_{m1kq} = \frac{4}{\pi} \cdot I_{myq} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right). \quad (3.10)$$

Амплитуда первой гармонической МДС успокоительной обмотки по поперечной оси:

$$F_{m1yq} = \frac{4}{\pi} \cdot I_{myq} \sum_{k=1}^{n_c/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right). \quad (3.11)$$

Произведём следующую замену:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_c/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_k}{2}\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_1}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_2}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_3}{2}\right) + \dots + \\ &+ \cos^2\left(\frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_{n_c/2}}{2}\right) = \frac{n_c}{4} + \frac{\sin(n_c \alpha_c)}{4 \cdot \sin(\alpha_c)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где n_c - любое целое число.

Уравнение МДС F_{m1yq} примет следующий вид:

$$F_{m1yq} = \frac{4}{\pi} I_{myq} \left(\frac{n_c}{4} + \frac{\sin(n_c \alpha_c)}{4 \cdot \sin(\alpha_c)} \right). \quad (3.13)$$

Если принять число витков эквивалентной успокоительной обмотки по поперечной оси $w_{\varepsilon q}$, то первая гармоническая МДС, создаваемая такой обмоткой, определяется следующим образом:

$$F_{m1\varepsilon q} = \frac{4}{\pi} I_{myq} \cdot w_{\varepsilon q}. \quad (3.14)$$

Приравнявая МДС F_{m1yq} и $F_{m1\varepsilon q}$, получим:

$$w_{\varepsilon q} = \frac{n_c}{4} \left\{ 1 + \frac{\sin(n_c \alpha_c)}{n_c \cdot \sin(\alpha_c)} \right\}. \quad (3.15)$$

Реальная распределённая короткозамкнутая обмотка заменяется двумя короткозамкнутыми эквивалентными обмотками по продольной и поперечной осям с числом витков $w_{\varepsilon d}$ и $w_{\varepsilon q}$. Эквивалентные обмотки имеют диаметральный шаг.

В асинхронных машинах, с целью замены реальной обмотки ротора эквивалентной двухфазной, можно воспользоваться теми же формулами. Полагая в них $n_c = z_2/2p$ и $\alpha_c = \pi/n_c$, получим:

$$w_{\varepsilon d} = w_{\varepsilon q} = \frac{n_c}{4} = \frac{z_2}{8p}. \quad (3.16)$$

3.2 Параметры эквивалентных роторных контуров

Чтобы при математических исследованиях воспользоваться уравнениями эквивалентных роторных обмоток, необходимо найти активные эквивалентные сопротивления и индуктивности рассеяния.

Определим параметры эквивалентных роторных контуров явнополюсных синхронных машин.

Активные сопротивления определяются исходя из условия равенства потерь в реальной и эквивалентной обмотках.

$$P_{\varepsilon d} = 0.5 \cdot I_{myd}^2 \cdot R_{yd}, \quad (3.17)$$

$$P_{\varepsilon q} = 0.5 \cdot I_{myq}^2 \cdot R_{yq}.$$

Потери в элементе реальной обмотки

$$P_{kd} = 0.5 \cdot I_{mkd}^2 \cdot R_{kd}, \quad (3.18)$$

где R_{kd} - сопротивление стержня и соответствующего числа короткозамыкающих колец.

Полные потери в успокоительной обмотке от токов по продольной оси

$$P_{yd} = 2p \cdot \left\{ R_{1d} \cdot \sin^2[(\pi/\tau)(\tau_1/2)] + R_{2d} \cdot \sin^2[(\pi/\tau)(\tau_2/2)] + \dots + R_{kd} \cdot \sin^2[(\pi/\tau)(\tau_k/2)] + \dots \right\} \cdot I_{myd}^2. \quad (3.19)$$

$$P_{kq} = 0.5 \cdot I_{mkq}^2 \cdot R_{kq}, \quad (3.20)$$

$$P_{yq} = 2p \cdot \left\{ R_{1q} \cdot \cos^2[(\pi/\tau)(\tau_1/2)] + R_{2q} \cdot \cos^2[(\pi/\tau)(\tau_2/2)] + \dots + R_{kq} \cdot \cos^2[(\pi/\tau)(\tau_k/2)] + \dots \right\} \cdot I_{myq}^2. \quad (3.21)$$

Приравнивая правые части соответствующих равенств, получим

$$R_{yd} = 4p \cdot \left[R_{1d} \cdot \sin^2(\pi/\tau)(\tau_1/2) + R_{2d} \cdot \sin^2(\pi/\tau)(\tau_2/2) + \dots \right] \quad (3.22)$$

$$R_{yq} = 4p \cdot \left[R_{1q} \cdot \cos^2(\pi/\tau)(\tau_1/2) + R_{2q} \cdot \cos^2(\pi/\tau)(\tau_2/2) + \dots \right].$$

В этих выражениях $R_{kd(q)} = r_{kc} + (n_k/2) \cdot r_{kk}$,

где n_k - число элементов колец, входящих в k -ый контур;

r_{kc} и r_{kk} - сопротивления k -го стержня и элемента кольца.

Коэффициенты приведения эквивалентной успокоительной обмотки можно определить исходя из условия равенства первых гармонических МДС. Это исключает необходимость выполнять расчеты поля. Учитывая, что $w_2 = 2p \cdot w_{\Delta d}$ или $w_2 = 2p \cdot w_{\Delta q}$ и $k_{об} = 1$, получим

$$m_{id} = \frac{I'_{myd}}{I_{myd}} = \frac{2}{m_1} \frac{2p \cdot w_{\Delta d}}{w_1 \cdot k_{об1}}, \quad (3.23)$$

$$m_{iq} = \frac{I'_{myq}}{I_{myq}} = \frac{2}{m_1} \frac{2p \cdot w_{\Delta q}}{w_1 \cdot k_{об1}}$$

Коэффициенты приведения по напряжению и сопротивлению определяются аналогично полученным ранее коэффициентам.

Приведённые значения активных сопротивлений эквивалентных обмоток ротора

$$r_{yd} = R_{yd} \cdot \frac{m_{ud}}{m_{id}},$$

$$r_{yq} = R_{yq} \cdot m_{zq},$$
(3.24)

Индуктивные сопротивления рассеяния определяются исходя из условия сохранения энергии магнитного поля рассеяния реальной и эквивалентной обмотки.

Энергия магнитного поля рассеяния эквивалентной обмотки

$$W_{\varepsilon d} = 0.5 \cdot L_{\sigma yd} \cdot I_{myd}^2,$$

$$W_{\varepsilon q} = 0.5 \cdot L_{\sigma yq} \cdot I_{myq}^2.$$
(3.25)

Энергия магнитного поля рассеяния реальной обмотки

$$W_{yd} = 2p \cdot \{L_{\sigma 1d} \cdot \sin^2[(\pi/\tau)(\tau_1/2)] + L_{\sigma 2d} \cdot \sin^2[(\pi/\tau)(\tau_2/2)] + \dots +$$

$$+ L_{\sigma kd} \cdot \sin^2[(\pi/\tau)(\tau_k/2)] + \dots\} \cdot I_{myd}^2.$$
(3.26)

$$W_{yq} = 2p \cdot \{L_{\sigma 1q} \cdot \cos^2[(\pi/\tau)(\tau_1/2)] + L_{\sigma 2q} \cdot \cos^2[(\pi/\tau)(\tau_2/2)] + \dots +$$

$$+ L_{\sigma kq} \cdot \cos^2[(\pi/\tau)(\tau_k/2)] + \dots\} \cdot I_{myq}^2.$$
(3.27)

Индуктивность рассеяния стержня

$$L_{\sigma kd(q)} = \mu_0 \cdot l_2 \cdot \lambda_{kd(q)},$$
(3.28)

где $\lambda_{kd(q)} = \lambda_{nd(q)} + \lambda_g + \frac{n_k}{2} \cdot \lambda_{kk}$.

Если пазы имеют одинаковую геометрию, то $\lambda_{kd} = \lambda_{kq}$.

Индуктивность рассеяния эквивалентной обмотки по продольной оси

$$L_{\sigma yd} = 4p \cdot \{L_{\sigma 1d} \cdot \sin^2[(\pi/\tau)(\tau_1/2)] + L_{\sigma 2d} \cdot \sin^2[(\pi/\tau)(\tau_2/2)] + \dots + \\ + L_{\sigma kd} \cdot \sin^2[(\pi/\tau)(\tau_k/2)] + \dots\}, \quad (3.29)$$

Индуктивность рассеяния эквивалентной обмотки по поперечной оси

$$L_{\sigma yq} = 4p \cdot \{L_{\sigma 1q} \cdot \cos^2[(\pi/\tau)(\tau_1/2)] + L_{\sigma 2q} \cdot \cos^2[(\pi/\tau)(\tau_2/2)] + \dots + \\ + L_{\sigma kq} \cdot \cos^2[(\pi/\tau)(\tau_k/2)] + \dots\}. \quad (3.30)$$

Индуктивные сопротивления рассеяния короткозамкнутых эквивалентных обмоток ротора по продольной и поперечной осям

$$X_{\sigma yd} = 2\pi \cdot f_1 \cdot L_{\sigma yd} \cdot m_{zd}, \quad (3.31)$$

$$X_{\sigma yq} = 2\pi \cdot f_1 \cdot L_{\sigma yq} \cdot m_{zq}.$$

В асинхронных машинах с короткозамкнутым ротором активное и индуктивное сопротивление эквивалентных обмоток могут быть рассчитаны по тем же формулам, но в асинхронных машинах эквивалентные параметры обмотки ротора по продольной и поперечной осям равны между собой.

4 Математические модели и исследование электрических машин с взаимно неподвижными осями обмоток и полюсов

4.1 Дифференциальные уравнения машины постоянного тока

Рассматриваем машину с двумя контурами: контур обмотки возбуждения и контур якоря, состоящий из обмотки якоря, компенсационной обмотки и обмотки добавочных полюсов. Щетки установлены на геометрической нейтрали. В идеализированной машине постоянного тока обмотка якоря представлена псевдонеподвижной обмоткой, ось которой направлена по линии щеток. Во время работы машины в этой обмотке индуцируется ЭДС вращения $e = -\Psi_{do}\omega$. Появление ЭДС вращения доказывается преобразованием координат.

$$\left. \begin{aligned}
U_b &= d\Psi_{uu}/dt + r_b \cdot i_b \\
U &= d\Psi/dt + \Psi_{do} \cdot \omega + r \cdot i_a \\
\Psi_{uu} &= L_{uu} \cdot i_b \\
\Psi_{do} &= M_{ab} \cdot i_b \\
\Psi &= (L_a + L_k + L_\partial) \cdot i_a + 2 \cdot (M_{k\partial} - M_{ak} - M_{a\partial}) \cdot i_a \\
M &= M_{cm} + J \cdot \frac{d\Omega}{dt} = M_{cm} + J_1 \cdot \frac{d\omega}{dt}
\end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где $J_1 = J/p$ - приведённый момент инерции;

$M = p \cdot |\overline{\Psi_{do}} \times \overline{i_a}| = p \cdot \Psi_{do} \cdot i_a$ - электромагнитный момент (p - число пар полюсов);

M_{cm} - статический момент;

$L_{uu}, L_a, L_k, L_\partial$ - индуктивность обмотки возбуждения, обмоток якоря, компенсационной обмотки и добавочных полюсов соответственно;

M_{ab} - индуктивность взаимной индукции между обмоткой возбуждения и обмоткой якоря. Обмотка якоря представлена псевдонеподвижной катушкой (обмоткой). Псевдонеподвижная обмотка, это обмотка неподвижная в пространстве, но при работе машины в этой обмотке индуцируется ЭДС вращения. Ось обмотки якоря совпадает с поперечной осью машины;

$M_{k\partial}$ - индуктивность взаимной индукции между обмоткой добавочных полюсов и компенсационной обмоткой;

M_{ak} - индуктивность взаимной индукции между компенсационной обмоткой и обмоткой якоря;

$M_{a\partial}$ - индуктивность взаимной индукции между обмоткой добавочных полюсов и обмоткой якоря.

В уравнении потокосцеплений якорной цепи знак перед коэффициентами взаимной индукции $M_{k\partial}, M_{ak}$ и $M_{a\partial}$ определяется взаимным направлением осей обмоток. Так, например, компенсационная обмотка предназначена для компенсации поперечного поля якоря в зоне полюсной дуги. Следовательно, оси обмотки якоря и компенсационной обмотки направлены встречно и коэффициент взаимной индукции между этими обмотками M_{ak} является отрицательным. Ось обмотки добавочных полюсов направлена встречно, по отношению к оси обмотки якоря и взаимная индуктивность между этими обмотками $M_{a\partial}$ является отрицательной. Таким образом, обмотка добавочных полюсов и компенсационная обмотка включены встречно по отношению к обмотке якоря. Следовательно, между собой эти обмотки включены согласно. Коэффициент взаимной индукции между обмотками $M_{k\partial}$ является положительным.

Коэффициент перед вторым слагаемым в уравнении потокосцепления якорной цепи объясняется взаимным влиянием обмоток якорной цепи. Так, например, обмотка якоря воздействует на обмотку добавочных полюсов, а обмотка добавочных полюсов воздействует на обмотку якоря.

Данная система уравнений в общем случае является нелинейной. Это объясняется следующими причинами:

- индуктивности и взаимные индуктивности обмоток машины являются нелинейной функцией токов;
- ЭДС вращения ($e = -\Psi_{do} \cdot \omega$) определяется произведением неизвестных величин и является нелинейной функцией тока;
- статический момент является нелинейной функцией скорости вращения.

4.2 Самовозбуждение генератора постоянного тока параллельного возбуждения

Самовозбуждение генератора постоянного тока параллельного возбуждения является эксплуатационным переходным процессом. Пуск в работу ГПТ производится в следующей последовательности. Вначале якорь генератора приводят во вращение с помощью приводного механизма и при достижении номинальной частоты вращения обмотку возбуждения замыкают на якорную цепь. Таким образом, переходный процесс протекает при постоянной частоте вращения и относится к группе электромагнитных переходных процессов.

Процесс самовозбуждения ГПТ параллельного возбуждения описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. Нелинейность системы обусловлена нелинейной зависимостью магнитного потока главных полюсов от тока возбуждения, что связано с насыщением магнитной цепи. Насыщение магнитной цепи является и основной причиной, из-за которой процесс самовозбуждения ограничен во времени.

Исследование самовозбуждения ГПТ можно выполнить различными методами: графоаналитическим методом, численными методами и экспериментально. Процесс может быть смоделирован на АВМ.

Аналитическое решение задачи о самовозбуждении можно получить, если описать характеристику холостого хода аналитическим выражением или принять допущение о постоянстве индуктивностей обмоток возбуждения и якорной цепи. Такое допущение линеаризует решаемую систему уравнений. Оно соответствует замене реальной характеристики холостого хода прямой линией, проходящей через точку $e_{ocm}(i_f = 0)$. Но если считать магнитную цепь ненасыщенной ($\mu = \infty$), то характеристика холостого хода будет представлена касательной к действительной характеристике. В этом случае решения в области положительных значений тока возбуждения мы не получим, т.к. процесс самовозбуждения будет неограниченным во времени, рисунок 4.1.

Если принять, что насыщение магнитной цепи остается неизменным и соответствует максимальному току возбуждения, то аналитическое решение

может быть получено в области положительных значений тока возбуждения. Однако точность такого решения будет невысокая, что объясняется большой погрешностью аппроксимации характеристики холостого хода. В этом случае характеристика холостого хода пройдет через точку, соответствующую $e_{ост}$ и точку, которая соответствует установившемуся режиму работы генератора, рисунок 4.1.

Графоаналитический метод решения основан на использовании действительной характеристики холостого хода и позволяет с большей точностью исследовать процесс.

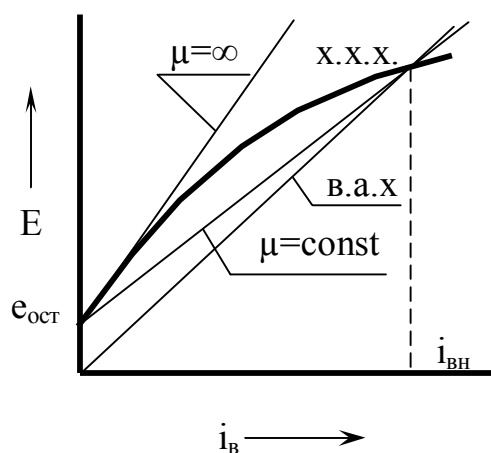


Рисунок 4.1

Процесс самовозбуждения генератора постоянного тока, как электромагнитный переходной процесс, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} e - u = \frac{d\Psi_a}{dt} + r_a \cdot i_a \\ u_f = \frac{d\Psi_f}{dt} + r_f \cdot i_f \\ \Psi_a = L_a \cdot i_a \\ \Psi_f = L_f \cdot i_f \end{cases}, \quad (4.2)$$

где L_a и r_a — соответственно индуктивность и активное сопротивление якорной цепи, состоящей из обмотки якоря, обмотки добавочных полюсов и, например, стабилизирующей обмотки;

L_f и r_f — индуктивность обмотки возбуждения и активное сопротивление цепи обмотки возбуждения (в общем случае включает активное сопротивление регулировочного реостата).

Самовозбуждение генератора происходит при установившейся частоте вращения замыканием цепи обмотки возбуждения на якорную цепь ($u_f = u$). Рассматриваем самовозбуждение без нагрузки генератора. Следовательно, ток обмотки якоря будет равен току возбуждения ($i_a = i_f$).

Для решения системы к первому уравнению прибавляем второе уравнение. Потокосцепления обмоток заменяем их выражениями

$$e - u + u_f = \frac{d}{dt}(L_f \cdot i_f) + \frac{d}{dt}(L_a \cdot i_a) + r_f \cdot i_f + r_a \cdot i_a. \quad (4.3)$$

Учитывая равенство напряжений ($u_f = u$) и токов в обмотках ($i_a = i_f$), получим

$$e = \frac{d}{dt}(L_f + L_a) \cdot i_f + (r_f + r_a) \cdot i_f. \quad (4.4)$$

Известно, что индуктивность обмотки возбуждения во много раз больше индуктивности якорной цепи ($L_f > L_a$), а активное сопротивление цепи обмотки возбуждения много больше активного сопротивления якорной цепи ($r_f > r_a$). Поэтому, пренебрегаем параметрами якорной цепи по сравнению с соответствующими параметрами цепи обмотки возбуждения. Данное допущение следует считать корректным. Действительно, обмотка возбуждения, по сравнению с обмоткой якоря, имеет большее число витков и большее поперечное сечение эффективного проводника и, как правило, меньшее число параллельных ветвей. Магнитное сопротивление пути основного магнитного потока меньше, чем магнитное сопротивление пути поперечного поля якоря.

С учётом принятого допущения уравнение (4.4) примет вид:

$$e = \frac{d}{dt}(L_f \cdot i_f) + r_f \cdot i_f. \quad (4.5)$$

Слагаемое ($r_f \cdot i_f$) из правой части равенства перенесём в левую часть, а потокосцепление обмотки возбуждения ($L_f \cdot i_f = \psi_f$) выразим через магнитный поток:

$$\psi_f = w_f \cdot \Phi, \quad (4.6)$$

где w_f – число витков обмотки возбуждения;

Φ – магнитный поток обмотки возбуждения, Вб.

Получим

$$e - r_f \cdot i_f = w_f \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.7)$$

или

$$\Delta e = w_f \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.8)$$

где $\Delta e = e - r_f \cdot i_f$ – разностная ЭДС (электродвижущая сила).

Известно, что ЭДС обмотки якоря связана с магнитным потоком и частотой вращения якоря выражением

$$e = C_e \cdot \Phi \cdot n. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) справедливо для произвольного режима работы. Для установившегося режима работы можем записать

$$e_{уст} = C_e \cdot \Phi_{уст} \cdot n_{уст}. \quad (4.10)$$

Возьмём отношение левых и правых частей равенств (4.9) и (4.10), а также учтём, что самовозбуждение генератора происходит при постоянной частоте вращения, равной установившемуся значению $n = n_{уст}$. Получим

$$\frac{e}{e_{уст}} = \frac{C_e \cdot \Phi \cdot n_{уст}}{C_e \cdot \Phi_{уст} \cdot n_{уст}}. \quad (4.11)$$

После несложных преобразований, получим

$$\Phi = \frac{\Phi_{уст}}{e_{уст}} \cdot e. \quad (4.12)$$

Полученное выражение магнитного потока подставим в уравнение (4.8)

$$\Delta e = \frac{w_f \cdot \Phi_{уст}}{e_{уст}} \cdot \frac{de}{dt}. \quad (4.13)$$

Числитель коэффициента перед производной в правой части равенства (4.13) является выражением потокосцепления обмотки возбуждения в установившемся режиме и может быть заменён произведением индуктивности обмотки возбуждения на ток обмотки в установившемся режиме:

$$w_f \cdot \Phi_{ycm} = \psi_{ycm} = L_f \cdot i_{f\ ycm}. \quad (4.14)$$

После окончания самовозбуждения генератора падение напряжения на активном сопротивлении цепи обмотки возбуждения равняется ЭДС обмотки якоря:

$$e_{ycm} = r_f \cdot i_{f\ ycm}. \quad (4.15)$$

В уравнении (4.13) произведём соответствующие замены и, после не сложных преобразований, получим

$$\Delta e = T_f \cdot \frac{de}{dt}, \quad (4.16)$$

где $T_f = \frac{L_f}{r_f}$ – постоянная времени обмотки возбуждения.

В выражении (4.16) произведём разделение переменных:

$$\frac{1}{T_f} dt = \frac{1}{\Delta e} de. \quad (4.17)$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства (4.17).

$$\int_0^t \frac{1}{T_f} dt = \int_0^t \frac{1}{\Delta e} de$$

или

$$\frac{t}{T_f} = \int_0^t \frac{1}{\Delta e} de. \quad (4.18)$$

Произведём замену пределов интегрирования в правой части равенства (4.18). В момент времени $t = 0$ ЭДС в обмотке якоря равняется остаточной ЭДС (e_{ocm}). В произвольный момент времени t ЭДС в обмотке якоря равняется текущему значению E . Следовательно,

$$\frac{t}{T_f} = \int_{e_{ocm}}^E \frac{1}{\Delta e} de. \quad (4.19)$$

Полученный интеграл находят графическим методом.

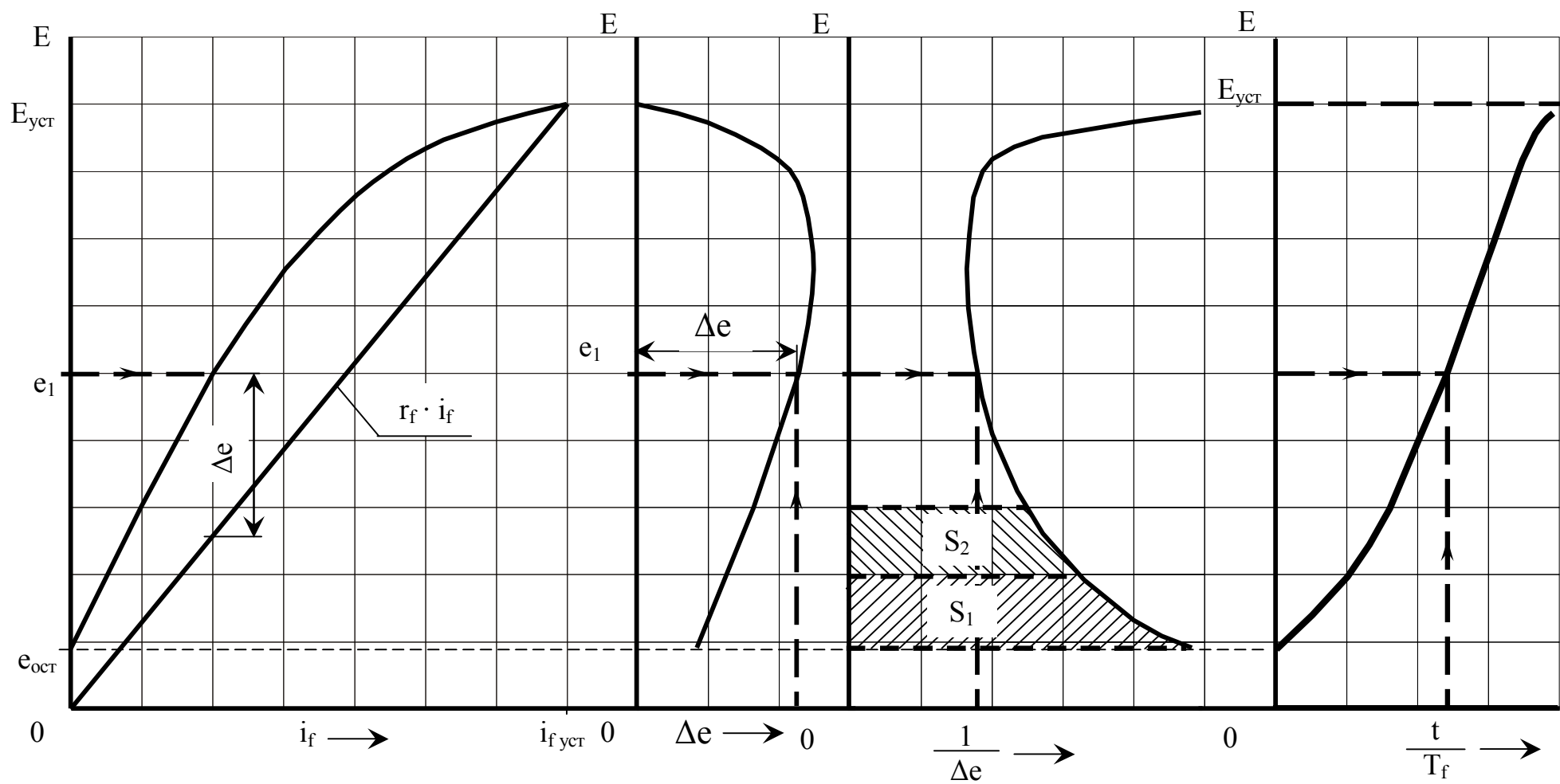


Рисунок 4.2 – Графическое определение функции $E = f\left(\frac{t}{T_f}\right)$

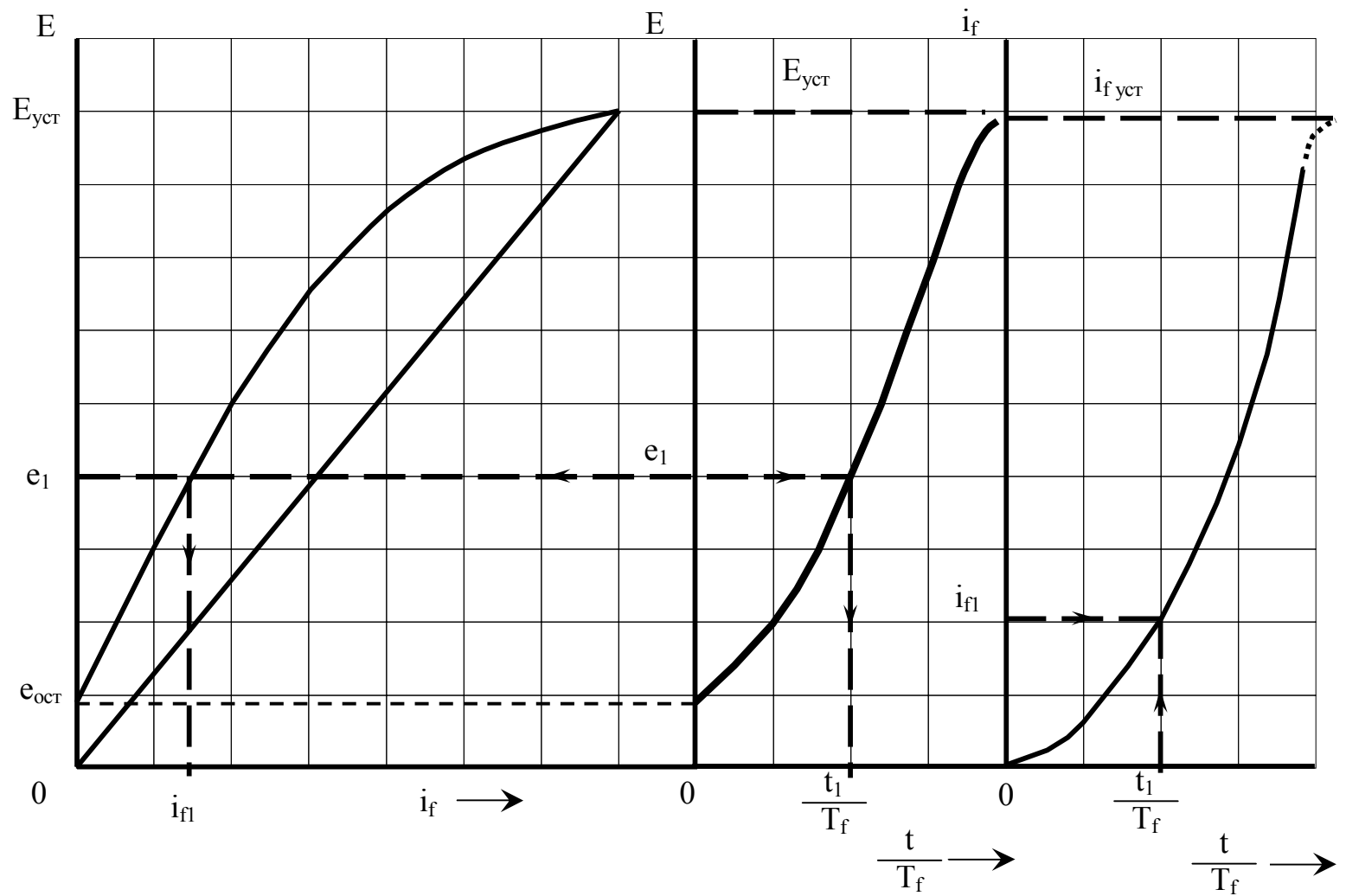


Рисунок 4.3 – Графическое определение функции $i_f = f\left(\frac{t}{T_f}\right)$

Зависимости $E = f(\Delta e)$ и $E = f\left(\frac{1}{\Delta e}\right)$ получают графическим методом с помощью характеристики холостого хода (XXX) и вольтамперной характеристики цепи обмотки возбуждения ($ВАХ$). Необходимые построения показаны на рисунке 4.2.

Для нахождения графическим методом относительного времени самовозбуждения для фиксированного значения ЭДС можно воспользоваться формулой для вычисления площади трапеции и свойством определённого интеграла.

Интеграл в правой части уравнения (4.19) представляют как сумму интегралов:

$$\int_{e_{ocm}}^E \frac{1}{\Delta e} de = \int_{e_{ocm}}^{e_1} \frac{1}{\Delta e} de + \int_{e_1}^{e_2} \frac{1}{\Delta e} de + \dots + \int_{e_n}^E \frac{1}{\Delta e} de. \quad (4.20)$$

Расстояние по оси ординат между верхним и нижним пределами интегрирования для каждого интеграла в правой части равенства (4.20) подбирают таким образом, чтобы интегрируемая функция на данном отрезке, по возможности, точнее аппроксимировалась отрезком прямой линии (сторона трапеции).

Для начального момента времени $\left(\frac{t}{T_f} = 0\right)$ имеем $e = e_{ocm}$. Предположим, что для первого интервала интегрирования относительное время самовозбуждения определено и составляет

$$\frac{t_1}{T_f} = \int_{e_{ocm}}^{e_1} \frac{1}{\Delta e} de = S_1. \quad (4.21)$$

Для второго интервала интегрирования $\int_{e_1}^{e_2} \frac{1}{\Delta e} de = S_2$, а относительное время самовозбуждения генератора от напряжения e_{ocm} до напряжения e_2 составит

$$\frac{t_2}{T_f} = \int_{e_{ocm}}^{e_2} \frac{1}{\Delta e} dt = \int_{e_{ocm}}^{e_1} \frac{1}{\Delta e} de + \int_{e_1}^{e_2} \frac{1}{\Delta e} de = S_1 + S_2 \quad (4.22)$$

и т.д.

Функция $i_f = f\left(\frac{t}{T_f}\right)$ изменения тока возбуждения при самовозбуждении может быть получена графическим методом с помощью характеристики холостого хода и функции $E = f\left(\frac{t}{T_f}\right)$. Решение показано на рисунке 4.3.

В момент времени $\frac{t}{T_f} = 0$ ЭДС в обмотке якоря равняется остаточной ЭДС, а ток возбуждения, соответственно, равен нулю ($i_f = 0$).

Для произвольного момента времени, например, $\frac{t_1}{T_f}$ по графику функции $E = f\left(\frac{t}{T_f}\right)$ находят соответствующее значение ЭДС (e_1). По найденному значению ЭДС по характеристике холостого хода находят соответствующее значение тока возбуждения (i_{f1}), которое откладывают на графике функции $i_f = f\left(\frac{t}{T_f}\right)$ для момента времени $\frac{t_1}{T_f}$. И т.д.

4.3 Безреостатный пуск двигателя постоянного тока параллельного возбуждения

При мощности двигателя постоянного тока параллельного возбуждения до 30 кВт используют прямое включение двигателя на номинальное напряжение сети (безреостатный пуск). Рассматриваемый переходной процесс является эксплуатационным, электромеханическим переходным процессом и описывается системой уравнений (4.1).

Пуск двигателя производится в следующей последовательности. Вначале напряжение подаётся на цепь обмотки возбуждения. По окончании переходного процесса в цепи обмотки возбуждения напряжение подаётся на якорную цепь. Следовательно, к моменту пуска двигателя переходной процесс в цепи обмотки возбуждения закончился. При пуске двигателя изменяется ток в якорной цепи и частота вращения ротора (якоря).

Рассмотрим решение задачи аналитическим методом. Им можно воспользоваться, если решаемая система уравнений является линейной.

С целью упрощения и линеаризации решаемой системы уравнений принимаем следующие допущения:

- источник питания (сеть) имеет бесконечную мощность;
- постоянное напряжение не содержит пульсаций;
- пуск двигателя производится без нагрузки на валу, а потерями холостого хода пренебрегаем ($M_{cm} = 0$);

- пуск двигателя производится в определённой последовательности, поэтому, со стороны обмотки возбуждения на состояние магнитной цепи во время пуска ни что не влияет;

- продольная составляющая поля якоря не возникает, так как щётки установлены на геометрической нейтрали (двигатель постоянного тока реверсивный);

- действием поперечного поля якоря на поле главных полюсов пренебрегаем, так как это действие мало или оно компенсируется стабилизирующей обмоткой;

- добавочные полюсы сводят коммутацию к линейной и коммутационная реакция якоря не возникает;

- изменяющийся при пуске двигателя магнитный поток добавочных полюсов не значительно влияет на изменение насыщения ярма якоря и станины, так как он значительно меньше магнитного потока главных полюсов.

Последние пять допущений позволяют принять, при рассмотрении пуска двигателя, насыщение магнитной цепи неизменным, а, следовательно, индуктивности обмоток и взаимные индуктивности – постоянными величинами.

С учётом принятых допущений решаемая система уравнений примет вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= L \cdot \frac{di_a}{dt} + r \cdot i_a + \Psi_{do} \cdot \omega \\ p \cdot \Psi_{do} \cdot i_a &= J_1 \cdot \frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \right\}, \quad (4.23)$$

где L – индуктивность якорной цепи.

Решим задачу операторным методом. Используем преобразование Карсона-Хевисайда. Для перехода от дифференциальной формы записи уравнений производную $\frac{d}{dt}$ заменяют оператором p . Функции времени становятся функцией оператора p . Чтобы не путать оператор p с числом пар полюсов p во втором уравнении системы (4.23), предварительно, разделим левую и правую части этого уравнения на число пар полюсов и обозначим

$$\frac{J_1}{p} = J_2.$$

Выражение в левой части равенства перенесём в правую часть. Запишем решаемую систему уравнений в операторной форме:

$$\left. \begin{aligned} U &= L \cdot p \cdot i_a(p) + r \cdot i_a(p) + \Psi_{do} \cdot \omega(p) \\ 0 &= -\Psi_{do} \cdot i_a(p) + J_2 \cdot p \cdot \omega(p) \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Запишем систему уравнений (4.24) в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} U \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (L \cdot p + r) & \Psi_{do} \\ -\Psi_{do} & J_2 \cdot p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_a(p) \\ \omega(p) \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

Из системы уравнений (4.25) получим выражения для операторного тока и операторной частоты вращения якоря:

$$i_a(p) = \frac{\begin{vmatrix} U & \Psi_{do} \\ 0 & J_2 \cdot p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (L \cdot p + r) & \Psi_{do} \\ -\Psi_{do} & J_2 \cdot p \end{vmatrix}} = \frac{U \cdot J_2 \cdot p}{(L \cdot p + r) \cdot J_2 \cdot p + \Psi_{do}^2}; \quad (4.26)$$

$$\omega(p) = \frac{\begin{vmatrix} (L \cdot p + r) & U \\ -\Psi_{do} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (L \cdot p + r) & \Psi_{do} \\ -\Psi_{do} & J_2 \cdot p \end{vmatrix}} = \frac{U \cdot \Psi_{do}}{(L \cdot p + r) \cdot J_2 \cdot p + \Psi_{do}^2}. \quad (4.27)$$

Выполним преобразование выражений в знаменателе полученных равенств:

$$i_a(p) = \frac{U \cdot J_2 \cdot p}{L \cdot J_2 \cdot \left(p^2 + 2 \cdot \frac{r}{2 \cdot L} \cdot p + \frac{\Psi_{do}^2}{L \cdot J_2} \right)}; \quad (4.28)$$

$$\omega(p) = \frac{U \cdot \Psi_{do}}{L \cdot J_2 \cdot \left(p^2 + 2 \cdot \frac{r}{2 \cdot L} \cdot p + \frac{\Psi_{do}^2}{L \cdot J_2} \right)}. \quad (4.29)$$

Введём следующие обозначения:

$$\delta = \frac{r}{2 \cdot L} \quad (4.30)$$

и

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\Psi_{do}^2}{L \cdot J_2}}. \quad (4.31)$$

Коэффициент δ называют коэффициентом затухания.

Выражения для операторного тока и частоты вращения ротора, с учётом принятых обозначений, будут иметь вид:

$$i_a(p) = \frac{U}{L} \cdot \frac{p}{(p^2 + 2 \cdot \delta \cdot p + \omega_o^2)}; \quad (4.32)$$

$$\omega(p) = \frac{U \cdot \Psi_{do}}{L \cdot J_2} \cdot \frac{1}{(p^2 + 2 \cdot \delta \cdot p + \omega_o^2)}. \quad (4.33)$$

Перейти от изображения к оригиналу можно, используя теорему разложения. Если изображение представляет собой отношение двух полиномов

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_o \cdot p^m + a_1 \cdot p^{m-1} + \dots + a_m}{\epsilon_o \cdot p^n + \epsilon_1 \cdot p^{n-1} + \dots + \epsilon_n}, \quad (4.34)$$

то оригинал функции

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) \cdot \exp(p_k \cdot t)}{p_k \cdot F_2'(p_k)}, \quad (4.35)$$

где p_k – корни полинома знаменателя ($F_2(p) = 0$);

$F_2'(p)$ – производная полинома знаменателя;

m, n – степень полинома числителя и знаменателя ($m < n$), соответственно.

Выражения для операторного тока якорной цепи и для операторной частоты вращения представляют отношения полиномов. В качестве примера рассмотрим переход от изображения к оригиналу только для тока якорной цепи.

Получим производную полинома знаменателя:

$$F_2'(p) = 2 \cdot p + 2 \cdot \delta. \quad (4.36)$$

Определим корни уравнения:

$$p^2 + 2 \cdot \delta \cdot p + \omega_o^2 = 0, \quad (4.37)$$

$$p_{1,2} = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}.$$

Выполним переход от изображения к оригиналу:

$$i_a(t) = \frac{U \cdot 0}{L \cdot \omega_o^2} + \frac{U}{L} \cdot \frac{p_1 \cdot \exp(p_1 \cdot t)}{p_1 \cdot 2 \cdot (p_1 + \delta)} + \frac{U}{L} \cdot \frac{p_2 \cdot \exp(p_2 \cdot t)}{p_2 \cdot 2 \cdot (p_2 + \delta)};$$

$$i_a(t) = \frac{U}{L} \cdot \left[\frac{\exp(p_1 \cdot t)}{2 \cdot (p_1 + \delta)} + \frac{\exp(p_2 \cdot t)}{2 \cdot (p_2 + \delta)} \right];$$

$$i_a(t) = \frac{U}{L \cdot \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}} \cdot \left[\frac{\exp\left(-\sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} \cdot t\right)}{-2} + \frac{\exp\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} \cdot t\right)}{2} \right] \cdot \exp(-\delta \cdot t);$$

$$i_a(t) = \frac{U}{L \cdot \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}} \cdot \left[\frac{\exp\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} \cdot t\right) - \exp\left(-\sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} \cdot t\right)}{2} \right] \cdot \exp(-\delta \cdot t);$$

$$i_a(t) = \frac{U}{L \cdot \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}} \cdot sh\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} \cdot t\right) \cdot \exp(-\delta \cdot t). \quad (4.38)$$

Если соотношение параметров таково, что под корнем квадратным выражение будет отрицательным, то в правой части равенства (4.38) можно выполнить преобразования.

Введём обозначение $\beta^2 = \omega_o^2 - \delta^2$. Учитывая, что $-j \cdot sh(j\beta) = \sin(\beta)$ получим

$$i_a(t) = \frac{U}{L \cdot \beta} \cdot \sin(\beta \cdot t) \cdot \exp(-\delta \cdot t). \quad (4.39)$$

Из полученного решения (4.38) и (4.39) следует, что в установившемся режиме ($t \Rightarrow \infty$) ток якоря равен нулю. Действительно, выполняя решение, мы приняли, что пуск производится без нагрузки на валу, а потерями холостого хода пренебрегаем. При таких условиях в установившемся режиме момент электромагнитный равен нулю и, следовательно, ток якоря равен нулю.

Для выполнения численных расчётов по формулам (4.38) и (4.39) необходимо знать значение потокосцепления Ψ_{do} . Оно может быть найдено из первого уравнения системы (4.23), если его записать для установившегося режима работы двигателя. При принятых допущениях в установившемся режиме работы ток якоря равен нулю ($i_a = 0$) и выполняется условие $\frac{di_a}{dt} = 0$. Следовательно, но,

$$\Psi_{do} = \frac{U}{\omega_{ycm}}, \quad (4.40)$$

где $\omega_{ycm} = 2 \cdot \pi \cdot p \cdot n_{ycm}$ – угловая частота в установившемся режиме работы.

4.4 Дифференциальные уравнения двухобмоточного трансформатора

Дифференциальные уравнения двухобмоточного трансформатора содержат уравнения напряжений обмоток и уравнения потокосцеплений

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= d\Psi_{11}/dt + r_1 \cdot i_1 \\ u_2 &= d\Psi_{22}/dt + r_2 \cdot i_2 \\ \Psi_{11} &= L_{11} \cdot i_1 + M_{12} \cdot i_2 \\ \Psi_{22} &= L_{22} \cdot i_2 + M_{21} \cdot i_1 \end{aligned} \right\}, \quad (4.41)$$

где L_{11} и L_{22} - полные индуктивности обмоток трансформатора;
 $M_{12} = M_{21}$ - индуктивности взаимной индукции.

$$L_{11} = L_{\sigma 1} + M_{12}; \quad (4.42)$$

$$L_{22} = L_{\sigma 2} + M_{21},$$

где $L_{\sigma 1}$ и $L_{\sigma 2}$ - индуктивности рассеяния обмоток трансформатора.

В общем случае система уравнений трансформатора нелинейная, так как индуктивности обмоток являются нелинейной функцией токов.

В идеальном трансформаторе коэффициенты индуктивности постоянные величины и система уравнений (4.41) линейная (что возможно при коротком замыкании трансформатора).

4.5 Расчёт токов короткого замыкания двухобмоточного трансформатора

Выполним решение задачи о внезапном коротком замыкании двухобмоточного трансформатора операторным методом. При коротком замыкании магнитная цепь трансформатора не насыщена, поэтому изменением индуктивности его обмоток можно пренебречь.

При коротком замыкании напряжение на вторичной обмотке равняется нулю ($u_2 = 0$). Решение задачи получим при условии, что сеть имеет бесконечную мощность, а напряжение сети изменяется по синусоидальному закону.

В системе уравнений (4.41), в уравнениях напряжений обмоток трансформатора, вместо потокосцеплений подставим их выражения и запишем систему уравнений напряжения трансформатора в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} u_1(p) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (r_1 + pX_{11}) & pX_{12} \\ pX_{12} & (r_2 + pX_{22}) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_1(p) \\ i_2(p) \end{vmatrix}. \quad (4.43)$$

В уравнениях напряжения вместо коэффициентов индуктивности записаны индуктивные сопротивления, следовательно, система уравнений записана в относительных единицах (параметры трансформатора, токи и напряжения выражены в относительных единицах).

Решение системы имеет вид

$$i_1(p) = \frac{u_1(p) \cdot (r_2 + pX_{22})}{(r_1 + pX_{11}) \cdot (r_2 + pX_{22}) - p^2 X_{12}^2} = \frac{u_1(p)}{Z_1(p)}, \quad (4.44)$$

$$i_2(p) = \frac{-u_1(p) \cdot pX_{12}}{(r_1 + pX_{11}) \cdot (r_2 + pX_{22}) - p^2 X_{12}^2} = -G_1(p) \cdot u_1(p), \quad (4.45)$$

где $Z_1(p)$ - полное операторное сопротивление первичной обмотки;

$G_1(p)$ - операторная проводимость вторичной обмотки.

$$Z_1(p) = r_1 + pX_{11} - \frac{p^2 X_{12}^2}{r_2 + pX_{22}} = r_1 + pX_{11}(p). \quad (4.46)$$

Здесь $X_{11}(p)$ - операторное индуктивное сопротивление первичной обмотки.

$$X_{11}(p) = X_{11} - \frac{pX_{12}^2}{r_2 + pX_{22}}. \quad (4.47)$$

При $p \rightarrow \infty$, что соответствует начальному моменту переходного процесса, а также при $r_2 = 0$ операторное сопротивление принимает вид

$$X_{11}(p) = X_{11} - \frac{X_{12}^2}{X_{22}} = X'_{11} = X_{\sigma 1} + \left[\frac{1}{X_{12}} + \frac{1}{X_{\sigma 2}} \right]^{-1} \quad (4.48)$$

и называется переходным сопротивлением трансформатора. На основании этого сопротивление $X_{11}(p)$ называют операторным переходным сопротивлением трансформатора.

Операторная проводимость

$$G_1(p) = \frac{pX_{12}}{(r_1 + pX_{11})(r_2 + pX_{22}) - p^2 X_{12}^2},$$

$$G_1(p) = \frac{pX_{12}/(r_2 + pX_{22})}{r_1 + pX_{11} - p^2 X_{12}^2/(r_2 + pX_{22})} =$$

$$= \frac{pX_{12}}{(r_2 + pX_{22})(r_1 + pX_{11}(p))}. \quad (4.49)$$

Пусть приложенное напряжение изменяется по закону $u_1(t) = U_{1m} \cdot \sin(t + \psi)$ (записано в относительных единицах).

Изображение функции напряжения

$$u_1(p) = U_{1m} \frac{p \cdot \cos(\psi) + p^2 \cdot \sin(\psi)}{p^2 + 1}. \quad (4.50)$$

Выражения для изображения токов

$$i_1(p) = U_{1m} \frac{p \cdot \cos(\psi) + p^2 \cdot \sin(\psi)}{(p^2 + 1)(r_1 + p \cdot X_{11}(p))}. \quad (4.51)$$

$$i_2(p) = -U_{1m} \frac{(p \cdot \cos(\psi) + p^2 \cdot \sin(\psi)) \cdot p \cdot X_{12}}{(p^2 + 1)(r_1 + p \cdot X_{11}(p))(r_2 + pX_{22})}. \quad (4.52)$$

Для нахождения решения необходимо перейти от изображения к оригиналу. Поскольку решения идентичны, определим его только для тока первичной обмотки трансформатора.

Принимаем активные сопротивления обмоток трансформатора равными нулю ($r_1 = r_2 = 0$), т.е. пренебрегаем потерями мощности в обмотках, а, следовательно, и процессом затухания токов при коротком замыкании. Полученное решение будет справедливо только для первых периодов тока.

С учётом принятого допущения изображение тока короткого замыкания первичной обмотки примет вид

$$i_1(p) = U_{1m} \frac{p \cdot \cos(\psi) + p^2 \cdot \sin(\psi)}{p \cdot (p^2 + 1) \cdot X'_{11}} = \frac{U_{1m}}{X'_{11}} \frac{\cos(\psi) + p \cdot \sin(\psi)}{(p^2 + 1)}. \quad (4.53)$$

Так как операторное выражение тока представляет отношение полиномов $i_1(p) = F_1(p)/F_2(p)$ и порядок полинома в числителе ниже порядка полинома в знаменателе, то переход от изображения тока к его оригиналу можно выполнить по следующей формуле:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \Rightarrow \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4.54)$$

Определяем корни полинома в знаменателе дроби

$$F_2(p) = p^2 + 1 = 0. \quad (4.55)$$

$$p_{1,2} = \pm j. \quad (4.56)$$

Производная полинома знаменателя

$$F_2'(p) = 2 \cdot p. \quad (4.57)$$

Решение для тока первичной обмотки трансформатора получим в результате следующих преобразований:

$$i_1(t) = \frac{U_{1m}}{X'_{11}} \left\{ \cos(\psi) + \frac{\cos(\psi) + j \cdot \sin(\psi)}{j \cdot 2j} e^{jt} + \frac{\cos(\psi) - j \cdot \sin(\psi)}{j \cdot 2j} e^{-jt} \right\};$$

$$i_1(t) = \frac{U_{1m}}{X'_{11}} \left\{ \cos(\psi) - \cos(\psi) \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} + \sin(\psi) \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right\};$$

$$i_1(t) = \frac{U_{1m}}{X'_{11}} \{ \cos(\psi) - \cos(\psi) \cdot \cos(t) + \sin(t) \cdot \sin(t) \};$$

$$i_1(t) = \frac{U_{1m}}{X'_{11}} \{ \cos(\psi) - \cos(t + \psi) \}. \quad (4.58)$$

Изменение тока в первичной обмотке трансформатора при коротком замыкании представлено на рисунке 4.4.

Из полученного решения следует, что кривая тока короткого замыкания трансформатора может быть представлена в виде суммы двух составляющих: периодической и аperiodической. Аperiodическая составляющая тока короткого замыкания по величине зависит от момента короткого замыкания, который определяется углом ψ . При $\psi = 0$ начальное напряжение равняется нулю, а по-

токосцепление обмоток трансформатора – максимальное. Постоянное потокосцепление (свойство сверхпроводящих контуров) могут поддерживаться неизменными только постоянными токами.

Амплитуда тока короткого замыкания в первичной обмотке трансформатора составит

$$i_{1\max} = 2 \cdot \frac{U_{1m}}{X'_{11}}. \quad (4.59)$$

Решение задачи с учётом конечного значения активных сопротивлений обмоток трансформатора можно получить по изложенной методике, но решение получается громоздким. Оно значительно упрощается, если пренебречь током холостого хода трансформатора.

В этом случае выполняется условие

$$i_1(p) = -i_2(p). \quad (4.60)$$

Суммируя уравнения напряжений, получим

$$u_1(p) = [r_1 + p \cdot X_{11}(p)] \cdot i_1(p) + [r_2 + p \cdot X_{22}(p)] \cdot i_1(p) - 2 \cdot p \cdot X_{12} \cdot i_1(p). \quad (4.61)$$

Для операторного тока первичной обмотки будем иметь

$$i_1(p) = \frac{u_1(p)}{(r_1 + r_2) + p(X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2})}.$$

$$i_1(p) = \frac{u_1(p)}{r_k + p \cdot X_k}. \quad (4.62)$$

С учётом операторного изображения напряжения

$$i_1(p) = U_{1m} \frac{p \cdot \cos(\psi) + p^2 \cdot \sin(\psi)}{(p^2 + 1)(r_k + p \cdot X_k)}. \quad (4.63)$$

Решая характеристическое уравнение

$$(p^2 + 1)(r_k + p \cdot X_k) = 0 \quad (4.64)$$

получаем его корни

$$p_{1,2} = \pm j, \quad p_3 = -\frac{r_k}{X_k} = -\frac{1}{T_k}. \quad (4.65)$$

Определяем производную полинома знаменателя изображения тока короткого замыкания

$$F'_2(p) = 2p \cdot (r_k + p \cdot X_k) + X_k \cdot (p^2 + 1) = 3p^2 \cdot X_k + 2p \cdot r_k + X_k. \quad (4.66)$$

Находим оригинал функции $i_1(p)$

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{U_{1m} \cdot (p_k \cdot \cos(\psi) + p_k^2 \cdot \sin(\psi))}{p_k (3 \cdot p_k^2 \cdot X_k + 2 \cdot p_k \cdot r_k + X_k)} e^{p_k t},$$

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{U_{1m} \cdot (\cos(\psi) + p_k \cdot \sin(\psi))}{3 \cdot p_k^2 \cdot X_k + 2 \cdot p_k \cdot r_k + X_k} e^{p_k t}. \quad (4.67)$$

Подставим в полученное решение корни характеристического уравнения

$$i_1(t) = \left\{ \frac{\cos(\psi) + j \sin(\psi)}{-3 \cdot X_k + 2jr_k + X_k} e^{jt} + \frac{\cos(\psi) - j \sin(\psi)}{-3 \cdot X_k - 2jr_k + X_k} e^{-jt} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[\cos(\psi) - \frac{1}{T_k} \cdot \sin(\psi) \right]}{\left[\frac{3}{T_k^2} X_k - \frac{2}{T_k} \cdot r_k + X_k \right]} e^{\left(-\frac{t}{T_k} \right)} \right\}. \quad (4.68)$$

В знаменателе первого и второго слагаемых приводим подобные члены, а в знаменателе третьего слагаемого постоянную времени T_k заменяем её выражением

$$i_1(t) = U_{1m} \cdot \left\{ \frac{\cos(\psi) + j \sin(\psi)}{-2(X_k - jr_k)} e^{jt} + \frac{\cos(\psi) - j \sin(\psi)}{-2(X_k + jr_k)} e^{-jt} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[\cos(\psi) - \frac{r_k}{X_k} \sin(\psi) \right]}{3 \frac{r_k^2}{X_k} - 2 \frac{r_k^2}{X_k} + X_k} e^{-t/T_k} \right\}. \quad (4.69)$$

Числитель и знаменатель первого и второго слагаемых умножаем на выражения, комплексно сопряжённые выражениям их знаменателей. В знаменателе третьего слагаемого решения (4.69) выполняем преобразования:

$$3 \frac{r_k^2}{X_k} - 2 \frac{r_k^2}{X_k} + X_k = \frac{r_k^2}{X_k} + X_k = \frac{r_k^2 + X_k^2}{X_k}. \quad (4.70)$$

Учитывая, что $(X_k - jr_k) \cdot (X_k + jr_k) = X_k^2 + r_k^2 = Z_k^2$, получим

$$\begin{aligned} i_1(t) = U_{1m} & \left\{ \frac{(-1)}{2 \cdot Z_k^2} [(\cos(\psi) + j \sin(\psi))(X_k + jr_k)e^{jt} + \right. \\ & \left. + (\cos(\psi) - j \sin(\psi))(X_k - jr_k)e^{-jt}] + \right. \\ & \left. + \frac{X_k}{r_k^2 + X_k^2} \cdot \left(\cos(\psi) - \frac{r_k}{X_k} \sin(\psi) \right) e^{-t/T_k} \right\}. \quad (4.71) \end{aligned}$$

В полученном выражении в квадратных скобках объединим слагаемые с общим множителем X_k и jr_k соответственно. В третьем слагаемом вынесем за круглые скобки коэффициент $\frac{r_k}{X_k}$:

$$\begin{aligned} i_1(t) = U_{1m} & \left\{ \frac{(-1)}{2 \cdot Z_k^2} [X_k (\cos(\psi) \cdot e^{jt} + \cos(\psi) \cdot e^{-jt} + j \sin(\psi) \cdot e^{jt} - \right. \\ & \left. - j \sin(\psi) \cdot e^{-jt}) + \right. \\ & \left. + jr_k \cdot (\cos(\psi) \cdot e^{jt} - \cos(\psi) \cdot e^{-jt} + j \sin(\psi) \cdot e^{jt} + j \sin(\psi) \cdot e^{-jt}) \right] + \\ & \left. + \frac{r_k}{Z_k^2} \left(\frac{X_k}{r_k} \cos(\psi) - \sin(\psi) \right) \cdot e^{-t/T_k} \right\}. \quad (4.72) \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = ch(jt) = \cos(t), \quad (4.73)$$

$$j \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2} = jsh(jt) = -\sin(t), \quad (4.74)$$

получим

$$\begin{aligned} i_1(t) = U_{1m} & \left\{ \frac{(-1)}{Z_k^2} [X_k (\cos(\psi) \cdot \cos(t) - \sin(\psi) \cdot \sin(t)) + \right. \\ & + r_k \cdot (-\cos(\psi) \sin(t) - \sin(\psi) \cos(t))] + \\ & \left. + \frac{r_k}{Z_k^2} \cdot \left(\frac{X_k}{r_k} \cos(\psi) - \sin(\psi) \right) \cdot e^{-t/T_k} \right\} \end{aligned} \quad (4.75)$$

или

$$\begin{aligned} i_1(t) = U_{1m} & \left\{ \frac{(-1)}{Z_k^2} [X_k \cdot \cos(\psi + t) - r_k \cdot \sin(\psi + t)] - \right. \\ & \left. - \frac{r_k}{Z_k^2} \cdot \left[\sin(\psi) - \frac{X_k}{r_k} \cos(\psi) \right] \cdot e^{-t/T_k} \right\}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Коэффициент r_k перед функцией $\sin(\psi + t)$ вынесем за квадратные скобки:

$$\begin{aligned} i_1(t) = U_{1m} & \cdot \left\{ \frac{(-r_k)}{Z_k^2} \left[\frac{X_k}{r_k} \cdot \cos(\psi + t) - \sin(\psi + t) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{r_k}{Z_k^2} \cdot \left[\sin(\psi) - \frac{X_k}{r_k} \cos(\psi) \right] \cdot e^{-t/T_k} \right\}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Учитывая, что $\frac{r_k}{Z_k} = \cos(\varphi_k)$ и $\frac{X_k}{Z_k} = \operatorname{tg}(\varphi_k) = \sin(\varphi_k)/\cos(\varphi_k)$ получим,

$$\begin{aligned} i_1(t) = \frac{U_{1m}}{Z_k} & \left[-\cos(\varphi_k) \cdot \frac{\sin(\varphi_k)}{\cos(\varphi_k)} \cdot \cos(\psi + t) + \cos(\varphi_k) \cdot \sin(\psi + t) \right] - \\ & - \frac{U_{1m}}{Z_k} [\cos(\varphi_k) \cdot \sin(\psi) - \sin(\varphi_k) \cdot \cos(\psi)] \cdot e^{-t/T_k}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Выполнив преобразования тригонометрических функций в квадратных скобках, окончательно будем иметь

$$i_1(t) = \frac{U_{1m}}{Z_k} \cdot \left[\sin(t + \psi - \varphi_k) - \sin(\psi - \varphi_k) \cdot e^{-t/T_k} \right]. \quad (4.79)$$

Так как $\varphi_k \approx \pi/2$ (индуктивное сопротивление рассеяния больше активного сопротивления обмотки), то

$$i_1(t) = \frac{U_{1m}}{\sqrt{r_k^2 + X_k^2}} \left[\cos(\psi) \cdot e^{-t/T_k} - \cos(t + \psi) \right]. \quad (4.80)$$

Различие в полученных результатах объясняется затуханием тока, что вызвано конечным значением активных сопротивлений обмоток трансформатора ($r \neq 0$) и допущением о бесконечно малом значении тока холостого хода по сравнению с током короткого замыкания.

Графически полученные решения (4.58) и (4.80) могут быть представлены следующим образом:

1 – й случай, активные сопротивления обмоток равны нулю.

$$i_1(t) = \frac{U_{1m}}{X'_{11}} \cdot [\cos(\psi) - \cos(t + \psi)].$$

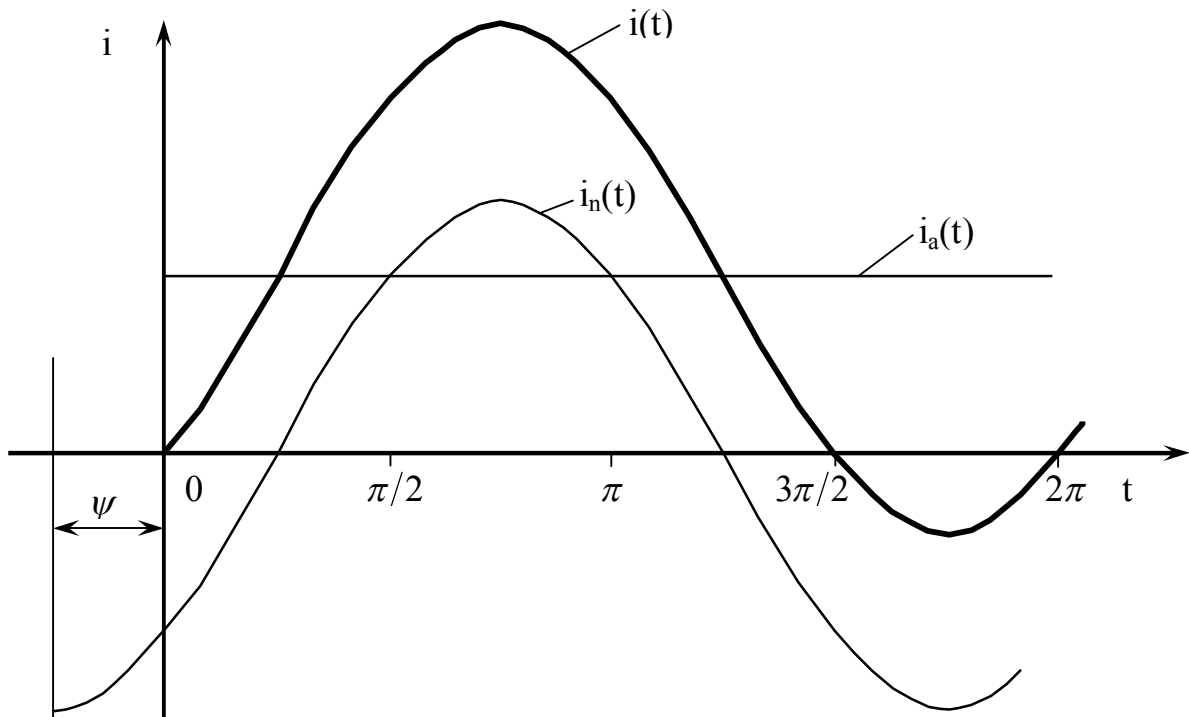


Рисунок 4.4 – Изменение тока короткого замыкания в первичной обмотке трансформатора при $r = 0$

2 – й случай, ток холостого хода равен нулю. Изменение тока в первичной обмотке трансформатора при коротком замыкании представлено на рисунке 4.5.

$$i_1(t) = \frac{U_{1m}}{Z_k} \left[\cos(\psi) \cdot e^{-t/T_k} - \cos(t + \psi) \right].$$

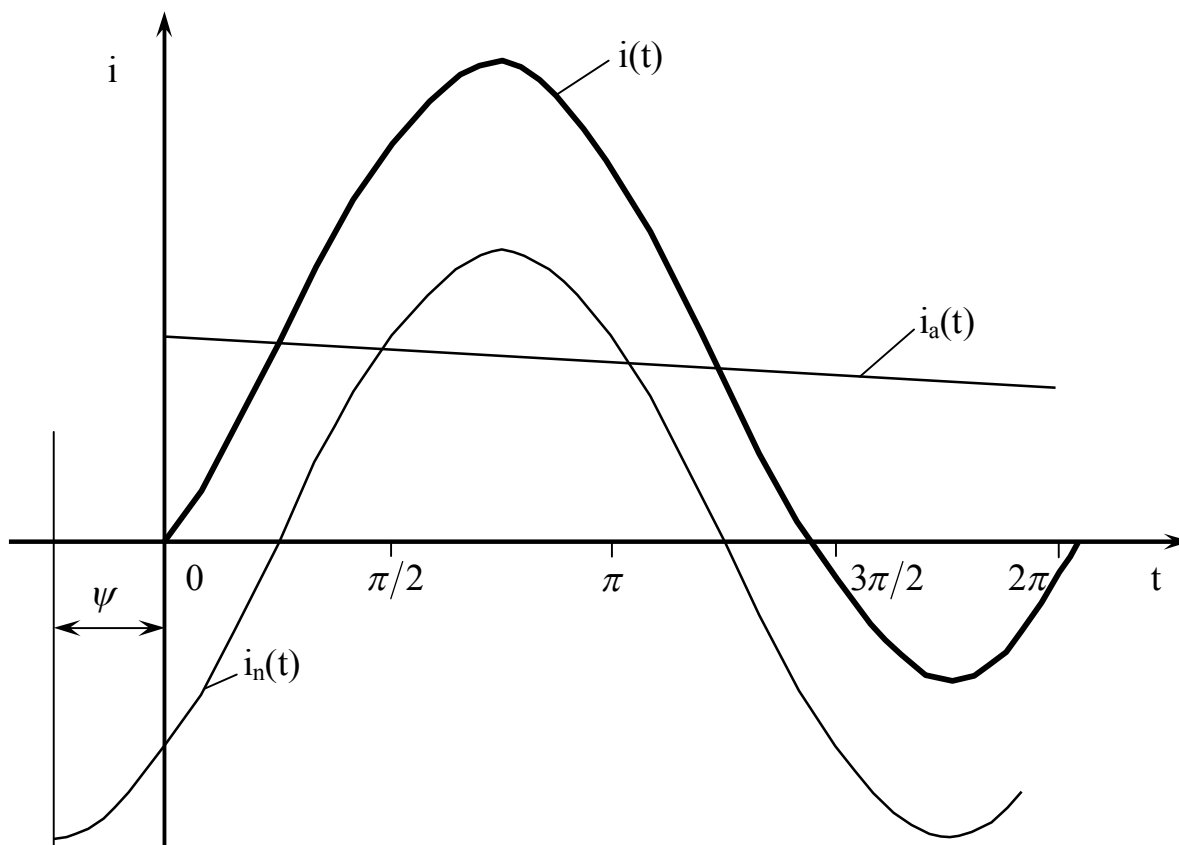


Рисунок 4.5 – Изменение тока короткого замыкания в первичной обмотке трансформатора при $r \neq 0$

Покажем, что сопротивление короткого замыкания $Z_k = \sqrt{r_k^2 + X_k^2}$ стремится к значению переходного сопротивления (X'_{11}), если $r_1 = r_2 = 0$, а сопротивление взаимной индукции стремится к бесконечности ($X_{12} \Rightarrow \infty$).

$$X'_{11} = X_{11} - \frac{X_{12}^2}{X_{22}} = X_{\sigma 1} + X_{12} - \frac{X_{12}^2}{X_{22}} = X_{\sigma 1} + \frac{X_{12} \cdot X_{\sigma 2}}{X_{22}}.$$

$$X'_{11} = X_{\sigma 1} + \left[\frac{1}{X_{12}} + \frac{1}{X_{\sigma 2}} \right]^{-1} \cong X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2} = X_k \text{ если } X_{12} \Rightarrow \infty.$$

В трансформаторах большой мощности апериодическая составляющая тока короткого замыкания затухает почти до нуля за пять – шесть периодов тока и по обмоткам протекает периодический (установившийся) ток короткого замыкания, который в десять – пятнадцать раз больше номинального. В трансформаторах малой мощности переходной процесс затухает за один – два периода напряжения.

4.6 Расчёт тока включения трансформатора графоаналитическим методом

Если система дифференциальных уравнений является нелинейной, что может быть вызвано, например, необходимостью учёта насыщения магнитной цепи, то в некоторых случаях решение может быть получено графоаналитическим методом.

Переходной процесс при включении в сеть ненагруженного трансформатора, т.е. при разомкнутой вторичной обмотке, описывается дифференциальным уравнением

$$u_1 = \frac{d\psi_{11}}{dt} + r_1 \cdot i_1, \quad (4.81)$$

где $u_1 = U_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$;

ψ - фазный угол, определяющий напряжение сети в момент включения трансформатора;

$\psi_{11} = L_{11} \cdot i_1$ - собственное потокосцепление обмотки;

L_{11} - индуктивность первичной обмотки трансформатора;

r_1 - активное сопротивление первичной обмотки трансформатора.

Индуктивность первичной обмотки трансформатора является нелинейной функцией тока включения трансформатора. Поэтому, дифференциальное уравнение является нелинейным и решения в общем виде не имеет.

Ток включения трансформатора можно было бы определить графически по характеристике холостого хода трансформатора и известному закону изменения магнитного потока во времени при включении трансформатора.

Выразим потокосцепление первичной обмотки трансформатора через магнитный поток и витки обмотки

$$\psi_{11} = \Phi_{11} \cdot w_1 = L_{11} \cdot i_1 \rightarrow i_1 = \frac{\psi_{11}}{L_{11}} = \frac{w_1}{L_{11}} \Phi_{11}.$$

Дифференциальное уравнение первичной обмотки трансформатора примет вид

$$u_1 = w_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} + \frac{r_1}{L_{11}} \cdot w_1 \cdot \Phi_{11}. \quad (4.82)$$

При решении задачи об определении тока включения трансформатора, как правило, интересуются амплитудным значением, а не формой кривой тока. Знание амплитудного значения тока при включении трансформатора необходимо, например, при отладке релейной защиты. Такое решение задачи может быть получено при постоянной индуктивности первичной обмотки L_{11} , равной своему насыщенному значению L_{11H} , которое можно определить из условия

$$\frac{L_{11H}}{L_{11}} = \frac{\Psi_{11\max} \cdot i_{10}}{i_{1\max} \cdot \Psi_{110}}. \quad (4.83)$$

Принимая отношение $\frac{L_{11H}}{r_1} = T_1$ величиной постоянной, получаем неоднородное линейное дифференциальное уравнение со специальной правой частью

$$\frac{d\Phi_{11}}{dt} + \frac{1}{T_1} \cdot \Phi = \frac{U_{1m}}{w_1} \cdot \sin(\omega t + \psi). \quad (4.84)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения $P_n(D)y = F(x)$ со специальной правой частью может быть получено простыми алгебраическими приёмами (D - оператор дифференцирования). Если $F(x) = A \cdot e^{kx}$ и $P_n(k) \neq 0$, то частным решением является $y = \frac{A \cdot e^{kx}}{P_n(k)}$. Если

$F(x) = A \cdot e^{kx} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ или $F(x) = A \cdot e^{kx} \cdot \cos(\omega \cdot t)$, то частное решение может быть получено при помощи теоремы разложения.

Теорема. Если уравнение (L) имеет действительные коэффициенты и $\dot{F} = F_1 + jF_2$, где F_1 и F_2 также действительны, то решение его будет комплексным $\dot{y} = y_1 + jy_2$, причём y_1 и y_2 будут частными решениями (L) с правой частью F_1 и F_2 соответственно.

Следовательно, частное решение исходного дифференциального уравнения с правой частью $\frac{U_{1m}}{w_1} \cdot \sin(\omega t + \psi)$ может быть получено как мнимая часть уравнения с правой частью

$$\frac{U_{1m}}{w_1} [\cos(\omega \cdot t + \psi) + j \sin(\omega \cdot t + \psi)] = \frac{U_{1m}}{w_1} \cdot \exp(j(\omega \cdot t + \psi)) =$$

$$= \frac{U_{1m}}{w_1} \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega \cdot t},$$

причём $k = j\omega$.

Частное решение исходного уравнения

$$\dot{\Phi}_n = \frac{(U_{1m}/w_1) \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega \cdot t}}{P_n(j\omega)}, \quad (4.85)$$

где $P_n(j\omega) = p + \frac{1}{T_1} \Rightarrow j\omega + \frac{1}{T_1}$.

$$P_n(j\omega) = \frac{jX_{11} + r_1}{L_{11}}. \quad (4.86)$$

$$\dot{\Phi}_n = \frac{U_{1m} \cdot L_{11}}{w_1} \cdot \frac{\exp[j(\omega \cdot t + \psi)]}{jX_{11} + r_1} = \frac{U_{1m} \cdot L_{11}}{w_1} \cdot \frac{r_1 - jX_{11}}{X_{11}^2 + r_1^2} \cdot \exp[j(\omega \cdot t + \psi)].$$

$$\dot{\Phi}_n = \frac{U_{1m}}{w_1 \cdot \omega} \cdot \frac{X_{11}}{\sqrt{X_{11}^2 + r_1^2}} \cdot \left(\frac{r_1}{\sqrt{X_{11}^2 + r_1^2}} - \frac{jX_{11}}{\sqrt{X_{11}^2 + r_1^2}} \right) \cdot [\cos(\omega \cdot t + \psi) + j \sin(\omega \cdot t + \psi)]. \quad (4.87)$$

Учитывая, что $\frac{X_{11}}{Z_1} = \sin(\varphi_0)$, а $\frac{r_1}{Z_1} = \cos(\varphi_0)$, получим

$$\dot{\Phi}_n = \frac{U_{1m}}{w_1 \omega} \cdot \sin(\varphi_0) \cdot [\cos(\varphi_0) - j \sin(\varphi_0)] \cdot [\cos(\omega \cdot t + \psi) + j \sin(\omega \cdot t + \psi)]. \quad (4.88)$$

Решение найдём как мнимую часть от выражения $\dot{\Phi}_n$

$$\Phi_n = \text{Im}(\dot{\Phi}_n),$$

$$\Phi_n = \frac{U_{1m}}{w_1 \cdot \omega} \cdot [\sin(\omega \cdot t + \psi) \cdot \cos(\varphi_0) - \cos(\omega \cdot t + \psi) \cdot \sin(\varphi_0)],$$

$$\Phi_n = \frac{U_{1m}}{w_1 \cdot \omega} \cdot \sin(\varphi_0) \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi - \varphi_0). \quad (4.89)$$

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{T_1}\Phi = 0 \quad (4.90)$$

имеет вид

$$\Phi_a = A \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right). \quad (4.91)$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$\Phi = A \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) + \frac{U_{1m}}{w_1 \cdot \omega} \cdot \sin(\varphi_0) \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi - \varphi_0). \quad (4.92)$$

Постоянную интегрирования A определим из начальных условий. В момент времени $t = 0$ магнитный поток в стержне трансформатора равнялся остаточному магнитному потоку ($\Phi = \Phi_{ocm}$).

$$\Phi_{ocm} = A + \frac{U_{1m}}{w_1 \cdot \omega} \sin(\varphi_0) \cdot \sin(\psi - \varphi_0).$$

$$A = \Phi_{ocm} - \frac{U_{1m}}{w_1 \cdot \omega} \sin(\varphi_0) \cdot \sin(\psi - \varphi_0). \quad (4.93)$$

Если учесть, что

$$U_{1m} \cdot \sin(\varphi_0) = \frac{U_{1m}}{Z_1} \cdot X_{11} = E_1 \Rightarrow \frac{E_1}{\omega} = \psi_1 = \Phi \cdot w_1 \Rightarrow \frac{\psi_1}{w_1} = \Phi,$$

то окончательно получим

$$\Phi = \Phi_{ocm} \cdot \exp(-t/T_1) + \Phi_m \cdot [\sin(\omega \cdot t + \psi - \varphi_0) - \sin(\psi - \varphi_0) \cdot \exp(-t/T_1)]. \quad (4.94)$$

Полученный результат представлен графически на рисунке 4.6 для случая, когда $\psi - \varphi_0 = -\pi/2$:

$$\Phi = \Phi_{ост} \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) - \Phi_m \cdot \left[\cos(\omega \cdot t) - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]. \quad (4.95)$$

Зная закон изменения магнитного потока во времени при включении трансформатора в сеть и имея кривую намагничивания $\Phi(t)$, причём $\Phi(0) = \Phi_{ост}$, можем графически определить ток включения трансформатора.

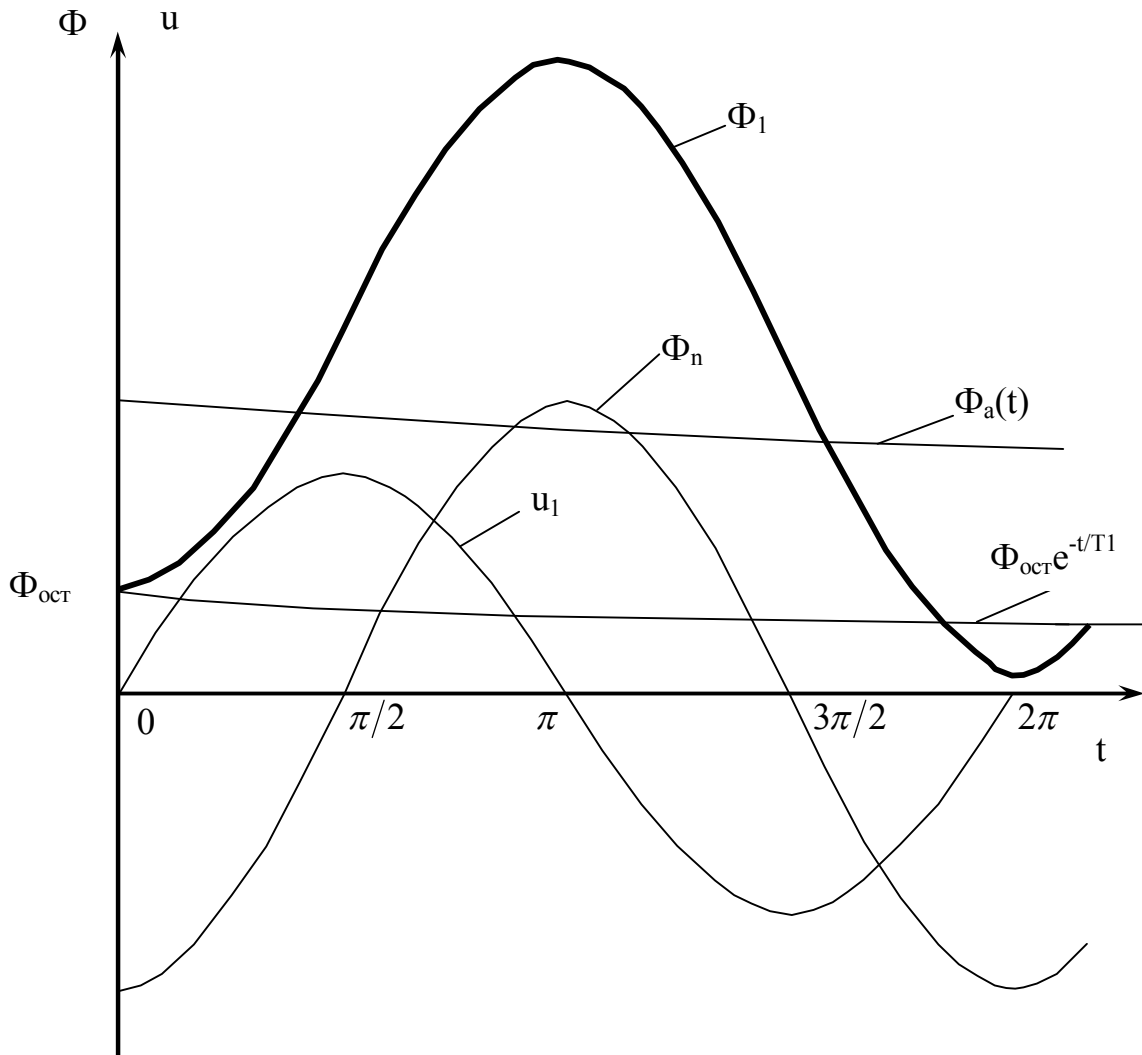


Рисунок 4.6 – Изменение напряжения и магнитного потока трансформатора во времени

Необходимые построения представлены на рисунке 4.7.

Из выполненных построений видно, что амплитуда тока включения во много раз превосходит величину тока холостого хода в установившемся режиме.

Известно, что при индукциях в магнитопроводе трансформатора порядка 1,4 Тл, отношение амплитуды тока включения к установившемуся току холостого хода составляет 50 – 80, а при больших индукциях доходит до 100 – 120.

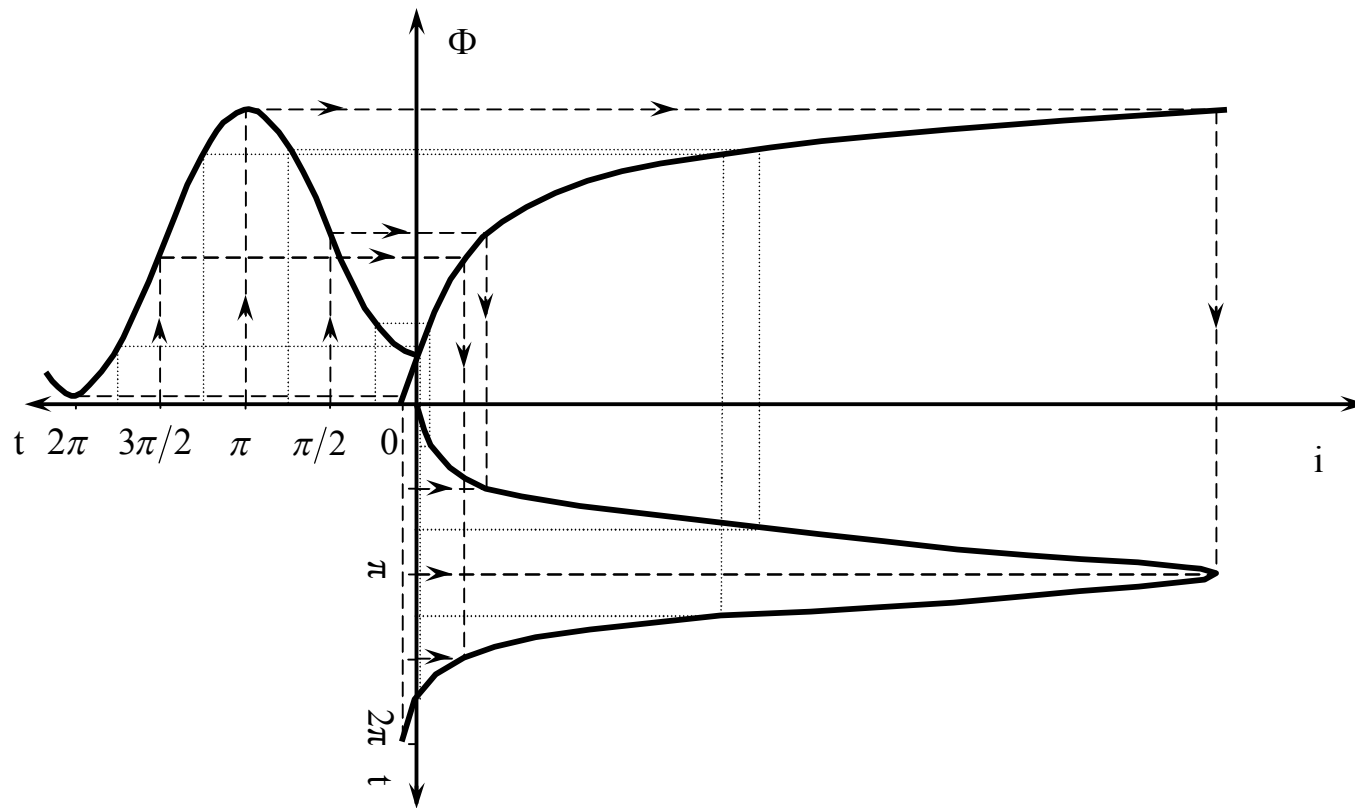


Рисунок 4.7 – Определение тока включения трансформатора

Ток холостого хода трансформатора составляет 5 – 7% от номинального тока, следовательно, амплитуда тока включения может в 7 – 10 раз превосходить номинальный ток трансформатора.

Наиболее благоприятные условия включения имеют место в момент, когда напряжение сети достигает максимума. В этом случае в первичной обмотке трансформатора сразу возникнет установившийся ток холостого хода, а апериодические токи, в кривой тока включения трансформатора, отсутствуют.

5 Математические модели и исследование электрических машин с взаимно перемещающимися осями обмоток и полюсов

5.1 Уравнения синхронной машины в системе координат a, b, c статора и d, q ротора

Наиболее общей среди электрических машин с взаимно перемещающимися осями обмоток и полюсов является синхронная явнополюсная машина. Такая машина имеет на статоре симметричную трёхфазную обмотку. На роторе имеются обмотка возбуждения и короткозамкнутая обмотка. В синхронных генераторах эту обмотку принято называть демпферной (успокоительной) обмоткой, а в синхронных двигателях короткозамкнутую обмотку ротора называют пусковой, так как она используется для асинхронного пуска синхронного двигателя.

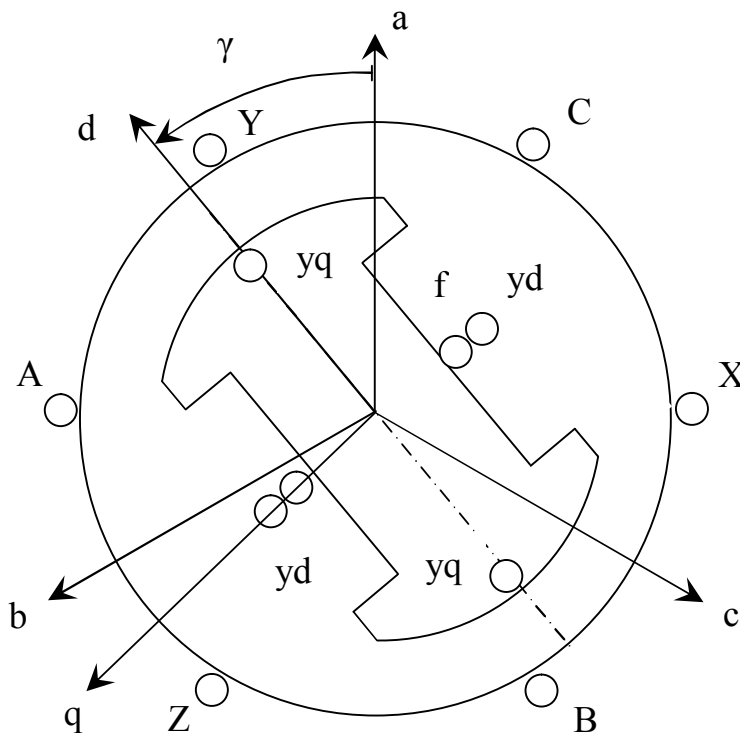


Рисунок 5.1

Система координатных осей реальных обмоток синхронной машины показана на рисунке 5.1. Обмотка статора представлена тремя сосредоточенными катушками: А-Х, В-У и С-З. Обмотка возбуждения представлена одной сосредоточенной катушкой: f . Успокоительная обмотка представлена двумя эквивалентными сосредоточенными катушками по оси d ротора (катушка yd) и по оси q ротора (катушка yq).

Задавшись направлением осей (рисунок 5.1), составляем уравнения равновесия напряжений:

$$\begin{aligned}
 u_a &= \frac{d\Psi_a}{dt} + r_a \cdot i_a \\
 u_b &= \frac{d\Psi_b}{dt} + r_b \cdot i_b \\
 u_c &= \frac{d\Psi_c}{dt} + r_c \cdot i_c \\
 u_f &= \frac{d\Psi_f}{dt} + r_f \cdot i_f \\
 0 &= \frac{d\Psi_{yd}}{dt} + r_{yd} \cdot i_{yd} \\
 0 &= \frac{d\Psi_{yq}}{dt} + r_{yq} \cdot i_{yq}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Уравнения напряжений дополняем уравнениями потокосцеплений

$$\begin{aligned}
 \Psi_a &= l_a \cdot i_a + m_{ab} \cdot i_b + m_{ac} \cdot i_c + m_{af} \cdot i_f + m_{ayd} \cdot i_{yd} + m_{ayq} \cdot i_{yq} \\
 \Psi_b &= m_{ab} \cdot i_a + l_b \cdot i_b + m_{bc} \cdot i_c + m_{bf} \cdot i_f + m_{byd} \cdot i_{yd} + m_{byq} \cdot i_{yq} \\
 \Psi_c &= m_{ac} \cdot i_a + m_{bc} \cdot i_b + l_c \cdot i_c + m_{cf} \cdot i_f + m_{cyd} \cdot i_{yd} + m_{cyq} \cdot i_{yq} \\
 \Psi_f &= m_{af} \cdot i_a + m_{bf} \cdot i_b + m_{cf} \cdot i_c + l_f \cdot i_f + M_{fyd} \cdot i_{yd} + M_{fyq} \cdot i_{yq} \\
 \Psi_{yd} &= m_{ayd} \cdot i_a + m_{byd} \cdot i_b + m_{cyd} \cdot i_c + M_{fyd} \cdot i_f + L_{yd} \cdot i_{yd} + M_{ydyq} \cdot i_{yq} \\
 \Psi_{yq} &= m_{ayq} \cdot i_a + m_{byq} \cdot i_b + m_{cyq} \cdot i_c + M_{fyq} \cdot i_f + M_{ydyq} \cdot i_{yd} + L_{yq} \cdot i_{yq}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

и уравнением движения

$$M_{эм} = M_c + J \cdot \frac{d\Omega}{dt}. \tag{5.3}$$

Если считать, что магнитная цепь машины не насыщена, то $M_{fyq} = 0$ и $M_{ydyq} = 0$.

Малыми буквами l и m обозначены параметры, зависящие от углового положения ротора. Большими буквами M и L обозначены параметры, не зависящие от углового положения ротора.

5.2 Анализ коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции обмоток статора и ротора

5.2.1 Анализ коэффициентов самоиндукции фаз обмотки статора

Индуктивности обмоток фаз статора изменяются по периодическому закону при изменении угла γ , т.е. угла между осью фазы a статора и продольной осью ротора d .

Рассмотрим, как изменяется индуктивность фазы a (рисунок 5.2). При значении угла $\gamma = 0$ магнитное сопротивление пути потока Φ_a будет минимальным. При повороте ротора магнитное сопротивление пути потока Φ_a будет возрастать и при $\gamma = \pi/2$ достигнет своего наибольшего значения, так как на пути магнитного потока фазы a будет расположен большой воздушный зазор межполюсного пространства.

При дальнейшем повороте ротора магнитное сопротивление пути потока вновь начнёт снижаться и достигнет своего наименьшего значения при $\gamma = \pi$.

Предположим, что по фазе a в обоих случаях протекает один и тот же ток $i_a = const$. Магнитный поток, создаваемый фазой a , при $\gamma = 0$ будет больше, чем при $\gamma = \pi/2$. В момент времени, соответствующий $\gamma = \pi$, магнитный поток фазы a статора вновь будет максимальным.

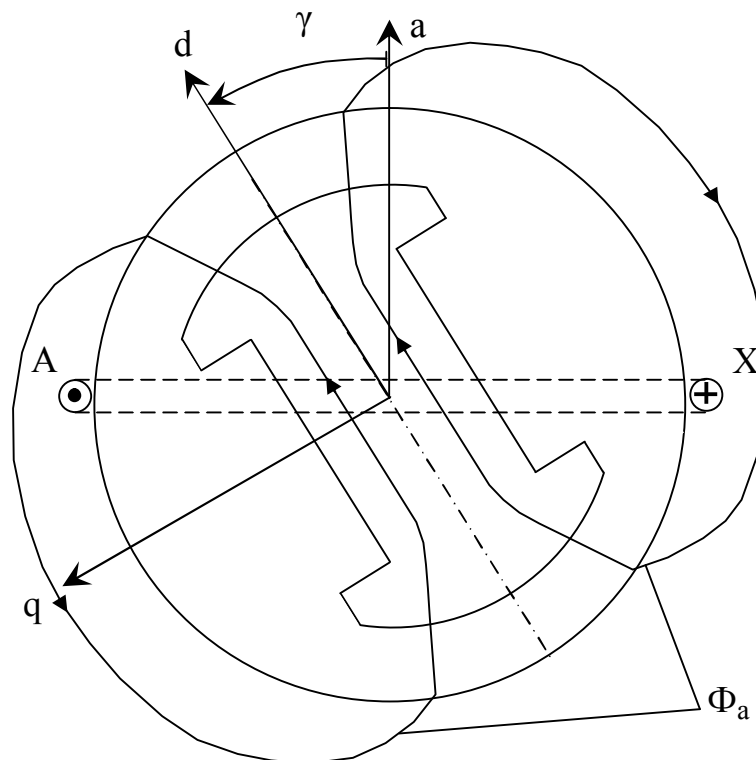


Рисунок 5.2

Таким образом, в моменты времени, когда оси фаз совпадают с продольной осью ротора, магнитные потоки фаз обмотки статора максимальные. Соответственно максимальными будут и потокосцепления фаз. Следовательно, индуктивности самоиндукции обмоток фаз статора l_a , l_b и l_c будут в эти моменты времени максимальными (l_{\max}).

Если оси фаз совпадают с поперечной осью ротора, то магнитные потоки фаз статора, потокосцепления и индуктивности самоиндукции будут минимальными (l_{\min}).

Получается, что коэффициент индуктивности самоиндукции фаз статора является периодической функцией и его можно разложить в ряд Фурье:

$$l_a = l_0 + l_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma) + l_4 \cdot \cos(4 \cdot \gamma) + \dots \quad (5.4)$$

На практике высшими гармониками пренебрегают и учитывают только одну переменную составляющую и l_0 :

$$l_a = l_0 + l_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma), \quad (5.5)$$

для фаз b и c , соответственно, будем иметь

$$l_b = l_0 + l_2 \cdot \cos[2 \cdot (\gamma - 120^\circ)], \quad (5.6)$$

$$l_c = l_0 + l_2 \cdot \cos[2 \cdot (\gamma + 120^\circ)], \quad (5.7)$$

где $l_0 = 0,5 \cdot (L_{\max} + L_{\min})$;

$l_2 = 0,5 \cdot (L_{\max} - L_{\min})$.

Если ввести обозначения $L_{\max} = L_d$ и $L_{\min} = L_q$, то выражения l_0 и l_2 можно преобразовать:

$$l_0 = (L_d + L_q) / 2, \quad (5.8)$$

$$l_2 = (L_d - L_q) / 2.$$

5.2.2 Анализ коэффициентов взаимной индукции обмоток фаз статора

Предположим, что ось ротора совпадает с осью симметрии фаз статора. Отсчёт углов ведём от оси симметрии фаз (рисунок 5.3).

Так как коэффициент взаимной индукции m_{ab} является отрицательным (направление оси b и магнитного потока, созданного током фазы a – встречное), то, разложив в ряд Фурье функцию m_{ab} , получим

$$m_{ab} = -m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma_{ab}) + m_4 \cdot \cos(4 \cdot \gamma_{ab}) + \dots, \quad (5.9)$$

где $m_2 = l_2$.

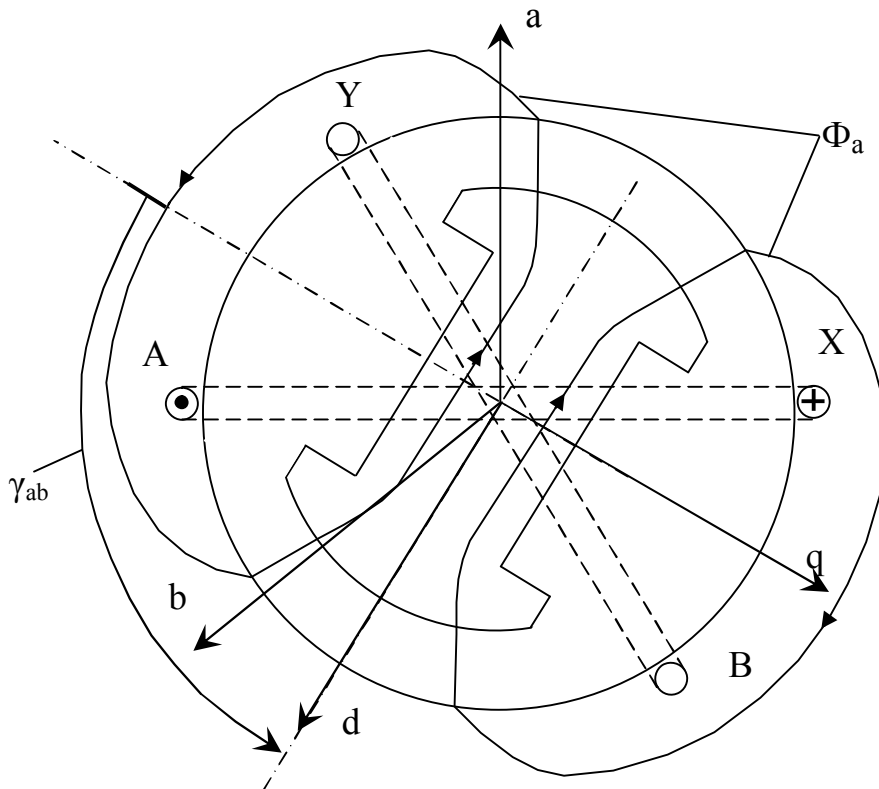


Рисунок 5.3

На практике высшими гармониками пренебрегают.

$$m_{ав} = -m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma_{ав}). \quad (5.10)$$

Отсчёт углов вёлся от оси симметрии фаз a и $в$. Выразим угол $\gamma_{ав}$ через угол γ .

$$\gamma = \gamma_{ав} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \gamma_{ав} = \gamma - \frac{\pi}{3}. \quad (5.11)$$

С учётом этого получим

$$m_{ав} = -m_0 + m_2 \cdot \cos \left[2 \cdot \left(\gamma - \frac{\pi}{3} \right) \right], \quad (5.12)$$

$$m_{ac} = -m_0 + m_2 \cdot \cos \left[2 \cdot \left(\gamma + \frac{\pi}{3} \right) \right], \quad (5.13)$$

$$m_{вс} = -m_0 + m_2 \cdot \cos[2 \cdot \gamma]. \quad (5.14)$$

5.2.3 Определение коэффициента взаимной индукции между фазами обмотки статора и обмотками ротора

Если ось d ротора совпадает с осью фазы a статора, то сопротивление магнитной цепи для потока фазы a будет минимальным и коэффициент взаимной индукции между обмоткой статора и обмоткой возбуждения будет максимальным. При повороте ротора на угол девяносто градусов оси контуров смещаются на тот же угол. Взаимной индуктивной связи между контурами не будет (рисунок 5.4). При повороте ротора на угол сто восемьдесят градусов оси фазы a статора и обмотки возбуждения будут направлены встречно, а коэффициент взаимной индукции будет отрицательным и равным по абсолютной величине своему значению при положении ротора, соответствующем $\gamma = 0$.

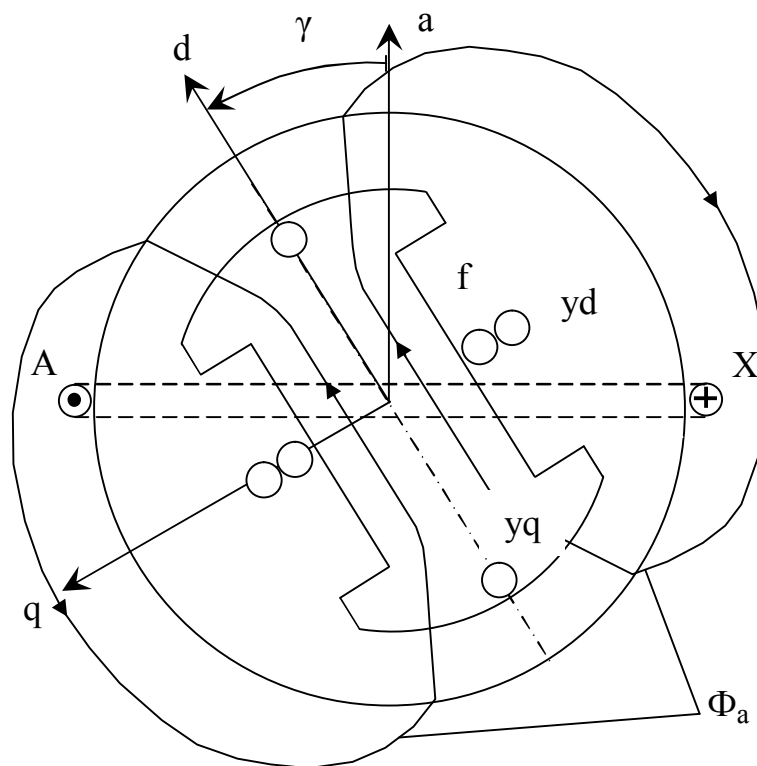


Рисунок 5.4

Следовательно, учитывая только первые гармоники разложения функции m_{af} в ряд Фурье, для коэффициента взаимной индуктивности между обмоткой фазы a и обмоткой возбуждения получим

$$m_{af} = M_{af} \cdot \cos(\gamma), \quad (5.15)$$

Для коэффициента взаимной индуктивности между фазами b , c и обмоткой возбуждения получим

$$m_{ef} = M_{ef} \cdot \cos(\gamma - 120^\circ), \quad (5.16)$$

$$m_{cf} = M_{cf} \cdot \cos(\gamma + 120^\circ). \quad (5.17)$$

Для успокоительной обмотки по продольной оси взаимная индуктивная связь с фазами обмотки статора будет изменяться, при изменении углового положения ротора, аналогично:

$$\begin{aligned} m_{ayd} &= M_{ayd} \cdot \cos(\gamma), \\ m_{eyd} &= M_{eyd} \cdot \cos(\gamma - 120^\circ), \\ m_{cyd} &= M_{cyd} \cdot \cos(\gamma + 120^\circ). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ось эквивалентной успокоительной обмотки по поперечной оси опережает продольную ось ротора на 90° электрических градуса (рисунок 5.4). Следовательно, в момент времени, соответствующий $\gamma = 0$, взаимная индуктивность между фазой a статора и успокоительной обмоткой по поперечной оси равна нулю. После поворота ротора на 90° ось успокоительной обмотки по поперечной оси и ось фазы a будут иметь встречное направление. Взаимная индуктивность между обмотками будет отрицательной и максимальной по абсолютной величине. При дальнейшем повороте ротора взаимная индуктивность m_{ayq} возрастает и при $\gamma = \pi$ принимает значение ноль. Для успокоительной обмотки по поперечной оси будем иметь:

$$\begin{aligned} m_{ayq} &= -M_{ayq} \cdot \sin(\gamma), \\ m_{eyq} &= -M_{eyq} \cdot \sin(\gamma - 120^\circ), \\ m_{cyq} &= -M_{cyq} \cdot \sin(\gamma + 120^\circ). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Для обмоток ротора, оси которых совпадают с продольной осью ротора, взаимная индуктивность не зависит от положения ротора ($L_{afd} = const$), так как при изменении углового положения ротора магнитное сопротивление остаётся неизменным. Взаимная индуктивность между успокоительной обмоткой по поперечной оси и обмотками по продольной оси отсутствует, так как магнитные оси обмоток сдвинуты на девяносто электрических градусов.

С учётом полученных зависимостей коэффициентов взаимной индуктивности от углового положения ротора выражение для потокосцепления, например фазы a статора, примет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_a = & [l_0 + l_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma)] \cdot i_a + [-m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma - 2 \cdot 120^\circ)] \cdot i_b + \\ & + [-m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma + 2 \cdot 120^\circ)] \cdot i_c + \\ & + M_{af} \cdot \cos(\gamma) \cdot i_f + M_{ayd} \cdot \cos(\gamma) \cdot i_{yd} - M_{ayq} \cdot \sin(\gamma) \cdot i_{yq}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.3 Уравнение равновесия моментов в относительных единицах

Уравнение равенства моментов (или уравнение движения) входит в систему уравнений, описывающую электромеханический переходный процесс, и имеет вид:

$$M_{эм} = M_c + M_\partial. \quad (5.21)$$

Разделим правую и левую части равенства на базисный момент

$$\frac{M_{эм}}{M_\partial} = \frac{M_c}{M_\partial} + \frac{M_\partial}{M_\partial}. \quad (5.22)$$

В системе относительных единиц сохраним принятые обозначения для электромагнитного и статического момента. Преобразуем выражение для динамического момента:

$$M_\partial^* = \frac{J}{p \cdot M_\partial} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (5.23)$$

Правую часть равенства умножим и разделим на ω_∂^2 . Величины под знаком дифференциала выразим в относительных единицах:

$$M_\partial^* = \frac{J}{p \cdot M_\partial} \cdot \frac{\omega_\partial^2}{\omega_\partial^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{J \cdot \omega_\partial^2}{p \cdot M_\partial} \cdot \frac{d\left(\frac{\omega}{\omega_\partial}\right)}{d(\omega_\partial \cdot t)} = \frac{J \cdot \omega_\partial}{p \cdot M_\partial} \cdot \omega_\partial \cdot \frac{d\omega}{dt}, \quad (5.24)$$

где под знаком дифференциала записаны величины в относительных единицах.

Введём следующие обозначения:

$$\frac{J \cdot \omega_\partial}{p \cdot M_\partial} = T_m - \text{механическая постоянная времени};$$

$T_m \cdot \omega_\partial = H - \text{механическая постоянная вращающейся части машины (ротора)}.$

Базисный момент

$$M_{\delta} = \frac{P_{\delta}}{\Omega_{\delta}} = \frac{p \cdot P_{\delta}}{\omega_{\delta}}. \quad (5.25)$$

Следовательно, для механической постоянной вращающихся частей машины можно записать

$$H = \frac{J \cdot \omega_{\delta}^2}{p^2 \cdot P_{\delta}}. \quad (5.26)$$

Уравнение моментов примет вид:

$$M = M_c + H \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (5.27)$$

На практике система уравнений (5.1) – (5.3) с периодическими коэффициентами решается численными методами на цифровых вычислительных машинах или на аналоговых вычислительных машинах (АВМ).

5.4 Расчёт токов короткого замыкания однофазного синхронного генератора

В качестве примера решения системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами рассмотрим внезапное короткое замыкание однофазного неявнополюсного синхронного генератора. На роторе синхронного генератора имеется только обмотка возбуждения. Магнитопровод ротора полагаем шихтованным.

Короткое замыкание синхронного генератора является аварийным режимом работы. Для ряда машин специального назначения этот режим работы является нормальным рабочим режимом. Например, режим короткого замыкания является обычным режимом для генераторов, предназначенных для испытания коммутационной аппаратуры на отключающую способность. Находят применение синхронные генераторы в качестве источников импульсного питания, например, для питания ускорителей элементарных частиц, для исследования свойств материалов в сильных магнитных полях, в сейсморазведке, в импульсной штамповке, для зарядки индуктивных накопителей электрической энергии и т.д.

Режим короткого замыкания синхронного генератора является электро-механическим переходным процессом. Если ограничиться рассмотрением токов в обмотках генератора на нескольких первых периодах ЭДС, то с достаточной степенью точности можно пренебречь изменением частоты вращения ротора и рассматривать процесс короткого замыкания как электромагнитный. Пред-

положим, что короткое замыкание произошло на выводах генератора и в месте короткого замыкания сопротивление равно нулю. В этом случае переходной процесс описывается следующей системой уравнений

$$\begin{cases} 0 = \frac{d\psi_a}{dt} + r_a \cdot i_a \\ u_f = \frac{d\psi_f}{dt} + r_f \cdot i_f \\ \psi_a = L_a \cdot i_a + M_{afd} \cdot \cos(\gamma) \cdot i_f \\ \psi_f = L_f \cdot i_f + M_{afd} \cdot \cos(\gamma) \cdot i_a \end{cases} \quad (5.28)$$

Решение данной системы уравнений может быть получено одним из численных методов, например, методом Эйлера, или методом Рунге-Кутты, или методом последовательных интервалов и т.д. Рассмотрим решение задачи методом последовательных интервалов.

Метод последовательных интервалов, применительно к электрическим машинам, разработал В.Т. Касьянов. По сравнению с другими численными методами этот метод при одинаковой точности результатов вычислений требует меньшего количества вычислительных операций. Метод позволяет перейти от системы дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям относительно малых приращений неизвестных (в данном случае токов) и времени. Для этого в системе уравнений производят следующие замены. Производные функций по времени заменяют отношением приращения функции Δi к приращению времени Δt , а значение функции на интервале (Δt) заменяют её значением в середине интервала:

$$\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad i \Rightarrow i' + \frac{\Delta i}{2}, \quad (5.29)$$

где i' - значение функции тока в начале интервала.

Обозначим значения токов статора и ротора в начале интервала времени через i'_a и i'_f соответственно. Тогда средние значения токов на интервале определяются следующим образом

$$\begin{aligned} i_{a\text{cp}} &\Rightarrow i'_a + \frac{\Delta i_a}{2}, \\ i_{f\text{cp}} &\Rightarrow i'_f + \frac{\Delta i_f}{2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Тригонометрические функции, входящие в систему уравнений, вычисляют в середине рассматриваемого интервала $\tau = t' + \Delta t/2$:

$$\begin{aligned}\cos(\tau) &= \cos(t' + \Delta t/2); \\ \sin(\tau) &= \sin(t' + \Delta t/2).\end{aligned}\tag{5.31}$$

Подставим выражения для потокосцеплений обмоток в уравнения напряжений. В системе относительных единиц решаемая система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 0 = L_a \frac{di_a}{dt} + M_{afd} \cdot \cos(\gamma) \cdot \frac{di_f}{dt} - M_{afd} \cdot \sin(\gamma) \cdot i_f + r_a \cdot i_a \\ u_f = L_f \frac{di_f}{dt} + M_{afd} \cdot \cos(\gamma) \cdot \frac{di_a}{dt} - M_{afd} \cdot \sin(\gamma) \cdot i_a + r_f \cdot i_f \end{cases}.\tag{5.32}$$

Заменим в решаемой системе уравнений функции на интервале и их производные конечно-разностными выражениями

$$\begin{cases} 0 = \frac{L_a}{\Delta t} \cdot \Delta i_a + M_{afd} \cdot \cos(\tau) \cdot \frac{\Delta i_f}{\Delta t} - M_{afd} \cdot \sin(\tau) \cdot \left(i_f' + \frac{\Delta i_f}{2} \right) + r_a \cdot \left(i_a' + \frac{\Delta i_a}{2} \right) \\ u_f = \frac{L_f}{\Delta t} \cdot \Delta i_f + M_{afd} \cdot \cos(\tau) \cdot \frac{\Delta i_a}{\Delta t} - M_{afd} \cdot \sin(\tau) \cdot \left(i_a' + \frac{\Delta i_a}{2} \right) + r_f \cdot \left(i_f' + \frac{\Delta i_f}{2} \right) \end{cases}\tag{5.33}$$

Преобразуем решаемую систему уравнений. В левой части уравнений системы записываем произведения приращений токов обмоток статора и ротора на соответствующие коэффициенты, а в правой части уравнений записываем известные величины:

$$\begin{cases} \left(\frac{L_a}{\Delta t} + \frac{r_a}{2} \right) \cdot \Delta i_a + M_{afd} \cdot \left(\frac{\cos(\tau)}{\Delta t} - \frac{\sin(\tau)}{2} \right) \cdot \Delta i_f = M_{afd} \cdot \sin(\tau) \cdot i_f' - r_a \cdot i_a' \\ M_{afd} \cdot \left(\frac{\cos(\tau)}{\Delta t} - \frac{\sin(\tau)}{2} \right) \cdot \Delta i_a + \left(\frac{L_f}{\Delta t} + \frac{r_f}{2} \right) \cdot \Delta i_f = u_f + M_{afd} \cdot \sin(\tau) \cdot i_a' - r_f \cdot i_f' \end{cases}\tag{5.34}$$

Запишем решаемую систему уравнений в матричной форме

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \frac{L_a}{\Delta t} + \frac{r_a}{2} & M_{afd} \cdot \left(\frac{\cos(\tau)}{\Delta t} - \frac{\sin(\tau)}{2} \right) \\ M_{afd} \left(\frac{\cos(\tau)}{\Delta t} - \frac{\sin(\tau)}{2} \right) & \frac{L_f}{\Delta t} + \frac{r_f}{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Delta i_a \\ \Delta i_f \end{vmatrix} = \\
& = \begin{vmatrix} M_{afd} \cdot \sin(\tau) \cdot i'_f - r_a \cdot i'_a \\ u_f + M_{afd} \cdot \sin(\tau) \cdot i'_a - r_f \cdot i'_f \end{vmatrix} \quad (5.35)
\end{aligned}$$

Решим систему уравнений относительно приращений токов на интервале:

$$\begin{aligned}
\Delta i_a = & \left\{ \left(\frac{L_f}{\Delta t} + \frac{r_f}{2} \right) \cdot [M_{afd} \cdot \sin(\tau) \cdot i'_f - r_a \cdot i'_a] - \right. \\
& \left. [u_f + M_{afd} \cdot i'_a \cdot \sin(\tau) - r_f \cdot i'_f] \cdot M_{afd} \cdot \left[\frac{\cos(\tau)}{\Delta t} - \frac{\sin(\tau)}{2} \right] \right\} / \\
& \left\{ \left(\frac{L_a}{\Delta t} + \frac{r_a}{2} \right) \left(\frac{L_f}{\Delta t} + \frac{r_f}{2} \right) - M_{afd}^2 \cdot \left[\frac{\cos(\tau)}{\Delta t} - \frac{\sin(\tau)}{2} \right]^2 \right\} \quad (5.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta i_f = & \left\{ \left(\frac{L_a}{\Delta t} + \frac{r_a}{2} \right) \cdot [u_f + M_{afd} \cdot \sin(\tau) \cdot i'_a - r_f \cdot i'_f] - \right. \\
& \left. [M_{afd} \cdot i'_f \cdot \sin(\tau) - r_a \cdot i'_a] \cdot M_{afd} \cdot \left[\frac{\cos(\tau)}{\Delta t} - \frac{\sin(\tau)}{2} \right] \right\} / \\
& \left\{ \left(\frac{L_a}{\Delta t} + \frac{r_a}{2} \right) \left(\frac{L_f}{\Delta t} + \frac{r_f}{2} \right) - M_{afd}^2 \cdot \left[\frac{\cos(\tau)}{\Delta t} - \frac{\sin(\tau)}{2} \right]^2 \right\} \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Для получения численного решения переходного процесса задаются интервалом времени Δt . После вычисления приращений токов в обмотках статора и ротора на очередном интервале, вычисляют значения токов и время в конце интервала времени:

$$\begin{aligned}
i_a'' &= i_a' + \Delta i_a; \\
i_f'' &= i_f' + \Delta i_f; \\
t'' &= t' + \Delta t.
\end{aligned} \quad (5.38)$$

Полученные значения токов и время в конце данного интервала являются начальными для следующего интервала времени. Это позволяет найти приращения токов на очередном интервале и определить токи в конце интервала и т.д. Метод последовательных интервалов позволяет учитывать влияние насыщения магнитной цепи на токи короткого замыкания.

5.5 Метод преобразования координат

Сущность метода преобразования координат заключается в следующем. От неизвестных параметров в системе координатных осей $a - b - c$, имеющих периодический характер коэффициентов, переходят к новым параметрам в некоторой условной системе координатных осей (например, d и q). Оси выбирают таким образом, чтобы индуктивности обмоток L и взаимные индуктивности M стали постоянными и не зависели от положения ротора в пространстве.

Такой системой координат может быть система координат жёстко связанная с осями ротора. Задача заключается в том, чтобы привести параметры обмотки статора к ротору.

Выразим токи фаз обмотки статора через амплитуду изображающего вектора тока I_s (рисунок 5.5):

$$i_a = I_s \cdot \cos(\alpha); \quad (5.39)$$

$$i_b = I_s \cdot \cos(\alpha - 120^\circ); \quad (5.40)$$

$$i_c = I_s \cdot \cos(\alpha + 120^\circ). \quad (5.41)$$

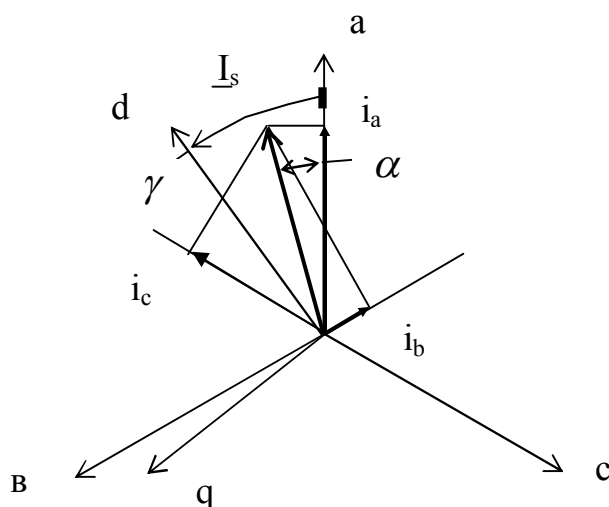


Рисунок 5.5

Проектируя вектор тока I_s на оси d и q , получим:

$$i_d = I_s \cdot \cos(\gamma - \alpha); \quad (5.42)$$

$$i_q = -I_s \cdot \sin(\gamma - \alpha). \quad (5.43)$$

Выполним преобразование функций $\cos(\gamma - \alpha)$ и $\sin(\gamma - \alpha)$. Известно:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma - \alpha) = \frac{2}{3} [\cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\alpha - 120^\circ) \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \\ + \cos(\alpha + 120^\circ) \cdot \cos(\gamma + 120^\circ)]; \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \sin(\gamma - \alpha) = \frac{2}{3} [\cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha - 120^\circ) \cdot \sin(\gamma - 120^\circ) + \\ + \cos(\alpha + 120^\circ) \cdot \sin(\gamma + 120^\circ)]; \end{aligned} \quad (5.45)$$

В выражение для тока i_d (5.42) подставим значение $\cos(\gamma - \alpha)$

$$\begin{aligned} i_d = \frac{2}{3} [I_s \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + I_s \cdot \cos(\alpha - 120^\circ) \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \\ + I_s \cdot \cos(\alpha + 120^\circ) \cdot \cos(\gamma + 120^\circ)]. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Получим

$$i_d = \frac{2}{3} [i_a \cdot \cos(\gamma) + i_b \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + i_c \cdot \cos(\gamma + 120^\circ)]. \quad (5.47)$$

Аналогично для тока i_q

$$i_q = -\frac{2}{3} [i_a \cdot \sin(\gamma) + i_b \cdot \sin(\gamma - 120^\circ) + i_c \cdot \sin(\gamma + 120^\circ)]. \quad (5.48)$$

Обратный переход от неизвестных в системе координат d и q к неизвестным в системе координатных осей $a - b - c$ осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} i_a &= i_d \cdot \cos(\gamma) - i_q \cdot \sin(\gamma); \\ i_b &= i_d \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) - i_q \cdot \sin(\gamma - 120^\circ); \\ i_c &= i_d \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) - i_q \cdot \sin(\gamma + 120^\circ). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Если имеем соединение обмоток «звезда» с нулевым проводом или «треугольник», то при несимметричной нагрузке появляется ток нулевой последовательности:

$$i_o = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c). \quad (5.50)$$

Если в цепи имеется ток нулевой последовательности, то он добавляется к токам i_d и i_q . Этот ток не связан ни с одной осью и имеет свои уравнения, которые решаются независимо от уравнений в осях d и q . При переходе к системе координатных осей $a - b - c$ ток i_o добавляется к фазным токам i_a, i_b и i_c .

$$\begin{aligned} i_a &= i_d \cdot \cos(\gamma) - i_q \cdot \sin(\gamma) + i_o; \\ i_b &= i_d \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) - i_q \cdot \sin(\gamma - 120^\circ) + i_o; \\ i_c &= i_d \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) - i_q \cdot \sin(\gamma + 120^\circ) + i_o. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Ток i_o совпадает с током нулевой последовательности симметричных составляющих только в установившемся режиме. В переходных режимах он изменяется по сложным зависимостям от времени.

По аналогичным зависимостям осуществляется переход от системы координатных осей $a - b - c$ к системе координатных осей d и q . Например, для напряжений в осях $d - q$ будем иметь

$$\begin{aligned} u_d &= \frac{2}{3} [u_a \cdot \cos(\gamma) + u_b \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + u_c \cdot \cos(\gamma + 120^\circ)] + u_o; \\ u_q &= -\frac{2}{3} [u_a \cdot \sin(\gamma) + u_b \cdot \sin(\gamma - 120^\circ) + u_c \cdot \sin(\gamma + 120^\circ)] + u_o. \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$u_o = \frac{1}{3}(u_a + u_b + u_c).$$

Переход к системе осей d и q означает, что трёхфазная обмотка статора заменяется двухфазной (два контура – по оси d и оси q). Особенностью этой замены является тот факт, что число витков в каждом контуре равняется числу витков в одной фазе.

Установим связь между электрическими величинами в осях d и q , т.е. между напряжениями u_d, u_q и потокосцеплениями Ψ_d, Ψ_q , и токами i_d, i_q .

Для напряжения по оси d имеем

$$u_d = \frac{2}{3} \left[u_a \cdot \cos(\gamma) + u_b \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + u_c \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right]. \quad (5.53)$$

Вместо напряжений фаз u_a, u_b и u_c подставим их выражения

$$u_d = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{d\Psi_a}{dt} + r_a \cdot i_a \right) \cdot \cos(\gamma) + \left(\frac{d\Psi_b}{dt} + r_b \cdot i_b \right) \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \left(\frac{d\Psi_c}{dt} + r_c \cdot i_c \right) \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right]. \quad (5.54)$$

В правой части полученного равенства раскрываем скобки и выполняем преобразования:

$$u_d = \frac{2}{3} \left[r_a \cdot i_a \cdot \cos(\gamma) + r_b \cdot i_b \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + r_c \cdot i_c \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{d\Psi_a}{dt} \cdot \cos(\gamma) + \frac{d\Psi_b}{dt} \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \frac{d\Psi_c}{dt} \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right]. \quad (5.55)$$

Найдём производную от потокосцепления Ψ_d .

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2}{3} \left[\Psi_a \cdot \cos(\gamma) + \Psi_b \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \Psi_c \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right] \right\}. \quad (5.56)$$

Учитывая, что $\frac{d\gamma}{dt} = \omega$, получим

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = \frac{2}{3} \left[\frac{d\Psi_a}{dt} \cdot \cos(\gamma) + \frac{d\Psi_b}{dt} \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \frac{d\Psi_c}{dt} \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right] - \frac{2}{3} \left[\Psi_a \cdot \sin(\gamma) + \Psi_b \cdot \sin(\gamma - 120^\circ) + \Psi_c \cdot \sin(\gamma + 120^\circ) \right] \cdot \omega. \quad (5.57)$$

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = \frac{2}{3} \left[\frac{d\Psi_a}{dt} \cdot \cos(\gamma) + \frac{d\Psi_b}{dt} \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \frac{d\Psi_c}{dt} \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right] + \Psi_q \cdot \omega. \quad (5.58)$$

Подставив полученное решение в уравнение напряжения u_d , получим

$$u_d = \frac{d\Psi_d}{dt} - \Psi_q \cdot \omega + r \cdot i_d. \quad (5.59)$$

Аналогично получают уравнение напряжения u_q

$$u_q = \frac{d\Psi_q}{dt} + \Psi_d \cdot \omega + r \cdot i_q. \quad (5.60)$$

Система уравнений напряжений в осях $d - q$

$$\left. \begin{aligned} u_d &= \frac{d\Psi_d}{dt} - \Psi_q \cdot \omega + r \cdot i_d \\ u_q &= \frac{d\Psi_q}{dt} + \Psi_d \cdot \omega + r \cdot i_q \\ u_f &= \frac{d\Psi_f}{dt} + r_f \cdot i_f \\ 0 &= \frac{d\Psi_{yd}}{dt} + r_{yd} \cdot i_{yd} \\ 0 &= \frac{d\Psi_{yq}}{dt} + r_{yq} \cdot i_{yq} \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

Выразим Ψ_d и Ψ_q через токи i_d , i_q и параметры машины.

$$\begin{aligned} \Psi_d &= \frac{2}{3} \left[\Psi_a \cdot \cos(\gamma) + \Psi_b \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \Psi_c \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right] = \\ &= \frac{2}{3} \left\{ [(l_0 + l_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma)) \cdot i_a + (-m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma - 120^\circ)) \cdot i_b + \right. \\ &\quad + (-m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma + 120^\circ)) \cdot i_c + M_{afd} \cdot \cos(\gamma) \cdot i_f + \\ &\quad \left. + M_{ayd} \cdot \cos(\gamma) \cdot i_{yd} - M_{ayq} \cdot \sin(\gamma) \cdot i_{yq}] \cdot \cos(\gamma) + \right. \\ &\quad + [(-m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma - 120^\circ)) \cdot i_a + (l_0 + l_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma - 120^\circ)) \cdot i_b + \\ &\quad + (-m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma)) \cdot i_c + M_{efd} \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) \cdot i_f + \\ &\quad \left. + M_{eyd} \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) \cdot i_{yd} - M_{eyq} \cdot \sin(\gamma - 120^\circ) \cdot i_{yq}] \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \right. \\ &\quad \left. + [(-m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma + 120^\circ)) \cdot i_a + (-m_0 + m_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma)) \cdot i_b + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-l_0 + l_2 \cdot \cos(2 \cdot \gamma + 120^\circ) \right) \cdot i_c + M_{cfd} \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \cdot i_f + \\
& + M_{cyd} \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \cdot i_{yd} - M_{cyq} \cdot \sin(\gamma + 120^\circ) \cdot i_{yq} \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \}. \quad (5.62)
\end{aligned}$$

Преобразуем правую часть выражения Ψ_d :

$$\begin{aligned}
\Psi_d = & \frac{2}{3} \cdot l_0 \cdot \left[i_a \cdot \cos(\gamma) + i_e \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + i_c \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right] + \\
& + \frac{2}{3} \cdot l_2 \cdot \left[i_a \cdot \cos(2 \cdot \gamma) \cdot \cos(\gamma) + i_e \cdot \cos(2 \cdot \gamma + 120^\circ) \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \right. \\
& \quad \left. + i_c \cdot \cos(2 \cdot \gamma - 120^\circ) \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right] - \\
& - \frac{2}{3} \cdot m_0 \cdot \left[(i_e + i_c) \cdot \cos(\gamma) + (i_a + i_c) \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \right. \\
& \quad \left. + (i_a + i_e) \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right] + \\
& + \frac{2}{3} \cdot m_2 \cdot \left\{ \left[\cos(2 \cdot \gamma - 120^\circ) \cdot i_e + \cos(2 \cdot \gamma + 120^\circ) \cdot i_c \right] \cdot \cos(\gamma) + \right. \\
& \quad + \left[\cos(2 \cdot \gamma - 120^\circ) \cdot i_a + \cos(2 \cdot \gamma) \cdot i_c \right] \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \\
& \quad \left. + \left[\cos(2 \cdot \gamma + 120^\circ) \cdot i_a + \cos(2 \cdot \gamma) \cdot i_e \right] \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right\} + \\
& + \frac{2}{3} \cdot M_{afd} \cdot i_f \cdot \left[\cos^2(\gamma) + \cos^2(\gamma - 120^\circ) + \cos^2(\gamma + 120^\circ) \right] + \\
& + \frac{2}{3} \cdot M_{ayd} \cdot i_{yd} \cdot \left[\cos^2(\gamma) + \cos^2(\gamma - 120^\circ) + \cos^2(\gamma + 120^\circ) \right] - \\
& - \frac{2}{3} \cdot M_{ayq} \cdot i_{yq} \cdot \left[\sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\gamma - 120^\circ) \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + \right. \\
& \quad \left. \sin(\gamma + 120^\circ) \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) \right]. \quad (5.63)
\end{aligned}$$

После преобразований, получим

$$\begin{aligned}
\Psi_d &= L_d \cdot i_d + M_{afd} \cdot i_f + M_{ayd} \cdot i_{yd} \\
\Psi_q &= L_q \cdot i_q + M_{ayq} \cdot i_{yq} \\
\Psi_f &= L_f \cdot i_f + \frac{3}{2} \cdot M_{afd} \cdot i_d + M_{fyd} \cdot i_{yd} \quad , \\
\Psi_{yd} &= L_{yd} \cdot i_{yd} + \frac{3}{2} \cdot M_{ayd} \cdot i_d + M_{fyd} \cdot i_f \\
\Psi_{yq} &= L_{yq} \cdot i_{yq} + \frac{3}{2} \cdot M_{ayq} \cdot i_q
\end{aligned} \tag{5.64}$$

где $L_d = l_0 + m_0 + \frac{3}{2} \cdot m_2$;

$$L_q = l_0 + m_0 - \frac{3}{2} \cdot m_2.$$

L_d и L_q - синхронные индуктивные сопротивления по продольной и поперечной осям. Физический смысл индуктивностей заключается в следующем. Если по обмоткам статора протекает симметричный ток прямой последовательности, а ротор вращается с синхронной скоростью и ось поля статора совпадает с осью d (или q) ротора, то индуктивность обмотки статора равна L_d (или L_q).

5.6 Уравнения синхронной машины с приведённой обмоткой ротора

На практике применяют систему уравнений для приведённых обмоток ротора. Приведение роторных контуров производят к фазной обмотке статора. Например,

$$U_2' = U_2 \cdot m_u; \quad I_2' = I_2 \cdot m_i; \quad Z_2' = Z_2 \cdot m_z.$$

$$m_{if} = \frac{\pi}{m_1} \frac{p \cdot w_f \cdot k_f}{w_1 \cdot k_{об} \cdot k_d};$$

$$m_{iyd} = \frac{\pi}{m_1} \frac{p \cdot w_{эyd} \cdot k_{yd}}{w_1 \cdot k_{об} \cdot k_d};$$

$$m_{iyq} = \frac{\pi}{m_1} \frac{p \cdot w_{yq} \cdot k_{yq}}{w_1 \cdot k_{об} \cdot k_d};$$

$$m_u = \frac{2}{m_1} \frac{1}{m_i}.$$

Чтобы не путать параметры, записанные в системе относительных единиц и записанные в физических единицах, будем вместо индуктивностей (и взаимных индуктивностей) записывать индуктивные сопротивления. Токи, потокосцепления, магнитные потоки и напряжения будем обозначать теми же буквами.

$$\begin{aligned}
 \psi_d &= x_d \cdot i_d + x_{afd} \cdot i_f + x_{ayd} \cdot i_{yd}, \\
 \psi_q &= x_q \cdot i_q + x_{ayq} \cdot i_{yq}, \\
 \psi_f &= x_f \cdot i_f + x_{afd} \cdot i_d + x_{fyd} \cdot i_{yd}, \\
 \psi_{yd} &= x_{yd} \cdot i_{yd} + x_{ayd} \cdot i_d + x_{fyd} \cdot i_f, \\
 \psi_{yq} &= x_{yq} \cdot i_{yq} + x_{ayq} \cdot i_q.
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

Так как осуществлено приведение обмоток ротора к статору, то приведённые взаимные индуктивные сопротивления становятся равными сопротивлениям реакции якоря, т.е. можем записать

$$\begin{aligned}
 x_{afd} &= x_{ayd} = x_{fyd} = x_{ad}, \\
 x_{ayq} &= x_{aq}.
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

5.7 Операторные уравнения и сопротивления синхронной машины

Для перехода от дифференциальной формы записи системы уравнений к операторной необходимо оператор дифференцирования заменить оператором p . Функции времени ($u(t)$, $i(t)$, $\psi(t)$) необходимо рассматривать как функции оператора p . В этом случае система уравнений примет вид

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_d(p) &= p\psi_d(p) - \psi_q(p) \cdot \omega + r \cdot i_d \\
 u_q(p) &= p\psi_q(p) + \psi_d(p) \cdot \omega + r \cdot i_q \\
 u_f(p) &= p\psi_f(p) + r_f \cdot i_f \\
 0 &= p\psi_{yd}(p) + r_{yd} \cdot i_{yd} \\
 0 &= p\psi_{yq}(p) + r_{yq} \cdot i_{yq} \\
 \psi_d(p) &= x_d \cdot i_d(p) + x_{ad} \cdot i_f(p) + x_{ad} \cdot i_{yd}(p) \\
 \psi_q(p) &= x_q \cdot i_q(p) + x_{aq} \cdot i_{yq}(p) \\
 \psi_f(p) &= x_f \cdot i_f(p) + x_{ad} \cdot i_d(p) + x_{ad} \cdot i_{yd}(p) \\
 \psi_{yd}(p) &= x_{yd} \cdot i_{yd}(p) + x_{ad} \cdot i_d(p) + x_{ad} \cdot i_f(p) \\
 \psi_{yq}(p) &= x_{yq} \cdot i_{yq}(p) + x_{aq} \cdot i_q(p)
 \end{aligned} \right. , \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } x_d &= x_{ad} + x_{s1}; \\
x_q &= x_{aq} + x_{s1}; \\
x_f &= x_{ad} + x_{sf}; \\
x_{yd} &= x_{ad} + x_{syd}; \\
x_{yq} &= x_{aq} + x_{syq}.
\end{aligned}$$

Когда необходимо знать только изменение тока в обмотке статора систему уравнений синхронной машины можно существенно упростить, исключив из этой системы токи контуров ротора. По продольной оси машины можно составить следующую систему уравнений

$$\begin{vmatrix} \psi_d(p) \\ U_f(p) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_d & x_{ad} & x_{ad} \\ px_{ad} & r_f + px_f & px_{ad} \\ px_{ad} & px_{ad} & r_{yd} + px_{yd} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d(p) \\ i_f(p) \\ i_{yd}(p) \end{vmatrix} \quad (5.68)$$

Находим из системы (5.68) операторный ток

$$i_d(p) = \frac{\psi_d(p) \cdot M_{11} + U_f \cdot M_{12}}{D(p)}, \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned}
\text{где } D(p) &= x_d \cdot [(r_f + px_f) \cdot (r_{yd} + px_{yd}) - p^2 x_{ad}^2] - \\
&- px_{ad} [x_{ad} \cdot (r_{yd} + px_{yd}) - px_{ad}^2] + px_{ad} [px_{ad}^2 - x_{ad} (r_f + px_f)];
\end{aligned}$$

$$M_{11}(p) = (r_f + px_f) \cdot (r_{yd} + px_{yd}) - p^2 x_{ad}^2;$$

$$M_{12}(p) = -[(r_{yd} + px_{yd}) \cdot x_{ad} - px_{ad}^2].$$

Из выражения для операторного тока $i_d(p)$ получим выражение операторного потокосцепления:

$$\psi_d(p) = \frac{i_d(p) \cdot D(p)}{M_{11}(p)} - \frac{M_{12}(p)}{M_{11}(p)} \cdot U_f \quad (5.70)$$

или

$$\psi_d(p) = i_d(p) \cdot X_d(p) + G(p) \cdot U_f, \quad (5.71)$$

где $X_d(p) = x_d -$

$$- \frac{\{px_{ad} \cdot [(r_{yd} + px_{yd}) \cdot x_{ad} - px_{ad}^2] + [x_{ad} \cdot (r_f + px_f) - px_{ad}^2] \cdot px_{ad}\}}{(r_f + px_f) \cdot (r_{yd} + px_{yd}) - p^2 x_{ad}^2}; \quad (5.72)$$

$$G(p) = \frac{(r_{yd} + px_{yd}) \cdot x_{ad} - px_{ad}^2}{(r_f + px_f) \cdot (r_{yd} + px_{yd}) - p^2 x_{ad}^2}. \quad (5.73)$$

Если демпферная обмотка отсутствует, то выражения $X_d(p)$ и $G(p)$ упрощаются:

$$X_d(p) = x_d - \frac{px_{ad}^2}{r_f + px_f}, \quad (5.74)$$

$$G(p) = \frac{x_{ad}}{r_f + px_f}. \quad (5.75)$$

По поперечной оси машины записываем следующую систему уравнений

$$\begin{vmatrix} \psi_q(p) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_q & x_{aq} \\ px_{aq} & r_{yq} + px_{yq} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_q(p) \\ i_{yq}(p) \end{vmatrix}. \quad (5.76)$$

Решаем систему уравнений (5.72) и находим операторный ток $i_q(p)$

$$i_q(p) = \frac{\psi_q(p) \cdot (r_{yq} + px_{yq})}{D}, \quad (5.77)$$

Из решения (5.77) находим выражение для операторного потокосцепления $\psi_q(p)$

$$\psi_q(p) = \frac{i_q(p) \cdot D}{r_{yq} + px_{yq}} = X_q(p) \cdot i_q(p), \quad (5.78)$$

где $X_q(p) = x_q - \frac{px_{aq}^2}{r_{yq} + px_{yq}}.$

С учётом сделанных преобразований, система уравнений (5.67) примет вид:

$$\begin{cases} u_d(p) = p\psi_d(p) - \psi_q(p) \cdot \omega + r \cdot i_d(p) \\ u_q(p) = p\psi_q(p) + \psi_d(p) \cdot \omega + r \cdot i_q(p) \\ \psi_d(p) = X_d(p) \cdot i_d(p) + G(p) \cdot U_f \\ \psi_q(p) = X_q(p) \cdot i_q(p) \end{cases} \quad (5.79)$$

Функции $X_d(p)$, $X_q(p)$ и $G(p)$ - операторные индуктивные сопротивления (по продольной и поперечной осями машины) и операторная проводимость соответственно.

Система уравнений синхронной машины в осях $d - q$ известна как система уравнений Парка-Горева.

5.8 Преобразование операторных индуктивных сопротивлений синхронной машины

5.8.1 Операторные индуктивные сопротивления синхронной машины с одним контуром на роторе

В выражении операторного индуктивного сопротивления (5.74) индуктивные сопротивления заменяем их выражениями (стр. 81):

$$X_d(p) = x_d - \frac{px_{ad}^2}{r_f + px_f} = x_{s1} + x_{ad} - \frac{px_{ad}^2}{r_f + p(x_{ad} + x_{sf})}.$$

Индуктивное сопротивление взаимной индукции приводим к общему знаменателю:

$$X_d(p) = x_{s1} + \frac{x_{ad} \cdot (r_f + px_{sf}) + px_{ad}^2 - px_{ad}^2}{r_f + px_{sf} + px_{ad}}.$$

Выражение в знаменателе делим на числитель

$$X_d(p) = x_{s1} + \frac{1}{\frac{1}{x_{ad}} + \frac{p}{r_f + px_f}} = x_{s1} + \left[\frac{1}{x_{ad}} + \frac{p}{r_f + px_f} \right]^{-1}. \quad (5.80)$$

5.8.2 Операторные индуктивные сопротивления синхронной машины с демпферной обмоткой на роторе

$$X_d(p) = x_{s1} + \left[\frac{1}{x_{ad}} + \frac{1}{r_f/p + x_{sf}} + \frac{1}{r_{yd}/p + x_{syd}} \right]^{-1}; \quad (5.81)$$

$$X_q(p) = x_{s1} + \left[\frac{1}{x_{aq}} + \frac{1}{r_{yq}/p + x_{syq}} \right]^{-1}. \quad (5.82)$$

Схемы замещения, соответствующие операторным индуктивным сопротивлениям $X_d(p)$ и $X_q(p)$, представлены на рисунках 5.6 и 5.7.

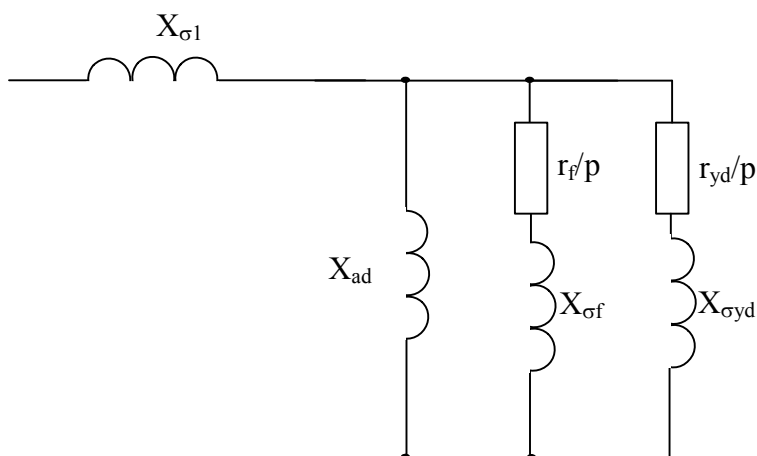


Рисунок 5.6 – Схема замещения синхронной машины по продольной оси, соответствующая операторному синхронному сопротивлению $X_d(p)$

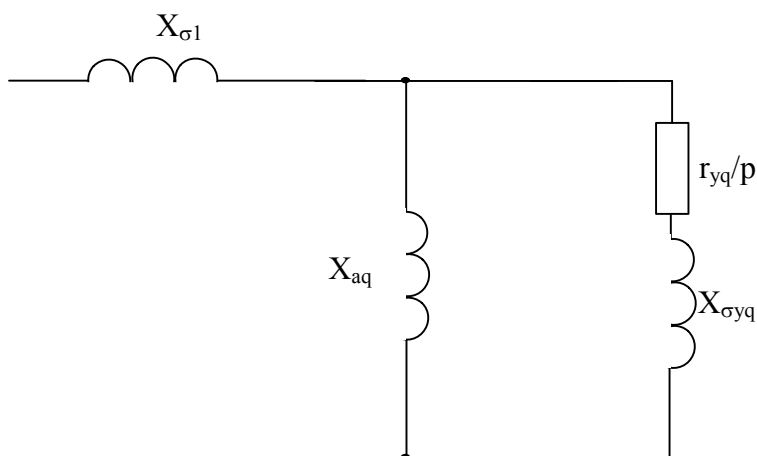


Рисунок 5.7 – Схема замещения синхронной машины по поперечной оси, соответствующая операторному синхронному сопротивлению $X_q(p)$

5.8.3 Операторные индуктивные сопротивления, выраженные через постоянные времени

а) успокоительная обмотка на роторе отсутствует

$$X_d(p) = x_d - \frac{px_{ad}^2}{r_f + px_f} = \frac{x_d \cdot r_f + px_f \cdot x_d - px_{ad}^2}{r_f + px_f};$$

$$X_d(p) = x_d \frac{r_f + p(x_f - x_{ad}^2/x_d)}{r_f + px_f} = x_d \frac{r_f + px'_f}{r_f + px_f} = x_d \frac{1 + px'_f/r_f}{1 + px_f/r_f};$$

$$X_d(p) = x_d \frac{1 + pT'_d}{1 + T_{do}}, \quad (5.83)$$

где $T_{do} = \frac{x_f}{r_f}$ – постоянная времени обмотки возбуждения при разомкнутой обмотке статора;

$T'_d = \frac{x'_f}{r_f}$ – постоянная времени обмотки возбуждения при замкнутой обмотке статора и разомкнутой демпферной обмотке.

б) на роторе полная демпферная система

$$X_d(p) = x_d \frac{(1 + pT'_d) \cdot (1 + pT''_d)}{(1 + pT_{do}) \cdot (1 + pT'_{do})}, \quad (5.84)$$

где $T''_d = \frac{x''_{yd}}{r_{yd}}$ – постоянная времени демпферной обмотки при замкнутой накоротко обмотке возбуждения и обмотке статора;

$T'_{do} = \frac{x'_{yd}}{r_{yd}}$ – постоянная времени демпферной обмотки при разомкнутой обмотке статора и замкнутой обмотке возбуждения;

$$X_q(p) = x_q \frac{1 + pT'_q}{1 + pT_{qo}}, \quad (5.85)$$

где $T_q' = \frac{x_{yq}''}{r_{yq}}$ – постоянная времени демпферной обмотки при короткозамкнутой обмотке статора;

$T_{qo} = \frac{x_{yq}}{r_{yq}}$ – постоянная времени демпферной обмотки при разомкнутой обмотке статора.

Переход к системе координатных осей $d - q - 0$ осуществляется, когда машина симметричная и когда нагрузка симметричная.

В общем случае система уравнений напряжений и потокосцеплений дополняется уравнением равновесия моментов. Для двигателя

$$M = M_c + J \frac{d\omega}{dt}.$$

Момент статический и момент динамический не зависят от системы координат.

5.9 Выражение электромагнитного момента в системе координат $d - q - 0$

Полная мощность определится как суммарная мощность двух фаз:

$$S = u_d \cdot i_d + u_q \cdot i_q. \quad (5.86)$$

Подставим выражения напряжений u_d и u_q :

$$S = \left(\frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \cdot \omega + r \cdot i_d \right) \cdot i_d + \left(\frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \cdot \omega + r \cdot i_q \right) \cdot i_q. \quad (5.87)$$

Сгруппируем слагаемые в правой части равенства по физическому смыслу:

$$S = \left(\frac{d\psi_d}{dt} \cdot i_d + \frac{d\psi_q}{dt} \right) + (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) \cdot \omega + r \cdot (i_d^2 + i_q^2). \quad (5.88)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (5.88) представляет мощность, которая идёт на изменение запасов электромагнитной энергии машины. Второе слагаемое представляет мощность электромагнитную. Третье слагаемое определяет мощность электрических потерь.

Известно, что $M = \frac{P_{эм}}{\Omega}$. Следовательно,

$$M = (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) \cdot p. \quad (5.89)$$

5.10 Комплексные дифференциальные уравнения синхронной машины

При исследованиях процессов в синхронных машинах часто пользуются комплексной формой записи уравнений.

В системе координатных осей d и q имеем

$$u_d = \frac{d\Psi_d}{dt} - \Psi_q \cdot \omega + r_1 \cdot i_d, \quad (5.90)$$

$$u_q = \frac{d\Psi_q}{dt} + \Psi_d \cdot \omega + r_1 \cdot i_q.$$

Комплексные дифференциальные уравнения получают путем умножения второго уравнения на j и сложения с первым

$$u_d + ju_q = \frac{d}{dt}(\Psi_d + j\Psi_q) + j\left(\Psi_d - \frac{1}{j}\Psi_q\right) \cdot \omega + r_1 \cdot (i_d + ji_q). \quad (5.91)$$

Под комплексным напряжением, комплексным током и потокосцеплением понимают выражения

$$\bar{u}_s = u_d + ju_q,$$

$$\bar{i}_s = i_d + ji_q, \quad (5.92)$$

$$\bar{\Psi}_s = \Psi_d + j\Psi_q.$$

С учётом (5.92) уравнение напряжения в комплексной форме записи примет вид

$$\bar{u}_s = \frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} + j\bar{\Psi}_s \cdot \omega + r_1 \cdot \bar{i}_s. \quad (5.93)$$

Знак дифференцирования $\frac{d}{dt}$ заменяют знаком "D" или "p" (но "D" или "p" не оператор, а знак дифференцирования)

$$\bar{u}_s = D\bar{\Psi}_s + j\omega \cdot \bar{\Psi}_s + r_1 \cdot \bar{i}_s. \quad (5.94)$$

Из (5.94) следует, что форма записи уравнений упростилась, так как число уравнений сократилось вдвое. Но это преимущество ощутимо лишь для машин, имеющих симметричные обмотки и равномерный воздушный зазор.

5.11 Система координатных осей α и β

Когда машина не симметрична или несимметричный режим работы, преобразование к осям d и q делать нельзя, нужно выводить уравнения заново. При этом периодические коэффициенты не исчезают. На практике пользуются системами α и β неподвижными относительно статора. При переходе от неизвестных в системе координат "а-в-с" к новым неизвестным в системе координат $\alpha - \beta$ могут быть использованы уравнения для перехода к осям $d - q$.

Например,

$$\begin{aligned} i_d &= 2/3 [i_a \cdot \cos(\gamma) + i_b \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + i_c \cdot \cos(\gamma + 120^\circ)], \\ i_q &= -2/3 [i_a \cdot \sin(\gamma) + i_b \cdot \sin(\gamma - 120^\circ) + i_c \cdot \sin(\gamma + 120^\circ)]. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Примем $\gamma = 0$. Тогда $i_\alpha = i_d$, а $i_\beta = i_q$.

$$\begin{aligned} i_\alpha &= 2/3 [i_a + i_b \cdot \cos(120^\circ) + i_c \cdot \cos(120^\circ)] \\ i_\alpha &= 2/3 (i_a - 0.5 \cdot i_b - 0.5 \cdot i_c), \\ i_\beta &= -\frac{2}{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} i_b + \frac{\sqrt{3}}{2} i_c \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (i_b - i_c). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Аналогичные зависимости можно записать для потокосцеплений и напряжений:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha &= \frac{2}{3} \left[\Psi_a - \frac{1}{2} (\Psi_b + \Psi_c) \right], \\ \Psi_\beta &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi_b - \Psi_c). \end{aligned} \quad (5.97)$$

$$u_{\alpha} = \frac{2}{3} \left[u_a - \frac{1}{2}(u_b + u_c) \right], \quad (5.98)$$

$$u_{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_b - u_c).$$

Переход к системе координатных осей “а-в-с” (рисунок 5.8) можно произвести по зависимостям

$$i_a = i_{\alpha},$$

$$i_b = -\frac{1}{2}i_{\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2}i_{\beta}, \quad (5.99)$$

$$i_c = -\frac{1}{2}i_{\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2}i_{\beta}.$$

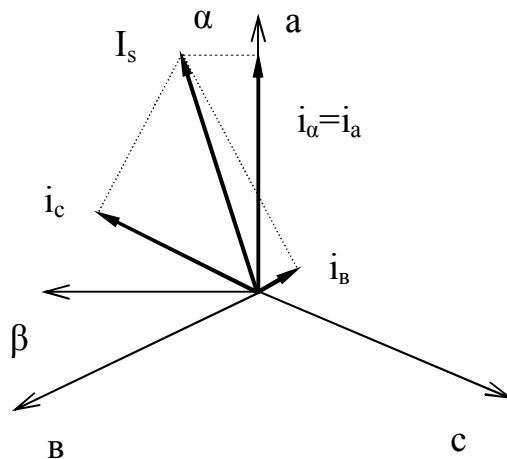


Рисунок 5.8

Так как мы рассматриваем несимметричные режимы, то, следовательно, к токам i_{α} и i_{β} необходимо добавить ток нулевой последовательности i_0

$$i_0 = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c). \quad (5.100)$$

Преимущества системы координатных осей α и β перед системой “а-в-с” состоит в том, что оси α и β смещены на угол 90^0 , т.е. для ненасыщенной

магнитной цепи можно процессы по осям α и β рассматривать отдельно. Это позволяет снизить порядок решаемой системы дифференциальных уравнений.

6 Обобщенная электрическая машина

6.1 Схема обобщенной электрической машины

Электрические машины принято подразделять на пять типов: машины постоянного тока, трансформаторы, машины переменного тока (асинхронные, синхронные, коллекторные машины). Деление электрических машин по роду питающего напряжения и по относительной частоте вращения поля и ротора условно. При определенных условиях синхронная машина может работать как асинхронная. Коллекторная машина переменного тока может подключиться к источнику постоянного тока, заторможенная асинхронная машина с фазным ротором может работать как трансформатор. Одноякорный преобразователь частоты переменное напряжение преобразует в постоянное напряжение или, наоборот, постоянное в переменное.

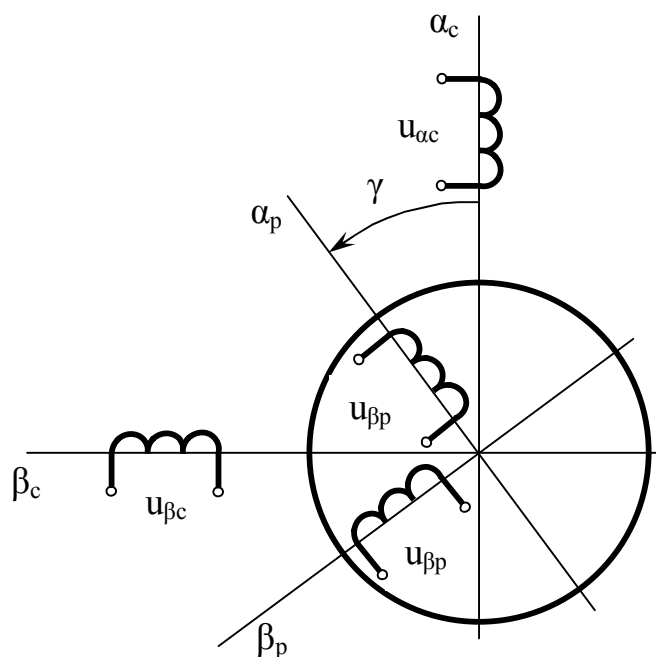


Рисунок 6.1 – Схема обобщенной электрической машины

В качестве модели обобщенной электрической машины используют различные физические объекты:

- машину постоянного тока с двумя взаимно перпендикулярными щеточными системами, расположенными по осям d и q , и, соответственно, с двумя парами обмоток на станине (Грузов Л.Н.);

- многообмоточный трансформатор, у которого в эквивалентных схемах первичная обмотка представляет собой обмотку статора, а вторичные обмотки – обмотку ротора (Казовский Е.Я);

- двухфазную двухполюсную машину, имеющую по паре обмоток на роторе и на статоре.

Принимаем в качестве обобщенной электрической машины (рисунок 6.1) симметричную двухфазную идеализированную машину, имеющую по две взаимно перпендикулярные обмотки на роторе и на статоре (трехфазные машины принято преобразовывать к двухфазным).

Обобщенная машина имеет гладкий воздушный зазор, пазы на роторе и на статоре отсутствуют. Обмотки в обобщенной машине представляют в виде токовых слоев, имеющих синусоидальное распределение МДС. Так как зазор в машине равномерный и магнитная цепь машины не насыщена, то при питании обмоток синусоидальным напряжением распределение поля в воздушном зазоре будет синусоидальным. Обобщенная машина – это математическая модель, позволяющая перейти к анализу процессов, протекающих в реальной машине. Рассмотрим, как из обобщенной электрической машины получают расчётные схемы основных типов машин.

а) Расчётная схема синхронной машины. Расчётную схему синхронной машины можно получить из модели обобщенной электрической машины при питании обмоток статора напряжениями $u_{\alpha c}$, $u_{\beta c}$ с частотой f_1 , а обмоток ротора – напряжением $u_{\alpha p}$ и $u_{\beta p}$ с частотой $f_2 = 0$ (постоянным напряжением). На статоре и на роторе по осям α и β можно добавить любое число обмоток.

б) Расчётная схема асинхронной машины. Если к обмоткам статора подвести переменное напряжение $u_{\alpha c}$ и $u_{\beta c}$, а обмотки ротора замкнуть накоротко, то получим модель асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором. Если обмотки ротора не замыкать накоротко, а подвести к ним напряжения $u_{\alpha p}$ и $u_{\beta p}$, то получим модель асинхронного двигателя двойного питания.

в) Расчётная схема трансформатора. Расчётную схему трансформатора можно получить, если затормозить ротор, а на обмотку статора подать переменное напряжение.

г) Расчётная схема машины постоянного тока. В режиме работы двигателя постоянное напряжение, подаваемое через щётки машины на коллектор, являющийся механическим преобразователем частоты, преобразуется в переменное напряжение секций якоря, и, наоборот, в режиме генератора переменное напряжение обмотки якоря преобразуется в постоянное напряжение, снимаемое со щёток. В соответствии с этим, в схеме машины постоянного тока обмотки ротора включены на преобразователь частоты. На обмотку статора по оси α , представляющую обмотку возбуждения, подаётся постоянное напряжение. Обмотка статора по оси β представляет собой обмотку добавочных полюсов. Если в машине есть компенсационная обмотка или стабилизирующая обмотка, то в схему машины вводятся дополнительные обмотки (по оси α или по оси β).

6.2 Переход от трёхфазной системы координат к двухфазной

В подразделе 5.11 рассмотрен переход от трёхфазной системы координат $a - b - c$ к системе координат $\alpha - \beta$. Аналогичный результат может быть получен при использовании следующих преобразований.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ изображающий вектор тока I , совпадает с осью фазы «а» статора, причём с этой же осью совпадает ось α_c ортогональной системы координат (рисунок 6.2). Значения фазных токов определяем, проектируя изображающий вектор на оси фаз.

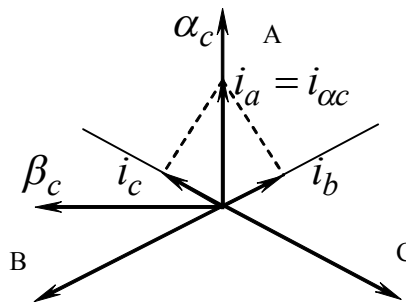


Рисунок 6.2

$$\begin{aligned} i_a &= I_{1m}; \\ i_b &= I_{1m} \cdot \cos(-2\pi/3); \\ i_c &= I_{1m} \cdot \cos(2\pi/3). \end{aligned} \quad (6.1)$$

С учётом

$$\begin{aligned} I_s &= (2/3) \cdot (i_a + a \cdot i_b + a^2 \cdot i_c) \\ I_{1m} &= (2/3) \cdot (i_a + i_b \cdot \cos(-2\pi/3) + i_c \cdot \cos(2\pi/3)) \end{aligned}$$

Значения токов в ортогональной системе координат:

$$i_{\alpha c} = I_{1m}; \quad i_{\beta c} = 0.$$

Или через токи фаз:

$$i_{\alpha c} = (2/3) \cdot (i_a - 0.5 \cdot (i_b + i_c)). \quad (6-2)$$

Совмещая изображающий вектор тока с осью β статора, получим

$$\begin{aligned}
i_a &= 0; \\
i_b &= I_{1m} \cdot \cos(\pi/6); \\
i_c &= I_{1m} \cdot \cos(5\pi/6).
\end{aligned}
\tag{6.3}$$

В случае определения модуля изображающего вектора тока

$$I_{1m} = (2/3) \cdot (i_b \cdot \cos(\pi/6) + i_c \cdot \cos(5\pi/6)).$$

В ортогональной системе координат

$$i_{\alpha c} = 0; \quad i_{\beta c} = I_{1m}.$$

Или через токи фаз

$$i_{\beta c} = (2/3) \cdot (\sqrt{3}/2) \cdot (i_b - i_c) = (i_b - i_c) / \sqrt{3}. \tag{6-4}.$$

В общем случае, когда не выполняется равенство $i_a + i_b + i_c = 0$, к токам $i_{\alpha c}$ и $i_{\beta c}$ добавляют ток нулевой последовательности.

$$i_o = (1/3) \cdot (i_a + i_b + i_c). \tag{6-5}$$

С помощью выражений, аналогичных (6-1) – (6-3), осуществляется переход от значений напряжений и потокосцеплений в осях $a - b - c$ к их значениям в осях α_c и β_c .

При переходе от токов $i_{\alpha c}$, $i_{\beta c}$, i_o к токам в трехфазной системе координат имеем

$$\begin{aligned}
i_a &= i_{\alpha c} + i_o; \\
i_b &= -0.5 \cdot i_{\alpha c} + (\sqrt{3}/2) \cdot i_{\beta c} + i_o; \\
i_c &= -0.5 \cdot i_{\alpha c} - (\sqrt{3}/2) \cdot i_{\beta c} + i_o.
\end{aligned}
\tag{6.6}$$

Таким образом, полученные зависимости позволяют провести замену трехфазной машины эквивалентной двухфазной.

6.3 Уравнения обобщенной электрической машины

Уравнения обобщенной электрической машины представляют собой систему дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений напряжений обмоток ротора и статора, уравнений потокосцеплений и уравнения движения ротора. Считаем, что обмотки ротора приведены к обмотке статора (знаки приведения опускаем). Тогда уравнения обобщенной электрической машины имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\alpha c} = r_{\alpha c} \cdot i_{\alpha c} + d\Psi_{\alpha c} / dt \\ u_{\beta c} = r_{\beta c} \cdot i_{\beta c} + d\Psi_{\beta c} / dt \\ u_{\alpha p} = r_{\alpha p} \cdot i_{\alpha p} + d\Psi_{\alpha p} / dt \\ u_{\beta p} = r_{\beta p} \cdot i_{\beta p} + d\Psi_{\beta p} / dt \\ \Psi_{\alpha c} = L_{\alpha c} \cdot i_{\alpha c} + l_{\alpha c \alpha p} \cdot i_{\alpha p} + l_{\alpha c \beta p} \cdot i_{\beta p} \\ \Psi_{\beta c} = L_{\beta c} \cdot i_{\beta c} + l_{\beta c \alpha p} \cdot i_{\alpha p} + l_{\beta c \beta p} \cdot i_{\beta p} \\ \Psi_{\alpha p} = L_{\alpha p} \cdot i_{\alpha p} + l_{\alpha p \alpha c} \cdot i_{\alpha c} + l_{\alpha p \beta c} \cdot i_{\beta c} \\ \Psi_{\beta p} = L_{\beta p} \cdot i_{\beta p} + l_{\beta p \alpha c} \cdot i_{\alpha c} + l_{\beta p \beta c} \cdot i_{\beta c} \\ M = M_c + J \cdot (d\Omega / dt) = (\Psi_{\alpha c} \cdot i_{\beta c} - \Psi_{\beta c} \cdot i_{\alpha c}) p \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Симметрия машины по осям α и β и синусоидальное распределение МДС обмоток позволяет записать равенства

$$l_{\alpha c \alpha p} = l_{\alpha p \alpha c} = l_{\beta c \beta p} = l_{\beta p \beta c} = L_m \cdot \cos(\gamma); \quad (6.8)$$

$$l_{\alpha c \beta p} = l_{\beta p \alpha c} = -L_m \cdot \sin(\gamma); \quad (6.9)$$

$$l_{\beta c \alpha p} = l_{\alpha p \beta c} = L_m \cdot \sin(\gamma). \quad (6.10)$$

Эти уравнения полностью определяют динамические и статические процессы в обобщенной электрической машине. Их решение сводится к нахождению токов в обмотках и частоты вращения ротора при заданных напряжениях.

Проецируя вектор напряжения

$$\bar{u}_s = U_{1m} \cdot \exp[j(\omega_1 t + \alpha_0)] = U_{1m} \cdot [\cos(\omega_1 t + \alpha_0) + j \sin(\omega_1 t + \alpha_0)] \quad (6.11)$$

$$\bar{u}_p = U_{2m} \cdot \exp[j(\omega_2 t + \alpha_2)] = U_{2m} \cdot [\cos(\omega_2 t + \alpha_2) + j \sin(\omega_2 t + \alpha_2)] \quad (6.12)$$

на соответствующие оси, получим

$$\begin{aligned}
u_{\alpha c} &= \operatorname{Re} \bar{u}_s = U_{1m} \cdot \cos(\omega_1 t + \alpha_0); \\
u_{\beta c} &= \operatorname{Im} \bar{u}_s = U_{1m} \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha_0); \\
u_{\alpha p} &= \operatorname{Re} \bar{u}_p = U_{2m} \cdot \cos(\omega_2 t + \alpha_2); \\
u_{\beta p} &= \operatorname{Im} \bar{u}_p = U_{2m} \cdot \sin(\omega_2 t + \alpha_2),
\end{aligned}
\tag{6.13}$$

где ω_1 - угловая частота напряжения сети;

ω_2 - угловая частота вращения вектора U_p относительно осей ротора;

α_0 - фазный угол вектора напряжения относительно оси α_c в момент $t = 0$;

α_2 - фазный угол вектора напряжения U_p относительно оси α_p в момент $t = 0$.

При питании обмоток ротора постоянным напряжением $\omega_2 = 0$.

Однако данная система уравнений решения в общем виде не имеет, так как коэффициенты при токах в выражениях потокосцеплений являются периодическими функциями.

7 Устойчивость синхронных машин

7.1 Общая характеристика устойчивости синхронных машин

Одним из основных свойств синхронной машины является строгое соответствие скорости вращения ротора частоте напряжения сети, в которую включена машина. Однако при работе синхронной машины могут возникать возмущения нормального режима работы вследствие изменения параметров синхронной машины, напряжения сети или момента на валу. Переходной процесс, сопровождающий возмущение, может развиваться двояко. Либо он заканчивается установлением нового нормального режима, либо нормальный режим оказывается невозможным. В соответствии с этим все нормальные режимы синхронной машины можно разделить на две категории:

- если в результате возмущения возникает новый установившийся нормальный режим, то исходный режим называется устойчивым;
- если после возмущения нормальный режим работы не возможен, то исходный режим называется неустойчивым.

Возможны два вида возмущений:

- возмущения малы;
- величина возмущений конечна.

Устойчивость при наличии возмущений первого вида называется устойчивостью в малом или статической устойчивостью.

Устойчивость при конечных возмущениях называется устойчивостью в большом или динамической устойчивостью.

Так как статическая устойчивость синхронной машины связана с достаточно малыми возмущениями, то она однозначно определяется параметрами исходного режима. Рассмотрение статической устойчивости позволяет определить, осуществим ли заданный режим работы машины. Аналитические исследования статической устойчивости основаны на анализе линеаризованных уравнений машины.

Динамическая устойчивость зависит от величины и характера возмущения. При исследовании динамической устойчивости скорость вращения ротора является величиной переменной. Поэтому, строгое рассмотрение динамической устойчивости связано с решением системы нелинейных дифференциальных уравнений. Следовательно, методы исследования статической и динамической устойчивости – различны.

7.2 Типы нарушений статической устойчивости

Нарушения статической устойчивости синхронной машины, работающей от сети с постоянной частотой и неизменным напряжением, могут быть разделены на три вида:

а) при определённом соотношении параметров синхронной машины и нагрузки возможно апериодическое нарушение устойчивости или сползание, которое характеризует собой предел статической устойчивости перегруженной синхронной машины;

б) в некоторых случаях работы возможно самовозбуждение периодических колебаний частоты вращения ротора синхронной машины. Такое нарушение устойчивости известно под названием «самораскачивание». Суть явления заключается в следующем. Машина получает случайное возмущение извне и в дальнейшем ротор вращается с колебанием скорости;

в) при работе синхронной машины с ёмкостным сопротивлением в цепи статора могут возникать электромагнитные явления типа «самовозбуждения». Самовозбуждение характеризуется самопроизвольным ростом тока и напряжения, что приводит к недопустимому возрастанию электромагнитных нагрузок машины (тока статора).

Нарушение статической устойчивости синхронной машины при сползании и самораскачивании связано с изменением скорости вращения ротора, поэтому переходной процесс представляет электромеханический переходной процесс и описывается полной системой уравнений Парка-Горева. При переменной частоте вращения эта система является нелинейной. Ляпунов доказал, что исследование статической устойчивости можно производить с помощью линеаризованной системы уравнений.

7.3 Линеаризация основных уравнений машины

Если возмущения бесконечно малы, то отклонения электромагнитных величин и угла нагрузки Θ от исходных значений также бесконечно малы, т.е.

можем принять, что $\Theta = \Theta_o + \Delta\Theta$. Предполагаем, что возмущение $\Delta\Theta$ происходит в виде гармонических колебаний

$$\Delta\Theta = \Delta\Theta_m \cdot \cos(h \cdot t), \quad (7.1)$$

где h - частота гармонических колебаний.

В этом случае $\omega = \omega_1 - \frac{d\Theta}{dt}$, или в системе относительных единиц $\omega = 1 - s$, где s - скольжение, а ω_1 - синхронная скорость.

$$s = -\frac{d\Theta}{dt} = h \cdot \Delta\Theta_m \cdot \sin(h \cdot t) \quad (7.2)$$

Изменение угла нагрузки Θ на величину $\Delta\Theta$ вызывает соответствующее изменение электромагнитных величин, например,

$$u_d = u_{d0} + \Delta u_d, \quad u_q = u_{q0} + \Delta u_q, \quad (7.3)$$

$$u_f = u_{f0} + \Delta u_f, \quad i_d = i_{d0} + \Delta i_d \text{ и т.д.}$$

Составляющие с индексом «0» соответствуют исходному установившемуся режиму работы, а с индексом Δ - бесконечно малому возмущению.

Уравнения синхронной машины в осях $d - q$ можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} u_{d0} + \Delta u_d &= D(\psi_{d0} + \Delta\psi_d) - (\psi_{q0} + \Delta\psi_q) \cdot (1 - s) + r \cdot (i_{d0} + \Delta i_d) \\ u_{q0} + \Delta u_q &= D(\psi_{q0} + \Delta\psi_q) + (\psi_{d0} + \Delta\psi_d) \cdot (1 - s) + r \cdot (i_{q0} + \Delta i_q) \\ u_{f0} + \Delta u_f &= D(\psi_{f0} + \Delta\psi_f) + r_f \cdot (i_{f0} + \Delta i_f) \\ 0 &= D(\psi_{yd0} + \Delta\psi_{yd}) + r_{yd} \cdot (i_{yd0} + \Delta i_{yd}) \\ 0 &= D(\psi_{yq0} + \Delta\psi_{yq}) + r_{yq} \cdot (i_{yq0} + \Delta i_{yq}) \\ (\psi_{d0} + \Delta\psi_d) \cdot (i_{q0} + \Delta i_q) - (\psi_{q0} + \Delta\psi_q) \cdot (i_{d0} + \Delta i_d) &= M_{ct} + H \cdot D(1 - s) \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$M_{ct} = const.$$

Ляпунов доказал, что можно разделить представленную систему уравнений на две системы. В одной системе сгруппировать все параметры и производные параметров, относящиеся к установившемуся режиму работы. Во второй – все параметры и их производные, вызванные бесконечно малым изменением угла нагрузки Θ . Причём с достаточной точностью можно пренебречь произведением бесконечно малых величин.

Из системы уравнений для установившегося режима работы определяются исходные значения напряжений, токов и потокосцеплений и считают эти величины известными. Тогда уравнения для малых приращений запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_d &= D\Delta\psi_d + \psi_{q0} \cdot s - \Delta\psi_q + r \cdot \Delta i_d \\
 \Delta u_d &= D\Delta\psi_d + \psi_{q0} \cdot D\Delta\Theta - \Delta\psi_q + r \cdot \Delta i_d \\
 \Delta u_q &= D\Delta\psi_q - \psi_{d0} \cdot D\Delta\Theta + \Delta\psi_d + r \cdot \Delta i_q \\
 \Delta u_f &= D\Delta\psi_f + r_f \cdot \Delta i_f \\
 0 &= D\Delta\psi_{yd} + r_{yd} \cdot \Delta i_{yd} \\
 0 &= D\Delta\psi_{yq} + r_{yq} \cdot \Delta i_{yq} \\
 \psi_{d0} \cdot \Delta i_q + \Delta\psi_d \cdot i_{q0} - \psi_{q0} \cdot \Delta i_d - \Delta\psi_q \cdot i_{d0} &= -H \cdot D^2 \Delta\Theta
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Для решения этой системы уравнений необходимо определить величины Δu_d и Δu_q . Рассматриваем двигательный режим работы. Машина недовозбуждена.

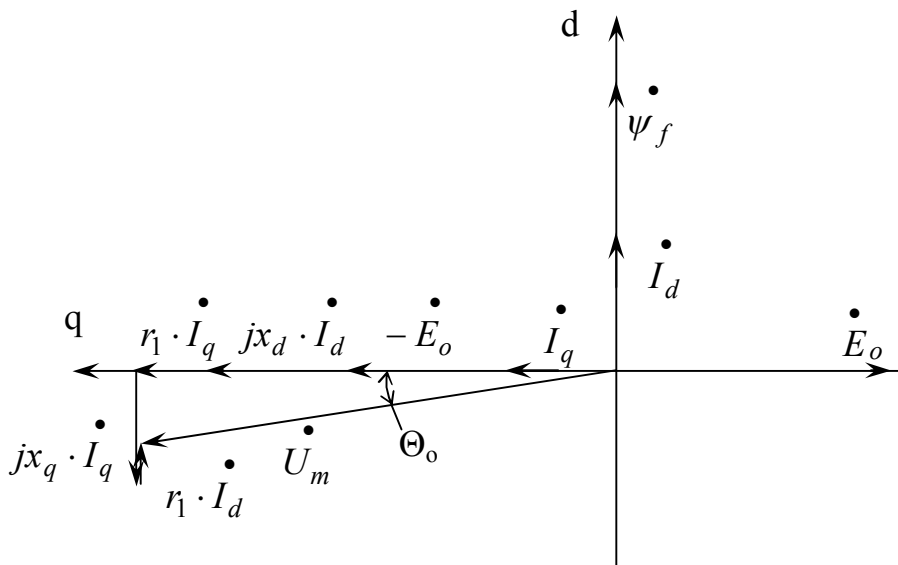


Рисунок 7.1

Из векторной диаграммы (рисунок 7.1) имеем:

$$\begin{aligned}
 u_d &= -U_m \cdot \sin(\Theta); \\
 u_q &= U_m \cdot \cos(\Theta).
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

В исходном установившемся режиме работы имеем:

$$\begin{aligned} u_{d0} &= -U_m \cdot \sin(\Theta_0); \\ u_{q0} &= U_m \cdot \cos(\Theta_0). \end{aligned} \quad (7.7)$$

В результате возмущения системы будем иметь:

$$\begin{aligned} u_{d0} + \Delta u_d &= -U_m \cdot \sin(\Theta_0 + \Delta\Theta) = \\ &= -U_m \cdot \sin(\Theta_0) \cdot \cos(\Delta\Theta) - U_m \cdot \cos(\Theta_0) \cdot \sin(\Delta\Theta). \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} u_{q0} + \Delta u_q &= U_m \cdot \cos(\Theta_0 + \Delta\Theta) = \\ &= U_m \cdot \cos(\Theta_0) \cdot \cos(\Delta\Theta) - U_m \cdot \sin(\Theta_0) \cdot \sin(\Delta\Theta). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Величина $\Delta\Theta$ мала. Следовательно, $\cos(\Delta\Theta) \approx 1$ и $\sin(\Delta\Theta) \approx \Delta\Theta$. Произведя соответствующие замены, получим

$$\begin{aligned} u_{d0} + \Delta u_d &= -U_m \cdot \sin(\Theta_0) - U_m \cdot \cos(\Theta_0) \cdot \Delta\Theta. \\ \Delta u_d &= -U_{q0} \cdot \Delta\Theta; \\ \Delta u_q &= U_{d0} \cdot \Delta\Theta. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Система уравнений (7.5) содержит дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и является линеаризованной. Она может быть использована для исследования сползания и самораскачивания.

7.4 Методы исследования статической устойчивости на основе малых гармонических колебаний

Решение системы уравнений (7.6) относительно $\Delta\Theta$ в общем виде можно записать следующим образом:

$$\Delta\Theta = A_1 \cdot \exp(p_1 t) + A_2 \cdot \exp(p_2 t) + A_3 \cdot \exp(p_3 t) + \dots, \quad (7.11)$$

где A_1, A_2, \dots – постоянные интегрирования;

p_1, p_2, \dots – корни характеристического уравнения.

Система устойчива, если $\Delta\Theta \rightarrow 0$, т.е. вещественные корни характеристического уравнения, а также действительная часть комплексных корней являются отрицательными.

На практике систему уравнений (7.6) не решают, а пользуются анализом корней характеристического уравнения системы:

$$a_0 \cdot p^7 + a_1 \cdot p^6 + a_2 \cdot p^5 + a_3 \cdot p^4 + a_4 \cdot p^3 + a_5 \cdot p^2 + a_6 \cdot p + a_7 = 0. \quad (7.12)$$

Если успокоительной обмотки нет, то порядок уравнения снижается на два.

Анализируя корни характеристического уравнения можно определить, что границе области устойчивости соответствуют два случая:

- первый случай. Один из корней характеристического уравнения равен нулю. Это имеет место, когда коэффициент a_7 равняется нулю. В этом случае при выходе синхронной машины из области устойчивости появляется один положительный корень и наступает аperiodическая неустойчивость (сползание).

- второй случай. Пара корней характеристического уравнения является чисто мнимой. В этом случае при переходе синхронной машины через границу области устойчивости возникает колебательная неустойчивость.

Анализ уравнений синхронной машины показывает, что коэффициент a_7 характеристического уравнения зависит от параметров установившегося режима работы (см. книгу А.И. Важнова «Переходные процессы синхронных машин»).

Установлено, что коэффициент a_7 пропорционален синхронизирующему моменту. Следовательно, $a_7 = 0$, когда синхронизирующий момент равен нулю. Это говорит о том, что граница сползания характеризует предел статической перегружаемости синхронной машины.

Исследования самораскачивания показывают, что это явление в значительной мере зависит от величины активного сопротивления обмотки статора.

Анализ корней уравнения седьмой степени представляет значительные трудности, т.к. решения уравнения в общем виде не существует. Поэтому на практике пользуются различными критериями устойчивости, которые позволяют сделать заключение об устойчивом или неустойчивом режиме работы без решения системы и анализа корней.

Наибольшее распространение имеют критерии Гурвица и Рауса. Эти критерии основаны на том, что при определённых соотношениях между коэффициентами характеристического уравнения все вещественные корни отрицательны, а комплексные корни имеют отрицательную вещественную часть.

В соответствии с критерием Гурвица для обеспечения устойчивости необходимо и достаточно, чтобы определители, составленные из коэффициентов характеристического уравнения, были положительными. Для анализа Гурвиц предлагает найти определитель следующим образом:

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & a_6 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 \end{vmatrix}, \Delta_6, \Delta_5, \Delta_4 \text{ и т.д.} \quad (7.13)$$

Понижение степени определителя производится вычёркиванием последней строки и последнего столбца.

Согласно критерию Гурвица система будет работать устойчиво, если все определители Δ и коэффициент a_7 являются положительными величинами, т.е.

$$\Delta_7 > 0, \Delta_6 > 0, \Delta_5 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_2 > 0 \text{ и т.д.}$$

$$\Delta_7 = a_7 \cdot \Delta_6. \quad (7.14)$$

Критерий Рауса. По сущности критерий Рауса аналогичен критерию Гурвица.

Для оценки устойчивости работы синхронной машины составляется таблица Рауса. Таблица имеет восемь строк и четыре столбца.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ c_{13} = a_2 - \frac{a_0 \cdot a_3}{a_1} & c_{23} = a_4 - \frac{a_0 \cdot a_5}{a_1} & c_{33} = a_6 - \frac{a_0 \cdot a_7}{a_1} & - \\ c_{14} = a_3 - \frac{a_1 \cdot c_{23}}{c_{13}} & c_{24} = a_5 - \frac{a_1 \cdot c_{33}}{c_{13}} & a_7 & - \\ c_{15} = c_{23} - \frac{c_{13} \cdot c_{24}}{c_{14}} & c_{25} = c_{33} - \frac{c_{13} \cdot a_7}{c_{14}} & - & - \\ c_{16} = c_{24} - \frac{c_{14} \cdot c_{25}}{c_{15}} & a_7 & - & - \\ c_{17} = c_{25} - \frac{c_{15} \cdot a_7}{c_{16}} & - & - & - \\ a_7 & - & - & - \end{vmatrix} \quad (7.15)$$

Чтобы система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты первого столбца были положительными.

Равенство нулю коэффициента a_7 соответствует явлению сползания.

Равенство нулю коэффициента c_{17} соответствует границе устойчивости; при дальнейшем уменьшении коэффициента c_{17} ($c_{17} < 0$) наступает самораскачивание.

Если становятся равными нулю или отрицательными коэффициенты c_{16}, c_{15} и т.д., а коэффициенты c_{17} и a_7 положительные, это говорит о том, что шаг изменения параметров выбран неудачно и необходимо приращению параметров уменьшить. Например, анализировалась зависимость $\Delta\Theta = f(r_1)$. Задавались значения $\Delta\Theta = 0., 0.1, 0.2, \dots$ (при $r_1 = const$). Коэффициенты c_{16}, c_{15}, \dots - стали отрицательными, а коэффициенты c_{17} и a_7 - положительные. Для продолжения исследования надо принимать $\Delta\Theta = 0., 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ и т.д.

7.5 Влияние параметров синхронной машины на устойчивость при сползании и самораскачивании

Чтобы спроектировать синхронную машину, работающую устойчиво в заданном режиме, необходимо знать влияние параметров, нагрузки, возбуждения и т.д. на область устойчивой работы. Исследования показали, что влияние параметров на устойчивость работы проявляется в следующем:

- перегрузочная способность (сползание) зависит только от параметров установившегося режима работы. С увеличением потока возбуждения, или с увеличением зазора при сохранении потока возбуждения перегрузочная способность синхронной машины возрастает.

- увеличение активного сопротивления в цепи обмотки статора приводит к уменьшению перегрузочной способности.

Величина области самораскачивания определяется как параметрами установившегося режима работы, так и переходного.

Рассмотрим синхронную машину без успокоительной обмотки. Области устойчивости такой машины строятся в координатах Θ, r_1 (рисунок 7.2).

Например, синхронная машина работает в режиме двигателя. Задаются значением угла Θ ($\Theta = \Theta_1$) и изменяют сопротивление r_1 . Например, сопротивление $r_{13} = 0$ соответствует границе устойчивости. Берут Θ_2 и снова изменяют сопротивление r_1 . С увеличением сопротивления область неустойчивого режима работы возрастает.

На область неустойчивости влияет момент инерции маховых масс. В случае, когда имеется мощная демпферная система или ротор массивный области самораскачивания перемещаются в сторону больших активных сопротивлений и больших ЭДС. При полной успокоительной обмотке область неустойчивости проявляется незначительно. Устранение самораскачивания возможно

не только при помощи успокоительной обмотки, но и путём автоматического регулирования возбуждения синхронной машины.

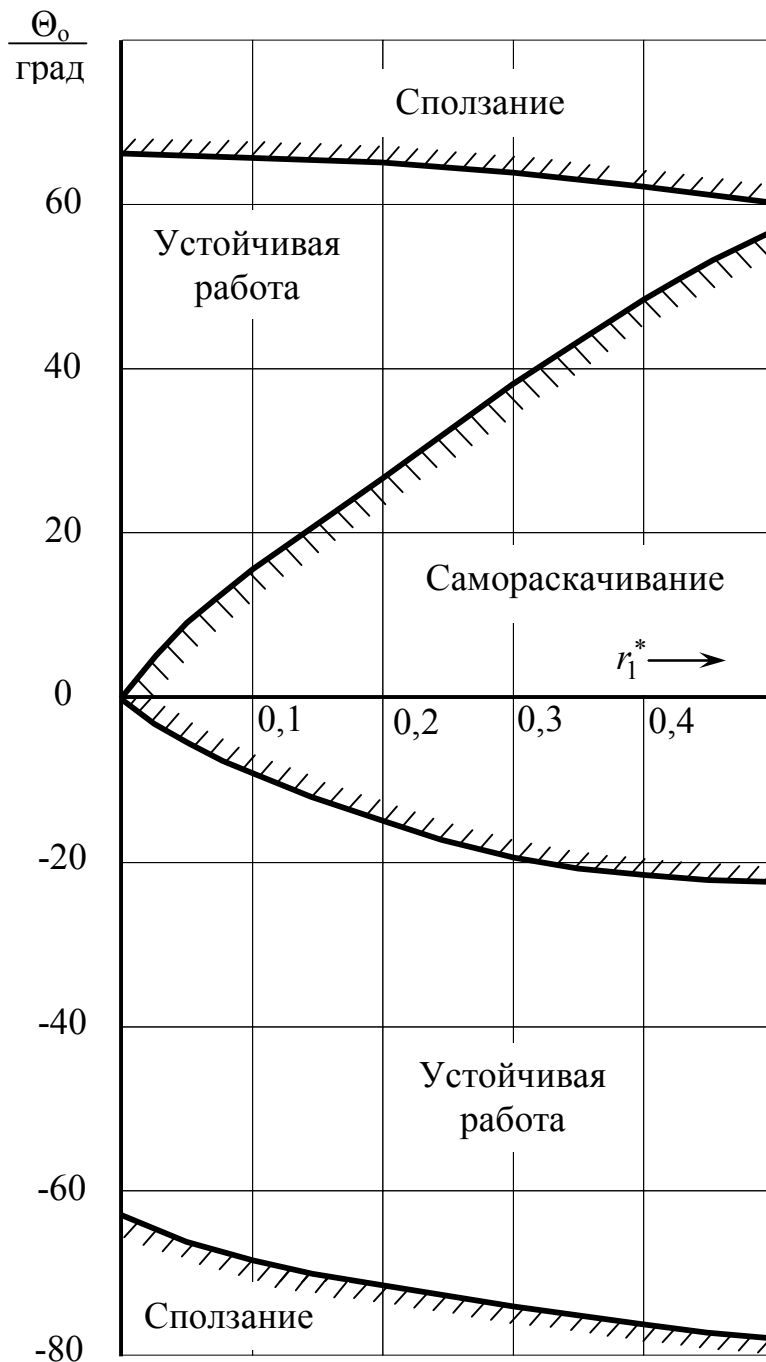


Рисунок 7.2 – Области устойчивой работы синхронной машины

Исследования влияния электромагнитных параметров показали, что применение быстродействующих систем возбуждения с регулятором сильного действия полностью снимает вопрос устойчивости. Например, снятие ограничений по величине X_d и X_q позволяет снизить затраты на 186 тыс. руб. (в ценах 1974 года).

7.6 Самовозбуждение синхронной машины при наличии ёмкости в цепи обмотки статора

Работа синхронной машины при наличии ёмкости в цепи статора может сопровождаться возникновением самовозбуждения. При работе синхронной машины на ёмкостную нагрузку периодически изменяющаяся индуктивность фаз обмотки и ёмкость образуют колебательную систему. В этой колебательной системе при определённом соотношении параметров возникают самопроизвольные колебания с возрастающей амплитудой. Для возникновения самовозбуждения не требуется возбуждения со стороны ротора, а достаточно наличие остаточного магнитного потока. Т.е. явление самовозбуждения возникает в случае работы синхронной машины в асинхронном режиме.

Также как и при анализе сползания можем не решать систему уравнений, а ограничиться анализом корней характеристического уравнения.

Предположим, что демпферная обмотка отсутствует. Уравнение равновесия напряжения в фазовой системе координат будет содержать интеграл от произведения $X_c \cdot i_a$,

$$u_a = \frac{d\psi_a}{dt} + r_1 \cdot i_a \int X_c \cdot i_a dt. \quad (7.16)$$

Прежде чем перейти к системе координатных осей «d-q» дифференцируем уравнения.

$$\begin{cases} \frac{du_d}{dt} - U_q \cdot \omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \omega + r_1 \cdot i_d \right) - \omega \left(\frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \omega + r_1 \cdot i_q \right) + X_c \cdot i_d \\ \frac{du_q}{dt} + U_d \cdot \omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \omega + r_1 \cdot i_q \right) - \omega \left(\frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \omega + r_1 \cdot i_d \right) + X_c \cdot i_q \\ u_f = \frac{d\psi_f}{dt} + r_f \cdot i_f \end{cases} \quad (7.17)$$

Принимаем, что сеть имеет бесконечную мощность, тогда $\frac{du_d}{dt} = 0$ и $\frac{du_q}{dt} = 0$. Полагаем, что $\omega = 1$.

Подставляя вместо потокосцеплений их выражения, получим систему и запишем определитель

$$a_0 \cdot p^5 + a_1 \cdot p^4 + a_2 \cdot p^3 + a_3 \cdot p^2 + a_4 \cdot p + a_5 = 0. \quad (7.18)$$

Анализ устойчивости работы синхронной машины можно производить с помощью критерия Гурвица.

Самовозбуждение возникает, если коэффициент $a_5 < 0$.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} \quad a_4 < 0 \text{ и т.д.} \quad (7.19)$$

Коэффициенты (7.20) определяются через параметры:

$$\begin{cases} a_0 = x_q \cdot x'_d \cdot T_{do} \\ a_1 = r_1(x_q + x'_d) \cdot T_{do} + x_d \cdot x_q \\ a_2 = (2x_q x'_d + x_c x'_d + x_c x_q) \cdot T_{do} + r_1^2 T_{do} + r_1(x_d + x_q) \\ a_3 = r_1(2x_c + x_q + x'_d) \cdot T_{do} + x_c x_d + x_c x_q + 2x_d \cdot x_q + r_1^2 \\ a_4 = (x_c - x_q)(x_c - x'_d) \cdot T_{do} + r_1^2 T_{do} + r_1(2x_c + x_q + x_d) \\ a_5 = (x_c - x_d)(x_c - x_q) + r_1^2 \end{cases} \quad (7.20)$$

Исследования, проведённые за границей и у нас, показывают, что анализ самовозбуждения можно проводить, исследуя только Δ_4 и a_5 . Самовозбуждение возможно при наличии корней (7.19) с положительной вещественной частью. Согласно критерию Гурвица это возможно, если $a_5 < 0$ и $\Delta_4 < 0$.

Границу зоны самовозбуждения получают, решая уравнение

$$a_5 = (x_c - x_d)(x_c - x_q) + r_1^2 = 0. \quad (7.21)$$

После преобразования получаем:

$$\left[X_c - \frac{X_d + X_q}{2} \right]^2 + r_1^2 = \left[\frac{X_d - X_q}{2} \right]^2. \quad (7.22)$$

Уравнение (7.22) – это уравнение окружности с центром на оси ординат в точке $X_c = 0,5 \cdot (X_d + X_q)$ и с радиусом $R = 0,5 \cdot (X_d - X_q)$ (рисунок 7.3). Границы зоны самовозбуждения не зависят от постоянной времени T_{do} . Следовательно, самовозбуждение возникает, когда обмотка возбуждения либо замкнута, либо разомкнута.

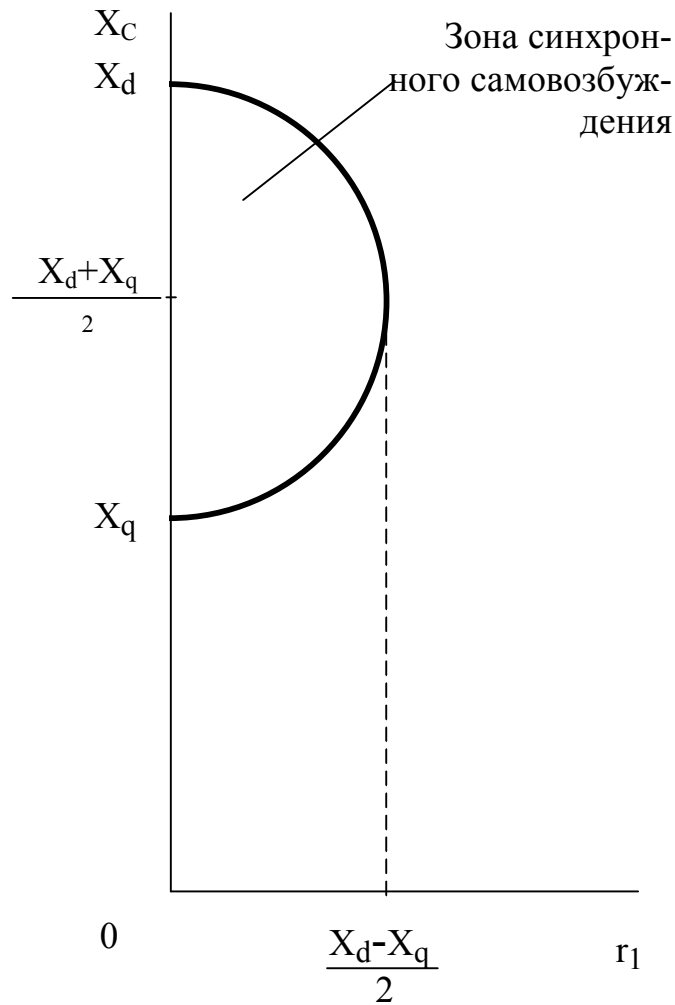


Рисунок 7.3

При работе машины с параметрами, входящими в эту область, поле статора вращается синхронно с ротором. Эту зону называют зоной синхронного возбуждения.

Приравнивая $\Delta_4 = 0$, получаем следующую зону.

В первом приближении зону асинхронного самовозбуждения можно получить, полагая $a_4 = 0$. Эта зона представляет часть эллипса. При больших значениях постоянной времени T_{do} зона превращается в окружность. Центр окружности $\frac{X_q + X'_d}{2}$ (рисунок 7.4).

Для асинхронного самовозбуждения необходимо, чтобы обмотка возбуждения была замкнута накоротко.

При наличии демпферной обмотки зона синхронного самовозбуждения остаётся прежней. Вторая зона, ограниченная окружностью, остаётся постоянной, а третья – расширяется.

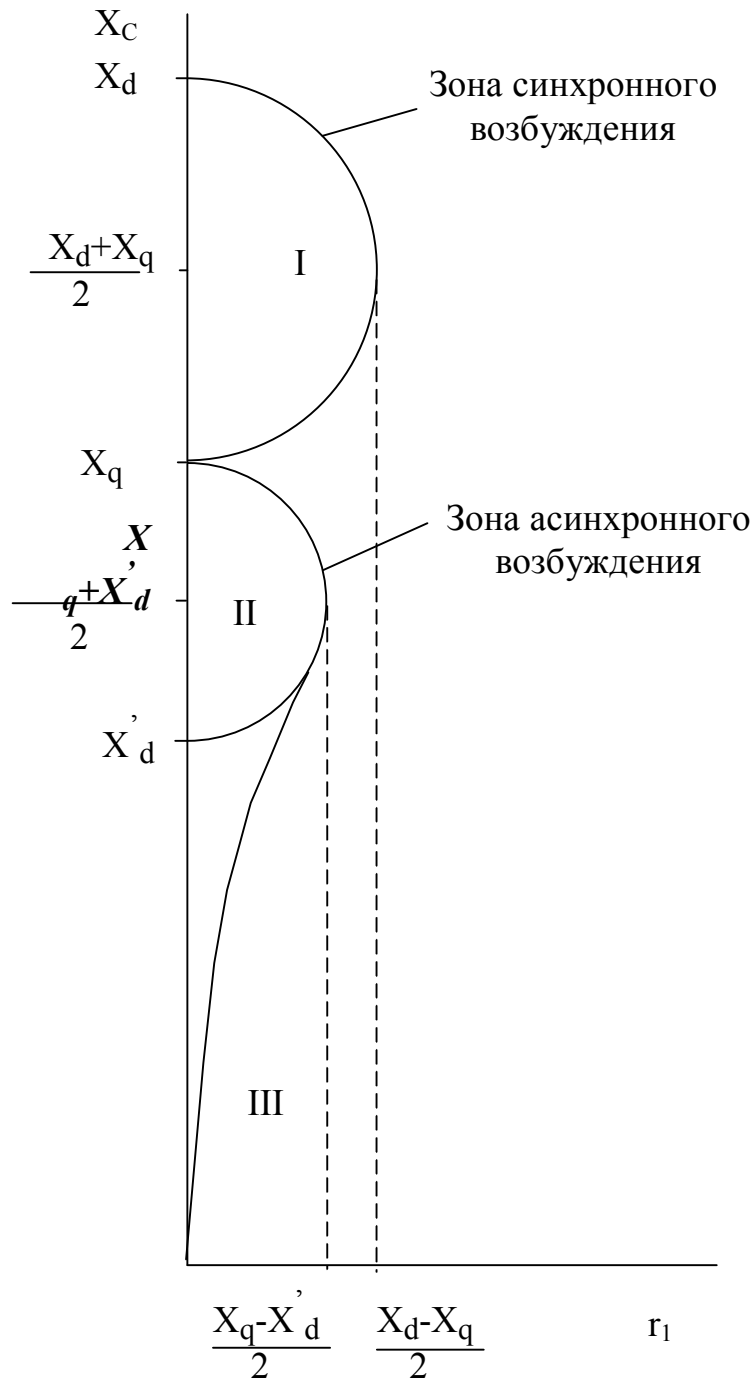


Рисунок 7.4 – Зоны самовозбуждения явнополюсной синхронной машины без успокоительной обмотки

Самовозбуждение синхронной машины в ряде случаев используют как положительный эффект (существуют автономные генераторы с ёмкостным самовозбуждением).

7.7 Динамическая устойчивость синхронной машины

Динамической устойчивостью называется устойчивость при конечных возмущениях. При конечных возмущениях синхронная машина может испытывать значительные колебания, которые заканчиваются установлением нового режима работы, либо нарушением синхронизма. При колебаниях ротор синхронной машины вращается неравномерно, и его частота вращения колеблется с некоторой частотой около средней частоты вращения.

Одновременно с колебанием скорости происходит колебание угла нагрузки Θ . Колебания синхронной машины бывают вынужденными и свободными. Вынужденные – возникают в случае, когда механический момент на валу машины $M_{\text{мех}}$ не остается постоянным и содержит пульсирующую составляющую. Такое положение возможно при работе синхронной машины с поршневым двигателем. Вынужденные колебания становятся опасными, если их частота близка к частоте свободных колебаний. Возникающий при этом резонанс колебаний может привести машину к выпадению из синхронизма. Для уменьшения вынужденных колебаний синхронную машину снабжают маховиком или ротор машины выполняют с повышенным маховым моментом. Снижение амплитуды вынужденных колебаний достигается выполнением на роторе демпферной обмотки. Свободные колебания ротора обусловлены самой природой синхронной машины, т.к. при параллельной работе синхронной машины с сетью она представляет колебательную систему. При $n=\text{const}$ электромагнитный момент синхронной машины уравнивает статический момент сопротивления. Если по тем или иным причинам моменты не уравновешены, то в уравнении моментов появляется динамический момент.

Двигатель работал с нагрузкой, соответствующей M_1 . В момент времени t_0 произошло возмущение. Момент M_1 возрос до значения M_2 . Как будет изменяться угол нагрузки во времени?

В силу наличия момента инерции ротор не может занять положение, соответствующее углу Θ_2 (рисунок 7.5). Под действием ΔM ротор начнет тормозиться. Скорость падает, угол нагрузки Θ растет (рисунок 7.6). При $\Theta=\Theta_2$, т.е. $M_{\text{вр}}=M_{\text{нагр}}$, момент электромагнитный соответствует моменту на валу ($\Delta M=0$) и уменьшение скорости прекращается. Т.к. $\omega < \omega_c$, то ротор продолжает отставать от оси поля статора. Это приводит к тому, что угол Θ станет больше Θ_2 , момент вращения $M_{\text{вр}}$ станет больше момента нагрузки $M_{\text{нагр}}$.

При t_2 $\omega = \omega_c$, но ротор отстал от поля на угол Θ_3 . Ротор разгоняется до скорости больше синхронной. Угол нагрузки Θ начинает уменьшаться и в момент времени t_3 $\Theta=\Theta_2$. Но $\omega > \omega_c$, и ротор пытается догнать поле статора. Как только угол нагрузки Θ станет меньше угла Θ_2 , появится тормозной момент.

При $t=t_4$ $\omega = \omega_c$, но $\Theta_1 < \Theta < \Theta_2$. Если бы отсутствовали силы сопротивления, то в момент времени t_4 угол нагрузки Θ равнялся бы углу Θ_1 и в дальнейшем колебательный процесс повторялся бы.

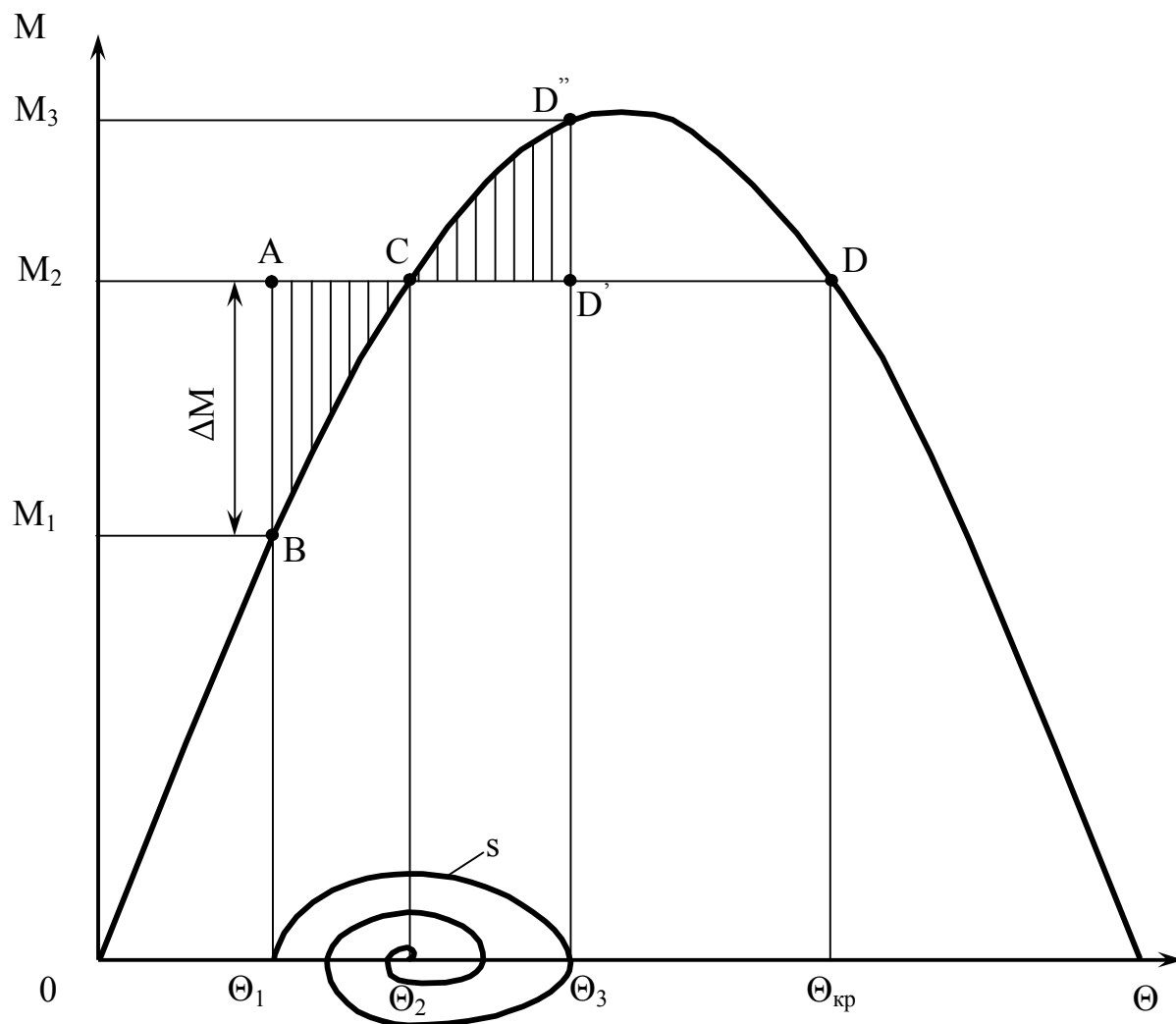


Рисунок 7.5

Наличие сил торможения приводит к тому, что $\Theta_1 < \Theta < \Theta_2$. Эти силы сопротивления обусловлены силами трения (в подшипниках, бочки ротора о воздух и т.д.). Кроме этого, на роторе выполняют демпферную обмотку, создающую асинхронный тормозной момент. Если частота вращения ротора ниже синхронной, то асинхронный момент стремится затормозить уменьшение частоты вращения ротора, т.е. является подкручивающим моментом. Если частота вращения ротора выше синхронной, то асинхронный момент является генераторным и тормозит ротор.

Таким образом, после времени t_4 картина повторяется с учетом того, что амплитуда колебаний уменьшается, частота вращения стремится к синхронной, а угол нагрузки Θ стремится к Θ_2 .

Простейшее возмущение – это внезапное изменение какого-либо параметра, остающееся в дальнейшем неизменным.

Кроме простейших возмущений возможны возмущения в виде импульса, а также изменение нагрузки сложным способом.

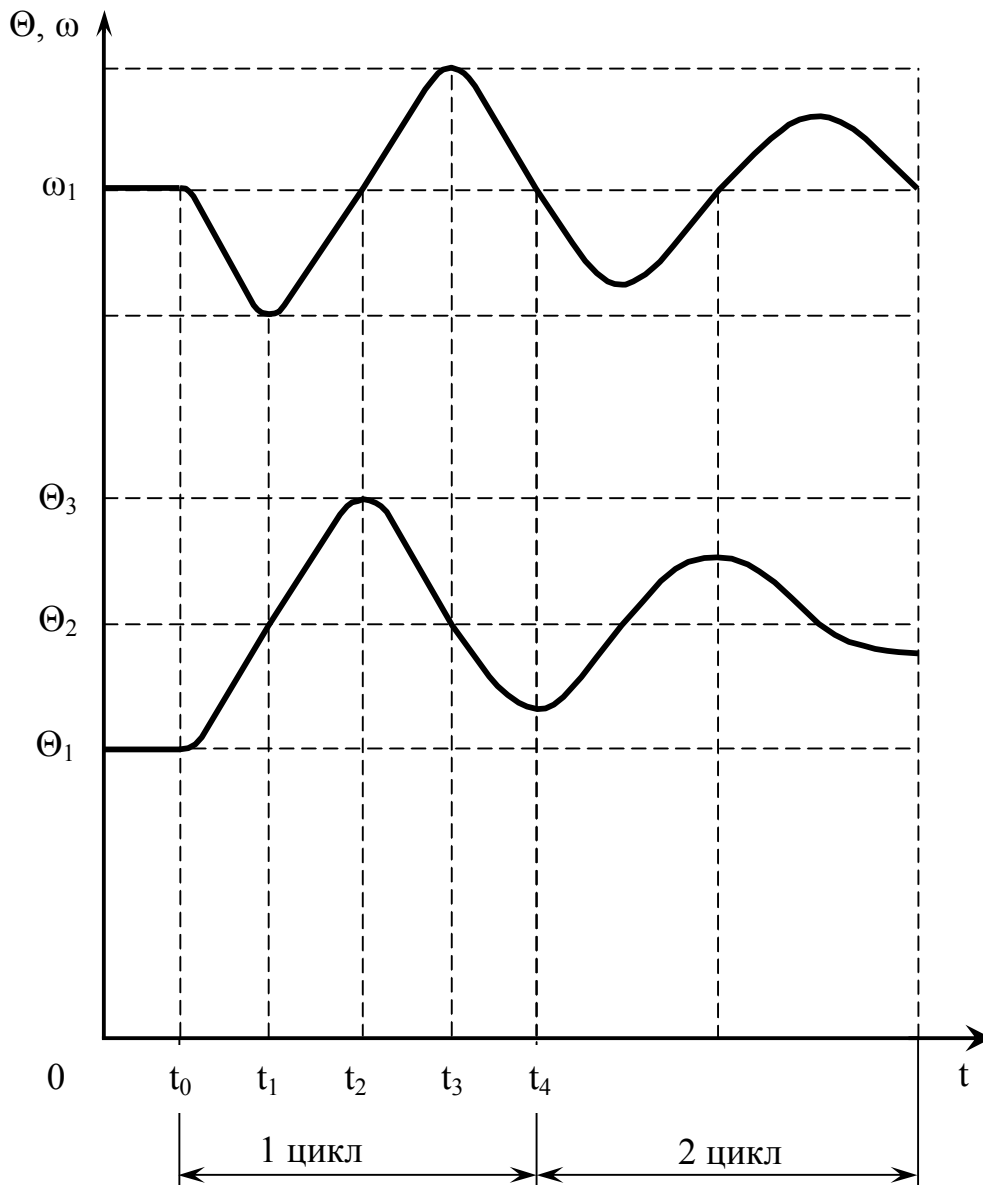


Рисунок 7.6

Исследование динамической устойчивости синхронной машины состоит в проверке сохранения машиной синхронизма для заданного динамического нарушения режима работы, а также в определении пределов допустимых возмущений, соответствующих границе динамической устойчивости.

При исследованиях динамической устойчивости синхронных машин частота вращения ротора является неизвестной и переменной. Поведение синхронной машины в этих режимах описывается полной системой дифференциальных уравнений. При переменной частоте вращения эта система является нелинейной и решения в общем виде не имеет. Аналитические методы исследования являются сложными и даже при значительных упрощениях не находят применения.

Исследование динамической устойчивости может проводиться с помощью АВМ. Достоинством АВМ является высокая наглядность решения, т.к. все интересующие электромагнитные величины получаются в виде осциллограмм. Точность решения является удовлетворительной для инженерных расчетов.

Кроме исследования на АВМ применяют графоаналитический метод расчета (метод площадей). Метод позволяет в первом приближении определить границу динамической устойчивости.

7.8 Анализ динамической устойчивости методом площадей

Метод основан на анализе статической угловой характеристики.

$$M = \frac{E_0 \cdot U_m}{x_d} \sin(\Theta). \quad (7.23)$$

Предположим, что машина работала устойчиво в точке А. Выйдет ли машина из синхронизма при увеличении нагрузки со значения M_1 до значения M_2 (бросок нагрузки ΔM). Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить энергию, расходуемую ротором при торможении:

$$A_{\text{торм}} = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \Delta M d\Theta. \quad (7.24)$$

Интегралу (7.24) на рисунке 7.7 соответствует площадь фигуры ABC. Энергия, запасаемая ротором при ускорении

$$A_{\text{ускор}} = \int_{\Theta_2}^{\Theta_3} \Delta M d\Theta. \quad (7.25)$$

Интегралу (7.25), в предельном случае, соответствует площадь фигуры BEDF.

Практически, для ответа на поставленный вопрос определяется площадь треугольника ABC и площадь фигуры BEDF выше прямой $M_1 + \Delta M$ (рисунок 7.7). Если эта площадь треугольника ABC меньше площади фигуры BEDF, то работа машины будет устойчивой. Из-за наличия потерь мощности на трение колебания ротора будут затухать во времени, а скольжение s будет изменяться по спирали (рисунок 7.7).

Если эту операцию произвести нельзя, то машина работать устойчиво не будет. Площадь треугольника ABC больше площади фигуры BEDF.

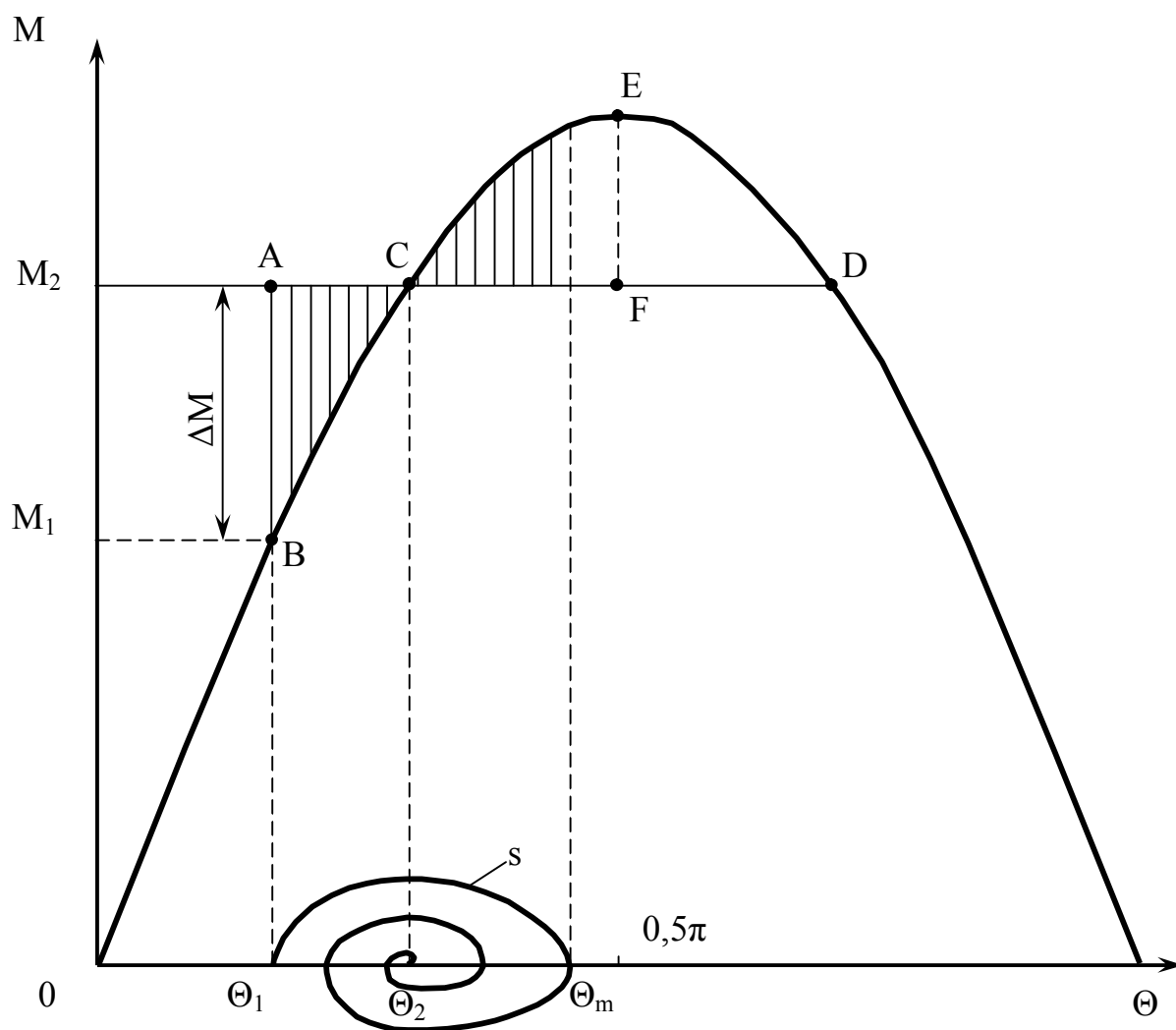


Рисунок 7.7

После приложения возмущения ΔM момент вращения $M_{вр}$ стал меньше момента нагрузки $M_{нагр}$. Как только момент станет равным моменту нагрузки, торможение двигателя прекратится, но ротор будет вращаться тише поля. Следовательно, появится положительный момент. Ротор разгоняется и восполняет потерю кинетической энергии. Если площадь CEDF меньше площади ABC, то двигатель не может восстановить начальной величины кинетической энергии (рисунок 7.8) и в точке D скольжение не равно нулю ($s \neq 0$). Так как ротор вращается медленнее поля статора, происходит дальнейшее увеличение угла нагрузки Θ и момент вращения становится меньше момента нагрузки. Двигатель тормозится.

Если рассматривать процесс в статике, то при $\Theta=0.5\pi$ максимальное значение электромагнитного момента составит $M = \frac{E \cdot U}{X_d}$. Если машина работает при недовозбуждении, то можно предположить, что $E=U=1$ и $X_d=1$. Момент электромагнитный $M=1$.

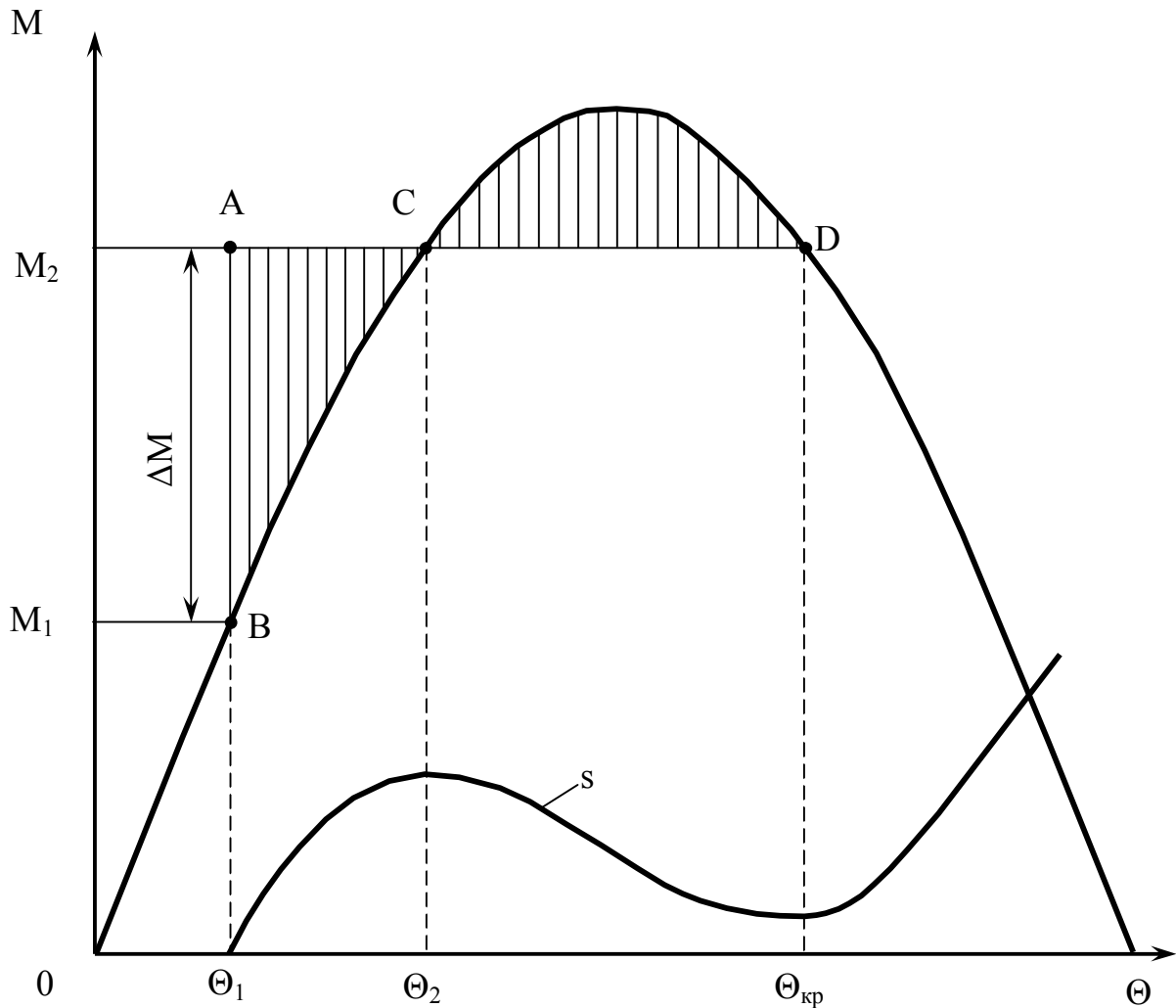


Рисунок 7.8

Если рассматривать процесс в динамике (для машины без успокоительной обмотки), то $M = \frac{E'_d \cdot U}{X'_d} = 3 - 5$, т.к. $E'_d = E = U = 1$ и $X'_d = 0.2 - 0.3$. Следовательно, синхронная машина имеет запас устойчивости по сравнению с расчётами по статической характеристике.

Динамическую устойчивость можно исследовать по полной системе уравнений методом численного интегрирования с использованием вычислительной техники.

8 Частотный метод исследования машин переменного тока

8.1 Общие вопросы

Ток внезапного короткого замыкания математически может быть представлен в виде суммы аperiodических и периодических составляющих. При решении задачи о внезапном коротком замыкании методом преобразования координат, например при наличии на роторе обмотки возбуждения и успокоительной обмотки, выражение для тока статора содержит аperiodическую составляющую и периодическую, которая в свою очередь рассматривается как сумма затухающих свободных составляющих и установившейся составляющей. При этом выделяются сверхпереходная и переходная составляющие, затухающие во времени. В действительности кривые затухающего тока имеют большее число затухающих периодических составляющих. Об этом, в частности, свидетельствуют результаты экспериментальных исследований внезапного короткого замыкания. Если построить огибающую периодического тока в полупологарифмической системе координат, то оказывается, что она аппроксимируется не двумя или тремя прямыми, а значительно большим числом прямых. Это свидетельствует о том, что дифференциальные уравнения Парка-Горева, которые учитывают только обмотку возбуждения и успокоительную обмотку на роторе, дают приближённое решение переходного процесса.

В последнее время требования к точности расчёта переходных процессов всё более возрастают. Это относится как к синхронным, так и асинхронным машинам.

Более точные расчёты переходных процессов могут быть получены на основе так называемого частотного метода. Метод основан на свойствах интеграла Фурье и преобразований Карсона-Хевисайда.

Операторное изображение функции по Карсону-Хевисайду

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt. \quad (8.1)$$

Если $f(t)$ функция тока $i(t)$, характеризующая переходной процесс при единичном постоянном напряжении (j), то

$$F(p) = \frac{1}{x(p)} = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot i(t) dt - \quad (8.2)$$

- операторная проводимость системы.

Обратное преобразование имеет вид

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{pt}}{p(x(p))} dt. \quad (8.3)$$

Аналогичную зависимость между током в системе, при включении её на постоянное единичное напряжение, и её индуктивным сопротивлением можно установить с помощью интеграла Фурье

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jst}}{jsx(js)} ds, \quad (8.4)$$

где $x(js)$ - комплексное индуктивное сопротивление;

s - относительная частота питающего напряжения неизменной единичной амплитуды.

Отношение $\frac{1}{x(js)}$ определяет зависимость амплитуды тока от частоты и называется частотной характеристикой системы.

Обратная зависимость имеет вид

$$\frac{1}{x(js)} = js \int_0^{\infty} i(t) \cdot e^{-jst} dt. \quad (8.5)$$

Сравнивая выражения для $\frac{1}{x}$ и $i(t)$, приходим к выводу, что переход от операторных параметров и функций может быть осуществлён заменой оператора p на js .

8.2 Частотные характеристики и параметры машины

При исследовании частотных характеристик используются операторные параметры машины с заменой оператора p на js . Например,

$$x_d(js) = x_{\sigma 1} + \left[\frac{1}{x_{ad}} + \frac{1}{\frac{r_f}{js} + x_{\sigma f}} + \frac{1}{\frac{r_{yd}}{js} + x_{\sigma yd}} \right]^{-1}, \quad (8.6)$$

$$x_q(js) = x_{\sigma 1} + \left[\frac{1}{x_{aq}} + \frac{1}{\frac{r_{yq}}{js} + x_{\sigma yq}} \right]^{-1}. \quad (8.7)$$

Очевидно, что при $s = 0$ комплексные индуктивные сопротивления

$$\begin{aligned} x_d(js) &= x_{\sigma 1} + x_{ad} = x_d, \\ x_q(js) &= x_{\sigma 1} + x_{aq} = x_q. \end{aligned} \quad (8.8)$$

При $s = \infty$

$$\begin{aligned} x_d(js) &= x_d'', \\ x_q(js) &= x_q''. \end{aligned} \quad (8.9)$$

При промежуточных значениях скольжения (от $s = \infty$, до $s = 0$) параметры принимают значения от x'' до синхронных индуктивных сопротивлений.

Для расчёта частотных параметров более удобна иная форма записи индуктивных сопротивлений:

$$\begin{aligned} x_d(p) &= x_d \frac{(1 + T_d')(1 + T_d'')}{(1 + pT_{d0})(1 + pT_{d0}')}, \\ x_q(p) &= x_q \frac{1 + pT_q'}{1 + T_{q0}}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Комплексные индуктивные сопротивления принимают вид

$$\begin{aligned} x_d(js) &= x_d'' \frac{(js + \alpha_{d1}') (js + \alpha_{d2}')}{(js + \alpha_{d1}) (js + \alpha_{d2})}, \\ x_q(js) &= x_q'' \frac{1 + \alpha_{q1}'}{1 + \alpha_{q1}}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

В этих выражениях величины $\alpha_{d1}', \alpha_{d2}', \alpha_{d1}, \alpha_{d2}, \alpha_{q1}', \alpha_{q1}$, называемые коэффициентами затухания, рассчитываются следующим образом:

$$\alpha'_{d1} = \frac{1}{T'_d}, \quad \alpha'_{d2} = \frac{1}{T''_d}, \quad \alpha_{d1} = \frac{1}{T_{d0}}, \quad \alpha_{d2} = \frac{1}{T'_{d0}}, \quad (8.12)$$

$$\alpha'_{q1} = \frac{1}{T'_q}, \quad \alpha_{q1} = \frac{1}{T_{q0}}, \quad (8.13)$$

где T - постоянные времени, выражены в относительных единицах.
В общем случае

$$x_{d(q)}(js) = x''_{d(q)} \frac{(js + \alpha'_1)(js + \alpha'_2) \dots (js + \alpha'_n)}{(js + \alpha_1)(js + \alpha_2) \dots (js + \alpha_n)}, \quad (8.14)$$

где α'_n и α_n - коэффициенты затухания для контуров по осям $d(q)$. Для явнополюсных машин переменного тока частотные характеристики строят по осям d и q . Выражение для частотной характеристики имеет вид:

$$\frac{1}{x_{d(q)}(js)} = \frac{1}{x''_{d(q)}} \frac{(js + \alpha_1)(js + \alpha_2) \dots (js + \alpha_n)}{(js + \alpha'_1)(js + \alpha'_2) \dots (js + \alpha'_n)}. \quad (8.15)$$

Для асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором

$$\frac{1}{x_{11}(js)} = \frac{1}{x'_{11}} \cdot \frac{js + \alpha_1}{js + \alpha'_1}, \quad (8.16)$$

где x'_{11} - переходное индуктивное сопротивление обмотки статора.

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_2} = \frac{r_2}{x_{22}}, \quad (8.17)$$

$$\alpha'_1 = \frac{1}{T'_2} = \frac{r'_2}{x'_{22}}. \quad (8.18)$$

Частотной характеристике асинхронной машины соответствует токовая диаграмма (круговая диаграмма), представляющая собой окружность (рисунок 8.1), построенную на диаметре, равном $\frac{1}{x'_{11}} - \frac{1}{x_{11}}$.

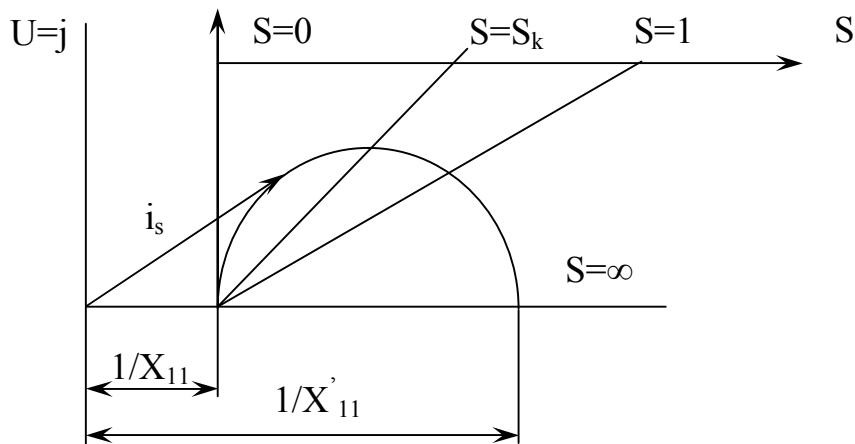


Рисунок 8.1- Частотная характеристика асинхронного двигателя

Если постоянная времени T_2' выражена в электрических радианах, то коэффициент затухания α_1' равен критическому скольжению, при котором активная составляющая тока статора максимальная.

$$\alpha_1' = \frac{1}{T_2'} = s_k.$$

По положению на шкале скольжения точек $s = 0$ и $s = s_k$ определяется масштаб и градуируется шкала скольжения.

8.3 Построение частотной характеристики машины переменного тока по осциллограмме затухания постоянного тока в обмотке статора при неподвижном роторе и замкнутой обмотке возбуждения

Непосредственное снятие частотной характеристики имеет следующие недостатки:

- а) искажение результатов измерений напряжением, имеющим частоту $(1 - s)$, т.к. испытательное напряжение существенно ниже номинального;
- б) затруднено разделение параметров по осям d и q ;
- в) затруднено поддержание $s = const$.

Получил распространение метод построения частотной характеристики машин переменного тока по осциллограмме затухания постоянного тока в обмотке статора при неподвижном роторе и замкнутой накоротко обмотке возбуждения.

Схема питания фаз обмотки статора показана на рисунке 8.2. В исходном состоянии контакт k_1 разомкнут. В схему подают пониженное постоянное напряжение. В обмотке статора устанавливается постоянный ток i_o . При замы-

кании контакта k_1 происходит замыкание обмотки статора. По обмотке статора протекает затухающий во времени ток. Так как сопротивление цепи коротки имеет конечное значение, ток в обмотке статора затухает не до нуля. Установившуюся составляющую тока статора вычитают из кривой затухающего тока статора (рисунок 8.3).

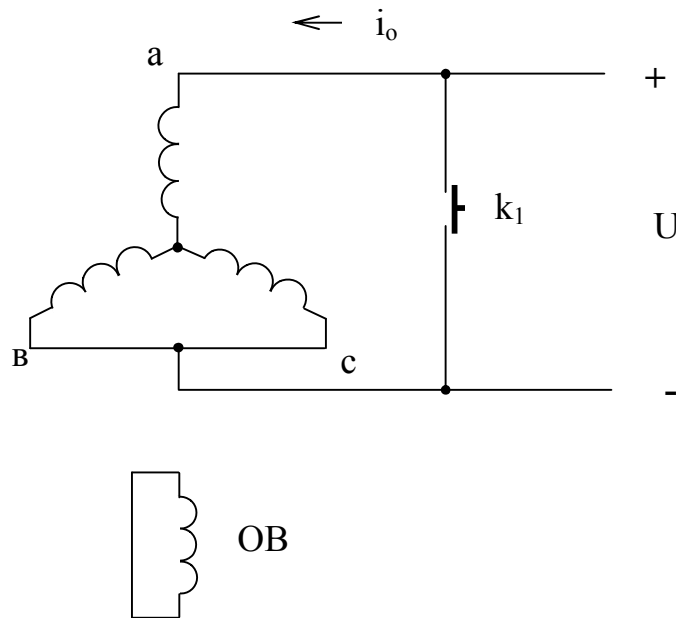


Рисунок 8.2 – Схема питания фаз статора постоянным током

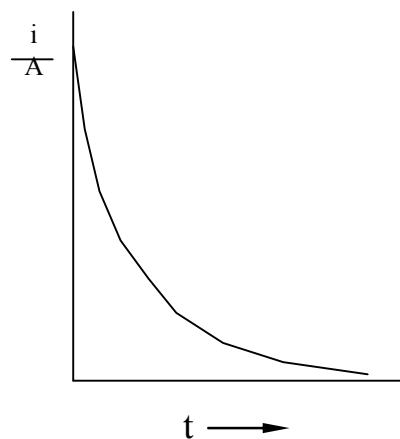


Рисунок 8.3 –Осциллограмма затухающего тока в обмотке статора

При питании обмотки статора единичным напряжением начальное значение тока в цепи обмотки статора (k_1 разомкнут)

$$i_c = \frac{1}{r}. \quad (8.19)$$

Замыкание k_1 математически соответствует подаче напряжения -1 . Появляется добавочный ток, операторное выражение которого

$$i_{\delta} = -\frac{1}{r + px(p)}. \quad (8.20)$$

Результирующий ток

$$i(p) = i_0 + i_{\delta} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r + px(p)}. \quad (8.21)$$

Затухающий ток аппроксимируется суммой экспонент:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} i_n \cdot e^{-\alpha_n' t} \quad (8.22)$$

или в операторной форме записи

$$i(p) = i_1 \frac{p}{p + \alpha_1'} + i_2 \frac{p}{p + \alpha_2'} + \dots + i_n \frac{p}{p + \alpha_n'}, \quad (8.23)$$

где $i_1 + i_2 + \dots + i_n = i_0$.

Первая производная по времени от переходного тока

$$\frac{di(t)}{dt} = -i_1 \cdot \alpha_1' \cdot e^{-\alpha_1' t} - i_2 \cdot \alpha_2' \cdot e^{-\alpha_2' t} - \dots - i_n \cdot \alpha_n' \cdot e^{-\alpha_n' t} \quad (8.24)$$

или в операторной форме

$$pi(p) = -\frac{p}{r + px(p)} = -i_1 \alpha_1' \frac{p}{p + \alpha_1'} - i_2 \alpha_2' \frac{p}{p + \alpha_2'} - \dots - i_n \alpha_n' \frac{p}{p + \alpha_n'}. \quad (8.25)$$

Опуская знак минус, получим:

$$\frac{p}{r + px(p)} = i_1 \alpha_1' \frac{p}{p + \alpha_1'} + i_2 \alpha_2' \frac{p}{p + \alpha_2'} + \dots + i_n \alpha_n' \frac{p}{p + \alpha_n'}. \quad (8.26)$$

Переходим к комплексной форме записи:

$$\frac{js}{r + jsx(js)} = i_1 \alpha_1' \frac{js}{js + \alpha_1'} + i_2 \alpha_2' \frac{js}{js + \alpha_2'} + \dots + i_n \alpha_n' \frac{js}{js + \alpha_n'}. \quad (8.27)$$

$$i_{ss} = \frac{j}{\frac{r}{s} + jx(js)} = i_1 \alpha_1' \frac{js}{js + \alpha_1'} + i_2 \alpha_2' \frac{js}{js + \alpha_2'} + \dots + i_n \alpha_n' \frac{js}{js + \alpha_n'} = a + jb, \quad (8.28)$$

$$\text{где } a = s^2 \left[\frac{i_1 \alpha_1'}{(\alpha_1')^2 + s^2} + \frac{i_2 \alpha_2'}{(\alpha_2')^2 + s^2} + \dots + \frac{i_n \alpha_n'}{(\alpha_n')^2 + s^2} \right];$$

$$b = s \left[\frac{i_1 (\alpha_1')^2}{(\alpha_1')^2 + s^2} + \frac{i_2 (\alpha_2')^2}{(\alpha_2')^2 + s^2} + \dots + \frac{i_n (\alpha_n')^2}{(\alpha_n')^2 + s^2} \right].$$

Из последнего уравнения находим $x(js)$:

$$x(js) = \frac{j - \frac{r}{s}(a + jb)}{j(a + jb)} = \frac{j - \frac{r}{s}i_{ss}}{ji_{ss}} \quad (8.29)$$

и получаем уравнение частотной характеристики

$$i_{s0} = \frac{1}{x(js)} = \frac{j(a + jb)}{j - \frac{r}{s}(a + jb)} = \frac{ji_{ss}}{j - \frac{r}{s}i_{ss}}. \quad (8.30)$$

Значения составляющих токов и коэффициентов затухания определяют из кривой затухания тока, построенной в полулогарифмической системе координат.

По оси ординат откладывают натуральный логарифм тока ($\ln[i(t)]$), а по оси абсцисс – время. Из конца полученной кривой проводят касательную. Точка пересечения этой касательной с осью ординат определяет натуральный логарифм первой составляющей тока ($\ln(I_1)$). Через точку на оси ординат, соответствующую логарифму числа e , проводят прямую, параллельную проведенной касательной. Точка пересечения этой прямой с осью абсцисс определит постоянную времени затухания первой выделенной экспоненты T_1 . Получают первую составляющую затухающего тока (рисунок 8.4):

$$I_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (8.31)$$

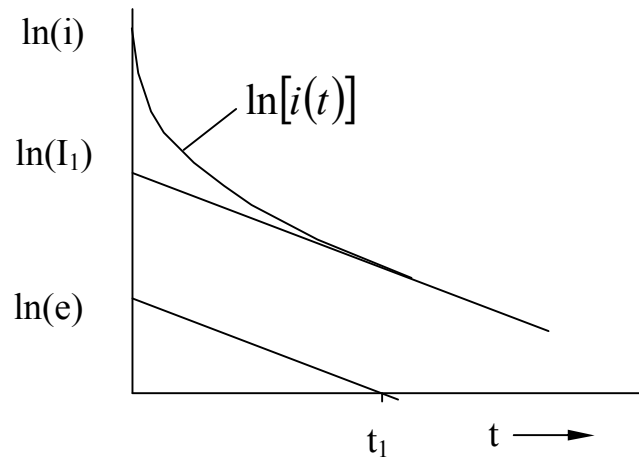


Рисунок 8.4-Определение амплитуд токов и коэффициентов затухания

Определяют разность токов:

$$i(t) - I_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (8.32)$$

Эту разность токов вновь строят в полулогарифмических координатах и выделяют, по описанной методике, очередную экспоненту. Описанные действия выполняют до тех пор, пока функция $i(t)$ не будет аппроксимирована суммой экспонент:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n I_k \cdot e^{-\frac{t}{T_k}}. \quad (8.33)$$

Для получения частотной характеристики определяют постоянные времени и коэффициенты затухания в относительных единицах:

$$T'_k = \frac{T_k}{t_\sigma}; \quad (8.34)$$

$$\alpha'_k = \frac{1}{T'_k}. \quad (8.35)$$

Определив амплитуды токов i_1, i_2, \dots, i_n и коэффициенты затухания $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$, рассчитывают ток i_{ss} и строят частотную характеристику i_{s0} .

8.4 Графический метод построения частотной характеристики

Рассмотрим технологию построения частотной характеристики (например, по оси d). Известны амплитуды токов i_1, i_2, \dots, i_n и коэффициенты затухания $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Из предварительно выбранного положения начала координат откладывают отрезки численно равные $i_1 \cdot \alpha_1, i_2 \cdot \alpha_2$ и т.д., и как на диаметрах строят окружности (рисунок 8.5). Для каждой окружности строят шкалу скольжения и по значению критического скольжения $s_{ki} = \alpha_i$ производят градуировку шкалы. Для произвольно выбранного скольжения по окружностям определяют векторы токов, которые складывают геометрически. Конец результирующего вектора определяет положение точки на частотной характеристике при выбранном скольжении. Вновь задаются скольжением и повторяют построения. Соединяя полученные точки, строят частотную характеристику. Точку частотной характеристики при скольжении $s = \infty$ получают суммированием диаметров всех окружностей. Начало координат переносят на величину установившегося тока короткого замыкания $\left(\frac{1}{x_d}\right)$.

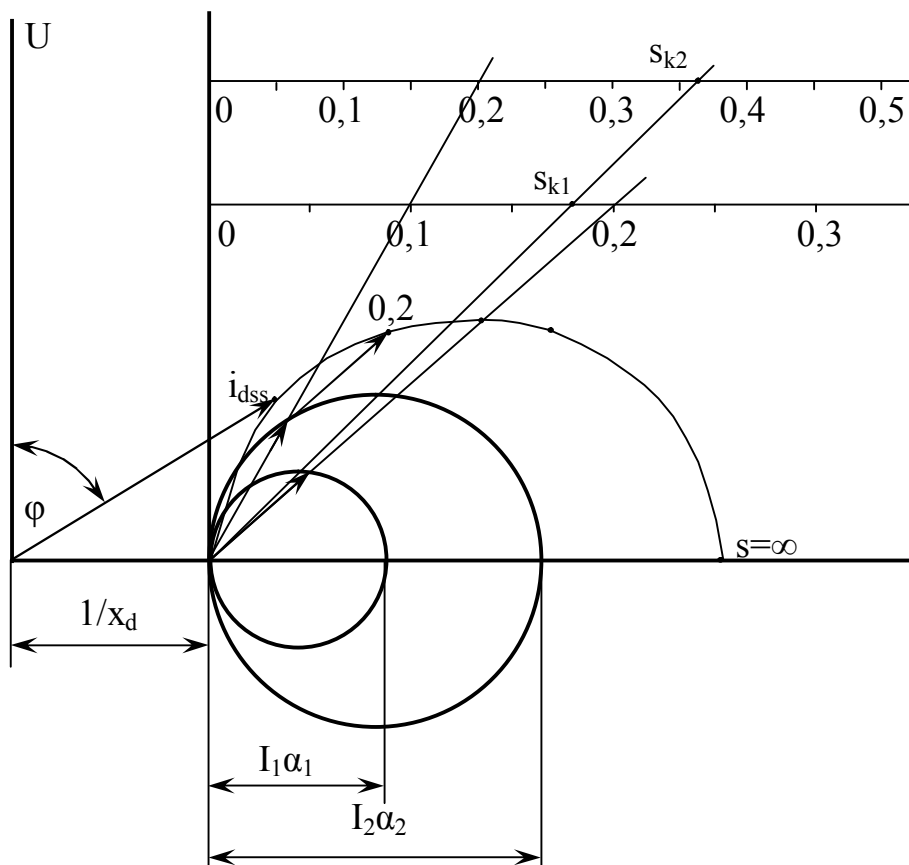


Рисунок 8.5 – Построение частотной характеристики

Комплекс $\dot{i}_{dss}^- = \frac{1}{x_d(js) + \frac{r}{js}}$, выраженный вектором \overline{OA} , характеризует

величину и фазу установившегося тока при заданном скольжении ротора и питании обмотки статора номинальным напряжением номинальной частоты.

8.5 Определение параметров машин и переходных токов при помощи частотных характеристик

8.5.1 Определение токов и индуктивных сопротивлений в сверхпереходном режиме

В синхронных машинах кривую затухания постоянного тока в обмотке статора снимают при совпадении оси поля статора или с осью d ротора, или с осью q . Получают

$$\begin{array}{c} i_{d1}, i_{d2}, \dots, \alpha'_{d1}, \alpha'_{d2}, \dots \\ \text{и} \\ i_{q1}, i_{q2}, \dots, \alpha'_{q1}, \alpha'_{q2}, \dots \end{array}$$

Действительная частотная характеристика синхронной машины описывается выражением

$$i_{dss} = \frac{j}{\frac{r}{s} + jx_d(js)} = i_{d1}\alpha'_{d1} \frac{js}{js + \alpha'_{d1}} + i_{d2}\alpha'_{d2} \frac{js}{js + \alpha'_{d2}} + \dots \quad (8.36)$$

Подставив $s = \infty$, получим неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Определим предел отношений в правой части равенства при $s \Rightarrow \infty$.

$$\lim_{s \Rightarrow \infty} i_{dss} = i_{d1} \cdot \alpha'_{d1} + i_{d2} \cdot \alpha'_{d2} + \dots \quad (8.37)$$

Ток обмотки статора в сверхпереходном режиме по оси d :

$$i_d'' = i_{d1} \cdot \alpha'_{d1} + i_{d2} \cdot \alpha'_{d2} + \dots + \frac{1}{x_d}. \quad (8.38)$$

Сопротивление обмотки статора по оси d в сверхпереходном режиме:

$$x_d'' = \frac{1}{i_{d1} \cdot \alpha'_{d1} + i_{d2} \cdot \alpha'_{d2} + \dots + \frac{1}{x_d}}. \quad (8.39)$$

Аналогично для тока и сопротивления обмотки статора по оси q :

$$i_q'' = i_{q1} \cdot \alpha'_{q1} + i_{q2} \cdot \alpha'_{q2} + \dots + \frac{1}{x_q}; \quad (8.40)$$

$$x_q'' = \frac{1}{i_{q1} \cdot \alpha'_{q1} + i_{q2} \cdot \alpha'_{q2} + \dots + \frac{1}{x_q}}. \quad (8.41)$$

8.5.2 Определение токов и синхронных индуктивных сопротивлений в установившемся режиме

При протекании постоянного тока i_0 потокосцепление обмотки статора

$$\Psi_{s0} = \frac{3}{2} x_d \cdot i_0, \quad (8.42)$$

где $i_0 = \frac{1}{r}$ - сила тока в фазе a статора схемы проведения эксперимента;

$r = \frac{3}{2} r_1$ - активное сопротивление схемы;

r_1 - сопротивление фазы обмотки статора.

Следовательно,

$$\Psi_{s0} = \frac{3}{2} x_d \cdot \frac{2}{3 \cdot r_1} = \frac{x_d}{r_1}. \quad (8.43)$$

Из уравнения равновесия напряжения имеем

$$0 = \frac{d\Psi_s}{dt} + i \cdot r. \quad (8.44)$$

$$-d\Psi_s = i \cdot r dt.$$

Проинтегрируем правую и левую части равенства

$$-\int_0^{\infty} d\Psi_s = r \int_0^{\infty} i dt = \frac{3}{2} r_1 \int_0^{\infty} i dt.$$

$$-\int_0^{\infty} d\Psi_s = -\Psi_s \Big|_0^{\infty} = -(0 - \Psi_{s0}) = \Psi_{s0}.$$

$$\frac{3}{2} r_1^2 \int_0^{\infty} i dt = \Psi_{s0}. \quad (8.45)$$

Заменив в правой части равенства потокосцепление Ψ_{s0} на его выражение, получим

$$x_d = \frac{3}{2} r_1^2 \int_0^{\infty} i dt. \quad (8.46)$$

Затухающий ток обмотки статора может быть представлен в виде

$$i = i_1 e^{-\alpha_1 t} + i_2 e^{-\alpha_2 t} + \dots \quad (8.47)$$

Следовательно, подставляя (8.47) в правую часть равенства (8.46) и определяя интеграл для сопротивления x_d , получим

$$x_d = \frac{3}{2} r_1^2 \left[\frac{i_{d1}}{\alpha_{d1}} + \frac{i_{d2}}{\alpha_{d2}} + \frac{i_{d3}}{\alpha_{d3}} + \dots \right]. \quad (8.48)$$

Для синхронного индуктивного сопротивления по поперечной оси будем иметь

$$x_q = \frac{3}{2} r_1^2 \left[\frac{i_{q1}}{\alpha_{q1}} + \frac{i_{q2}}{\alpha_{q2}} + \frac{i_{q3}}{\alpha_{q3}} + \dots \right]. \quad (8.49)$$

Установившиеся токи короткого замыкания определяются при $s = 0$:

$$i_d = \frac{1}{x_d}; \quad i_q = \frac{1}{x_q}. \quad (8.50)$$

Используя эквивалентность частотной характеристики $\frac{1}{x(js)}$ и переходной операторной функции $\frac{1}{x(p)}$, можно определить экспоненциальные составляющие тока статора при переходных процессах и построить огибающую периодической составляющей тока статора.

Список использованных источников

- 1 **Важнов, А.И.** Переходные процессы в машинах переменного тока/ А.И. Важнов. - Л.: Энергия. Ленингр. отд-ние, 1980. - 256 с., ил.
- 2 **Вольдек, А.И.** Электрические машины./ А.И. Вольдек - Л.: 1978. - 832 с., ил.
- 3 **Горев, А.А.** Переходные процессы синхронной машины/ А.А. Горев-Л.: Наука, 1985.-502 с.
- 4 **Иванов-Смоленский, А.В.** Электрические машины: учебник для вузов/ А.В. Иванов-Смоленский.- М.: Энергия, 1980. -928 с., ил.
- 5 **Ковач, К.П.** Переходные процессы в машинах переменного тока/ К.П. Ковач, И. Рац – М.-Л., Госэнергоиздат, 1963, 744 стр. с рис.
- 6 **Копылов, И.П.** Математическое моделирование электрических машин: учебник для вузов, изд. 2-е, перераб. и доп./ И.П. Копылов - М.: Высшая школа, 1994. – 320 с.
- 7 **Постников, И.М.** Обобщённая теория и переходные процессы электрических машин: учебник для вузов, изд. 2-е, перераб. и доп./ И.М. Постников- М.: Высшая школа, 1975.
- 8 **Сипайлов, Г.А.** Электрические машины (специальный курс)/ Г.А. Сипайлов, Е.В. Кононенко, К.А. Хорьков –М.: Высш.шк., 1987.-287 с.: ил.
- 9 **Сипайлов, Г.А.** Математическое моделирование электрических машин/ Г.А. Сипайлов, А.В. Лоос - М.: Высшая школа, 1980. – 176 с.
- 10 **Трещев, И.И.** Методы исследования электромагнитных процессов в машинах переменного тока/ И.И. Трещев – Л.: Энергия. Ленингр. отд-ние, 1969. – 236 с., ил.
- 11 **Трещев, И.И.** Электромеханические процессы в машинах переменного тока/ И.И. Трещев - Л.: Энергия. Ленингр. отд-ние, 1980. - 344 с., ил.