МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Г.А. СИКОРСКАЯ, Г.Н. ЛОКТИОНОВА

ГОТОВИМСЯ К ЗАЧЕТУ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Рекомендовано Ученым Советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов транспортного факультета.

Оренбург 2008

УДК 51 (0758)

ББК 22.1я73
С35

Рецензенты
кандидат физико-математических наук, доцент Герасименко С.А.
кандидат физико-математических наук, доцент Зубова И.К.

Сикорская Г.А.
С 35 Готовимся к зачету по алгебре и геометрии: учебное пособие для студентов транспортного факультета / Г.А. Сикорская, Г.Н. Локтионова. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. - 203 с.
ISBN

Учебное пособие «Готовимся к зачету по алгебре и геометрии» предназначено для последовательной подготовки к зачетам по курсу алгебры и геометрии в I и II семестрах обучения.

Пособие содержит тестовые задания теоретического и практического характера, снабженные картой ответов, а также задания домашней контрольной работы.

Домашняя контрольная работа (ДКР) сопровождена подробным решением нулевого варианта.

В заключении пособия представлен демонстрационный вариант теста, предназначенного для контроля остаточных знаний студентов-старшекурсников по курсу алгебры и геометрии.

Пособие предназначено для поддержки образовательного процесса студентов всех специальностей транспортного факультета.

$\text{С}^{\underline{1602010000}}$ ББК 22.1я73
ISBN

Содержание

Предисловие

Уважаемые студенты транспортного факультета, предлагаемое Вашему вниманию учебное пособие «Готовимся к зачету по алгебре и геометрии», поможет Вам заблаговременно подготовиться к аттестации по курсу алгебры и геометрии.

Аттестация по курсу происходит в форме зачетов по окончании I и II семестров обучения. Для успешной аттестации Вам необходимо будет выдержать два испытания: первое – тестирование, второе – защита домашней контрольной работы (ДКР).

Разберем сущность каждого из испытаний и способы подготовки к ним.

Испытание первое. В настоящем пособии предложены тесты, содержащие задания как теоретического характера, так и несложные задания практикума. Теоретические тесты составлены строго по тексту «Курса лекций по алгебре и геометрии» (автор Сикорская Г.А.). Поэтому рекомендуем Вам, прослушав лекцию по данной теме, изучить ее по теоретическому пособию и, не откладывая на потом, поработать с тестами. Такая форма подготовки к зачету наиболее оптимальна и не требует много сил и времени. Тесты же практического характера желательно последовательно выполнять после соответствующих практических занятий. Таким образом, по окончании семестра, придется только все повторить и Вы обязательно, с успехом одолеете первый этап аттестации, т.е. наберете необходимый минимум верных ответов предложенного Вам на зачете тестового билета. Билет будет содержать 30 заданий выбранных из всего перечня тестов и опубликованных в пособии (в первом семестре это задания A - F, во втором G-H). Необходимый минимум – 20 верно выполненных заданий, время выполнения – 40 минут.

Испытание второе. Ко второму этапу аттестации так же разумнее готовиться последовательно, на протяжении всего семестра. Преподаватель уже на первом практическом занятии определит номер Вашей домашней контрольной работы (ДКР) и Вы задание за заданием сможете выполнить свою работу. Помощь Вам, надеемся, окажет предлагаемое в пособии решение нулевого варианта, т.е. подробное изложение решения задач, подобных задачам Вашей индивидуальной контрольной работы. Здесь же Вы сможете ознакомиться с оформлением решения. По окончании семестра выполненную работу необходимо сдать преподавателю, ведущему у Вас практические занятия на проверку и, в случае отличного результата проверки, защитить ее, т.е. на зачетном занятии решить в присутствии преподавателя любое, на его выбор, задание.

Итак, Вы успешно выдержали оба испытания и заработали «зачет».

Приступайте к работе. Желаем успеха!

Сикорская Г.А.,
Локтионова Г.Н.

1 Тестовые зачетные задания за I семестр обучения

А Первоначальные сведения об основных алгебраических структурах

А1.1 Укажите неверное утверждение:

1) K называют кольцом, если в нем определены ассоциативные операции сложения и умножения, связанные законом дистрибутивности, причем операция сложения коммутативная и обладает обратной операцией – вычитанием.

2) Кольцо называют коммутативным, если в нем операция сложения коммутативная, и некоммутативная – в противном случае.

3) Любое кольцо является абелевой группой по сложению.

4) Коммутативное кольцо P, в котором есть единичный элемент и каждый ненулевой элемент имеет обратный элемент относительно умножения, называют полем.

А1.2 Допишите определении: «Если алгебраическая операция в группе названа сложением, то группу называют…»:

1) абелевой;
2) мультипликативной;
3) конечной;
4) аддитивной.

А1.3 Допишите определение: «Группу с коммутативной операцией называют…»:

1) конечной;
2) абелевой;
3) аддитивной;
4) мультипликативной.

А1.4 Допишите определение: «Если алгебраическая операция в группе названа умножением, то группу называют …»:

1) абелевой;
2) аддитивной;
3) мультипликативной;
4) конечной.

А1.5 Среди предложенный свойств операций над множествами укажите свойства, называемыми законами поглощения:

1) $A \cup B = B \cup A$;
2) $A \cap B = B \cap A$;
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
5) $A \cup A = A$;
6) $A \cap A = A$;
7) $A \cup (A \cap B) = A$;
8) $A \cap (A \cup B) = A$.

1) 5, 6; 2) 7, 8; 3) 3, 4; 4) 1, 2.

A1.6 Среди предложенных свойств операций над множествами укажите те, которые не являются законами правой дистрибутивности операций.

1) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

3) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

4) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$;

5) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

6) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;

7) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

8) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

1) 7, 8; 2) 5, 6; 3) 3, 4; 4) 1, 2.

A1.7 Укажите неверное утверждение:

1) Отношением на множестве A называется любое подмножество декартова квадрата A^2 множества A.

2) Пусть ρ - любое отношение на множестве A. Тогда для любого элемента a из A можно определить подмножество $[a]_\rho=\{b\in A:\ a\rho b\}$.

3) Отношение ρ на множестве $A\neq\varnothing$ называется отношением эквивалентности, если оно обладает двумя свойствами:

1) ρ - симметрично, т.е. $a\rho b\Rightarrow b\rho a$ для любых $a,\ b\in A$,

2) ρ - транзитивно, т.е. $a\rho b,\ b\rho c\Rightarrow a\rho c$ для любых $a,\ b,\ c\in A$.

4) Если ρ есть отношение эквивалентности на множестве A, то все попарно различные подмножества типа $[a]_\rho$ образуют разбиение множества A.

A1.8 Допишите определение: «Разностью двух множеств A и B называют множество $A\setminus B$ элементов x таких, что…»:

1) x принадлежит A и принадлежит B.

2) x принадлежит B и не принадлежит A.

3) x принадлежит A и не принадлежит B.

4) x не принадлежит ни A, ни B.

A1.9 Укажите неверное утверждение:

1) Упорядоченная последовательность $(a_1, a_2, ..., a_n)$, составленная из элементов множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, где $a_i\in A_i,\ i=1,2,...,n$, называется кортежем длины n.

2) Множества $A_1, A_2, ..., A_n$ могут иметь общие элементы или даже совпадать. Поэтому элементы в кортеже могут повторяться.

3) Два кортежа, составленные из элементов одного и того же множества A считаются равными при одном условии, если их длины равны.

4) Кортеж, не содержащий ни одной координаты (т.е. кортеж длины 0), называется пустым.

A1.10 Укажите неверное утверждение:

1) В множестве порядок элементов не играет роли, а кортежи, отличающиеся порядком элементов, различны даже в случае, когда они имеют одинаковый состав.

2) В множестве все элементы различны, а в кортеже координаты могут повторяться.

3) Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ - некоторые множества. Их декартовым произведением называют множество, состоящее из всех кортежей вида $(a_1, ..., a_n)$, где $a_k \in A_k$, $1 \le k \le n$.

4) Декартово произведение множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ обозначают $A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... \bigcap A_n$.

А1.11 Допишите свойство дистрибутивности операции объединения множеств $(A \bigcup B) \bigcap C = \dots$

1) $A \bigcup B \bigcap C$.
2) $(A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$.
3) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.
4) $A \cup C \cap B \cup C$.

А1.12 Укажите неверное утверждение:
1) $A \cup B = B \cup A$ - коммутативное свойство.
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ - ассоциативное свойство.
3) Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$.
4) $A \cup \varnothing = \varnothing$, $A \cup A = A$.

А1.13 Укажите неверное свойство операции дополнения множеств.

1) $(A')' = A$.
2) $B \subset A \to A' \subset B'$.
3) $(A \bigcap B)' = A' \cup B'$.
4) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

А1.14 Укажите неверное утверждение:
1) $A \cap B = B \cap A$ - коммутативность пересечения.
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - ассоциативное свойство пересечения.
3) Если $B \subset A$, то $A \cap B = B$.
4) $A \cap \varnothing = A$, $A \cap A = \varnothing$.

А1.15 Допишите определение: «Объединением множеств *A*, *B* называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, каждый из которых принадлежит…»:

1) множеству *A*, но не принадлежит множеству B.
2) ни одному из множеств A, B.
3) каждому из множеств A, B.
4) хотя бы одному из множеств A, B.

А2.1 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Задайте списком множество $A \cup B$.

1) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;
2) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
3) $\{0, 1, 2\}$;
4) $\varnothing$.

A2.2 Даны множества $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Задайте списком множество $A \cap B$.

1) $\{2, 4, 5, 6\}$; 2) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$;
3) $\{0, 1, 2\}$; 4) $\varnothing$.

A2.3 Даны множества $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Задайте списком множество $A \setminus B$.

1) $\{0, 1, 2, 4\}$ 2) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
3) $\{0, 1, 2\}$; 4) $\varnothing$.

A2.4 Даны множества $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Задайте списком множество $B \setminus A$.

1) $\{8, 9\}$; 2) $\{3, 4\}$;
3) $\{2, 4, 5, 6\}$; 4) $\varnothing$.

A2.5 Даны множества $C=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D=\{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $C \setminus D$.

1) $\{0, 1, 2, 4\}$; 2) $\{2, 4, 5, 6\}$;
3) $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$; 4) $\varnothing$.

A2.6 Даны множества $C=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D=\{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $D \setminus C$.

1) $\{5, 6\}$; 2) $\{2, 4, 5, 6\}$;
2) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,4\}$; 4) $\varnothing$.

A2.7 Если A и B – множества действительных чисел: $A=(-4, 0]$, $B=[-2, 3)$, то множество $A \cup B$ равно…

1) $(-4, 3)$; 2) $(-2, 0)$; 3) $[-4, 3)$; 4) $(-2, 0]$.

A2.8 Если A и B – множества действительных чисел: $A=(-4, 0]$, $B=[-2, 3)$, то множество $A \setminus B$ равно…

1) $(-4, 3)$; 2) $(-4, -2)$; 3) $[-4, 3)$; 4) $(-2, 0]$.

A2.9 Если A и B – множества действительных чисел: $A=(-4, 0]$, $B=[-2, 3)$, то множество $B \cap A$ равно…

1) $(-2, 0)$; 2) $(-2, +\infty)$; 3) $[0, 3]$; 4) $(0, 3]$.

A2.10 Если A и B – множества действительных чисел: $A=(-4, 0]$, $B=[-2, 3)$, то множество $A \cup B$ равно…

1) $(-2, +\infty)$; 2) $(0, +\infty)$; 3) $(3, +\infty)$; 4) $(0, 3]$.

A2.11 Если C и D - множества действительных чисел: $C=(-\infty, 0]$, $D=(-2, 0]$, то дополнением множества D до множества C служит множество…

1) $(-\infty, -2)$; 2) $(-\infty, -2]$; 3) $(-2, 0]$; 4) $(-\infty, 0]$.

A2.12 Если M и K - множества действительных чисел: $M = [3, +\infty)$, $K = [3, 4)$, то дополнением множества K до множества M служит множество…
1) $(4, +\infty)$; 2) $(3, 4]$; 3) $[3, +\infty)$; 4) $[4, +\infty)$.

A2.13 Если A и B – множества действительных чисел: $A = (-2, 3]$, $B = (0, +\infty)$, то множество $B \setminus A$ равно…
1) $(0, 3]$; 2) $[3, +\infty)$; 3) $(3, +\infty)$; 4) $(-2, 0)$.

A2.14 Если A и B – множества действительных чисел: $A = (-2, 3]$, $B = (0, +\infty)$, то множество $A \setminus B$ равно…
1) $(-2, 0)$; 2) $(-2, +\infty)$; 3) $(-2, 0]$; 4) $(3, +\infty)$.

A2.15 Если A и B – множества действительных чисел: $A = (-\infty, 3)$, $B = [-2, 8]$, то множество $B \setminus A$ равно…
1) $(-\infty, -2]$; 2) $(-2, +\infty)$; 3) $(3, +\infty)$; 4) $[3, 8]$.

A3.1 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $A \cup B \cup C \cup D$.
1) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; 2) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
3) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$; 4) $\varnothing$.

A3.2 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $A \cap B \cap C \cap D$..
1) $\{2, 4, 5, 6\}$; 2) $\{3, 4\}$;
3) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; 4) $\varnothing$.

A3.3 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.
1) $\{0, 1, 2, 4\}$ 2) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
3) $\{3, 4\}$; 4) $\varnothing$.

A3.4 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(A \cup B) \cap (C \cup D)$.
1) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 2) $\{3, 4\}$;
3) $\{2, 4, 5, 6\}$; 4) $\varnothing$.

А3.5 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1) $\{0, 1, 2, 4\}$; 2) $\{2, 4, 5, 6\}$;
3) $\{0, 1, 2, 8, 9\}$; 4) $\varnothing$.

А3.6 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(A \cup B) \cap (C \setminus D)$.

1) $\{0, 1\}$; 2) $\{2, 4, 5, 6\}$;
2) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; 4) $\varnothing$.

А3.7 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(A \cap B \cup C) \setminus D$.

1) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; 2) $\{0, 1\}$;
3) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; 4) $\varnothing$

А3.8 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(D \setminus A \setminus C) \cap B$.

1) $\{2, 4, 5, 6\}$; 2) $\{0, 1\}$;
3) $\{0, 1, 2, 4\}$; 4) $\varnothing$.

А3.9 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(B \setminus C) \cap (A \setminus D)$.

1) $\{6\}$; 2) $\{0, 1\}$;
3) $\{7\}$; 4) $\varnothing$.

А3.10 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(D \setminus C) \cup (A \setminus B)$.

1) $\{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$. 2) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
3) $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$; 4) $\varnothing$.

А3.11 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3\ 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(C \setminus D) \cap (B \setminus A)$.

1) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 2) $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$.
3) $\{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$; 4) $\varnothing$.

A3.12 Среди предложенных множеств указать равное данному $A \setminus (B \setminus C)$.

1) $A \setminus B \cup C$; 2) $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
3) $B \setminus A \cup C$; 4) $B \cup C \cup A$.

A3.13 Среди предложенных множеств указать равное данному $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

1) $A \setminus B \cup C$; 2) $B \setminus A \cup C$;
3) $A \setminus (B \setminus C)$; 4) $B \cup C \cup A$.

A3.14 Среди предложенных множеств указать равное данному $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$.

1) $(A \cap C) \setminus B$ 2) $B \cup C \cup A$;
3) $B \setminus A \cup C$; 4) $A \setminus (B \setminus C)$.

A3.15 Среди предложенных множеств указать равное данному $(A \cap C) \setminus B$.

1) $A \setminus (B \setminus C)$; 2) $B \setminus A \cup C$;
3) $(A \setminus b) \setminus (A \setminus C)$; 4) $B \cup C \cup A$.

A4.1 Какое из заданных отношений обладает свойством симметричности?

1) «быть меньше»; 2) «быть больше»;
3) «перпендикулярность прямых»; 4) «быть делителем».

A4.2 Дано множество натуральных чисел. Указать, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) всегда выполнимы на этом множестве:

1) деление и вычитание; 2) умножение и вычитание;
3) сложение и умножение; 4) сложение и деление.

A4.3 Какое из следующих множеств при указанной операции над элементами образует группу?

1) рациональные числа относительно умножения;
2) натуральные числа относительно сложения;
3) целые числа относительно вычитания;
4) целые числа относительно сложения.

A4.4 Какое из следующих множеств при указанной операции над элементами образует группу?

1) целые числа, кратные данному натуральному числу n относительно сложения;
2) натуральные числа относительно сложения;
3) рациональные числа, отличные от нуля, относительно деления;
4) целые числа относительно вычитания.

A4.5 Какое из следующих множеств при указанной операции над элементами образует группу?

1) целые числа относительно вычитания;
2) корни всех целых степеней из единицы относительно умножения;

3) рациональные числа относительно умножения;
4) натуральные числа относительно сложения.

А4.6 Какое из следующих множеств при указанной операции над элементами группой не является?
1) целые числа относительно сложения;
2) четные числа относительно сложения;
3) рациональные числа относительно сложения;
4) рациональные числа относительно умножения.

А4.7 Какое из следующих множеств при указанной операции над элементами группой не является?
1) рациональные числа относительно сложения;
2) рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения;
3) положительные рациональные числа относительно умножения;
4) рациональные числа, отличные о нуля, относительно деления.

А4.8 Какое из следующих множеств при указанной операции над элементами группой не является
1) целые числа относительно сложения;
2) целые числа относительно вычитания;
3) рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения;
4) положительные рациональные числа относительно умножения.

А4.9 Указать какое из следующих множеств является кольцом, операции – сложение и умножение чисел.
1) целые числа;
2) рациональные числа;
3) действительные числа;
4) числа вида $a+b\sqrt{3}$ с рациональными a и b.

А4.10 Указать какое из следующих множеств является полем, операции – сложение и умножение чисел.
1) целые числа; 2) рациональные числа;
3) четные числа; 4) числа вида $a+b\sqrt{2}$ с целыми a и b.

А4.11 Указать какое из следующих множеств является полем, операции – сложение и умножение чисел.
1) четные сила;
2) действительные числа;
3) числа вида $a+b\sqrt{2}$ с целыми a и b;
4) целые числа.

А4.12 Указать какое из следующих множеств является полем, операции – сложение и умножение чисел.
1) четные сила;
2) числа вида $a+b\sqrt{2}$ с целыми a и b;
3) числа вида $a+b\sqrt{3}$ с рациональными a и b;

4) целые числа.

А4.13 Какое из предложенных множеств при указанной операции над элементами образует группу?

1) натуральные числа относительно сложения;
2) рациональные числа, отличные от нуля, относительно деления;
3) рациональные числа относительно умножения;
4) положительные рациональные числа относительно умножения.

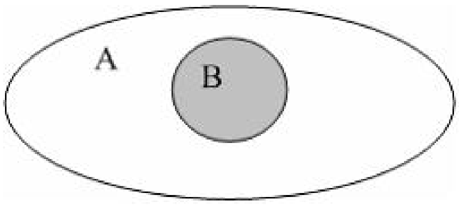
А4.14 Какое из предложенных множеств при указанной операции над элементами не образует группу?

1) рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения;
2) положительные рациональные числа относительно умножения;
3) рациональные числа, отличные от нуля, относительно деления;
4) рациональные числа относительно сложения.

А4.15 Какое из предложенных множеств при указанной операции над элементами образует группу?

1) целые числа относительно вычитания;
2) целые числа относительно сложения;
3) натуральные числа относительно сложения;
4) рациональные числа относительно умножения

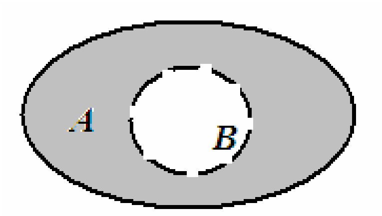
А5.1 Даны два множества А и В.



Серым цветом выделено ...

1) дополнение множества В до множества А;
2) пересечение множеств А и В;
3) объединение множеств А и В;
4) разность множеств А и В.

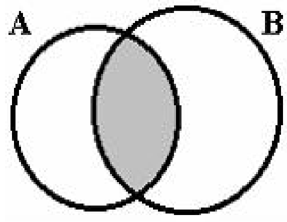
А5.2 Даны два множества А и В



Серым цветом выделено

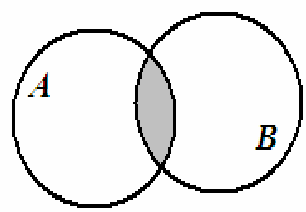
1) дополнение множества В до множества А;
2) пересечение множеств А и В;
3) объединение множеств А и В;
4) разность множеств А и В.

А5.3 Операцией над множествами А и В, результат которой выделен на рисунке, является…



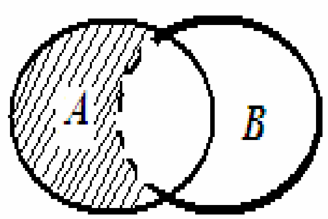
1) $B \setminus A$; 2) $A \setminus B$; 3) $A \cap B$; 4) $A \cup B$.

А5.4 Даны два множества А и В



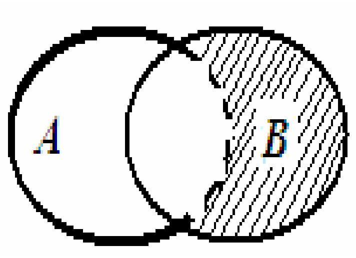
Серым цветом выделено
1) дополнение множества В до множества А;
2) пересечение множеств А и В;
3) объединение множеств А и В;
4) разность множеств А и В.

А5.5 Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке является…



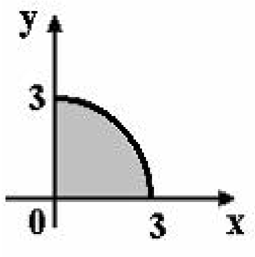
1) $B \setminus A$; 2) $A \cap B$; 3) $A \setminus B$; 4) $A \cup B$.

А5.6 Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке является…



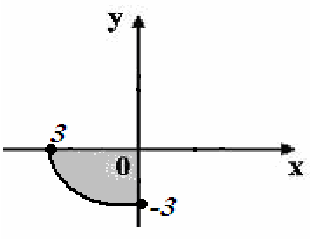
1) $A \setminus B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \setminus A$; 4) $A \cup B$.

А5.7 Мера множества, изображенного на рисунке, равна…



1) $\frac{9\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$.

А5.8 Мера множества, изображенного на рисунке



1) $\frac{9\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$.

А5.9 Какие операции, из предложенных, определены на множестве натуральных чисел N?

а) $a \circ b = a - b$; б) $a \circ b = a \cdot b$; в) $a \circ b = OK\{a, b\}$; г) $a \circ b = a : b$.

1) а), б); 2) б), в); 3) в), г); 4) г), а).

А5.10 Какие из предложенных операция определены на множестве натуральных чисел N?

а) $a \circ b = a - b$; б) $a \circ b = a : b$; в) $a \circ b = max\{a, b\}$; г) $a \circ b = a + b$.

1) а), б); 2) б), в); 3) в), г); 4) г), а).

А5.11 Дано множество целых чисел с операцией «+» (сложение) и нейтральным элементом 0 (ноль). Элемент, симметричный элементу 2, равен…

1) –2; 2) 2; 3) не симметрично; 4) $\frac{1}{2}$.

А5.12 Какое из заданных отношений обладает свойством симметричности?

1) «быть меньше»; 2) «быть больше»;
3) «перпендикулярность прямых»; 4) «быть делителем».

А5.13 Число 2,5 принадлежит множеству…

1) $C = \{c \mid c \in R, -3 < c \leq 2{,}6\}$; 2) $B = \{b \mid b \in Z, -2 < b \leq 3\}$;
3) $A = \{a \mid a \in N, 1 < a \leq 10\}$; 4) $D = \{d \mid d \in Q, d < 2\}$.

А5.14 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным …

1) множество рациональных чисел является подмножеством множества иррациональных чисел;

2) отрезок [1;10] является подмножеством промежутка (1;10];

3) множество целых чисел является подмножеством множества действительных чисел;

4) интервал (– 4;0) является подмножеством множества натуральных чисел.

А5.15 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $Z \subset N$; 2) $R \subset Q$; 3) $Q \subset R$; 4) $N \cap Z = Z$.

А6.1 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $N \cup Z = N$; 2) $Z \setminus N = N$; 3) $N \cap Z = N$; 4) $N \cup Z = Q$.

А6.2 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $N \cup Q = Q$; 2) $Q \subset N$; 3) $R \subset Q$; 4) $Z \cup N = N$.

А6.3 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $Z \cap Q = Q$; 2) $Z \cup Q = Q$; 3) $Z \cup N = N$; 4) $R \cap Q = R$.

А6.4 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $Z \cap Q = Q$; 2) $Z \subset Q = Q$; 3) $Z \cup N = N$; 4) $R \cap Q = Q$.

А6.5 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $Z \cap Q = Q$; 2) $Z \subset Q = Q$; 3) $Z \cap N = N$; 4) $R \subset Q = Q$.

А6.6 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $Z \setminus Q = \varnothing$; 2) $Z \setminus Q = N$; 3) $Z \setminus Q = Q$; 4) $Z \setminus Q = Z$.

А6.7 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $Z \bigcap N = \varnothing$; 2) $Z \cap N = Z$; 3) $Z \cap N = N$; 4) $Z \cap N = R$.

А6.8 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $R \setminus Q = R$; 2) $R \setminus Q = I$;3) $R \setminus Q = Q$; 4) $R \setminus Q = Z$.

А6.9 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $Z \cup Q = Q$; 2) $Z \cup Q = R$; 3) $Z \cup Q = N$; 4) $Z \cup Q = Z$.

А6.10 Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным.

1) $R \setminus Q = Z$; 2) $R \setminus Q = I$;3) $R \setminus Q = N$; 4) $R \setminus Q = R$.

А6.11 Даны множества $A = \{b, y\}$ и B=$\{1,2,3\}$. Тогда декартовым (прямым) произведением $A \times B$ является …

1) $\{(b, y, 1), (b, y, 2), (b, y, 3)\}$;
2) $\{b, y, 1, 2, 3\}$;
3) $\{(1, b), (1, y), (2, b), (2, y), (3, b), (3, y)\}$;
4) $\{(b, 1), (b, 2), (b, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$.

А6.12 Даны множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{b, y\}$. Тогда декартовым произведением $A \times B$ является…

1) $\{(b, y, 1), (b, y, 2), (b, y, 3)\}$;
2) $\{b, y, 1, 2, 3\}$;
3) $\{(1, b), (1, y), (2, b), (2, y), (3, b), (3, y)\}$;
4) $\{(b, 1), (b, 2), (b, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$.

А6.13 Даны множества $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Тогда декартовым произведением $A \times B$ является…

1) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$;
2) $\{(1, 2), (1, 2, 3,)\}$;
3) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$;
4) $\{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.

А6.14 Даны множества $A = \{b, y\}$ и B=$\{1,2,3\}$. Тогда декартовым (прямым) произведением $A \times B$ является …

1) $\{(b, 1), (b, 2), (b, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$;
2) $\{b, y, 1, 2, 3\}$;
3) $\{(1, b), (1, y), (2, b), (2, y), (3, b), (3, y)\}$;
4) $\{(b, y, 1), (b, y, 2), (b, y, 3)\}$.

А6.15 Даны множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{b, y\}$. Тогда декартовым произведением $A \times B$ является…

1) $\{(1, b), (1, y), (2, b), (2, y), (3, b), (3, y)\}$;
2) $\{(b, y, 1), (b, y, 2), (b, y, 3)\}$;
3) $\{b, y, 1, 2, 3\}$;
4) $\{(b, 1), (b, 2), (b, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$.

В Комплексные числа

В1.1 Укажите неверное утверждение:

1) Степени из нуля имеет только одно значение, равное нулю, т.е. $\sqrt[n]{0}=0$.

2) Корень n-й степени из действительного числа z также имеет n различных значений; действительных среди этих значений будет два, одно или ни одного, в зависимости от знака z и четности n.

3) Извлечение корня n-й степени из комплексного числа z всегда возможно и дает n различных значений.

4) Все значения корня n-1 степени расположены на окружности радиуса $|z|$ с центром в нуле и делит эту окружность на n равных частей.

В1.2 Укажите неверное утверждение:

1) Все значения корня n-ой степени из комплексного числа z можно получить умножением одного из этих значений на все корни n-ой степени из единицы.

2) Произведение двух корней n-й степени из единицы само есть корень n-ой степени из единицы.

3) Корень n-ой степени из единицы ε тогда и только тогда будет первообразным, если его степени ε^k, $k=0,1,...,n-1$, различны.

4) Если ε есть первообразный корень n-ой степени из единицы, то число ε^k тогда и только тогда будет первообразным корнем n-ой степени, если k кратно числу n.

В1.3 Для комплексного числа, записанного в тригонометрической форме неверным является следующее утверждение:

1) первый множитель – неотрицательное число $r \geq 0$;

2) второй сомножитель – сумма двух слагаемых;

3) записаны косинус и синус одного и того же аргумента;

4) мнимая единица умножена на косинус угла.

В1.4 Если комплексное число $z=x+yi$ задано в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то сопряженное ему число $\bar{z}=x-yi$ записывается в форме:

1) $\bar{z}=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)$; 2) $\bar{z}=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$;

3) $\bar{z}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; 4) $\bar{z}=-r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

В1.5 Укажите неверное утверждение:

1) Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей множителей.

2) Модуль суммы двух комплексных чисел больше или равен сумме модулей слагаемых, но меньше или равен разности этих модулей.

3) Модуль частного комплексных чисел равен частному модулей числителя и знаменателя, а аргументом частного этих чисел является разность аргументов числителя и знаменателя.

4) Модуль комплексного числа z^{-1}, обратного числу z, равен обратной величине модуля числа z.

B1.6 Укажите неверное утверждение:

1) Каждая точка координатной плоскости изображает одно и только одно комплексное число.

2) Каждое комплексное число изображается одной и только одной точкой плоскости.

3) Действительным числам соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым – точки оси ординат.

4) Сопряженные числа изображаются точками координатной плоскости, симметричными относительно оси ординат.

B1.7 Укажите неверное утверждение:

1) Полярная система координат состоит из точки – полюса и полярной оси.

2) Любая точка плоскости имеет координаты $(\varphi; r)$, называемыми полярными координатами.

3) Угол, образованный полярным лучом и радиус-вектором точки называется аргументом.

4) Длина радиус-вектора точки называется модулем.

B1.8 Укажите неверное утверждение: «Если тригонометрическая запись комплексного числа $z = x + yi$ имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то…»

1) $r = \sqrt{x^2 - y^2}$; 2) $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$;

3) $x = r\cos\varphi$; 4) $y = r\sin\varphi$.

B1.9 Комплексное число, противоположное числу $z = a + bi$ имеет вид:

1) $a - bi$; 2) $-a + bi$;

3) $-a - bi$; 4) $\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$.

B1.10 Комплексное число, обратное числу $z = a + bi$ имеет вид:

1) $a - bi$; 2) $-a + bi$;

3) $-a - bi$; 4) $\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$.

B1.11 Пусть $\sqrt{x + yi} = u + vi$ тогда верно, что

1) $u = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $v = \dfrac{1}{2}\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

2) $u^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$, $v^2 = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$;

3) $u^2 = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $v^2 = \dfrac{1}{2}\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

4) $u^2 = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $v^2 = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

B1.12 Для комплексного числа, записанного в тригонометрической форме неверным является следующее утверждение:

1) первый множитель – неотрицательное число $r \ge 0$;

2) второй сомножитель – разность двух слагаемых;
3) записаны косинус и синус одного и того же аргумента;
4) мнимая единица умножена на синус угла.

В1.13 Укажите верное утверждение:
1) аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов множителей;
2) аргумент частного комплексных чисел равен частному аргументов данных чисел;
3) аргумент частного комплексных чисел равен произведению аргументов данных чисел;
4) аргумент произведения комплексных чисел равен разности аргументов множителей.

В1.14 Укажите неверное утверждение:
1) каждая точка координатной плоскости изображает одно и только одно комплексное число;
2) каждое комплексное число изображается одной и только одной точкой плоскости;
3) действительным числам соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым – точки оси ординат;
4) сопряженные числа изображаются точками координатной плоскости, симметричными относительно начала координат.

В1.15 Укажите неверное утверждение:
1) Полярная система координат состоит из точки – полюса и полярной оси.
2) Любая точка плоскости имеет координаты $(r;\varphi)$, называемыми полярными координатами. φ - величина угла, образованного полярным лучом и радиус-вектором точки; r - длина радиус-вектора точки.
3) Угол, образованный полярным лучом и радиус-вектором точки называется аргументом.
4) Длина радиус-вектора точки называется главным аргументом.

В2.1 Найдите значение i^{483}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.2 Найдите значение i^{522}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.3 Найдите значение i^{683}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.4 Найдите значение i^{2194}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.5 Найдите значение i^{488}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.6 Найдите значение i^{679}:

1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.7 Найдите значение i^{1409}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.8 Найдите значение i^{2486}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.9 Найдите значение i^{2131}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.10 Найдите значение i^{2337}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В2.11 Найдите значение i^{1422}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

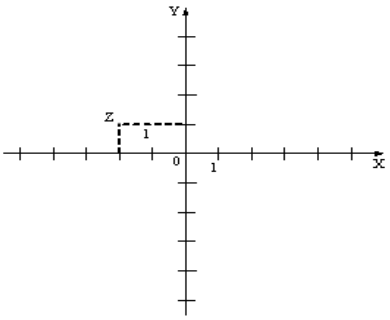
В2.12 Найдите значение i^{351}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

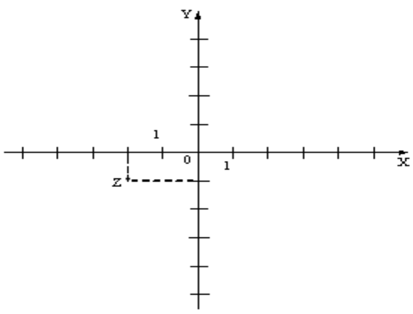
В2.13 Найдите значение i^{394}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

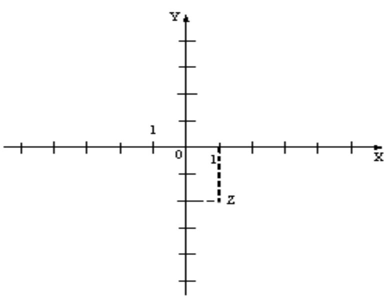
В2.14 Найдите значение i^{493}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

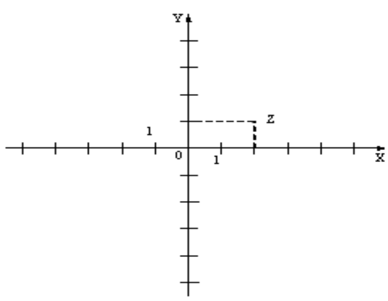
В2.15 Найдите значение i^{2150}:
1) 1; 2) i; 3) $-i$; 4) -1.

В3.1 Изображение комплексного числа $z = 1 - 2i$ на комплексной плоскости Oxy имеет вид …

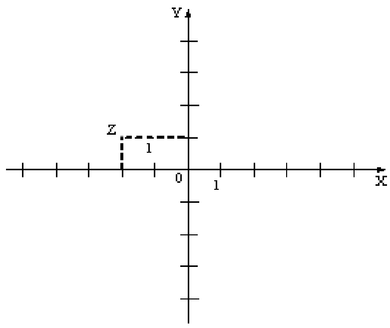
1)


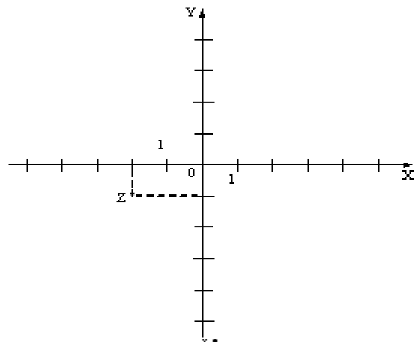
2)


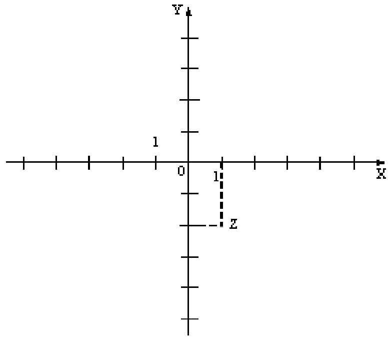
3)


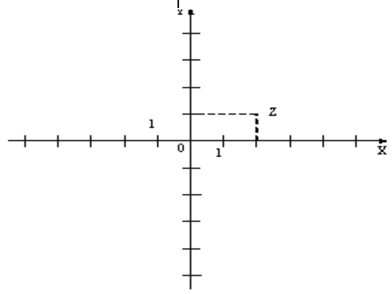
4)


B3.2 Изображение комплексного числа $z = -2 - i$ на комплексной плоскости Oxy имеет

1) 

2) 

3) 

4) 

B3.3 Полярные координаты точки $A(3,\, 4)$ имеют вид…

1) $\left(5,\, arctg\dfrac{3}{4}\right)$; 2) $\left(25,\, arctg\dfrac{3}{4}\right)$;

3) $\left(5,\, arctg\dfrac{4}{3}\right)$; 4) $\left(25,\, arctg\dfrac{4}{3}\right)$.

B3.4 Аргумент комплексного числа $2 + 2i$ равен…

1) $\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{3\pi}{4}$; 4) $\dfrac{\pi}{3}$.

B3.5 Аргумент комплексного числа $2 + \sqrt{2}i$ равен…

1) $\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{3\pi}{4}$; 4) $\dfrac{\pi}{3}$.

B3.6 Аргумент комплексного числа $2 - \sqrt{2}i$ равен…

1) $-\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{3\pi}{4}$; 4) $\dfrac{\pi}{3}$.

B3.7 Действительная часть комплексного числа $(1+i)^2$ равна …

1) 0; 2) 1; 3) – 1; 4) 2.

B3.8 Если $z = 2 + 3i$, то сопряжённое ему комплексное число $\bar{z}$ равно …

1) $2 - 3i$; 2) $3 + 2i$; 3) $-2 + 3i$; 4) $3 - 2i$.

B3.9 Если $z = 3 - 2i$, то сопряженное ему комплексное число $\bar{z}$ равно…

1) $2 - 3i$; 2) $-2 + 3i$; 3) $3 + 2i$; 4) $-3 - 2i$.

B3.10 Действительная часть комплексного числа $(1+i)^2$ равна …
1) – 1; 2) 0; 3) 2; 4) 1.

B3.11 Мнимая часть комплексного числа $(1-i)^2$ равна…
1) i; 2) $-i$; 3) $-2i$; 4) 0.

B3.12 Полярные координаты точки $A(3, 4)$ имеют вид…
1) $\left(5, arctg\dfrac{4}{3}\right)$; 2) $\left(5, arctg\dfrac{3}{4}\right)$; 3) $\left(25, arctg\dfrac{3}{4}\right)$; 4) $\left(25, arctg\dfrac{4}{3}\right)$.

B3.13 Полярные координаты точки $A(3, 4)$ имеют вид…
1) $\left(5, arctg\dfrac{4}{3}\right)$; 2) $\left(5, arctg\dfrac{3}{4}\right)$; 3) $\left(25, arctg\dfrac{3}{4}\right)$; 4) $\left(25, arctg\dfrac{4}{3}\right)$.

B3.14 Модуль комплексного числа $3+4i$ равен…
1) 4; 2) 7; 3) 5; 4) 3.

B3.15 Модуль комплексного числа $3-4i$ равен…
1) 4; 2) 7; 3) 5; 4) 3.

B4.1 Число 1, представленное в тригонометрической форме, имеет вид:
1) $1(\cos 0 + i\sin 0)$; 2) $1(\cos\pi + i\sin\pi)$;
3) $1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

B4.2 Число -1, представленное в тригонометрической форме, имеет вид:
1) $1(\cos 0 + i\sin 0)$; 2) $1(\cos\pi + i\sin\pi)$;
3) $1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

B4.3 Число i, представленное в тригонометрической форме, имеет вид:
1) $1(\cos 0 + i\sin 0)$; 2) $1(\cos\pi + i\sin\pi)$;
3) $1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

B4.4 Число $-i$, представленное в тригонометрической форме, имеет вид:
1) $1(\cos 0 + i\sin 0)$; 2) $1(\cos\pi + i\sin\pi)$;
3) $1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

B4.5 Модуль комплексного числа $-2-5i$, равен:
1) 7; 2) $\sqrt{29}$; 3) $\sqrt{7}$; 4) 2.

B4.6 Значение функции $f(z)=z^2+i$ в точке $z_0=1+i$, равно:

1) $2+3i$; 2) $2i$; 3) $3i$; 4) $3+2i$.

B4.7 Значение функции $f(z)=z^2+i$ в точке $z_0=-1+i$, равно:

1) $2-2i$; 2) $1-2i$; 3) $-i$; 4) $3+2i$.

B4.8 Даны два комплексных числа $z_1=1-i$ и $z_2=3+4i$. Тогда число $z=3z_1-2z_2$, равно:

1) $-3+5i$; 2) $9+5i$; 3) $-3-11i$; 4) $-7i$.

B4.9 Даны два комплексных числа $z_1=1+i$ и $z_2=2-i$, тогда число $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ равно:

1) $\dfrac{1}{3}+i$; 2) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i$; 3) $\dfrac{1}{2}-i$; 4) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$.

B4.10 Даны два комплексных числа $z_1=2i$ и $z_2=1-3i$, тогда число $z=\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$, равно:

1) $-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}i$; 2) $0{,}6+0{,}2i$; 3) $0{,}6-0{,}2i$; 4) $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}i$.

B4.11 Даны комплексные числа: $z_1=1+i$, $z_2=2-3i$, $z_3=-i$. Вычислить $\overline{z_1}\cdot(z_2+z_3)$.

1) $6-6i$; 2) $6-2i$; 3) $-2-6i$; 4) $2-6i$.

B4.12 Даны комплексные числа: $z_1=1+i$, $z_2=2-3i$, $z_3=-i$. Вычислить $z_2\cdot\left(z_1+\overline{z_3}\right)$.

1) $8+i$; 2) $2-5i$; 3) -4; 4)

B4.13 Даны комплексные числа: $z_1=1+i$, $z_2=2i$, $z_3=-i$. Вычислить $\dfrac{z_1+\overline{z_3}}{z_2}$.

1) $-1+\dfrac{1}{2}i$; 2) $-1-\dfrac{1}{2}i$; 3) $2-i$; 4) $-2+i$.

B4.14 Представить комплексное число $z=1-i$ в тригонометрической форме

1) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$; 4) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

В4.15 Число $z=1-i$ в тригонометрической форме имеет вид

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

3) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; 4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

С Многочлены одной переменной

С1.1 Укажите неверное утверждение:

1) Многочлен называется приведенным к стандартному или каноническому виду, если он записан строго по убывающим степеням неизвестного.

2) Степенью многочлена называется наибольший коэффициент при неизвестном.

3) Многочленом нулевой степени называется любое отличное от нуля комплексное число.

4) Число нуль считается многочленом, степень которого не определена.

С1.2 Укажите неверное утверждение

1) Многочлен, степень которого равна единице называется линейная.

2) Линейный многочлен вида $(x-a)$ называется двучленом.

3) Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ считаются равными если равны их наивысшие степени неизвестного.

4) Суммой многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен, коэффициенты которого есть сумма коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$, стоящих при одинаковых степенях неизвестного.

С1.3 Укажите неверное утверждение:

1) Степень произведения двух многочленов равна сумме степеней этих многочленов.

2) Произведение многочленов, отличных от нуля, никогда не будет равным нулю.

3) Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен $f(x)\cdot g(x)=d_0+d_1x+...+d_{n+s-1}x^{n+s-1}+d_{n+s}x^{n+s}$, коэффициенты которого определяются следующим образом: $d_i=\sum\limits_{k+l=i}a_kb_l$, $i=0,1,...,n+s$, (a_k, b_l - коэффициенты многочленов $f(x)$ и $g(x)$).

4) Роль единицы при умножении многочленов играет число 1, рассматриваемое как многочлен первой степени.

С1.4 Укажите неверное утверждение:

1) Многочлен $f(x)$ тогда и только тогда обладает обратным многочленом $f^{-1}(x)$, т.е. выполнено равенство $f(x)\cdot f^{-1}(x)=1$, когда $f(x)$ является

многочленом нулевой степени.

2) Разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ означает подобрать такую пару многочленов $q(x)$ и $r(x)$, что $g(x)=q(x)f(x)+r(x)$.

3) Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ можно найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$, причем степень $r(x)$ больше степени $g(x)$.

4) Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - ненулевые многочлены, тогда многочлен $f(x)$ делится нацело на многочлен $\varphi(x)$, если остаток от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ равен нулю.

С1.5 Укажите неверное утверждение:

1) Многочлен $\varphi(x)$ тогда и только тогда будет делителем многочлена $f(x)$, если существуют многочлены $\psi(x)$ и $\lambda(x)$, удовлетворяющие равенству $f(x)=\varphi(x)\psi(x)+\lambda(x)$.

2) Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ будет делится на $h(x)$.

3) Если $f(x)$ и $g(x)$ делятся на $\varphi(x)$, то их сумма и разность также делятся на $\varphi(x)$.

4) Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то произведение $f(x)$ на любой многочлен $g(x)$ также будет делиться на $\varphi(x)$.

С1.6 Укажите неверное утверждение:

1) Многочлены $cf(x)$, $c \neq 0$, и только они будут делителями многочлена $f(x)$, имеющими такую же степень, что и $f(x)$.

2) Всякий многочлен $f(x)$ делится на любой многочлен нулевой степени.

3) Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то $f(x)$ делится и на $c+\varphi(x)$, где с – произвольное число, отличное от нуля.

4) Если каждый из многочленов $f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)$ делится на $\varphi(x)$, то на $\varphi(x)$ будет делиться и многочлен $f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)+...+f_k(x)g_k(x)$, где $g_1(x), g_2(x), ..., g_k(x)$ - произвольные многочлены.

С1.7 Укажите неверное утверждение:

1) Тогда и только тогда многочлены $f(x)$, $g(x)$ одновременно делятся друг на друга, если $g(x)=cf(x)$, $c \neq 0$.

2) Всякий делитель одного из двух многочленов $f(x)$, $cf(x)$, где $c \neq 0$, будет делителем и для другого многочлена.

3) Значением многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ при $x=c$ называется результат вычисления $a_0c^n+a_1c^{n-1}+...+a_n$.

4) Корнем многочлена $f(x)$ называется такое $x=c$, при котором значение многочлена равно единице.

С1.8 Укажите неверное утверждение:

1) Число x_0 тогда и только тогда является корнем многочлена $f(x)$, когда существует такой многочлен $q(x)$, что $f(x)=(x+x_0)q(x)$.

2) Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $(x-c)$ равен значению многочлена при $x=c$, то есть $r=f(c)$.

3) При делении многочлена $f(x)$ на двучлен вида $ax+b$ получается остаток, равный значению этого многочлена при $x=-\frac{b}{a}$, т.е. $r=f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

4) Метод Горнера, дает возможность разделить многочлены любой степени на многочлен первой степени, т.е. на двучлен.

С1.9 Укажите неверное утверждение

1) Многочлен $\varphi(x)$ называется общим делителем для заданных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если он является делителем для сумму этих многочленов.

2) Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ называются взаимно простыми, если они не имеют никаких общих делителей кроме многочленов нулевой степени.

3) Наибольшим общим делителем отличных от нуля многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется такой многочлен $d(x)$, который является их общим делителем и, вместе с тем, сам делится на любой другой общий делитель этих многочленов.

4) Для отыскания НОД существует алгоритмом Евклида - алгоритмом последовательного деления, называемый алгоритмом Евклида.

С1.10 Укажите неверное утверждение:

1) Любые два многочлена обладают наибольшим общим делителем.

2) Если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют оба рациональные или действительные коэффициенты, то и коэффициенты их наибольшего общего делителя также будут рациональными или, соответственно, действительными.

3) Наибольший общий делитель двух многочленов определен лишь с точностью до множителя нулевой степени.

4) Два многочлена тогда и только тогда взаимно просты, если их наибольшим общим делителем будет один из этих многочленов.

С1.11 Укажите неверное утверждение:

1) Если $d(x)$ есть наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то можно найти такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$.

2) Представление $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$ называется представлением $d(x)$ (наибольшего общего делителя $f(x)$ и $g(x)$) в линейной форме.

3) Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тогда и только тогда взаимно просты, если можно найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству $f(x)u(x)+g(x)v(x)=0$.

4) Если многочлен $f(x)$ взаимно прост с каждым из многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то он взаимно прост и с их произведением.

С1.12 Укажите неверное утверждение

1) Если произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ делится на $\varphi(x)$, но $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно просты, то $g(x)$ делится на $\varphi(x)$.

2) Если многочлен $f(x)$ делится на каждый из многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые между собой взаимно просты, то $f(x)$ делится и на их сумму.

3) Наибольший общий делитель многочленов $f_1(x), f_2(x), ..., f_s(x)$ равен наибольшему общему делителю многочлена $f_s(x)$ и наибольшего общего делителя многочленов $f_1(x), f_2(x), ..., f_{s-1}(x)$.

4) Система многочленов $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ называется взаимно простой, если общими делителями многочленов этой системы являются только многочлены нулевой степени.

С1.13 Укажите неверное утверждение:

1) Многочлен называется приведенным к стандартному или каноническому виду, если он записан строго по убывающим степеням неизвестного.

2) Степенью многочлена называется наивысшая степень при неизвестном.

3) Многочленом нулевой степени называется любое отличное от нуля комплексное число.

4) Число нуль считается многочленом, степень которого не определена.

С1.14 Укажите неверное утверждение:

1) Многочлен $\varphi(x)$ тогда и только тогда будет делителем многочлена $f(x)$, если существует многочлены $\psi(x)$, удовлетворяющий равенству $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$.

2) Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ будет делится на $h(x)$.

3) Если $f(x)$ и $g(x)$ делятся на $\varphi(x)$, то их сумма и разность также делятся на $\varphi(x)$.

4) Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то и $\varphi(x)$ делиться на $f(x)$.

С1.15 Укажите неверное утверждение:

1) Тогда и только тогда многочлены $f(x)$, $g(x)$ одновременно делятся друг на друга, если $g(x) = cf(x)$, $c \neq 0$.

2) Всякий делитель одного из двух многочленов $f(x)$, $g(x)$ будет делителем и для другого многочлена.

3) Значением многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ при $x = c$ называется результат вычисления $a_0c^n + a_1c^{n-1} + ... + a_n$.

4) Корнем многочлена $f(x)$ называется такое $x = c$, при котором значение многочлена равно нулю.

С2.1 Многочлен $Ax^3 + Bx^2 + Cx + 84$ с целыми коэффициентами имеет ровно два корня $x = -2$ и $x = 3$. Найдите C.

1) 2 2) $\frac{1}{3}$ 3) 56 4) –3 5) 4

С2.2 Найти числа α, β и γ, если $x^3 + 6x^2 + \alpha x + \beta$ многочлен является кубом двучлена $x + \gamma$.

1) 12;2;8 2) 8;2;8 3) 2;4;2 4) 12;8;2 5) таких чисел не существует

С2.3 Суммой многочленов $f(x) = 2 + 7x^2 - 3x^6$ и $g(x) = 4 - 2x^2 + 3x^6$ является многочлен

1) $6 + 5x^4$; 2) $6 + 5x^2$; 3) $6 + 9x^2 + x^6$; 4) $2 + 7x^2 - 3x^4$.

С2.4 Суммой многочленов $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x$ и $g(x) = 2x^3 + 3$ является многочлен

1) $2x^7 + 5x$; 2) $x^4 - 3x^2 + 3$;
3) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 3$; 4) $x^4 + 3$.

С2.5 Остаток от деления многочлена $P_3(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$ на $(x - 2)$, равен:

1) 23 2) 13 3) –23 4) 7 5) 0

С2.6 Найти остаток от деления многочлена $2x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ на двучлен $(x + 2)$.

1) 7 2) 13 3) 21 4) –21 5) 0

С2.7 Найти остаток от деления многочлена $2x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ на двучлен $(x - 3)$.

1) 12 2) –3 3) 152 4) 125 5) 0

С2.8 Остаток от деления многочлена $f(x) = 3x^2 - x + 1$ на двучлен $x + 1$, равен

1) -1; 2) 5; 3) 1; 4) 0.

С2.9 Остаток от деления многочлена $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$ на двучлен $2x - 1$, равен

1) 2; 2) 3; 3) -1; 4) 1.

С2.10 Остаток от деления многочлена $g(x) = 8x^3 - 2x + 1$ на двучлен $2x + 1$, равен

1) $\frac{1}{2}$; 2) -1; 3) 1; 4) 2.

С2.11 Остаток от деления многочлена $h(x)=27x^3+9x^2+3x-1$ на двучлен $3x-11$, равен

1) 2; 2) -1; 3) $\frac{1}{9}$; 4) 0.

С2.12 Остаток от деления многочлена $f(x)=3x^6-5x^4-3x^2+3$ на двучлен $2x-2$, равен

1) 2; 2) 1; 3) -2; 4) 0.

С2.13 Остаток от деления многочлена $f(x)=\frac{1}{8}x^3-3x^2+5x-1$ на двучлен $\frac{1}{2}x-1$, равен

1) -2; 2) 1; 3) 2; 4) 0.

С2.14 При каком значении λ многочлен $P_4(x)=x^4+6x^2+\lambda x+6$ разделится на $x+2$ нацело?

1) –12 2) 32 3) –11 4) 23 5) –2

С2.15 При каком значении λ многочлен $P_3(x)=2x^3-3x^2+\lambda x+7$ разделится нацело на двучлен $(x+1)$?

1) 18 2) –2 3) –21 4) 13 5) 2

С3.1 Корнем уравнения $y^2+2y+10=0$ является число…

1) $-1+3i$; 2) 2; 3) $1+3i$; 4) 4.

С3.2 Дана система векторов-многочленов $f(t)=1-t^2$, $g(t)=1+t^3$. Тогда линейная комбинация $f+2g$ имеет вид…

1) $2-t^2+t^3$; 2) $3-t^2+2t^3$;
3) $2t^3-t^2$; 4) $3-2t^2+t^3$.

С3.3. Известно, что многочлен x^3-x-6 имеет один действительный корень. Найдите этот корень.

1) 2 2) 0 3) –2 4) 1 5) 3

С3.4 Сколько действительных решений имеет многочлен $P_3(x)=x^3+x-2$?

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) 4

С3.5 Найти сумму корней многочлена $P_3(x)=x^3-3x-2$.

1) 1 2) –1 3) 0 4) 2 5) 3

С3.6 Сколько действительных корней имеет многочлен $P_4(x) = x^4 + 5x^2 + 6$?

1) 1 2) 0 3) 4 4) 3 5) 2

С3.7 Дано разложение многочлена на множители: $f(x) = x^2\left(x^2+3\right)^3(x+1)^4$. Тогда корень $x=-1$ имеет кратность, равную…

1) 3; 2) 2; 3) 12; 4) 4.

С3.8 Указать сумму действительных корней многочлена $P_4(x) = x^4 + x^3 - x - 1$.

1) 1 2) –3 3) 2 4) 0 5) $\sqrt{5}$

С3.9 Указать сумму иррациональных корней многочлена $P_3(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.

1) $\sqrt{3}$ 2) 4 3) $2-\sqrt{3}$ 4) $4-2\sqrt{3}$ 5) $4-2\sqrt{3}$

С3.10 Указать количество действительных корней многочлена $P_6(x) = x^6 + 27$.

1) 0 2) 2 3) 3 4) 4 5) 6

С3.11 Найти сумму всех корней многочлена $P_4(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.

1) 0 2) –1 3) 2 4) 4 5) 1

С3.12 Найти сумму всех рациональных корней многочлена $P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$.

1) 3 2) $-\dfrac{3}{2}$ 3) 1,5 4) $-\dfrac{1}{2}$ 5) 0

С3.13 Многочлен $f(x)$ при делении на $x^3 - 7x - 6$ дает в остатке $x^2 + x + 1$. Найдите $f(-1)\cdot f(-2) - f(3)$.

1) 10 2) 16 3) –10 4) –16 5) 1

С3.14 Многочлен $f(x)$ при делении на $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ дает в остатке $x^2 - x - 1$. Найдите $f(-2)\cdot f(2) - f(-3)$.

1) –16 2) 6 3) 16 4) –6 5) –4

С3.15 Указать на какие из предложенных двучленов делятся без остатка многочлен $P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 3$: а) $x-2$ б) $x-1$ в) $x+3$ г) $x+2$.

1) а, б 2) б, в 3) в, г 4) а, в 5) а, г

D Матрицы и определители

D1.1 Укажите неверное утверждение:

1) Элементы матрицы нумеруются 2 индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер столбца, а второй j - номер строки на пересечении которых находится элемент в матрице.

2) Если у матрицы m строк и n столбцов, то по определению она имеет размерность $m \times n$.

3) Матрицы A и B называются равными, если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

4) Равными могут быть только матрицы одинаковой размерности.

D1.2 Укажите неверное утверждение. «Пусть дана матрица порядка $(m \times n)$.»:

1) Если все миноры матрицы равны нулю, ранг ее считается равным единице.

2) Для квадратной матрицы n-го порядка $r = n$ тогда и только тогда, когда матрица – невырожденная.

3) Ранг матрицы выражается целым числом, заключенным между 0 и меньшим из чисел m, n, т.е. $0 \le r \le \min(m, n)$.

4) Ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица является нулевой.

D1.3 Указать неверное утверждение. «Ранг матрицы не изменится, если:»

1) поменять местами любые два параллельных ряда;

2) умножить каждый элемент ряда на один и тот же множитель $\lambda \ne 0$;

3) прибавить к элементам ряда соответствующие элементы другого ряда, умноженные на один и тот же множитель.

4) сложить каждый элемент ряда с одним и тем же числом.

D1.4 Указать неверное утверждение:

1) Ранг произведения двух матриц равен произведению рангов сомножителей, т.е. $rang\ AB = rangA \cdot rang\,B$.

2) Если A - невырожденная $n \times n$ матрица, а B - любая $n \times m$ матрица, то $rang\ AB = rang\,B$.

3) Если все элементы матрицы A равны нулю, то $rang\,A = 0$.

4) Наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы называется рангом этой матрицы.

D1.5 Укажите неверное утверждение:

1) Обращение произведения матриц равно произведению обращений сомножителей, расположенных в противоположном порядке.

2) Для прямоугольных матриц A и B произведение определено, если длины строк первого сомножителя A равны длинам столбцов второго сомножителя B.

3) Свойство коммутативности при умножении даже квадратных матриц не имеет места.

4) Произведение ортогональных матриц ортогональной матрицей не

является.

D1.6 Укажите неверное утверждение:

1) Квадратная матрица A называется ортогональной, если транспонированная матрица обратна к исходной.

2) Квадратная матрица A называется обратимой, если существует квадратная матрица X, удовлетворяющая соотношениям $AX = XA = E$.

3) Степени симметрической матрицы не являются симметрическими матрицами.

4) Замена строк матрицы на ее столбцы, а столбцов – на строки называется транспонированием матрицы.

D1.7 Укажите неверное утверждение:

1) Значение суммы многочленов от λ при $\lambda = A$ (A - матрица) равно сумме значений слагаемых, а значение произведения многочленов равно произведению значений сомножителей.

2) Матрица, обратная к унитарной матрице, является ортогональной матрицей.

3) Произведение унитарных матриц является унитарной матрицей.

4) Каждая ортогональная матрица обратима.

D1.8 Укажите неверное утверждение:

1) Для кососимметрических матриц и только для них, верно тождество $A^T = -A$.

2) Для симметрических матриц, и только для них, верно тождество $A^T = A$.

3) На главной диагонали кососимметрической матрицы все элементы равны единице.

4) Квадратную матрицу $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, называют симметрической, если в ней элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, т.е. если $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

D1.9 Укажите неверное утверждение:

1) Если A - матрица размера $m \times n$, то A^T - матрица размера $n \times m$.

2) Транспонированием матрицы A называют операцию, при которой в матрице строки заменены на соответствующие столбцы.

3) Суммой (разностью) матриц A и B, обозначаемой $A + B$ ($A - B$), называется матрица C, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij} - соответственно элементы матриц A и B.

4) Квадратную матрицу $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, называют кососимметрической, если элементы, расположенные в ней симметрично относительно второстепенной диагонали, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т.е. если $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

D1.10 Укажите неверное утверждение:

1) Любая матрица за счет элементарных преобразований над строками может быть преобразована в трапециевидную.

2) Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

3) Ранг треугольной матрицы равен сумме элементов стоящих на главной диагонали.

4) Если матрица не нулевая, она содержит ненулевой элемент, который посредством перестановок строк и столбцов можно перевести в левый верхний угол.

D1.11 Укажите верное утверждение:

1) Матрица называется квадратной, если каждый ее элемент является квадратом предыдущего.

2) Матрица называется единичной, если ее ранг равен единице.

3) Ранг матрицы, имеющей всего лишь один ненулевой элемент, равен единице.

4) Если $C = A + B$, то $rang\,C = rangA + rangB$.

D1.12 Укажите неверное утверждение:

1) Если квадратные матрицы A, B, C одного и того же порядка обратимы, то их произведение ABC также обратимо и $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

2) Матрица, транспонированная с произведением двух матриц, равна произведению транспонированных, взятых в обратном порядке.

3) Все натуральные степени одной и той же матрицы не перестановочны между собой.

4) Чтобы умножить сумму матриц на сумму других матриц, нужно каждую матрицу первой суммы умножить на каждую матрицу второй и полученные произведения сложить.

D1.13 Укажите неверное утверждение:

1) Совокупность всех квадратных матриц данного порядка n над произвольным ассоциативным кольцом K является снова ассоциативным кольцом относительно матричных операций сложения и умножения.

2) В произведениях нескольких матриц скобки можно расставлять произвольно.

3) В результате транспонирования обратимой матрицы A получается снова обратимая матрица.

4) Если матрицы A, B обратимы и то $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

D1.14 Укажите то свойство матриц, которое является неверным:

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$. 2) $A + B = B + A$.

3) Существует 0: $A \cdot 0 = 0 \cdot A = A$. 4) $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$.

D1.15 Укажите то свойство матриц, которое является неверным:

1) $c(A_1 + A_2) = cA_1 + cA_2$. 2) $c_1(c_2A) = (c_1c_2)A$.

3) $1 \cdot A = A$. 4) $(A_1 + A_2)B = A_1 + A_2B$.

D2.1 Укажите единичную матрицу.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D2.2 Укажите кососимметрическую матрицу.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 3 \end{pmatrix}$.

D2.3 Если $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, то матрица $\frac{1}{2}A$ имеет вид

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$.

D2.4 Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, то матрица $3A$ имеет вид

1) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$.

D2.5 Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, то матрица $A + E$ имеет вид

1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D2.6 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $A + B$ равно…

1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D2.7 Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, тогда сумма $a_{11} + a_{32}$ равна…

1) 1; 2) 7; 3) -2; 4) -7.

D2.8 Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, то сумма $a_{23}+a_{32}$ равна…

1) 4; 2) 6; 3) 9; 4) -14.

D2.9 Матрицы $A=\begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} y & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ равны между собой, если…

1) $x=0,\ y=2$; 2) $x=5,\ y=-3$;
3) $x=1,\ y=4$; 4) таких x и y не существует.

D2.10 Матрицы $A=\begin{pmatrix} x^2-y & 1 \\ 2 & -3y \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & y^2 \end{pmatrix}$ равны между собой при x, y соответственно равных…

1) $x=1,\ y=2$; 2) $x=5,\ y=-3$;
3) $x=1,\ y=4$; 4) действительных x и y не существует.

D2.11 Если $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, то матрица $3A$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;
3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$.

D2.12 Если $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, то матрица $\frac{1}{2}A$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$;
3) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

D2.13 Если $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, то матрица $\frac{1}{2}A$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

D2.14 Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, то матрица $A + E$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

D2.15 Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, то матрица $2A - E$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$.

D3.1 Известно, что $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $C = AB$ равна:

1) $\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ 30 & 67 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$; 4) вычислить невозможно.

D3.2 Известно, что $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда BA имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$; 4) вычислить невозможно.

D3.3 Известно, что $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Тогда AB имеет вид:

1) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$; 4) вычислить невозможно.

D3.4 Известно, что $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Тогда BA имеет вид:

1) $\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}-2 & -10\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; 4) вычислить невозможно.

D3.5 Пусть $C=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 7 & 1\end{pmatrix}$, тогда матрица C^2 равна:

1) $\begin{pmatrix}49 & 7\\ 7 & 50\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 49\\ 49 & 0\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}0 & 49\\ 49 & 1\end{pmatrix}$; 4) вычислить невозможно.

D3.6 Пусть $C=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 7 & 1\end{pmatrix}$, тогда $C\cdot C^T$ есть:

1) $\begin{pmatrix}0 & 49\\ 49 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 49\\ 49 & 0\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}49 & 7\\ 7 & 50\end{pmatrix}$; 4) вычислить невозможно.

D3.7 Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$, тогда $A\cdot A^T$ есть:

1) $\begin{pmatrix}4 & 0\\ 9 & 0\\ 1 & 25\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}4 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 25\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}14 & -5\\ -5 & 25\end{pmatrix}$; 4) произведение невозможно.

D3.8 Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $A^T \cdot A$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 4) произведение невозможно.

D3.9 Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $A \cdot A^T$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$; 4) произведение невозможно.

D3.10 Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, тогда $A \cdot A^T$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) (11); 4) произведение невозможно.

D3.11 Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, тогда $A^T \cdot A$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) (11); 4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

D3.12 Матрица A^2, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$.

D3.13 Матрица A^2, где $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix}0 & 4\\ 9 & 4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 9\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 9\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 6 & 10\end{pmatrix}$.

D3.14 Матрица E^2, где $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

D3.15 Матрица A^2, где $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

D4.1 Для того, чтобы получить единичную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ нужно прибавить:

1) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

D4.2 Для того, чтобы получить единичную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ нужно прибавить:

1) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

D4.3 Для того, чтобы получить единичную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ нужно прибавить:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -3 & -1 & -5 \\ -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -5 & -8 & -3 \\ -3 & -1 & -5 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

D4.4 Пусть $\varphi(\lambda) = 2 - 5\lambda^2$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, тогда $\varphi(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

D4.5 Пусть $\varphi(\lambda) = 3\lambda^2 - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, тогда $\varphi(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

D4.6 Пусть $\varphi(\lambda) = \lambda + 3\lambda^2$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, тогда $\varphi(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

D4.7 Пусть $f(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $f(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

D4.8 Пусть $f(\lambda) = 1 + 2\lambda - \lambda^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $f(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

D4.9 Пусть $f(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda - 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $f(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & -15 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D4.10 Пусть $f(\lambda) = -\lambda^2 + \lambda + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $f(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

D4.11 Пусть $\varphi(\lambda) = -2 - 5\lambda + 3\lambda^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $\varphi(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -14 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

D4.12 Пусть $\varphi(\lambda) = 2\lambda^2 + \lambda - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $\varphi(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D4.13 Пусть $\varphi(\lambda) = 3\lambda - 2\lambda^2$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $\varphi(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -14 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$.

D4.14 Пусть $\varphi(\lambda) = 5\lambda^2 + \lambda - 3$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $\varphi(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -14 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

D4.15 Пусть $\varphi(\lambda) = -3\lambda^2 - \lambda + 1$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $\varphi(A)$ есть:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$.

D5.1 Укажите неверное утверждение:

1) Значение определителя не изменится после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот.

2) Если поменять местами два параллельных ряда определителя, то значение определителя не изменится.

3) Определитель с двумя равными параллельными рядами равен нулю.

4) Если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя.

D5.2 Укажите неверное утверждение:

1) Если элементы какого-либо столбца определителя умножить на число λ, то определитель не изменится.

2) Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю.

3) Определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю.

4) Сумма всех произведений элементов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю.

D5.3 Укажите неверное утверждение:

1) Главная диагональ единичной матрицы занята единицами.

2) Всякая вырожденная матрица имеет обратную.

3) Матрица-столбец – матрица, состоящая из одного столбца.

4) Количество строк столбцов прямоугольной матрицы – разное.

D5.4 Укажите неверное утверждение:

1) Если все элементы какого-либо столбца определителя равны нулю, то определитель тоже равен нулю.

2) Определитель, у которого элементы двух строк соответственно пропорциональны, равен нулю.

3) Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот.

4) Если поменять местами любые две строчки, то значение определителя не изменится.

D5.5 Укажите неверный ответ. Значение определителя не изменится, если…:

1) любую строку определителя умножить на любое число;

2) заменить все строки соответствующими столбцами;

3) одну из строк заменить линейной комбинацией этой строки и любой другой;

4) один из столбцов заменить линейной комбинацией этого столбца и любого другого.

D5.6 Укажите верный ответ. Значение определителя не изменится, если…:

1) строку умножить на любое число;

2) столбец сложить с любым числом;
3) строку заменить ее суммой с другой стороны;
4) строку сложить с любым числом.

D5.7 Укажите верный ответ. Значение определителя изменится, если…:
1) если заменить все его строки соответствующими столбцами;
2) если любую строку умножить на любое число;
3) если дважды поменять любые две пары строк;
4) если дважды поменять местами любые две пары столбцов.

D5.8 Укажите неверный ответ. Значение определителя равно нулю, если…:
1) одна из строк нулевая;
2) есть нулевой столбец;
3) определитель содержит два одинаковых столбца;
4) заменить все строки столбцами.

D5.9 Укажите неверное утверждение:

1) Определителем квадратной матрицы второго порядка (называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной диагонали матрицы и произведений элементов побочной диагонали.

2) Определитель матрицы обозначается символом $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

3) Каждый элемент определителя обозначается буквой a с двумя индексами: первый обозначает номер строки, второй – номер столбца.

4) Формула Крамера для системы двух уравнений с двумя неизвестными имеет вид: $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $(\Delta \neq 0)$.

D5.10 Укажите неверное утверждение:

1) Определителем квадратной матрицы называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. Сомножители в каждом слагаемом записываются в порядке следования строк, номера же столбцов образуют перестановки; слагаемые, соответствующие четным перестановкам, берутся со знаком «плюс», соответствующие нечетным – со знаком «минус».

2) Минором порядка k для заданной матрицы называется определитель матрицы, составленной из элементов, находящихся на пересечении некоторых выбранных k строк и k столбцов.

3) Минором, дополнительным к данному минору порядка k, называется минор порядка $k-n$, матрица которого получается из исходной посредством вычеркивания строк столбцов, содержащих данный минор.

4) Алгебраическим дополнением к данному минору называется дополнительный минор с множителем $(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k+\beta_1+\ldots+\beta_k}$.

D5.11 Укажите неверное утверждение:

1) Теорема Лапласа. Пусть в матрице определителя выбраны k строк. Определитель равен сумме произведений всех миноров порядка k, составленных из этих строк, на их алгебраические дополнения.

2) Минором элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит данный элемент.

3) Минором элемента a_{21} определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - элемент a_{21} (определитель первого порядка).

4) Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$ и обозначается A_{ij}, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

D5.12 Укажите неверное утверждение:

1) Если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить соответственные элементы другого столбца (строки), предварительно умножив их на один и тот же множитель, то определитель окажется умноженным на этот множитель.

2) Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

3) Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен нулю.

4) Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

D5.13 Значение определителя не изменится, если

1) поменять местами любые две строки;

2) любую строку умножить на любое число;

3) любой столбец умножить на любое число;

4) поменять знак всех элементов какой-либо строки.

D5.14 Знак определителя изменится на противоположный, если:

1) все строки заменить соответствующими столбцами;

2) одну из строк умножить на $\lambda = -1$;

3) один из столбцов заменить его линейной комбинацией с любым другим столбцом;

4) одна из строк пропорциональна другой.

D5.15 Укажите неверное утверждение. Определитель равен нулю в случае, если

1) Один из столбцов определителя – нулевой.

2) Определитель содержит две равные строки.

3) Определитель содержит пропорциональные столбцы.

4) Все строки ненулевого определителя заменить соответствующими им столбцами.

D6.1 Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 4-\alpha \\ 6 & 2\alpha-3 \end{pmatrix}$, равен 0 при α равном…

1) – 3; 2) 9; 3) 0; 4) 3.

D6.2 Матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной при λ равном…

1) 1; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) 3.

D6.3 Разложение определителя $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & b_2 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$ по элементам второй строки имеет вид…

1) $b_2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$; 2) $-b_2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$; 4) $b-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$.

D6.4 Разложение определителя $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$ по элементам второй строки имеет вид…

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}$; 3) $b_2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}$.

D6.5 Значение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, равно:

1) 0; 2) 1; 3) -1; 4) 3.

D6.6 Определитель $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ будет равен:

1) -3; 2) 0; 3) 44; 4) -44.

D6.7 Определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ будет равен:

1) -6; 2) 0; 3) -3; 4) 2.

D6.8 Определитель $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$ будет равен:

1) $\cos 2x$; 2) 1; 3) $ctg\,x$; 4) 0.

D6.9 Определитель $\begin{vmatrix} tg\,x & 2 \\ \frac{1}{2} & ctg\,x \end{vmatrix}$ будет равен:

1) $ctg\,x$; 2) $tg\,x$; 3) 0; 4) 2.

D6.10 Определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ будет равен:

1) 2; 2) 0; 3) 15; 4) 3.

D6.11 Матрица $A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ вырождена при λ, равном…

1) $-\frac{8}{3}$; 2) $\frac{10}{3}$; 3) 2; 4) $\frac{8}{3}$.

D6.12 Матрица $A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ вырождена при λ, равном…

1) $-\frac{8}{3}$; 2) $\frac{10}{3}$; 3) 2; 4) $\frac{8}{3}$.

D6.13 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда определитель произведения матриц $det(AB)$ равен…

1) -12; 2) -6; 3) 6; 4) 12.

D6.14 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда определитель произведения матриц $det(AB)$ равен…

1) -12; 2) -6; 3) 6; 4) 12.

D6.15 Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix} = 0$ при α равном…

1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) 0,5.

D7.1 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 3 & 7 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -8 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -2 & 7 & 5 & -8 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 0 & 5 & 7 & 3 & 6 & 9 \\ 11 & 10 & -5 & 3 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1) 2688; 2) 704; 3) 49; 4) 0.

D7.2 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 13 & 5 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -9 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 12 & 1 & 13 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & -7 & 9 & 11 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 15 & -6 & 7 & -8 & 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1) 21; 2) 242; 3) 0; 4) 1.

D7.3 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 4 & 5 & 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1) 25; 2) 15; 3) 30; 4) 60.

D7.4 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 13 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 12 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

1) 1; 2) 0; 4) 6; 4) -65.

D7.5 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 3 & 4 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -8 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 4 & 5 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

1) 2; 2) 0; 3) 6; 4) 7.

D7.6 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & -7 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 3 & 6 & 8 & 10 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & -7 & 5 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

1) 0; 2) 15; 3) 17; 4) 27.

D7.7 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 7 & 9 & 0 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

1) 56; 2) 6; 3) 64; 4) 0.

D7.8 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

1) 32; 2) 5; 3) 0; 4) 1.

D7.9 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 9 & 8 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 9 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 0 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1) 0; 2) 30; 3) 15; 4) 1.

D7.10 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

1) 7; 2) 9; 3) 0; 4) 63.

D7.11 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 & 7 & 8 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

1) -8; 2) 0; 3) 64; 4) 27.

D7.12 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1) 12; 2) 5; 3) -49; 4) 49.

D7.13 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1) 13; 2) 1; 3) -132; 4) 27.

D7.14 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 17 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1) 117; 2) -38; 3) -4; 4) 4.

D7.15 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1) 0; 2) 5; 3) 4; 4) 1.

D8.1 Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2a-3 \end{vmatrix}$ равен нулю при $a = \ldots$

1) 2; 2) 0; 3) -3; 4) 3.

D8.2 Определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & a+6 \end{vmatrix}$ равен нулю при $a = \ldots$

1) 1; 2) -12; 3) 12; 4) 0.

D8.3 Определитель $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1-a & -1 \end{vmatrix}$ равен нулю при $a = \ldots$

1) 2; 2) -1; 3) $-1; 2$; 4) $0; -1$.

D8.4 Значение определителя $\begin{vmatrix} a & 2a \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ равно единице при a равном

1) 0; 2) $-\dfrac{1}{3}$; 3) 1; 4) -1.

D8.5 Значение определителей $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \end{vmatrix}$ раны между собой, при a равном

1) $-\dfrac{1}{2}$; 2) 1; 3) 0; 4) 3.

D8.6 Значение определителя $\begin{vmatrix} 4 & a & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ равно единице, при a равном

1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $-\dfrac{1}{2}$; 3) 0; 4) $-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}$.

D8.7 Значение определителя $\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равно девяти, при a равном

1) 3; 2) 0; 3) -3; 4) $-3; 3$.

D8.8 Значения определителей $\begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ равны между собой, при a равном

1) -1; 2) 0; 3) 2; 4) при любом a.

D8.9 При каком положительном значении a, верно следующее неравенство $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} a & 0 \\ a^2 & -1 \end{vmatrix}$?

1) $[0; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$.

D8.10 При каком натуральном a верно неравенство $\begin{vmatrix} a & 3 & a \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} < 9$?

1) 1; 2) 2; 3) $\varnothing$; 4) $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

D8.11 При каком натуральном k верно неравенство $\begin{vmatrix} a & 7 & a \\ 0 & -1 & 2a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$?

1) 1; 2) 2; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; 1)$.

D8.12 Укажите наименьшее целое k, при котором верно $k \cdot \begin{vmatrix} k & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 2 & k \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

1) 3; 2) 4; 3) -3; 4) 0.

D8.13 Определитель $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1-a & -1 \end{vmatrix}$ равен нулю при $a = \ldots$

1) $-1; 2$; 2) -1; 3) 2; 4) $0; -1$.

D8.14 Значение определителя $\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равно девяти, при a равном

1) 3; 2) $-3; 3$.; 3) -3; 4) 0.

D8.15 Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2a-3 \end{vmatrix}$ равен нулю при $a = \ldots$

1) 2; 2) 3; 3) -3; 4) 0.

D9.1 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$:

1) -12; 2) 1; 3) 0; 4) 2.

D9.2 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$:

1) 6; 2) 0; 3) -4; 4) 1.

D9.3 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$:

1) 0; 2) -2; 3) 4; 4) 6.

D9.4 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$:

1) 5; 2) -9; 3) -3; 4) 0.

D9.5 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$:

1) 0; 2) -6; 3) 2; 4) -4.

D9.6 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$:

1) 13; 2) 0; 3) -1; 4) 2.

D9.7 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$:

1) -1; 2) 2; 3) 17; 4) 0.

D9.8 Значение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, равно:

1) 32; 2) 0; 3) 1; 4) -2.

D9.9 Значение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, равно:

1) 16; 2) -1; 3) 0; 4) 32.

D9.10 Значение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, равно:

1) 0; 2) -16; 3) 37; 4) 28.

D9.11 Значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, равно:

1) 17; 2) -22; 3) 0; 4) 38.

D9.12 Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ будет равен:

1) 0; 2) 7; 3) -14; 4) 1.

D9.13 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$:

1) 0; 2) -1; 3) 8; 4) 2.

D9.14 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -11 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -9 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 13 & 2 & 6 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1) 0; 2) -3; 3) -77; 4) 267.

D9.15 Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 9 & 2 & 7 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 1 & 7 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 6 & 4 & 9 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

1) 12; 2) 15; 3) 24; 4) 17.

D10.1 Если матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, то ей обратная имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

D10.2 Если матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, то ей обратная имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

D10.3 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$:

1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 5.

D10.4 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

D10.5 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$:

1) 3; 2) 4; 3) 4; 4) 2.

D10.6 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$:

1) 3; 2) 1; 3) 3; 4) 0.

D10.7 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 5) 5.

D10.8 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

1) 5; 2) 3; 3) 4; 4) 2.

D10.9 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 4.

D10.10 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$:

1) 3; 2) 1; 3) 2; 4) 4.

D10.11 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$:

1) 3; 2) 1; 3) 6; 4) 2.

D10.12 Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ равен:

1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3.

D10.13 Базисным минором матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ может быть один из следующих:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

D10.14 Базисным минором матрицы $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ может быть один из следующих:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

D10.15 Базисным минором матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ может быть один из следующих:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

E Системы линейных уравнений

E1.1 Укажите неверное утверждение:

1) Если свободные члены равны нулю, система линейных уравнений называется однородной, в противном случае – неоднородной.

2) Система линейных уравнений, не имеющая ни одного решения, называется несовместной, или противоречивой.

3) Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной.

4) Совместные системы подразделяют на определенные, обладающие единственным решением, и неопределенные, не имеющие решений.

E1.2 Укажите неверное утверждение:

1) Однородная система всегда совместна.

2) Решить систему означает найти все ее решения или доказать, что таковых не имеется.

3) Две системы с одними и теми же неизвестными эквивалентны (равносильны), если каждая из них совместна.

4) Метод Гаусса один из методов решений матрица системы линейных уравнений.

E1.3 Укажите неверное утверждение:

1) Если в результате преобразований расширенной матрицы системы линейных уравнений по методу Гаусса матрица приведена к треугольному виду, то система совместна и определена.

2) Если в результате преобразований расширенной матрицы системы количество строк стало меньше количества переменных, то система совместна и неопределенна.

3) Чтобы из общего решения системы линейных уравнений получить одно из частных достаточно произвольному постоянному придать любое числовое значение.

4) Если в процессе преобразований в матрице системы появилась строчка $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \mid b\right)$, то система неопределена.

E1.4 Укажите неверное утверждение:

1) Если Δ - определитель матрицы системы линейных уравнений, а Δ_i - определитель матрицы которого отличается от матрицы определителя Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов, то формулы Крамера имеют вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

2) Если известно, что система n линейных уравнений с n неизвестными не имеет решений, то определитель матрицы из коэффициентов системы равен единице.

3) Если система n линейных уравнений с n неизвестными имеет более чем одно решение, то определитель матрицы из ее коэффициентов равен нулю.

4) Для того чтобы система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы определитель матрицы из ее коэффициентов был равен нулю.

E1.5 Укажите неверное утверждение:

1) Если A - матрица системы линейных уравнений, B - матрица-столбец, состоящая из свободных членов, а X - матрица-строка, состоящая из переменных системы, то систему линейных уравнений можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$.

2) Для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

3) Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

4) Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно.

E1.6 Укажите неверное утверждение:

1) Если система имеет единственное решение, то ранг матрицы системы равен числу неизвестных.

2) Если множество решений системы бесконечно, то ранг матрицы системы больше числа неизвестных.

3) Базисными неизвестными совместной системы, ранг матрицы которой равен r, называются r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор.

4) Совокупность базисных неизвестных может быть выбрана не единственным образом.

E1.7 Укажите неверное утверждение:

1) Если матрица А из коэффициентов системы линейных однородных уравнений с n неизвестными, если имеет ранг r, то при $r < n$ система обладает решениями, отличными от нулевого.

2) Система п линейных однородных уравнений с п неизвестными тогда и только тогда обладает решениями, отличными от нулевого, если определитель этой системы не равен нулю.

3) Если вектор $\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$ является решением системы линейных однородных уравнений, то при любом числе k вектор $k\beta = (kb_1, kb_2, ..., kb_n)$ также будет решением этой системы.

4) Если вектор $\gamma = (c_1, c_2, ..., c_n)$ - еще одно решение системы, то для этой системы служит решением и вектор $\beta + \gamma = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, ..., b_n + c_n)$:

E1.8 Укажите неверное утверждение:

1) Всякая максимальная линейно независимая система решений однородной системы уравнений называется ее фундаментальной системой решений.

2) n-мерный вектор тогда и только тогда будет решением системы линейных однородных уравнений, если он является линейной комбинацией векторов, составляющих фундаментальную систему.

3) Фундаментальная система существует лишь в том случае, если система линейных однородных уравнений обладает ненулевыми решениями, т. е. если ранг ее матрицы из коэффициентов равен числу неизвестных.

4) Если ранг r матрицы из коэффициентов системы линейных однородных уравнений меньше числа неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений системы состоит из $n - r$ решений.

E1.9 Укажите неверное утверждение:

1) Если в системе линейных уравнений все свободные члены заменить нулями, то полученная система называется приведенной системой для данной.

2) Сумма любого решения системы линейных уравнений с любым решением ее приведенной системы снова будет решением исходной системы.

3) Произведение любых двух решений системы линейных уравнений служит решением для ее приведенной системы.

4) Найдя одно решение системы линейных уравнений и складывая его с каждым из решений приведенной системы, мы получим все решения исходной системы.

E1.10 Система линейных уравнений называется совместной, если

1) все свободные члены ее равны нулю;
2) определитель ее матрицы положителен;
3) она имеет решение (решения);
4) она не имеет решений.

E1.11 Если в результате преобразований расширенной матрицы системы линейных уравнений появилась строчка $(0 \quad 0 \quad ... \quad 0 \mid b)$, то система

1) определена; 2) неопределена;
3) совместна; 4) не совместна.

E1.12 Система линейных уравнений имеет единственное решение, если

1) ранг матрицы системы равен числу неизвестных;
2) ранг матрицы системы больше числа неизвестных;
3) ранг матрицы системы меньше числа неизвестных;
4) определитель матрицы системы равен нулю.

E1.13 Пусть матрица A системы n линейных однородных уравнений имеет ранг r, тогда нулевое решение будет единственным, если

1) $r \neq n$; 2) $r = n$; 3) $r > n$; 4) $r < n$.

E1.14 Если r - ранг системы линейных однородных уравнений с n неизвестными, то система обладает не только нулевым решением при

1) $r = n$; 2) $r \neq n$; 3) $r > n$; 4) $r < n$.

E1.15 Если ранг r матрицы системы линейных однородных уравнений меньше числа неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений состоит из

1) n решений; 2) $n + r$ решений;
3) $n - r$ решений; 4) r решений.

E2.1 Определитель основной матрицы системы $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 3, \\ 3x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ равен…

1) -17; 2) 13; 3) -14; 4) 0.

E2.2 Укажите систему линейных алгебраических уравнений, подготовленную для обратного хода Гаусса.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0, \\ \quad - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \quad + \quad x_3 = 0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ -x_1 \quad + \quad x_3 = 3, \\ \ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 4, \\ \quad - x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_3 = 10 \end{cases}$.

E2.3 Переменная x системы уравнений $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$ определяется по формуле…

1) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}$; 2) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}$;

3) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}$; 4) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$.

E2.4 Переменная x системы $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$ определяется по формуле…

1) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}1&4&1\\3&1&3\\2&8&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\3&-5&3\\2&7&-1\end{vmatrix}}$; 2) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}1&2&4\\3&-5&1\\2&7&8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\3&-5&3\\2&7&-1\end{vmatrix}}$;

3) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4&2&1\\1&-5&3\\8&7&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\3&-5&3\\2&7&-1\end{vmatrix}}$; 4) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}1&2&1\\3&-5&3\\2&7&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&2&1\\1&-5&3\\8&7&-1\end{vmatrix}}$.

E2.5 Если $(x_0,\, y_0)$ - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x+2y=-3, \\ 3x+2y=\ 5, \end{cases}$ тогда x_0-y_0 равно

1) $-0{,}5$; 2) $0{,}5$; 3) $7{,}5$; 4) $-7{,}5$.

E2.6 Решить систему уравнений $\begin{cases} 3s-7t=-27 \\ -2s+t=7. \end{cases}$ В ответ записать $s\cdot t$.

1) 6; 2) 2; 3) -6; 4) 4; 5) $\dfrac{3}{2}$.

E2.7 Если $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2y-z=3, \\ z=1, \end{cases}$ тогда $y_0-x_0z_0$ равно

1) 0; 2) 1; 3) 4; 4) 3.

E2.8 Если $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x+y\quad=1, \\ 2x\ -z=0, \\ \ x\ +z=2, \end{cases}$ тогда $y_0-x_0z_0$ равно

1) -2; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) 3; 4) 2.

E2.9 Если $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ - решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -x+y+z=0, \\ 2x \quad - \quad z=1, \\ x+y \qquad =1, \end{cases}$$ тогда $x_0 - y_0 z_0$ равно

1) 1; 2) 2; 3) -1; 4) 0.

E2.10 Если (x_0, y_0, z_0) - решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x+y \qquad =1, \\ 2x \quad - \quad z=0, \\ -x+y+z=2, \end{cases}$$ тогда $4x_0 + 6y_0 + z_0$ равно

1) 5; 2) 4; 3) 2; 4) 0.

E2.11 Если (x_0, y_0, z_0) - решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x \quad - \quad z=1, \\ x+y \qquad =1, \\ -x+y+z=0, \end{cases}$$ тогда $2x_0 + 4y_0 + z_0$ равно

1) 2; 2) -1; 3) 3; 4) 0.

E2.12 Если (x_0, y_0, z_0) - решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -x+2y+z=-1, \\ 2x-y \qquad =0, \\ x+y+z=-1, \end{cases}$$ тогда $x_0 + y_0 + z_0$ равно

1) 0; 2) -1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2.

E2.13 Если (x_0, y_0, z_0) - решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -2x+y \qquad = 0, \\ x-2y-z= 1, \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$ тогда $z_0 + 2y_0 - x_0$ равно

1) 0; 2) -1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2.

E2.14 При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 2x+ay=a+2, \\ (a+1)x+2ay=2a+4 \end{cases}$$ имеет бесконечно много решений.

1) 1; 3; 2) 3; 3) 0; 4) 0; 3.

E2.15 Определить при каком значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax+y=1, \\ x+ay=a^2 \end{cases}$$ не имеет решений

1) 1; 2) -1; 3) 2; 4) $-3; -1$.

Е3.1 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 2x + \quad y = a^2, \\ x + 2ay = 1 \end{cases}$ не имеет решений.

1) $(-1;1)$; 2) $(-\infty;-1)$; 3) 1; 4) -1.

Е3.2 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 2x + \quad y = a^2, \\ x + 2ay = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

1) $(-\infty;-1)$; 2) $(-1;1)$;
3) -1; 4) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Е3.3 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 2x + \quad y = a^2, \\ x + 2ay = 1 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

1) $(-1;1)$; 2) 1;
3) -1; 4) $(1;+\infty)$.

Е3.4 Решить систему уравнений $\begin{cases} ax + a^2 y = 1 \\ x + (a-1)y = a, \end{cases}$ $(a \neq 0)$.

В ответе записать $\dfrac{x}{y}$.

1) $\dfrac{a^2-1}{a^3-a+1}$; 2) $\dfrac{a^3-a+1}{1-a^2}$; 3) $\dfrac{1-a+a^3}{a}$;

4) $\dfrac{1-a^2}{a}$; 5) $\dfrac{1-a^2}{a^3-a+1}$.

Е3.5 При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x + ay = 1 \\ x - 3y = 2a + 3 \end{cases}$ не имеет решений?

1) 0;1; 2) -3; 3) -1;2; 4) 2;4; 5) $\dfrac{1}{2}$.

Е3.6 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} -4x + ay = 1 + a \\ (6+a)x + 2y = 3 + a \end{cases}$ не имеет решения?

1) -4;$\dfrac{1}{4}$; 2) 2; 3) -4; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) -4;$\dfrac{1}{2}$.

Е3.7 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 2a \end{cases}$

не имеет решения?

1) -1;0; 2) -1;1; 3) -1;2; 4) 0;1; 5) $\frac{1}{2}$;1.

Е3.8 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 16x + ay = 4 \\ ax + 9y - 3 = 0 \end{cases}$ не имеет решения?

1) -10; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) -6; 4) -8; 5) -12.

Е3.9 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (a+1)x - 3y - 4 = 0 \\ 2x - ay - 3 = 0 \end{cases}$ не имеет решения?

1) 1;2; 2) 2;3; 3) -3;1; 4) 2;-3; 5) -1;2.

Е3.10 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (a+1)x + 8y = 4a \\ ax + (a+3)y = 3a - 1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

1) 0; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1;3; 5) $\frac{1}{2}$;1.

Е3.11 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

1) -3; 2) -2; 3) 3; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 2.

Е3.12 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 3x + ay = 3 \\ ax + 3y = 3 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

1) 2;3; 2) $\frac{1}{3}$;2; 3) $\frac{1}{2}$;3; 4) -3; 5) 3.

Е3.13 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} ax - (a+1)y = 6 \\ 7ax - 28y = 6(a+4) \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

1) -3; 2) 3; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 1;3; 5) $\frac{1}{3}$;3.

E3.14 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}(a+1)x-y=a+2\\ x+(a-1)y=2\end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

1) $0;1$; 2) 0; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2; 5) 1.

E3.15 При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}3x-y=1-a\\ x+y=2a+1\end{cases}$ имеет решение $(x;y)$, такое что $x\geq 1$, $y\leq 4$?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) $\frac{1}{2}$; 5) -2.

F Векторная алгебра

F1.1 Укажите неверное утверждение:

1) вектор это направленный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление;
2) длиной или модулем вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB;
3) вектор, длина которого равна единице, называется нулевым вектором;
4) вектор $\overline{BA}$ называется противоположным вектору $\overline{AB}$.

F1.2 Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, принадлежащие одной плоскости, имеющие одинаковые направления и одинаковые длины называются:

1) нулевыми; 2) ортами;
3) равными; 4) коллинеарными.

F1.3 Укажите неверное свойство операции сложения векторов:

1) 1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$; 2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$;
3) $\overline{a}+\overset{\circ}{\overline{a}}=\overline{a}$; 4) $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{o}$.

F1.4 Укажите верное утверждение:

a. три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях;
b. три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат только в одной плоскости;
c. три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат в параллельных плоскостях;
d. три вектора на плоскости называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях;

F1.5 Укажите неверное свойство умножения вектора на число:

1) $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$ ($\alpha, \beta \in R$); 2) $\vec{a}\cdot\bar{a} = \bar{a}$;

3) $(\alpha+\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ ($\alpha, \beta \in R$); 4) $\alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ ($\alpha \in R$).

F1.6 Укажите неверное свойство проекций вектора на ось:

1) проекция вектора $\bar{a}$ на осью l равна произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е. $np_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$;

2) проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось, т.е. $np_l(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = np_l\bar{a}_1 + np_l\bar{a}_2$;

3) при умножении вектора $\bar{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т.е. $np_l(\lambda\cdot\bar{a}) = \lambda\cdot np_l\bar{a}$;

4) проекция вектора $\bar{a}$ на осью l равна произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е. ïð $_l\bar{a} = \vec{a}\cos\varphi$.

F1.7 Укажите верное утверждение:

1) если один из векторов системы единичный вектор, то вся система векторов линейно зависима;

2) если часть системы векторов линейно зависима, то вся система векторов линейно независима;

3) система векторов, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

4) система векторов, состоящая из двух векторов, линейно независима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

F1.8 Укажите неверное утверждение:

1) базисом системы векторов S называется любая максимально линейно независимая подсистема системы S;

2) базисом на плоскости назовем два коллинеарных вектора этой плоскости, взятых в определенном порядке;

3) базисом в пространстве назовем три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке;

4) Координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ называются коэффициенты разложения вектора по векторам базиса.

F1.9 Укажите неверное утверждение:

1) скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;

2) скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;

3) скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из них, на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором;

4) скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}_{\{\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}\}}$ и $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}_{\{\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}\}}$, заданных в ортонормированном базисе, равно сумме произведений одноименных координат этих векторов, т.е. $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

F1.10 Укажите неверное свойство скалярного произведения векторов:

1) $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$;

2) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;

3) $\lambda\bar{a}\cdot\bar{b}=\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\ (\lambda\in R)$;

4) скалярный квадрат вектора есть число, причем, скалярный квадрат вектора равен нулю тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

F1.11 Укажите неверное утверждение:

1) три некомпланарных вектора $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ взятых в указанном порядке, образуют правую тройку, если из конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки.

2) три некомпланарных вектора $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ взятых в указанном порядке, образуют правую тройку, если из конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся по часовой стрелки.

3) векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, численно равный площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$; направленный перпендикулярно плоскости перемножаемых векторов и образующих с ними правую тройку.

4) скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

F1.12 Укажите неверное свойство векторного произведения векторов:

1) для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нуль-вектору, то есть $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\bar{0}$;

2) векторное произведение двух неколлинеарных векторов коммутативно, то есть $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\left[\bar{b},\bar{a}\right]$;

3) числовой множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е. $\left[\lambda\bar{a},\bar{b}\right]=\lambda\left[\bar{a},\bar{b}\right]\quad(\lambda\in R)$;

4) векторное произведение векторов дистрибутивно относительно операции сложения векторов, то есть $\left[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\right]=\left[\bar{a},\bar{c}\right]+\left[\bar{b},\bar{c}\right]$.

F1.13 Укажите верное утверждение:

1) скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними;

2) векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$;

3) смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется вектор, численно равный скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$;

4) смешанным произведением трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

F1.14 Укажите неверное свойство смешанного произведения векторов:

1) смешанное произведение меняет знак на противоположный, если поменять местами любые два сомножителя, то есть $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = -\left(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}\right)$;

2) числовой множитель можно выносить за знак смешанного произведения, то есть $\left(\lambda\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \lambda\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$ $(\lambda \in R)$;

3) смешанное произведение векторов не изменяется при круговой перестановке векторов-сомножителей, то есть $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \left(\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}\right)$;

4) модуль смешанного произведения трех некомпланарных векторов численно равен объему пирамиды, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки, как на ребрах

F1.15 Укажите неверное утверждение:

1) смешанным произведением трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$;

2) смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе, равно определителю третьего порядка, составленному из их координат;

3) смешанное произведение векторов равно нулю $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда либо векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарны, либо хотя бы один вектор нулевой;

4) смешанное произведение векторов равно нулю $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда либо векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, либо хотя бы один вектор нулевой.

F2.1 Дан вектор $\overline{a} = \{2, 4, -1\}$, тогда вектор $\overline{b} = 3\overline{a}$ равен:

1) $\{4, 12, -6\}$; 2) $\{6, 1, -3\}$;
3) $\{6, 12, -3\}$; 4) $\{4, 2, -3\}$.

F2.2 Даны векторы $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{b} = 4\overline{i} - 2\overline{k}$, тогда вектор $\overline{c} = \overline{a} - 2\overline{b}$ равен:

1) $-6\overline{i}$; 2) $-\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}$;
3) $-\overline{i} - 5\overline{j} - \overline{k}$; 4) $-6\overline{i} - \overline{j} + 8\overline{k}$.

F2.3 Длина вектора $\overline{a} = \{4, \alpha, 5\}$ равна $3\sqrt{5}$ при α равном:

1) 0; 2) 4; 3) -2; 4) 3.

F2.4 Пусть $\overline{a} = \{4, \alpha, 1\}$, $\overline{b} = \{0, -1, 2\}$, тогда значение $4\overline{a} + 2\overline{b}$ будет равно $\{16, 2, 8\}$ при α равном:

1) 2; 2) -1; 3) 0; 4) 1.

F2.5 Длина вектора $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 12\overline{k}$ равна:

1) $\sqrt{149}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{10}$; 4) 15.

F2.6 Линейная комбинация вектора $\overline{c} = \{0, 1, 0\}$, выраженная через вектора $\overline{a} = \{1, 0, 1\}$, $\overline{b} = \{1, 2, 1\}$ имеет вид:

1) $-\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$; 2) $\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$;

3) $\frac{1}{2}\overline{a} + \overline{b}$; 4) $2\overline{a} + \overline{b}$.

F2.7 Векторы $\overline{a} = \{-1, -1, \alpha\}$, $\overline{b} = \{-2, 0, 2\}$, $\overline{c} = \{1, -1, 4\}$ линейно зависимы при α равном:

1) -6; 2) 6; 3) 4; 5) 0.

F2.8 Длины векторов $\overline{a} = \{3, 4, -2\}$ и $\overline{b} = \{4, 3, \alpha\}$ равны при α равном:

1) 1; 2) 0; 3) 4; 4) 2.

F2.9 Какие из векторов $\overline{a} = \{4, 2, 3\}$, $\overline{b} = \{1, 2, 4\}$, $\overline{c} = \{2, 4, 8\}$, $\overline{d} = \{0, 2, 4\}$ коллинеарны между собой?

1) $\overline{b}, \overline{c}$; 2) $\overline{b}, \overline{d}$; 3) $\overline{b}, \overline{a}$; 4) $\overline{a}, \overline{d}$.

F2.10 Векторы $\overline{a} = \{4, \alpha, 2\}$ и $\overline{b} = \{8, 10, 4\}$ коллинеарны при α равном:

1) 4; 2) 3; 3) 0; 4) 5.

F2.11 Векторы $\overline{a} = \{4, 2, -2\}$ и $\overline{b} = \{-2, \alpha, -4\}$ перпендикулярны при α равном:

1) 2; 1) 1; 3) 0; 4) 3.

F2.12 Скалярное произведение векторов $\overline{a} = -\overline{j} + 4\overline{k}$ и $\overline{b} = -4\overline{i} - 2\overline{k}$ равно:

1) -8; 2) 11; 3) 9; 4) 5.

F2.13 Какие из векторов $\overline{a} = \{1, 4, 2\}$, $\overline{b} = \{3, 1, 4\}$, $\overline{c} = \{4, 1, 2\}$, $\overline{d} = \{-4, 0, 3\}$ перпендикулярны?

1) $\overline{b}, \overline{c}$; 2) $\overline{b}, \overline{d}$; 3) $\overline{a}, \overline{d}$; 4) $\overline{c}, \overline{d}$.

F2.14 Угол между векторами $\overline{a} = \{2, 4, 5\}$ и $\overline{b} = \{-4, 2, 0\}$ равен:

1) 30°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 180°.

F2.15 Скалярное произведение векторов $\overline{a} = \{4, -3, -2\}$ и $\overline{b} = \{\alpha, 3, 2\}$ равно -5 при α равном:

1) 2; 2) $\frac{5}{4}$; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) $\frac{5}{2}$.

F3.1 Векторы $\overline{a}=\{4,\alpha,5\}$ и $\overline{b}=\{\beta,4,10\}$ коллинеарны при α и β равных:
1) $\alpha=-2, \beta=-8$; 2) $\alpha=-2, \beta=8$; 3) $\alpha=2, \beta=-8$; 4) $\alpha=2, \beta=8$.

F3.2 Угол между векторами $\overline{a}=\{4,\alpha,3\}$ и $\overline{b}=\{\alpha,-1,2\}$ равен $90°$ при α равном:
1) -2; 2) 2; 3) 3; 4) 0.

F3.3 Даны векторы $\overline{a}=\{1,-2,2\}$ и $\overline{b}=\{2,-2,-1\}$. Выражение $4\overline{a}^2-2\overline{a}\overline{b}+3\overline{b}^2$ равно:
1) 25; 2) 30; 3) 56; 4) 55.

F3.4 Даны векторы $\overline{a}=\{4,2,1\}$ и $\overline{b}=\{4,3,0\}$. $np_{\overline{b}}\overline{a}$ равна:
1) $\frac{22}{6}$; 2) $\frac{22}{5}$; 3) $\frac{20}{7}$; 4) 10.

F3.5 Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, для которых $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$, $\varphi=60°$ равно
1) 2; 2) 4; 3) -6; 4) 6.

F3.6 Длина вектора $[\overline{a},\overline{b}]$ при $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=3$, $\varphi=30°$ равна:
1) 1; 2) -6; 3) 6; 4) 3.

F3.7 Выражение $[(2\overline{a}-\overline{b}),(\overline{a}+\overline{b})]$ после упрощения имеет вид:
1) $4[\overline{a},\overline{b}]$; 2) $3[\overline{a},\overline{b}]$; 3) $-3[\overline{a},\overline{b}]$; 4) $[\overline{a},\overline{b}]$.

F3.8 Векторное произведение векторов $\overline{a}=4\overline{i}+2\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{j}+\overline{k}$ равно:
1) $-2\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}$; 2) $2\overline{i}-4\overline{j}-4\overline{k}$;
3) $-2\overline{i}-4\overline{j}+4\overline{k}$; 4) $2\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}$.

F3.9 Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=\{2,4,0\}$, $\overline{b}=\{0,1,1\}$ равна:
1) 26; 2) $2\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) $2\sqrt{5}$.

F3.10 Векторное произведение векторов $\overline{a}=\{\alpha,4,2\}$, $\overline{b}=\{2,1,4\}$ равно $\{14,-8,-5\}$ при α равном:
1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 0.

F3.11 Векторы $\overline{a}=\{4,\alpha,0\}$, $\overline{b}=\{1,1,1\}$, $\overline{c}=\{0,4,2\}$ компланарны при α равном:

1) 3; 2) 4; 3) -2; 4) -4.

F3.12 Смешанное произведение векторов $\bar{a}=\{2,1,4\}$, $\bar{b}=\{0,1,4\}$, $\bar{c}=\{4,1,1\}$ равно:

1) 6; 2) -6; 3) 5; 4) 0.

F3.13 Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=\{3,-4,2\}$, $\bar{b}=\{2,-3,1\}$, $\bar{c}=\{-5,0,5\}$ равен:

1) 10; 2) 16; 3) 15; 4) -15.

F3.14 Объем тетраэдра, построенного на векторах $\bar{a}=\{3,-4,2\}$, $\bar{b}=\{2,-3,1\}$, $\bar{c}=\{-5,0,5\}$ равен:

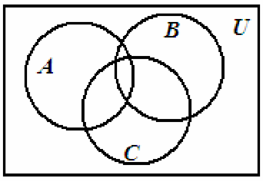
1) $\frac{15}{6}$; 2) $\frac{15}{7}$; 3) $\frac{15}{2}$; 4) 15.

F3.15 Векторы $\bar{a}=\{4,2,1\}$, $\bar{b}=\{2,4,0\}$, $\bar{c}=\{1,0,\alpha\}$ компланарны при α равном:

1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2.

2 Решение нулевого варианта ДКР (I семестр)

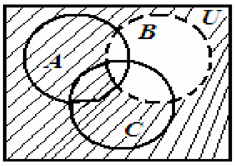
Задача 1 Пусть в универсальном множестве U заданы три непустые взаимно пересекающихся множества A, B, C следующим образом:



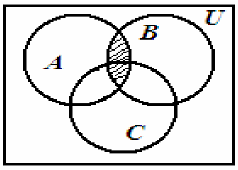
Изобразите множество $\left(A \setminus \overline{B}\right) \cap C \cup \overline{(B \setminus C)}$.

Решение. Выполняем задание по действиям:

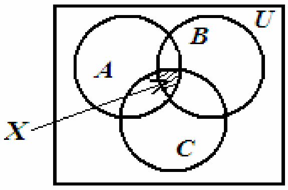
1) $\overline{B}$ $\longrightarrow$



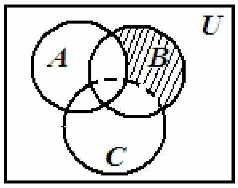
2) $A \setminus \overline{B}$ $\longrightarrow$



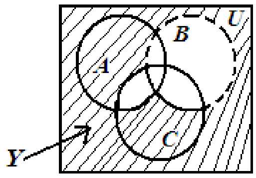
3) $\left(A \setminus \overline{B}\right) \cap C = X$ $\longrightarrow$



4) $B \setminus C$ $\longrightarrow$



5) $\overline{(B \setminus C)} = Y$ $\longrightarrow$



6) $\left(A \setminus \overline{B}\right) \cap C \cup \overline{(B \setminus C)} = X \cup Y \rightarrow \varnothing$

Результатом выполненных действий над множествами A, B и C служит пустое множество.

Задача 2 Пусть $z_1 = i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -3i$, $z_4 = 1 + i$

Найти значение $\dfrac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 \cdot z_4}$.

Решение. Комплексное число отличающееся от данного только знаком мнимой части называется сопряженным данному. Так, сопряженным числу $z_2 = 2 - i$, будет число $\overline{z_2} = 2 + i$. Выполним задачу по действиям:

1) $z_1 + \overline{z_2} = i + 2 + i = 2 + 2i$

2) $z_3 \cdot z_4 = -3i \cdot (1 + i) = -3i + 3 = 3 - 3i$

3) $\dfrac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 \cdot z_4} = \dfrac{2 + 2i}{3 - 3i} = \dfrac{(2 + 2i) \cdot (3 + 3i)}{(3 - 3i) \cdot (3 + 3i)} = \dfrac{6 + 6i + 6i - 6}{9 + 9} = \dfrac{12i}{18} = \dfrac{2}{3}i$

Ответ: $\dfrac{2}{3}i$.

Задача 3 Найти корни уравнения $z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0$.

Решение. Перепишем заданное уравнение в виде

$z^3 = 1 - i\sqrt{3}$.

Запишем комплексное число, стоящее в правой части полученного уравнения в тригонометрическом виде, а затем извлечем из него корень кубический.

1) $w = 1 - i\sqrt{3}$ $\quad (x = 1,\ y = -\sqrt{3})$,

$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$,

$$\varphi_1 = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Находим главный аргумент

$$\varphi = \varphi_1 + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}.$$

Таким образом,

$$w = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

2) $z^3 = w \Rightarrow z = \sqrt[3]{w}$.

Используя формулу извлечения корня из комплексного числа, имеем

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Следовательно, корнями заданного в задаче уравнения являются:

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right);$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right);$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right).$$

Задача 4 Найти наибольший общий делитель многочленов и представить его в линейной форме:

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$,

$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$.

Решение. Применим к многочленам $f(x)$ и $g(x)$ алгоритм Евклида.

$$\begin{array}{r|l} f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2 & 2x^3 + x^2 - x - 1 = g(x) \\ \cline{2-2} 2x^4 + x^3 - x^2 - x & x + 1 = q_1(x) \\ \cline{1-1} -\ 2x^3 - 2x^2 - 4x + 2 & \\ 2x^3 + x^2 - x - 1 & \\ \cline{1-1} -3x^2 - 3x + 3 = r_1(x) & \end{array}$$

т.е. $f(x) = g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1 & -3x^2 - 3x + 3 = r_1(x) \\ \cline{2-2}
2x^3 + 2x^2 - 2x & -2/3\,x + 1/3 = q_2(x) \\ \cline{1-1}
-x^2 + x - 1 & \\
-x^2 - x + 1 & \\ \cline{1-1}
2x - 2 & = r_2(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
r_1(x) = -3x^2 - 3x + 3 & 2x - 2 = r_2(x) \\ \cline{2-2}
-3x^2 + 3x & -3/2\,x - 3 = q_3(x) \\ \cline{1-1}
-6x + 3 & \\
-6x + 6 & \\ \cline{1-1}
-3 & = r_3(x) \neq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
r_2(x) = 2x - 2 & -3 = r_3(x) \\ \cline{2-2}
2x & -2/3\,x + 2/3 = q_4(x) \\ \cline{1-1}
-2 & \\
-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $\big(f(x),\, g(x)\big) = d(x) = r_3(x) = -3$.

Запишем равенства алгоритма Евклида:

$$
\begin{cases}
f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \quad \text{ст. } r_1(x) < \text{ ст. } g(x) \\
g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \quad \text{ст. } r_1(x) < \text{ ст. } r_2(x) \\
r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x) = d(x), \quad \text{ст. } r_3(x) < \text{ ст. } r_2(x) \\
r_2(x) = r_3(x)q_4(x) + 0.
\end{cases} \tag{1}
$$

Учитывая равенства (1), выразим $d(x)$ в линейной форме:

$$
d(x) = r_1(x) - r_2(x)q_3(x) = r_1(x) - \big(g(x) - r_1(x)q_2(x)\big)q_3(x) =
$$

$$
= r_1(x)\big(1 + q_2(x)q_3(x)\big) + \big(-q_3(x)\big)g(x) = \big(f(x) - g(x)q_1(x)\big)\big(1 + q_2(x)q_3(x)\big) +
$$

$$
+ \big(-q_3(x)\big)g(x) = f(x)\underbrace{\big(1 + q_2(x)q_3(x)\big)}_{u(x)} + g(x)\underbrace{\big(-q_1(x) - q_1(x)q_2(x)q_3(x) - q_3(x)\big)}_{v(x)}.
$$

Находим многочлены $u(x)$ и $v(x)$:

$$
u(x) = 1 + q_2(x)q_3(x) = 1 + \big(-2x/3 + 1/3\big)\big(-3x/2 - 3\big) =
$$

$$
= 1 + \big(x^2 - x/2 + 2x - 1\big) = 1 + \big(x^2 + 3x/2 - 1\big) = x^2 + 3x/2\,;
$$

$$
v(x) = -q_1(x) + q_1(x)q_2(x)q_3(x) - q_3(x) = -(x+1) -
$$

$(x+1)(-2x/3+1/3)(-3x/2-3)-(-3x/2-3)=$

$=-(x+1)-\left(-2x^2/3-x/3+1/3\right)\left(-3x/2-3\right)-\left(-3x/2-3\right)=$

$=-(x+1)-\left(x^3+5x^2/2+x/2-1\right)-\left(-3x/2-3\right)=-x-1-x^3-5x^2/2-x/2+1+$

$+3x/2+3=-x^3-5x^2/2+3$.

Получили: $u(x)=x^2+3x/2$; $v(x)=-x^3-5x^2/2+3$.

Итак, имеем

$-3=\left(x^2+3x/2\right)f(x)+\left(-x^3-5x^2/2+3+3\right)g(x)$.

Проверка:

$-3=\left(x^2+3x/2\right)\left(2x^4+3x^3-3x^2-5x+2\right)+$

$+\left(-x^3-5x^2/2+3+3\right)\left(2x^3+x^2-x-1\right)=2x^6+3x^5-3x^4-5x^3+2x^2+3x^5+$

$+9x^4/2-9x^3/2-15x^2/2+6x/2+(-2x^6-5x^5+6x^3-x^5-5x^4/2+3x^2+x^4+5x^3/2-$

$-3x+x^3+5x^2/2-3)=2x^6+6x^5+3x^4/2-19x^3/2-11x^2/2+3x-2x^6-$

$-6x^5-3x^4/2+19x^3/2+11x^2/2-3x-3=-3$.

Ответ. $-3=f(x)\left(x^2+3x/2\right)+g(x)\left(-x^3-5x^2/2+3+3\right)$

Задача 5 Даны две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

Решение. а) Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Находим матрицу $C=AB$, элементы которой

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}.$$

Имеем:

$$C=AB=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3\\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9\\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-6 & -7 & 15\\ -6 & 7 & 2\\ 3 & 8 & -1\end{pmatrix}.$$

б) Вычислим BA:

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6\\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2\\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & -8 & 1\\ -5 & 2 & 4\\ 19 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $AB\neq BA$.

в) Обратную матрицу A^{-1} матрицы A находим по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Итак

$$\det A=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$$

т.е. матрица A - невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1}.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-11,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=14,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4.$$

Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{39}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix};$$

г) Вычислим AA^{-1}:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E;$$

д) $$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Задача 6 Дан определитель $\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 4\\ 4 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 4\end{vmatrix}$.

1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{32}.

2) Вычислить данный определитель

а) разложив его по элементам первой строки;

б) приведением определителя к треугольному виду;

в) методом опорного элемента.

Решение. 1) Находим:

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=-8-16+6+12+4-16=-18,$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=-12+12-12-8=-20.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32} соответственно равны:

$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-(-18)=18$,

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-(-20)=20.$$

2) а) Прежде чем раскладывать определитель по элементам первой строки на основании свойств определителя обнулим все элементы первой строки кроме одного. Для этого умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим к первому, затем умножим на -2 и прибавим ко второму. Тогда в первой строке все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 4\\ 4 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -4 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -4 & 4\\ 4 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -14 & -6\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=-(-56+18)=38.$$

б) На основании свойств, приведем заданный определитель к треугольному виду и воспользуемся тем, что определитель треугольного вида равен произведению элементов его главной диагонали. Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 4\\ 4 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 4 & 3\end{vmatrix}\overset{\substack{-S_1+S_2\\ S_1+S_3\\ S_1+S_4}}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & -4 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 4 & 0\end{vmatrix}\overset{S_2\leftrightarrow S_3}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -4 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 4 & 0\end{vmatrix}\overset{\substack{2S_2+S_3\\ -S_2+S_4}}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 8 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{vmatrix}\overset{S_2\leftrightarrow S_4}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 8 & 7\\ 0 & 2 & 2 & 1\end{vmatrix}\overset{-2S_2+S_4}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 8 & 7\\ 0 & 0 & -2 & 3\end{vmatrix}\overset{S_3\leftrightarrow S_4}{=}-\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 8 & 7\end{vmatrix}\overset{4S_4+S_5}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 19\end{vmatrix}=$$

$$=-\big(1\cdot 1\cdot(-2)\cdot 19\big)=38.$$

в) Используя свойства определителей, переставим столбцы так же как и в предыдущем решении с тем, чтобы в левом верхнем углу стояла единица и воспользуемся формулой метода опорного элемента:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^2} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{1^2} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (16 + 3) = 2 \cdot 19 = 38$$

Задача 7 Найти ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Преобразуем матрицу.

$$A \xrightarrow{\substack{S_2 + (-2)S_1 \\ S_3 + (-3)S_1 \\ S_4 + (-2)S_1 \\ S_5 + (-1)S_1 \\ S_6 + (-3)S_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

так как действие $-S_2+S_3$ дает нулевую строчку, то вычеркивая нуль-строчку получаем

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[S_4+(-3)S_2]{S_3+(-2)S_2}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow[-S_3+S_4]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

В результате проверенных элементарных преобразований исходной матрицы получим трапецивидную матрицу, ранг которой равен трем. Следовательно, rang A=3.

Заметим, ранг матрицы не меняется вследствии проведения элементарных преобразований матрицы как над строками так и над столбцами.

Задача 8 Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1+5x_2-\ \ x_3=3, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2, \\ 3x_1-\ \ x_2-3x_3=-7. \end{cases}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

Решение. Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы данной системы и ранг расширенной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right).$$

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{array}\right).$$

Следовательно, $rangA = rang\widetilde{A} = 3$ (т.е. числу неизвестных). Значит исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) Формулы Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

находим $\Delta = \det A$, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32,$$

далее, подставляя в формулы Крамера, получим:

$$x_1 = \frac{64}{(-16)} = -4, \qquad x_2 = \frac{-16}{(-16)} = 1, \qquad x_3 = \frac{32}{(-16)} = -2;$$

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $AX = B$. Решение системы в матричной форме имеет вид $X = A^{-1}B$. Находим обратную матрицу A^{-1}(она существует, так как $\Delta = \det A = -16 \neq 0$) по формуле через алгебраические дополнения.:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $X = A^{-1}B$, то

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix}-15&16&-11\\-3&0&1\\-14&16&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}(-45+32+77)\big/(-16)\\(-9-7)\big/(-16)\\(-42+32+42)\big/(-16)\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-64\\-16\\32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1=-4$, $x_2=1$, $x_3=-2$;

в) Решим систему методом Гаусса. Для этого составим $\widetilde{A}$ - расширенную матрицу системы и посредством элементарных преобразований над ее строками приводим $\widetilde{A}$ к треугольному (трапециевидному) виду.

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-1&3\\2&4&-3&2\\3&-1&-3&-7\end{array}\right)\xrightarrow[S_1\cdot(-3)+S_3]{S_1\cdot(-2)+S_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-1&3\\0&-6&-1&-4\\0&-16&0&-16\end{array}\right)\xrightarrow{S_2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-1&3\\0&1&1/6&2/3\\0&-16&0&16\end{array}\right)\xrightarrow{S_2\cdot16+S_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&-1&3\\0&1&1/6&2/3\\0&0&8/3&-16/3\end{array}\right).$$

Таким образом

$\frac{8}{3}x_3=-\frac{16}{3}$,

$x_3=-\frac{16}{8}\Rightarrow x_3=-2$.

Далее,

$x_2+\frac{1}{6}x_3=\frac{2}{3}$,

$x_2-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$,

$x_2=\frac{2}{3}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$.

Теперь, используя первую строчку, получаем

$x_1+5x_2-1\cdot x_3=3$,

$x_1+5\cdot1-1\cdot(-2)=3$,

$x_1=-5-2+3$,

$x_1=-4$.

Таким образом, мы доказали совместность исходной системы и решили ее тремя способами. $\{(-4,1,2)\}$ - ее решение.

Задача 9 Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - \ x_3 = 0, \\ \ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + \ x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

то система имеет бесчисленное множество решений. Поскольку $rangA = 2$, $n = 3$, возьмем любые два уравнения системы (например, первое и второе) и найдем ее решение.

Имеем:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - \ x_3 = 0, \\ \ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных) и переместим члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = \quad x_3, \\ \ x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \qquad x_1 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

Теперь подставляя в формулы Крамера, получаем

$$x_1 = -\frac{17x_3}{13}, \qquad x_2 = \frac{16x_3}{13}.$$

Полагая $x_3 = 13c$, где $c \in R$, получаем решение исходной системы:

$x_1 = -17c$, $\qquad x_2 = 16c$.

Ответ. $\{(-17c, 16c, c),\ c - const\}$.

Задача 10 Найти ФСР и общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + \ \ x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

равен 2 (проверьте самостоятельно), поэтому размерность пространства решений данной системы равна $n - r = 5 - 2 = 3$ и ее ФСР состоит из трех решений. В матрице A возьмем в качестве базисного минора выделенный рамкой минор второго порядка. Третья строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк, поэтому последнее уравнение системы является следствием первых двух уравнений и его можно отбросить. В первых двух уравнениях члены, соответствующие базисному минору, оставляем в левой части, а неизвестные x_1, x_4, x_5 считаем «свободными» и переносим члены с этими неизвестными в правые части уравнений. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} - \ \ x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5 = 0, \\ - 2x_2 + 5x_3 = - 4x_1 - \ \ x_4 - 7x_5 = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

равносильной исходной системе, т.е. множество решений системы (1) совпадает с множеством решений исходной системы уравнений.

Найдем первое базисное решение X_1. Для этого положим $x_1 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$. Система (1) примет вид

$$\begin{cases} - \ \ x_2 + 3x_3 = -2, \\ - 2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Определителем матрицы полученной системы является базисный минор, отличный от нуля. Следовательно, эта система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера: $x_2 = 2, x_3 = 0$. Таким образом, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Полагая в системе (1) $x_1 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, находим $x_2 = 13, x_3 = 5$, т.е. вторым базисным решением является столбец $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Наконец, полагая $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, находим $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Следовательно, третье базисное решение есть $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Итак, ФСР, состоящая из решений X_1, X_2, X_3, построена. Построенная таким образом ФСР называется нормальной ФСР. Подчеркнем, что столбцы X_1, X_2, X_3, образующие нормальную ФСР, линейно независимы, поскольку «свободные» неизвестные x_1, x_4, x_5 были выбраны так, что выделенный рамками минор третьего порядка в матрице из этих столбцов

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ 2 \quad 13 \quad 1 \\ 0 \quad 5 \quad -1 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля, и поэтому ранг этой матрицы равен 3, т.е. равен числу столбцов матрицы.

Напишем теперь общее решение исходной системы уравнений:

$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$,

или, в координатах,

$x_1 = c_1,\ x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3,\ x_3 = 5c_2 - c_3,\ x_4 = c_2,\ x_5 = c_3$

где c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные.

Задача 11 По координатам точек $A(-5,1,6)$, $B(1,4,3)$, $C(6,3,9)$ найти:

а) модуль вектора $\overline{a} = 4\overline{AB} + \overline{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b} = \overline{BC}$;

в) проекцию вектора $\overline{c} = \overline{b}$ на вектор $\overline{d} = \overline{AB}$;

г) координаты точки M **,** делящей отрезок $l = \overline{AB}$ в отношении 1/3.

Решение. а) Последовательно находим $\overline{AB} = \{6,3,-3\}$, $\overline{BC} = \{5,-1,6\}$, тогда $4\overline{AB} + \overline{BC} = \{29,11,-6\}$**.**

Находим длину вектора $\overline{a} = 4\overline{AB} + \overline{BC}$

$|\overline{a}| = \left|4\overline{AB} + \overline{BC}\right| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998}$**;**

б) Зная координаты векторов $\overline{a} = \{29,11,-6\}$, $\overline{b} = \{5,-1,6\}$, вычислим их скалярное произведение

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 29 \cdot 5 + 11(-1) + (-6)6 = 98;$

в) Так как

$$np_{\bar{d}}\bar{c} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{d}}{\left|\bar{d}\right|}, \ \bar{d} = \{6{,}3{,}-3\},$$

$$\bar{c} \cdot \vec{d} = 30 - 3 - 18 = 9; \ \left|\bar{d}\right| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54},$$

то

$$np_{\bar{d}}\bar{c} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{d}}{\left|\bar{d}\right|} = \frac{9}{\sqrt{54}}.$$

г) Подставляя в формулы

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

значения $x_1 = -5,\ y_1 = 1,\ z_1 = 6,\ x_2 = 1,\ y_2 = 4,\ z_2 = 3,\ \lambda = \frac{1}{3}$, получим координаты точки M, делящий отрезок $l = \overline{AB}$ в отношении $\frac{1}{3}$:

$$x = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{7}{2}; \ y = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}; \ z = \frac{6 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{21}{4}.$$

Следовательно, $M(-7/2,\ 7/4,\ 21/4)$.

Задача 12 Доказать, что векторы $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе, если $\bar{p} = \{1;0;1\}$, $\bar{q} = \{1;-2;0\}$, $\bar{r} = \{0;3;1\}$, $\bar{x} = \{2;7;5\}$.

Решение. Докажем, что векторы $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ образуют базис. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ векторы $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ - линейно независимы, значит, они образуют базис.

Найдем координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$. Разложим вектор $\bar{x}$ по векторам базиса $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, получим: $\bar{x} = \alpha\,\bar{p} + \beta\,\bar{q} + \gamma\bar{r}$ (*).

Найдем коэффициенты разложения, то есть α, β, γ, а они, в свою очередь, будут являться координатами вектора $\bar{x}$ в этом базисе (по определению).

Для этого разложим все векторы по векторам ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$: $\bar{x} = 2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{p} = \bar{i} + \bar{k}$, $\bar{q} = \bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{r} = 3\bar{j} + \bar{k}$.

Далее, подставим все разложения в равенство (*), имеем:

$$2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k} = x(\bar{i} + \bar{k}) + y(\bar{i} - 2\bar{j}) + z(3\bar{j} + \bar{k})$$

или

$$2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k} = (x + y)\bar{i} + (-2y + 3z)\bar{j} + (x + z)\bar{k}.$$

Соберем коэффициенты при векторах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2, \\ -2\beta+3\gamma=7, \\ \alpha+\gamma=5. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)\cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \end{array}\right)\cdot(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, $r(A)=r(A^*)=3$, следовательно, система совместна и $n=3=r$, значит, она имеет единственное решение.

Полученной расширенной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} \alpha+\beta \quad\;\; =2, \\ \quad -\beta+\gamma=3, \\ \qquad\quad \gamma=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=4, \\ \beta=-2, \\ \gamma=1. \end{cases}$$

Подставим α,β,γ в равенство $(*)$, получим:

$\bar{x}=4\bar{p}-2\bar{q}+\bar{r} \Rightarrow \bar{x}=\{4,-2,1\}$ в базисе $\bar{p},\bar{q},\bar{r}$.

Задание 13 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}=2\bar{p}+3\bar{q},\ \bar{b}=\bar{p}-2\bar{q};\ |\bar{p}|=2,\ |\bar{q}|=1,\ \left(\widehat{\bar{p},\bar{q}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}.$

Решение. Воспользуемся геометрическим смыслом модуля векторного произведения двух векторов, а именно: площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю их векторного произведения: $S_{пар}=\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$.

Применим свойства векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, вычислим

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\left[2\bar{p}+3\bar{q},\bar{p}-2\bar{q}\right]=2\left[\bar{p},\bar{p}\right]-4\left[\bar{p},\bar{q}\right]+3\left[\bar{q},\bar{p}\right]-6\left[\bar{q},\bar{q}\right]=$$
$$=2\cdot\bar{0}-4\left[\bar{p},\bar{q}\right]-3\left[\bar{p},\bar{q}\right]-6\cdot\bar{0}=-7\left[\bar{p},\bar{q}\right].$$

Вычислим модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, используя первое условие из определения векторного произведения, а именно: $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a},\bar{b})$.

Тогда,

$$S_{пар}=\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|=\left|-7\left[\bar{p},\bar{q}\right]\right|=7\left|\left[\bar{p},\bar{q}\right]\right|=7|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|\cdot sin\left(\widehat{\bar{p},\bar{q}}\right)=$$

$$=7\cdot2\cdot1\cdot sin\frac{2\pi}{3}=14\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}.$$

Итак, $S_{пар} = 7\sqrt{3}(кв.ед.)$.

Задача 14 Компланарны ли векторы $\bar{a} = \{7,4,6\}, \bar{b} = \{2,1,1\}, \bar{c} = \{19,11,17\}$?

Решение. Для того, чтобы три вектора были компланарны (лежали в одной плоскости или в параллельных плоскостях), необходимо и достаточно, чобы их смешанное произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ было равно нулю.

Вычисляем смешанное произведение векторов:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 0.$$

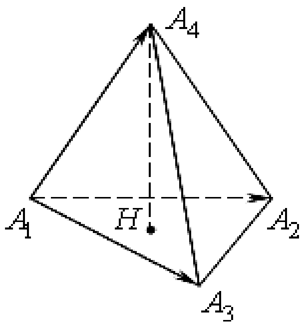
Т.к. определитель равен нулю, то векторы компланарны (если определитель не равен нулю – векторы не компланарны).

Так как $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$, то векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны.

Ответ. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны.

Задание 15 Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, если $A_1(1,3,0)$, $A_2(4,-1,2)$, $A_3(3,0,1)$, $A_4(-4,3,5)$.

Решение. Сделаем чертеж:



В соответствии с геометрическим смыслом модуля смешанного произведения векторов, имеем: $V_{тет} = \frac{1}{6}V_{пар-да} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right|$.

Найдем координаты векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$.

$\overline{A_1A_2} = \{(4-1),(-1-3),(2-0)\} = \{3,-4,2\}$,

$\overline{A_1A_3} = \{(3-1),(0-3),(1-0)\} = \{2,-3,1\}$,

$\overline{A_1A_4} = \{(-4-1),(3-3),(5-0)\} = \{-5,0,5\}$.

Найдем смешанное произведение векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$.

$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -45 + 20 - 30 + 40 = -15.$$

$V_{тет} = \frac{1}{6}|-15| = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ (куб. ед.).

С другой стороны, $V_{тет} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1 A_2 A_3} \cdot A_4 H \quad \Rightarrow \quad A_4 H = \frac{3V_{тет}}{S_{\Delta A_1 A_2 A_3}}$.

Согласно геометрическому смыслу модуля векторного произведения векторов, имеем $S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} \left| \left[\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3} \right] \right|$.

Вычисляем координаты векторного произведения векторов $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_1 A_3}$:

$$\left[\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3} \right] = \left\{ \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right\} = \{2;1;-1\}$$

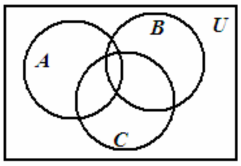
и его модуль: $\left| \left[\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3} \right] \right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$

Тогда, $S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Находим высоту $A_4 H : A_4 H = \dfrac{3 \cdot \frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{15}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ (ед.)

3 Индивидуальные задания ДКР (I семестр)

Задача 1 Пусть в универсальном множестве U заданы три непустые взаимно пересекающихся множества A, B, C следующим образом:



Изобразить множество

1.1 $\left(\overline{A} \setminus B\right) \cup A \setminus \overline{\left(C \cap B\right)}$.

1.2 $\overline{B} \setminus \overline{\left(A \cup B\right)} \setminus A \cap \overline{C}$.

1.3 $\overline{C} \setminus A \cap \overline{\left(C \setminus B\right)} \cup A$.

1.4 $\left(B \setminus \overline{A}\right) \cup C \setminus \overline{\left(A \cap B\right)}$.

1.5 $\overline{A} \cup \overline{\left(C \setminus A\right)} \cap C \setminus B$.

1.6 $\left(\overline{B} \setminus A\right) \cap \setminus \overline{\left(C \cap A\right)}$.

1.7 $A \cup \overline{\left(C \cap B\right)} \setminus \overline{B} \cap A$.

1.8 $\overline{C} \setminus B \cap \overline{\left(A \cup B\right)} \setminus C$.

1.9 $\left(A \setminus \overline{B}\right) \cup C \setminus \overline{\left(B \cap C\right)}$.

1.10 $B \cup \overline{\left(C \setminus A\right)} \cap \overline{C} \setminus B$.

1.11 $\left(\overline{B} \setminus A\right) \cap C \cup \overline{\left(A \setminus B\right)}$.

1.12 $C \cup \overline{\left(A \setminus B\right)} \cap A \setminus \overline{C}$.

1.13 $\overline{A} \cup B \setminus \overline{\left(A \setminus C \cap B\right)}$.

1.14 $\overline{\left(B \setminus A\right)} \cup C \setminus \left(B \setminus \overline{A}\right)$.

1.15 $\overline{A} \cap \left(B \setminus \overline{C} \cup A\right) \setminus B$.

1.16 $\overline{B} \cap C \setminus \left(A \cup \overline{B} \setminus A\right)$.

1.17 $\overline{\left(C \setminus A\right)} \cap B \cup \left(\overline{A} \setminus C\right)$.

1.18 $B \cup \left(\overline{A} \setminus C \cap A\right) \setminus \overline{B}$.

1.19 $\overline{\left(B \setminus C\right)} \cup \left(A \cap C \setminus \overline{B}\right)$.

1.20 $\left(B \cap \overline{A}\right) \setminus C \cup \overline{\left(B \setminus A\right)}$.

1.21 $\left(A \setminus \overline{B}\right) \cap B \cup \overline{\left(C \setminus A\right)}$.

1.22 $\overline{A} \cup \left(C \setminus B \cap A\right) \setminus \overline{B}$.

1.23 $\overline{\left(B \setminus C\right)} \cup \left(B \setminus \overline{A} \cap C\right)$.

1.24 $\left(\overline{B} \cup C \cap A\right) \setminus A \setminus \overline{C}$.

1.25 $\overline{\left(A \setminus B\right)} \cup C \cap \left(\overline{A} \setminus B\right)$.

Задача 2 Произвести действия над комплексными числами $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1 - i$, $z_4 = 2 - i$, $z_5 = 1 + 3i$.

2.1 $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot \bar{z}_3}$.

2.2 $\dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_1 - z_3}$.

2.3 $\dfrac{z_2 + \bar{z}_3}{z_1 \cdot z_2}$.

2.4 $\dfrac{\bar{z}_1 - z_2}{z_3 \cdot z_4}$.

2.5 $\dfrac{z_4 + \bar{z}_1}{z_3 \cdot z_2}$.

2.6 $\dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_4 - z_1}$.

2.7 $\dfrac{z_1 \cdot z_3}{\left(\overline{z_4 + z_2}\right)}$.

2.8 $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 - \bar{z}_3}$.

2.9 $\dfrac{\bar{z}_1 \cdot z_4}{z_2 + z_3}$.

2.10 $\dfrac{z_4 - z_1}{z_2 \cdot z_3}$.

2.11 $\dfrac{z_1 + \bar{z}_2}{z_4 \cdot z_3}$.

2.12 $\dfrac{\bar{z}_4 - z_5}{z_5 \cdot z_1}$.

2.13 $\dfrac{z_5 + \bar{z}_3}{z_1 \cdot z_2}$.

2.14 $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot \bar{z}_5}$.

2.15 $\dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_1 - z_5}$.

2.16 $\dfrac{z_5 + \bar{z}_3}{z_1 \cdot z_2}$.

2.17 $\dfrac{\bar{z}_1 - z_5}{z_3 \cdot z_4}$.

2.18 $\dfrac{z_4 + \bar{z}_5}{z_3 \cdot z_2}$.

2.19 $\dfrac{z_5 \cdot \bar{z}_2}{z_4 + z_1}$.

2.20 $\dfrac{z_1 \cdot z_3}{\left(\overline{z_4 + z_5}\right)}$.

2.21 $\dfrac{z_2 \cdot z_5}{z_1 - z_3}$.

2.22 $\dfrac{\bar{z}_1 \cdot z_4}{z_2 + z_5}$.

2.23 $\dfrac{\bar{z}_4 - z_1}{z_2 \cdot z_5}$.

2.24 $\dfrac{z_1 + \bar{z}_5}{z_4 \cdot z_3}$.

2.25 $\dfrac{\bar{z}_4 - z_3}{z_5 \cdot z_1}$.

Задача 3 Найти корни уравнения

3.1 $z^3 - i = 0$.

3.2 $z^3 + i = 0$.

3.3 $z^3 - 1 + i = 0$.

3.4 $z^3 - 1 - i = 0$.

3.5 $z^3 + 1 + i = 0$.

3.6 $z^3 - 2 + 2i = 0$.

3.7 $z^3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = 0$.

3.8 $z^3 + 3 - 3i = 0$.

3.9 $z^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = 0$.

3.10 $z^3 - \sqrt{3}i = 0$.

3.11 $z^3 - 2 - 2i = 0$.

3.12 $z^3 - \sqrt{3} + \sqrt{3}i = 0$.

3.13 $z^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0$.

3.14 $z^3 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0$.

3.15 $z^3 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$.

3.16 $z^3 + 2 - 2i = 0$.

3.17 $z^3 - \sqrt{3} + i = 0$.

3.18 $z^3 - \sqrt{3}i = 0$.

3.19 $z^3 - 3 - \sqrt{3}i = 0$.

3.20 $z^3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = 0$.

3.21 $z^3 - \sqrt{3} - \sqrt{3}i = 0$.

3.22 $z^3 + 1 - \sqrt{3}i = 0$.

3.23 $z^3 + 3 + 3i = 0$.

3.24 $z^3 + \sqrt{3} - i = 0$.

3.25 $z^3 + 1 + \sqrt{3}i = 0$.

Задача 4 Найти общий делитель многочленов и представить его в линейной форме.

4.1 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

4.2 $f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$, $g(x) = x^3 + x^2 - 10x - 6$.

4.3 $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$, $g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$.

4.4 $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, \quad g(x)=x^2-x-1.$

4.5 $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9, \qquad g(x)=2x^3-x^2-5x+4.$

4.6 $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1, \qquad g(x)=x^4+2x^3+x+2.$

4.7 $f(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1, \qquad g(x)=x^4-2x^3-x^2-2x+1.$

4.8 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, \quad g(x)=x^3+x^2-x-1.$

4.9 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, \quad g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2.$

4.10 $f(x)=x^6+x^5-3x^4+2x^3+4x-2, \; g(x)=x^5+3x^4+x^3+6x^2+4x+6.$

4.11 $f(x)=x^3-5x^2-3x+17, \qquad g(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12.$

4.12 $f(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2, \quad g(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2.$

4.13 $f(x)=x^3+x^2-10x-6, \qquad g(x)=x^3-x^2-4x-6.$

4.14 $f(x)=x^3+2x^2+2x+1, \qquad g(x)=x^4+x^3-3x^2-6x-3.$

4.15 $f(x)=x^5+3x^4+x^3+6x^2+4x+6, \; g(x)=x^6+x^5-3x^4+2x^3+4x-2.$

4.16 $f(x)=x^3-5x^2-3x+17, \qquad g(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12.$

4.17 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, \qquad g(x)=x^3+x^2-x-1.$

4.18 $f(x)=x^3+x^2-x-1, \qquad g(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1.$

4.19 $f(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1, \quad g(x)=x^4-2x^3-x^2-2x+1.$

4.20 $f(x)=x^4-2x^3-x^2-2x+1, \qquad g(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1.$

4.21 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-6x-3, \qquad g(x)=x^3+2x^2+2x+1.$

4.22 $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9, \qquad g(x)=2x^3-x^2-5x+4.$

4.23 $f(x)=2x^3-x^2-5x+4, \qquad g(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9.$

4.24 $f(x)=x^3-5x^2-3x+17, \qquad g(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12.$

4.25 $f(x)=x^3+2x^2+2x+1, \qquad g(x)=x^4+x^3-3x^2-6x-3.$

Задача 5 Даны две матрицы A и B.
Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

5.1 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

5.2 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$

5.3 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

5.4 $A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 11\\ 9 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

5.5 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$.

5.6 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

5.7 $A=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$.

5.8 $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$.

5.9 $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

5.10 $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

5.11 $A=\begin{pmatrix}6 & 9 & 4\\ -4 & -4 & 4\\ 10 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

5.12 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ -3 & 0 & 1\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}$.

5.13 $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$

5.14 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

5.15 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

5.16 $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

5.17 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$.

5.18 $A=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

5.19 $A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix}$.

5.20 $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

5.21 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

5.22 $A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

5.23 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

5.24 $A=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

5.25 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Задача 6 Дан определитель.

1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}.

2) Вычислить данный определитель
а) разложив его по элементам первой строки;
б) приведением определителя к треугольному виду;
в) методом опорного элемента.

6.1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

$i=3,\ j=1$

6.2 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

$i=2,\ j=4$

6.3 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

$i=3,\ j=3$

6.4 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

$i=3,\ j=2$

6.5 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$i=1,\ j=3$

6.6 $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$.

$i=3,\ j=4$

6.14 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

$i=1,\ j=2$

6.15 $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$.

$i=1,\ j=3$

6.16 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

$i=4,\ j=1$

6.17 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

$i=4,\ j=1$

6.18 $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

$i=4,\ j=2$

6.19 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

$i=1,\ j=2$

6.7 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

$i=3,\ j=2$

6.8 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$.

$i=1,\ j=3$

6.9 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

$i=4,\ j=3$

6.10 $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

$i=2,\ j=2$

6.11 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

$i=1,\ j=2$

6.12 $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

$i=4,\ j=3$

6.13 $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

$i=4,\ j=4$

6.20 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$i=2,\ j=4$

6.21 $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

$i=1,\ j=4$

6.22 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$i=2,\ j=4$

6.23 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

$i=4,\ j=4$

6.24 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

$i=3,\ j=2$

6.25 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

$i=2,\ j=3$

Задача 7 Найти ранг матрицы.

7.1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7.5 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7.2 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

7.6 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

7.7 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

7.8 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

7.9 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

7. 14 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\textbf{7.10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{7.15}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{7.11}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{7.16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{7.12}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{7.17}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{7.13}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{7.18}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{7.19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{7.23}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.20 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7.24 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

7.21 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7.25 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7.22 $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Задача 8 Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

8.1 $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

8.14 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

8.2 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

8.15 $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$

8.3 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4. \end{cases}$

8.16 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

8.4 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 + 9x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

8.17 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

8.5 $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 \qquad = 1. \end{cases}$

8.6 $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

8.7 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

8.8 $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

8.9 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1. \end{cases}$

8.10 $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

8.11 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$

8.12 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 \qquad - 2x_3 = 5. \end{cases}$

8.13 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

8.18 $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$

8.19 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

8.20 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

8.21 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

8.22 $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

8.23 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

8.24 $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

8.25 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

Задача 9 Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

9.1 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

9.14 $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

9.2 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

9.3 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

9.4 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

9.5 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

9.6 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

9.7 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

9.8 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

9.9 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

9.10 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

9.11 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

9.12 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

9.15 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

9.16 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

9.17 $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 10x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

9.18 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 11x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

9.19 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

9.20 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0, \\ 12x_1 - x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

9.21 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

9.22 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

9.23 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

9.24 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

9.25 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

$$\textbf{9.13}\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Задача 10 Найти ФСР и общее решение системы уравнений.

$$\textbf{10.1}\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.2}\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.3}\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.4}\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.5}\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.6}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.7}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.8}\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.9}\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.14}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.15}\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\textbf{10.16}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.17}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.18}\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.19}\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.20}\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.21}\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{10.22}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

10.10 $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

10.23 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

10.11 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

10.24 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

10.12 $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

10.25 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

10.13 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

Задача 11 По координатам точек A, B, C для указанных векторов найти: а) модуль вектора $\bar{a}$**;** б) скалярное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$**;** в) проекцию вектора $\bar{c}$ на вектор $\bar{d}$; г) координаты точки M**,** делящей отрезок l в отношении α / β.

11.1 $A(-2,-2,4)$, $B(1,3,-2)$, $C(1,4,2)$, $\bar{a} = 2\overline{AC} - 3\overline{BA}, \bar{b} = \overline{BC}$, $\bar{c} = \overline{BC}, \bar{d} = \overline{AC}$, $l = BA, \alpha = 2$, $\beta = 1$.

11.2 $A(2,4,3)$, $B(3,1,-4)$, $C(-1,2,2)$, $\bar{a} = 2\overline{BA} + 4\overline{AC}, \bar{b} = \overline{BA}$, $\bar{c} = \bar{b}, \bar{d} = \overline{AC}$, $l = BA, \alpha = 1$, $\beta = 4$.

11.3 $A(2,4,5)$, $B(1,-2,3)$, $C(-1,-2,4)$, $\bar{a} = 3\overline{AB} - 4\overline{AC}, \bar{b} = \overline{BC}$, $\bar{c} = \bar{b}, \bar{d} = \overline{AB}$, $l = AB, \alpha = 2$, $\beta = 3$.

11.4 $A(-1,-2,4)$, $B(-1,3,5)$, $C(1,4,2)$, $\bar{a} = 3\overline{AC} - 7\overline{BC}, \bar{b} = \overline{AB}$, $\bar{c} = \bar{b}, \bar{d} = \overline{AC}$, $l = AC, \alpha = 1$, $\beta = 7$.

11.5 $A(1,3,2)$, $B(-2,4,-1)$, $C(1,3,-2)$, $\bar{a} = 2\overline{AB} + 5\overline{CB}, \bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \bar{b}, \bar{d} = \overline{AB}$, $l = AB, \alpha = 2$, $\beta = 4$.

11.6 $A(2,-4,3)$, $B(-3,-2,4)$, $C(0,0,-2)$, $\bar{a} = 3\overline{AC} - 4\overline{CB}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AB}$, $\bar{d} = \overline{CB}$, $l = AC, \alpha = 2$, $\beta = 1$.

11.7 $A(3,4,-4)$, $B(-2,1,2)$, $C(2,-3,1)$, $\bar{a} = 5\overline{CB} + 4\overline{AC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{BA}$, $\bar{d} = \overline{AC}$, $l = BA, \alpha = 2$, $\beta = 5$.

11.8 $A(0,2,5)$, $B(2,-3,4)$, $C(3,2,-5)$, $\bar{a} = -3\overline{AB} + 4\overline{CB}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AC}$, $\bar{d} = \overline{AB}$, $l = AC, \alpha = 3$, $\beta = 2$.

11.9 $A(-2,-3,-4)$, $B(2,-4,0)$, $C(1,4,5)$, $\bar{a} = 4\overline{AC} - 8\overline{BC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AB}$, $\bar{d} = \overline{BC}$, $l = AB, \alpha = 4$, $\beta = 2$.

11.10 $A(-2,-3,-2)$, $B(1,4,2)$, $C(1,-3,3)$, $\bar{a}=2\overline{AC}-4\overline{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{AB}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=BC, \alpha=3$, $\beta=1$.

11.11 $A(5,6,1)$, $B(-2,4,-1)$, $C(3,-3,3)$, $\bar{a}=-3\overline{AB}-4\overline{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{AC}$, $\bar{d}=\overline{AB}$, $l=BC, \alpha=3$, $\beta=2$.

11.12 $A(10,6,3)$, $B(-2,4,5)$, $C(3,-4,-6)$, $\bar{a}=5\overline{AC}-2\overline{CB}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{BA}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=CB, \alpha=1$, $\beta=5$.

11.13 $A(3,2,4)$, $B(-2,1,3)$, $C(2,-2,-1)$, $\bar{a}=4\overline{BC}-3\overline{AC}, \bar{b}=\overline{BA}$, $\bar{c}=\overline{AC}, \bar{d}=\overline{BC}$, $l=AC, \alpha=2$, $\beta=4$.

11.14 $A(-2,3,-4)$, $B(3,-1,2)$, $C(4,2,4)$, $\bar{a}=7\overline{AC}+4\overline{CB}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{AB}$, $\bar{d}=\overline{CB}$, $l=AB, \alpha=2$, $\beta=5$.

11.15 $A(4,5,3)$, $B(-4,2,3)$, $C(5,-6,-2)$, $\bar{a}=9\overline{AB}-4\overline{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{AC}$, $\bar{d}=\overline{AB}$, $l=BC, \alpha=5$, $\beta=1$.

11.16 $A(2,4,6)$, $B(-3,5,1)$, $C(4,-5,-4)$, $\bar{a}=-6\overline{BC}+2\overline{BA}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{CA}$, $\bar{d}=\overline{BA}$, $l=BC, \alpha=1$, $\beta=3$.

11.17 $A(-4,-2,-5)$, $B(3,7,2)$, $C(4,6,-3)$, $\bar{a}=9\overline{BA}+3\overline{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{AC}$, $\bar{d}=\overline{BC}$, $l=BA, \alpha=4$, $\beta=3$.

11.18 $A(5,4,4)$, $B(-5,2,3)$, $C(4,2,-5)$, $\bar{a}=11\overline{AC}-6\overline{AB}, \bar{b}=\overline{BC}$, $\bar{c}=\overline{AB}, \bar{d}=\overline{AC}$, $l=BC, \alpha=3$, $\beta=1$.

11.19 $A(3,4,6)$, $B(-4,6,4)$, $C(5,-2,-3)$, $\bar{a}=-7\overline{BC}+4\overline{CA}, \bar{b}=\overline{BA}, \bar{c}=\overline{CA}$, $\bar{d}=\overline{BC}$, $l=BA, \alpha=5$, $\beta=3$.

11.20 $A(-5,-2,-6)$, $B(3,4,5)$, $C(2,-5,4)$, $\bar{a}=8\overline{AC}-5\overline{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{AB}$, $\bar{d}=\overline{BC}$, $l=AC, \alpha=3$, $\beta=4$.

11.21 $A(3,4,15)$, $B(5,-2,6)$, $C(4,2,-7)$, $\bar{a}=-7\overline{AC}+5\overline{AB}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{BC}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=AB, \alpha=2$, $\beta=3$.

11.22 $A(4,3,2)$, $B(-4,-3,5)$, $C(6,4,-3)$, $\bar{a}=8\overline{AC}-5\overline{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{BA}$, $\bar{d}=\overline{AC}$, $l=BC, \alpha=2$, $\beta=5$.

11.23 $A(-5,4,3)$, $B(4,5,2)$, $C(2,7,-4)$, $\bar{a}=3\overline{BC}+2\overline{AB}, \bar{b}=\bar{c}=\overline{CA}$, $\bar{d}=\overline{AB}$, $l=BC, \alpha=3$, $\beta=4$.

11.24 $A(4,6,3)$, $B(-5,2,6)$, $C(4,-4,-3)$, $\bar{a}=4\overline{CB}-\overline{AC}, \bar{b}=\overline{AB}$, $\bar{c}=\overline{CB}, \bar{d}=\overline{AC}$, $l=AB, \alpha=5$, $\beta=4$.

11.25 $A(3,4,6)$, $B(-4,6,4)$, $C(5,-2,-3)$, $\bar{a}=-7\overline{BC}+4\overline{CA}, \bar{b}=\overline{BA}, \bar{c}=\overline{CA}$, $\bar{d}=\overline{BC}$, $l=BA, \alpha=5$, $\beta=3$.

Задача 12 Доказать, что векторы $\bar{p},\bar{q},\bar{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе.

12.1 $\bar{x}=\{-2,0,9\}$, $\bar{p}=\{0,-1,2\}$, $\bar{q}=\{1,0,-1\}$, $\bar{r}=\{-1,2,4\}$.

12.2 $\overline{x}=\{5,-12,1\}$, $\overline{p}=\{1,-3,0\}$, $\overline{q}=\{1,-1,1\}$, $\overline{r}=\{0,-1,2\}$.
12.3 $\overline{x}=\{0,2,4\}$, $\overline{p}=\{3,1,-1\}$, $\overline{q}=\{0,-3,1\}$, $\overline{r}=\{1,1,1\}$.
12.4 $\overline{x}=\{-1,5,5\}$, $\overline{p}=\{2,1,1\}$, $\overline{q}=\{-2,0,-3\}$, $\overline{r}=\{-1,2,1\}$.
12.5 $\overline{x}=\{-1,-2,3\}$, $\overline{p}=\{2,0,1\}$, $\overline{q}=\{1,2,-1\}$, $\overline{r}=\{0,4,-1\}$.
12.6 $\overline{x}=\{-5,2,-1\}$, $\overline{p}=\{-1,1,0\}$, $\overline{q}=\{2,-1,3\}$, $\overline{r}=\{1,0,1\}$.
12.7 $\overline{x}=\{1,-5,7\}$, $\overline{p}=\{0,-1,1\}$, $\overline{q}=\{2,0,1\}$, $\overline{r}=\{3,-1,0\}$.
12.8 $\overline{x}=\{5,1,4\}$, $\overline{p}=\{2,0,2\}$, $\overline{q}=\{0,-1,1\}$, $\overline{r}=\{3,-1,4\}$.
12.9 $\overline{x}=\{1,1,-1\}$, $\overline{p}=\{1,1,0\}$, $\overline{q}=\{-1,0,1\}$, $\overline{r}=\{-1,0,2\}$.
12.10 $\overline{x}=\{-3,7,4\}$, $\overline{p}=\{-2,2,1\}$, $\overline{q}=\{2,0,1\}$, $\overline{r}=\{1,1,1\}$.
12.11 $\overline{x}=\{-9,5,5\}$, $\overline{p}=\{4,1,1\}$, $\overline{q}=\{2,0,-3\}$, $\overline{r}=\{-1,2,1\}$.
12.12 $\overline{x}=\{-5,-5,5\}$, $\overline{p}=\{-2,0,1\}$, $\overline{q}=\{1,3,-1\}$, $\overline{r}=\{0,4,1\}$.
12.13 $\overline{x}=\{3,-3,4\}$, $\overline{p}=\{1,0,2\}$, $\overline{q}=\{0,1,0\}$, $\overline{r}=\{2,-1,4\}$.
12.14 $\overline{x}=\{3,3,-1\}$, $\overline{p}=\{3,1,0\}$, $\overline{q}=\{-1,2,1\}$, $\overline{r}=\{-1,0,2\}$.
12.15 $\overline{x}=\{-1,7,-4\}$, $\overline{p}=\{-1,2,1\}$, $\overline{q}=\{2,0,3\}$, $\overline{r}=\{1,1,-1\}$.
12.16 $\overline{x}=\{6,5,-14\}$, $\overline{p}=\{1,1,4\}$, $\overline{q}=\{0,-3,2\}$, $\overline{r}=\{2,1,-1\}$.
12.17 $\overline{x}=\{6,-1,7\}$, $\overline{p}=\{1,-2,0\}$, $\overline{q}=\{-1,1,3\}$, $\overline{r}=\{1,0,4\}$.
12.18 $\overline{x}=\{5,15,0\}$, $\overline{p}=\{1,0,5\}$, $\overline{q}=\{-1,3,2\}$, $\overline{r}=\{0,-1,1\}$.
12.19 $\overline{x}=\{2,-1,11\}$, $\overline{p}=\{1,1,0\}$, $\overline{q}=\{0,1,-2\}$, $\overline{r}=\{1,0,3\}$.
12.20 $\overline{x}=\{11,5,-3\}$, $\overline{p}=\{1,0,2\}$, $\overline{q}=\{-1,0,1\}$, $\overline{r}=\{2,5,-3\}$.
12.21 $\overline{x}=\{8,0,5\}$, $\overline{p}=\{2,0,1\}$, $\overline{q}=\{1,1,0\}$, $\overline{r}=\{4,1,2\}$.
12.22 $\overline{x}=\{3,1,8\}$, $\overline{p}=\{0,1,3\}$, $\overline{q}=\{1,2,-1\}$, $\overline{r}=\{2,0,-1\}$.
12.23 $\overline{x}=\{8,1,12\}$, $\overline{p}=\{1,2,-1\}$, $\overline{q}=\{3,0,2\}$, $\overline{r}=\{-1,1,1\}$.
12.24 $\overline{x}=\{-9,-8,-3\}$, $\overline{p}=\{1,4,1\}$, $\overline{q}=\{-3,2,0\}$, $\overline{r}=\{1,-1,2\}$.
12.25 $\overline{x}=\{-5,9,-13\}$, $\overline{p}=\{0,1,-2\}$, $\overline{q}=\{3,-1,1\}$, $\overline{r}=\{4,1,0\}$.

Задача 13 Вычислить площадь параллелограмма построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\angle p,q$ - угол между векторами p, q.

13.1 $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\widehat{\overline{p},\overline{q}}\right)=\pi/6$.

13.2 $\overline{a}=2\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-3\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\widehat{\overline{p},\overline{q}}\right)=\pi/4$.

13.3 $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+3\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\widehat{\overline{p},\overline{q}}\right)=\pi/2$.

13.4 $\overline{a}=3\overline{p}-5\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\widehat{\overline{p},\overline{q}}\right)=5\pi/6$.

13.5 $\overline{a}=\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=6$, $\left(\widehat{\overline{p},\overline{q}}\right)=3\pi/4$.

13.6 $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}-2\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\widehat{\overline{p},\overline{q}}\right)=\pi/3$.

13.7 $\bar{a} = 2\bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/2$.

13.8 $\bar{a} = \bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 4\bar{q}$, $|\bar{p}| = 7$, $|\bar{q}| = 1$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/4$.

13.9 $\bar{a} = 4\bar{p} - 4\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 1$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/6$.

13.10 $\bar{a} = \bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/3$.

13.11 $\bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 2$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/6$.

13.12 $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/4$.

13.13 $\bar{a} = \bar{p} - 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 1/5$, $|\bar{q}| = 1$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/2$.

13.14 $\bar{a} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 5\bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1/2$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = 5\pi/6$.

13.15 $\bar{a} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = 3\pi/4$.

13.16 $\bar{a} = \bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{P}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/3$.

13.17 $\bar{a} = 2\bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}$, $|\bar{p}| = 3$, $|\bar{q}| = 2$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/2$.

13.18 $\bar{a} = 4\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{\eth}| = 7$, $|\bar{q}| = 2$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/4$.

13.19 $\bar{a} = \bar{p} - 4\bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 2$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/6$.

13.20 $\bar{a} = \bar{p} + 4\bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 7$, $|\bar{q}| = 2$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/3$.

13.21 $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 10$, $|\bar{q}| = 1$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/2$.

13.22 $\bar{a} = 4\bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 5$, $|\bar{q}| = 4$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/4$.

13.23 $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 6$, $|\bar{q}| = 7$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/3$.

13.24 $\bar{a} = 3\bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 3$, $|\bar{q}| = 4$, $\left(\bar{p}\hat{,}\bar{q}\right) = \pi/3$.

13.25 $a- = 2\overline{p} + 3\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - 2\overline{q}$, $|\overline{p}| = 2$, $|\overline{q}| = 3$, $\left(\widehat{\overline{p},\overline{q}}\right) = \pi/4$.

Задача 14 Компланарны ли векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$?

14.1 $\overline{a} = \{1,3,0\}$, $\overline{b} = \{-1,0,-1\}$, $\overline{c} = \{1,2,1\}$.
14.2 $\overline{a} = \{3,2,1\}$, $\overline{b} = \{5,5,5\}$, $\overline{c} = \{0,-1,-2\}$.
14.3 $\overline{a} = \{0,6,1\}$, $\overline{b} = \{0,2,0\}$, $\overline{c} = \{1,1,1\}$.
14.4 $\overline{a} = \{4,1,-2\}$, $\overline{b} = \{3,2,1\}$, $\overline{c} = \{5,5,5\}$.
14.5 $\overline{a} = \{2,5,0\}$, $\overline{b} = \{2,-1,2\}$, $\overline{c} = \{1,1,1\}$.
14.6 $\overline{a} = \{1,0,-1\}$, $\overline{b} = \{-2,-1,0\}$, $\overline{c} = \{3,1,-1\}$.
14.7 $\overline{a} = \{4,3,1\}$, $\overline{b} = \{5,1,2\}$, $\overline{c} = \{2,1,-1\}$.
14.8 $\overline{a} = \{-2,4,3\}$, $\overline{b} = \{4,7,5\}$, $\overline{c} = \{2,0,-1\}$.
14.9 $\overline{a} = \{2,5,8\}$, $\overline{b} = \{1,-3,-7\}$, $\overline{c} = \{0,5,10\}$.
14.10 $\overline{a} = \{1,5,1\}$, $\overline{b} = \{1,7,1\}$, $\overline{c} = \{2,2,1\}$.
14.11 $\overline{a} = \{2,3,1\}$, $\overline{b} = \{-1,1-1,\}$, $\overline{c} = \{2,2,1\}$.
14.12 $\overline{a} = \{-3,0,1\}$, $\overline{b} = \{0,5,5\}$, $\overline{c} = \{5,-1,-2\}$.
14.13 $\overline{a} = \{-4,1,1\}$, $\overline{b} = \{-1,5,5\}$, $\overline{c} = \{5,0,3\}$.
14.14 $\overline{a} = \{3,1,-2\}$, $\overline{b} = \{1,-2,1\}$, $\overline{c} = \{-5,2,3\}$.
14.15 $\overline{a} = \{-3,5,-1\}$, $\overline{b} = \{-2,1,-2\}$, $\overline{c} = \{-1,2,-1\}$.
14.16 $\overline{a} = \{4,1,-1\}$, $\overline{b} = \{2,-1,3\}$, $\overline{c} = \{-3,2,-1\}$.
14.17 $\overline{a} = \{3,3,1\}$, $\overline{b} = \{-2,2,-1\}$, $\overline{c} = \{-2,2,-1\}$.
14.18 $\overline{a} = \{2,-4,-3\}$, $\overline{b} = \{3,5,5\}$, $\overline{c} = \{2,2,2\}$.
14.19 $\overline{a} = \{-2,4,4\}$, $\overline{b} = \{2,-3,-7\}$, $\overline{c} = \{0,5,1\}$.
14.20 $\overline{a} = \{-1,4,-1\}$, $\overline{b} = \{-1,6,-1\}$, $\overline{c} = \{3,-2,1\}$.
14.21 $\overline{a} = \{-1,5,1\}$, $\overline{b} = \{-1,5,-1\}$, $\overline{c} = \{3,2,3\}$.
14.22 $\overline{a} = \{1,2,-1\}$, $\overline{b} = \{4,4,4\}$, $\overline{c} = \{1,5,-2\}$.
14.23 $\overline{a} = \{5,5,5\}$, $\overline{b} = \{4,-4,3\}$, $\overline{c} = \{0,1,-2\}$.
14.24 $\overline{a} = \{3,3,-2\}$, $\overline{b} = \{2,-2,1\}$, $\overline{c} = \{0,1,5\}$.
14.25 $\overline{a} = \{3,5,0\}$, $\overline{b} = \{1,-1,-2\}$, $\overline{c} = \{2,2,2\}$.

Задача 15 Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

15.1 $A_1(2,4,7)$, $A_2(3,3,2)$, $A_3(0,1,2)$, $A_4(-3,7,-2)$.
15.2 $A_1(-2,4,8)$, $A_2(4,-1,2)$, $A_3(-8,7,10)$, $A_4(-3,4,-2)$.
15.3 $A_1(6,1,3)$, $A_2(6,-2,-3)$, $A_3(2,2,0)$, $A_4(-5,1,0)$.
15.4 $A_1(0,-1,2)$, $A_2(-3,3,-4)$, $A_3(-9,-5,0)$, $A_4(-8,-5,4)$.
15.5 $A_1(0,-4,3)$, $A_2(-5,1,-2)$, $A_3(4,7,-2)$, $A_4(-9,7,8)$.
15.6 $A_1(2,1,1)$, $A_2(0,5,7)$, $A_3(3,-3,-7)$, $A_4(1,8,5)$.
15.7 $A_1(4,1,-1)$, $A_2(1,4,-1)$, $A_3(0,1,3)$, $A_4(-2,0,0)$.
15.8 $A_1(5,2,1)$, $A_2(4,5,4)$, $A_3(8,3,-3)$, $A_4(-7,12,-4)$.
15.9 $A_1(0,2,-2)$, $A_2(1,9,3)$, $A_3(6,-6,-2)$, $A_4(3,-2,8)$.

15.10 $A_1(12,2,3)$, $A_2(-7,-5,0)$, $A_3(-4,-8,-5)$, $A_4(-4,0,-3)$.
15.11 $A_1(1,3,6)$, $A_2(2,2,1)$, $A_3(-1,0,1)$, $A_4(-4,6,-3)$.
15.12 $A_1(-4,2,6)$, $A_2(2,-3,0)$, $A_3(-10,5,8)$, $A_4(-5,2,-4)$.
15.13 $A_1(7,2,4)$, $A_2(7,-1,-2)$, $A_3(3,3,1)$, $A_4(-4,2,1)$.
15.14 $A_1(2,1,4)$, $A_2(-1,5,-2)$, $A_3(-7,-3,2)$, $A_4(-6,-3,6)$.
15.15 $A_1(-1,-5,2)$, $A_2(-6,0,-3)$, $A_3(3,6,-3)$, $A_4(-10,6,7)$.
15.16 $A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$.
15.17 $A_1(5,2,0)$, $A_2(2,5,0)$, $A_3(1,2,4)$, $A_4(-1,1,1)$.
15.18 $A_1(2,-1,-2)$, $A_2(1,2,1)$, $A_3(5,0,-6)$, $A_4(-10,9,-7)$.
15.19 $A_1(-2,0,-4)$, $A_2(-1,7,1)$, $A_3(4,-8,-4)$, $A_4(1,-4,6)$.
15.20 $A_1(14,4,5)$, $A_2(-5,-3,2)$, $A_3(-2,-6,-3)$, $A_4(-2,2,-1)$.
15.21 $A_1(1,2,0)$, $A_2(3,0,-3)$, $A_3(5,2,6)$, $A_4(8,4,-9)$.
15.22 $A_1(2,-1,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(-4,2,5)$.
15.23 $A_1(1,1,2)$, $A_2(-1,1,3)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,0,-2)$.
15.24 $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(7,5,-3)$.
15.25 $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,3,1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(5,9,-8)$.

4 Тестовые зачетные задания за второй семестр обучения

G Аналитическая геометрия на плоскости

G1.1 Укажите формулу нахождения координат вектора $\overline{AB}$ по его точкам $A(x_1,\, y_1)_R$, $B(x_2,\, y_2)_R$ относительно базиса $\{\bar{e}_1,\, \bar{e}_2\}$:

1) $\overline{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}_{\{\bar{e}_1,\, \bar{e}_2\}}$; 2) $\overline{AB} = \{x_2 + x_1;\ y_2 + y_1\}_{\{\bar{e}_1,\, \bar{e}_2\}}$;

3) $\overline{AB} = \{x_2 \cdot x_1;\ y_2 \cdot y_1\}_{\{\bar{e}_1,\, \bar{e}_2\}}$; 4) $\overline{AB} = \{y_2 - y_1;\ x_2 - x_1\}_{\{\bar{e}_1,\, \bar{e}_2\}}$.

1.1 Укажите неверное утверждение:

1) совокупность точки O (полюса), полярной оси с началом в этой точке и единичным вектором $\bar{e}$ называется полярной системой координат;

2) полярной осью называется прямая с заданным сонаправленным единичным вектором;

3) совокупность точки O и ортонормированного базиса $\{\bar{i};\ \bar{j}\}$ называется прямоугольной декартовой системой координат на плоскости;

4) совокупность точки O и базиса $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2\}$ называется аффинной системой координат на плоскости.

1.2 Под параллельным переносом осей координат понимают переход от системы координат Oxy к новой системе $O_1x_1y_1$, при этом:

1) не меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными;

2) меняется положение начала координат и направление осей;

3) меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными;

4) меняется положение начала координат, а так же меняется направление

осей и масштаб.

1.3 Под поворотом осей координат понимают такое преобразование координат, при котором:

1) обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными;

2) обе оси не поворачиваются на один и тот же угол;

3) обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб изменяются;

4) обе оси поворачиваются на один и тот же угол.

1.4 Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две данные точки определяется уравнением:

1) $y = kx + b$; 2) $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_2} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$;

3) $Ax+By+C=0$; 4) $\rho cos\alpha cos\varphi + \rho sin\alpha sin\varphi - p = 0$.

G1.6 Укажите как на плоскости расположена прямая, заданная уравнением $By+C=0$:

1) параллельна оси *Oy*; 2) проходит через начало координат;

3) совпадает с осью *Ox*; 4) параллельна оси *Ox*.

G1.7 Укажите как на плоскости расположена прямая, заданная уравнением $Ax+By=0$:

1) параллельна оси *Oy*; 2) проходит через начало координат;

3) совпадает с осью *Ox*; 4) параллельна оси *Ox*.

G1.8 Укажите как на плоскости расположена прямая, заданная уравнением $Ax+C=0$:

1) параллельна оси *Oy*; 2) проходит через начало координат;

3) совпадает с осью *Oy*; 4) параллельна оси *Ox*.

1.9 Эллипсом называется множество всех точек плоскости:

1) разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами;

2) сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина непостоянная, большая, чем расстояние между фокусами;

3) сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами;

4) сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

1.10 Гиперболой называется множество всех точек плоскости6

1) модуль суммы расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая,

чем расстояние между фокусами;

2) модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина непостоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами;

3) модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами;

4) модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

1.11 Параболой называется множество всех точек плоскости:

1) каждая из которых удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой;

2) каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой;

3) каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом;

4) каждая из которых удалена от данной прямой, называемой директрисой.

G1.12 Укажите неверное утверждение:

1) эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами;

2) гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами;

3) параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой;

4) гиперболой называется множество всех точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами;

G1.13 Укажите каноническое уравнение эллипса:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$;

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$.

G1.14 Укажите каноническое уравнение гиперболы:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$.

G1.15 Укажите общее уравнение кривой второго порядка на плоскости:

1) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=0$;

2) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+F=0$;

3) $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$;

4) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

G2.1 Даны точки $A(2,4,1)$, $B(\alpha,2,6)$. Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $\{3,-2,5\}$ при α равном:

1) 5; 2) -5; 3) 0; 4) 4.

G2.2 Серединой M_1M_2 отрезка при условии $M_1(4,2)$, $M_2(-6,4)$ является точка:

1) $M(1,3)$; 2) $M(-1,3)$; 3) $M(1,-3)$; 4) $M(0,4)$.

G2.3 Даны точки $M_1(4,\alpha)$, $M_2(4,-3)$. Точка $M(4,2)$ делит отрезок в отношении $\lambda=3$ при α равном:

1) 16; 2) 8; 3) 17; 4) -17.

G2.4 Параметры b и k прямой $4x-6y-10=0$ равны:

1) $b=\dfrac{2}{3}, k=\dfrac{5}{3}$; 2) $b=-\dfrac{2}{3}, k=\dfrac{5}{3}$;

3) $b=\dfrac{2}{3}, k=-\dfrac{5}{3}$; 4) $b=\dfrac{2}{3}, k=1$.

G2.5 Уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-10)$ и образующей с осью Ox угол $45°$ имеет вид:

1) $x-2y-2=0$; 2) $x-y+12=0$;

3) $x+y-12=0$; 4) $x-y-12=0$.

G2.6 Уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,-5)$ и перпендикулярную вектору $\overline{a}=\{4,-6\}$ имеет вид:.

1) $-4x-5y-30=0$; 2) $-4x+y-10=0$;

3) $4x-6y-46=0$; 4) $4x-6y+46=0$.

G2.7 Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(4,-2)$, $B(0,-4)$, имеет вид:

1) $x-y+5=0$; 2) $2x-4y+16=0$;

3) $-2x+4y+16=0$; 4) $4x-2y-10=0$.

G2.8 Уравнение прямой, параллельной прямой $2x-5y+11=0$, имеет вид:

1) $2x-y+6=0$; 2) $2x-5y+6=0$;
3) $2x-5y-10=0$; 4) $2x+5y+6=0$.

G2.9 Уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,4)$ и перпендикулярную вектору $\overline{BC}$, если $B(2,1)$, $C(1,3)$, имеет вид:

1) $2x-y+10=0$; 2) $x+2y+6=0$;
3) $2y-x-6=0$; 4) $x+y-6=0$.

G2.10 Даны точки $M_1(9,3)$, $M_2(4,3)$. Точка $M(\alpha,3)$ делит отрезок в отношении $\lambda=4$ при α равном:

1) 4; 2) 3; 3) 5; 4) 1.

G2.11 Расстояние между точками $A(3,10)$ и $B(\alpha,4)$ равно $\sqrt{37}$ при α равном:

1) 4; 2) 3; 3) 8; 4) 1.

G2.12 Какие из следующих прямых параллельны?
$l_1: 3x-15y+10=0$, $l_2: 4x-10y-5=0$, $l_3: 4x-5y-5=0$, $l_4: 6x-30y-4=0$.

1) l_1, l_4; 2) l_1, l_2; 3) l_1, l_3; 4) l_2, l_4.

G2.13 Прямые $4x-3y-6=0$ и $\alpha x-4y-10=0$ параллельны при α равном:

1) $-\frac{1}{2}$; 2) 8; 3) -8; 4) 4.

G2.14 Какие из следующих прямых перпендикулярны?
$l_1: 3x-15y+10=0$, $l_2: 4x-10y-5=0$, $l_3: 10x-4y+5=0$, $l_4: 3x+10y-6=0$.

1) l_1, l_2; 2) l_1, l_4; 3) l_2, l_3; 4) l_2, l_4.

G2.15 Прямые $2x-16y-10=0$ и $\alpha x-4y-10=0$ перпендикулярны при α равном:

1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) -1.

G3.1 Расстояние от точки $M(4,2)$ до прямой $3x-4y+10=0$ равно:

1) 6; 2) $\frac{14}{5}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{10}$.

G3.2 Общим уравнением прямой на плоскости является …

1) $y=-\frac{3}{2}x+6$; 2) $2x-y+6=0$;
3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$; 4) $y+2=-\frac{3}{2}(x+6)$.

G3.3 Расстояние от точки $A(2, \alpha)$ до прямой $4x-3y+12=0$ равно $\frac{1}{5}$ при α равном:

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) -7.

G3.4 Угол между прямыми $\alpha x-4y+11=0$ и $4x+2y+12=0$ равен $90°$ при α равном:

1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) 6.

G3.5 Прямые $6x-9y+11=0$ и $2x-2y+5=0$ параллельны при α равном:

1) 1; 2) -3; 3) 3; 4) 4.

G3.6 Уравнение прямой, параллельной прямой $12x+5y-52=0$ и отстоящей от нее на расстоянии 2, имеет вид:

1) $12x+5y-26=0$; 2) $12x-5y+26=0$;
3) $10x-5y-26=0$; 4) $4x-5y-2=0$.

G3.7 Уравнением прямой, перпендикулярной прямой $y=4x+2$, является:

1) $y=3x+2$; 2) $y=4x+2$; 3) $y=-\frac{1}{4}x+2$; 4) $y=\frac{1}{4}x-2$.

G3.8 Прямые $y=4x+2$ и $y=\alpha x+3$ перпендикулярны при α равном:

1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$.

G3.9 Уравнение $16x^2+25y^2=400$ задает на плоскости…

1) гиперболу; 2) параболу;
3) эллипс; 4) окружность.

G3.10 Уравнение окружности, проходящей через точку $O(-5, 1)$ и $R=6$, имеет вид:

1) $(x+5)^2+(y-1)=36$; 2) $(x-5)^2+(y-1)=36$;
3) $(x-5)^2+(y+1)=36$; 4) $(x-5)^2+(y-1)^2=6$.

G3.11 Укажите тип кривой второго порядка $x^2+9y=18$

1) гиперболу; 2) параболу;
3) эллипс; 4) окружность.

G3.12 Координаты центра и радиус окружности $x^2+(y-1)^2=16$,имеют вид:

1) $O(0, 1), R=4$; 2) $O(0, 2), R=4$;
3) $O(1, 1), R=5$; 4) $O(0, 1), R=5$.

G3.13 У эллипса большая полуось $a=4$ и малая полуось $b=5$, тогдак каноническое уравнение эллипса имеет вид:

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$;

3) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; 4) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$.

G3.14 Среди уравнений кривых укажите уравнение, которое не является окружностью

1) $(x+3)^2+(y-2)^2=16$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$;

3) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; 4) $x^2+4y^2=4y$.

G3.15 Фокусы гиперболы $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{25}=1$, имеют вид:

1) $F_1(4,0), F_2(-4,0)$; 2) $F_1(\sqrt{5},0), F_2(-\sqrt{5},0)$;

3) $F_1(5,0), F_2(-5,0)$; 4) $F_1(5\sqrt{5},0), F_2(-5\sqrt{5},0)$.

H Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

H1.1 Укажите неверное утверждение:

1) совокупность точки O и базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ называется аффинной системой координат в пространстве;

2) совокупность точки O и ортонормированного базиса $\{\bar{i};\ \bar{j}, \bar{k}\}$ называется прямоугольной декартовой системой координат в пространстве;

3) уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат Oyz называется такое уравнение $F(x,y,z)=0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки лежащей на поверхности;

4) уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат Oyz называется такое уравнение $F(x,y,z)=0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.

4.1 Укажите формулы для нахождения координат точки, делящей отрезок в отношении λ:

1) $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$;

2) $x=\frac{x_1+x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+y_2}{1+\lambda}$; $z=\frac{z_1+z_2}{1+\lambda}$;

3) $x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}$; $y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}$; $z=\frac{z_1-\lambda z_2}{1-\lambda}$;

4) $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1-\lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1-\lambda}$; $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1-\lambda}$.

4.2 Укажите как в пространстве расположена плоскость, заданная уравнением $Ax + By + Cz = 0$:

1) параллельна оси *Oy*; 2) совпадает с осью *Oy*;
3) проходит через начало координат; 4) параллельна оси *Ox*.

4.3 Укажите как в пространстве расположена плоскость, заданная уравнением $Cz + D = 0$:

1) параллельна плоскости *Oxy*; 2) совпадает с осью *Oy*;
3) проходит через начало координат; 4) параллельна плоскости *Oxz*.

4.4 Укажите как в пространстве расположена плоскость, заданная уравнением $Ax + By = 0$:

1) параллельна плоскости *Oxy*; 2) проходит через ось *Oz*;
3) проходит через начало координат; 4) параллельна оси *Ox*.

4.5 Укажите как в пространстве расположена плоскость, заданная уравнением $Ax + By + D = 0$:

1) параллельна плоскости *Oxy*; 2) проходит через ось *Oz*;
3) проходит через начало координат; 4) параллельна оси *Oz*.

4.6 Продолжите предложение «Две плоскости в пространстве перпендикулярны, если…»:

1) их нормальные векторы коллинеарны;
2) их нормальные векторы равны;
3) их нормальные векторы перпендикулярны;
4) их нормальные векторы совпадают.

4.7 Продолжите предложение «Две плоскости в пространстве параллельны, если..»:

1) их нормальные векторы коллинеарны;
2) их нормальные векторы равны;
3) их нормальные векторы перпендикулярны;
4) их нормальные векторы совпадают.

4.8 Укажите каноническое уравнение прямой в пространстве:

1) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. 2) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$;

3) $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s}$; 4) $\dfrac{x + x_0}{m} = \dfrac{y + y_0}{n} = \dfrac{z + z_0}{p}$.

4.9 Продолжите предложение «Две прямы в пространстве параллельны, если..»:

1) их направляющие векторы коллинеарны;
2) их направляющие векторы равны;
3) их направляющие векторы перпендикулярны;
4) их направляющие векторы совпадают.

4.10 Продолжите предложение «Две прямы в пространстве перпендикулярны, если..»:

1) их направляющие векторы коллинеарны;
2) их направляющие векторы равны;
3) их направляющие векторы перпендикулярны;
4) их направляющие векторы совпадают.

4.11 Укажите уравнение эллиптического цилиндра:

1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$ 2) $\tilde{o}^2=2\eth\acute{o};$

3) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ 4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

4.12 Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$ 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$ 4) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z.$

4.13 Укажите какая кривая будет в сечении у двуполостного гиперболоида, если рассечь его плоскостью $z=h$:

1) гипербола; 2) окружность;
3) эллипс; 4) парабола.

4.14 Укажите какая кривая будет в сечении у конуса второго порядка, если рассечь его плоскостью $y=0$:

1) гипербола; 2) две пересекающиеся прямые;
3) эллипс; 4) парабола.

Н2.1 Нормальный вектор плоскости $4x+2y-5z+10=0$ имеет координаты:

1) $\bar{n}=\{4,2,-5\};$ 2) $\bar{n}=\{4,2,5\};$

3) $\overline{n} = \{4, -2, 5\}$; 4) $\overline{n} = \{4, 2, 0\}$.

Н2.2 Уравнение плоскости, перпендикулярной оси Oy и проходящей через точку $A(2,4,-1)$, имеет вид:

1) $y + z + 10 = 0$; 2) $y - 4 = 0$;

3) $z + 10 = 0$; 4) $y + 4 = 0$.

Н2.3 Уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(4,2,4)$, имеет вид:

1) $y + z + 10 = 0$; 2) $2y + z - 4 = 0$;

3) $-2y + z + 10 = 0$; 4) $-2y + z = 0$.

Н2.4 Уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,4,1)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = \{2, 4, -2\}$, имеет вид:

1) $x - 2y + 2z - 6 = 0$; 2) $x - y - z - 4 = 0$;

3) $2x + 4y - 2z - 18 = 0$; 4) $y + 4 = 0$.

Н2.5 Плоскость, параллельная плоскости $x - 2y + 2z - 6 = 0$ и проходящая через точку $A(2,4,1)$, имеет вид:

1) $2x + y + 3z - 7 = 0$; 2) $x - 2y + 2z + 4 = 0$;

3) $2x + y + 3z + 7 = 0$; 4) $2x + 3z - 7 = 0$.

Н2.6 Уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x - 2y + 4z - 5 = 0$ и отстоящей от нее на 2 единицы, имеет вид:

1) $4x - 2y + 4z - 7 = 0$; 2) $4x - 2y + 3z + 7 = 0$;

3) $2x + 2y + 4z + 7 = 0$; 4) $2x + 3z - 7 = 0$.

Н2.7 Уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,0,2)$, $B(3,4,0)$, $A(1,1,2)$, имеет вид:

1) $2x - 2z - 6 = 0$; 2) $2x + 2z - 6 = 0$;

3) $2x + 2y + 4z + 7 = 0$; 4) $2x + 3z - 7 = 0$.

Н2.8 Нормальное уравнение плоскости $2x - y + 4z + 5 = 0$, имеет вид:

1) $\frac{2}{\sqrt{21}}x + \frac{1}{\sqrt{21}}y - \frac{4}{\sqrt{21}}z - \frac{5}{\sqrt{21}} = 0$;

2) $-\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{1}{\sqrt{21}}y-\frac{1}{\sqrt{21}}z-\frac{5}{\sqrt{21}}=0$;

3) $-\frac{2}{\sqrt{21}}x-\frac{1}{\sqrt{21}}y-\frac{4}{\sqrt{21}}z-\frac{5}{\sqrt{21}}=0$;

4) $-\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{1}{\sqrt{21}}y-\frac{4}{\sqrt{21}}z-\frac{5}{\sqrt{21}}=0$.

Н2.9 Расстояние от точки $A(4,2,2)$ до плоскости $3x-y+5z-10=0$ равно:

1) 7; 2) $\frac{2\sqrt{35}}{7}$; 3) $\frac{2\sqrt{35}}{5}$; 4) $\frac{\sqrt{35}}{7}$.

Н2.10 Какие из плоскостей перпендикулярны вектору $\bar{n}=\{1,1,0\}$?

1) $5x+5y+4=0$; 2) $3x-y+5z-10=0$;

3) $x-y+z-10=0$; 4) $3x-y=0$.

Н2.11 Какие из плоскостей параллельны между собой?

$\pi_1: 2x-2y+4z+10=0$; $\pi_2: 4x+4y+8z-6=0$;

$\pi_3: 6x-6y+12z+7=0$; $\pi_4: 2x-2y+z-7=0$.

1) π_1, π_4; 2) π_1, π_3; 3) π_1, π_2; 4) π_3, π_4.

Н2.12 Плоскости $2x-\alpha y+4z+10=0$ и $4x-8y+8z+5=0$ параллельны при α равном:

1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) -4.

Н2.13 Какие из плоскостей перпендикулярны между собой?

$\pi_1: 2x-2y+4z+10=0$; $\pi_2: 4x+4y+8z-6=0$;

$\pi_3: 6x-6y+12z+7=0$; $\pi_4: 2x-2y+z-7=0$.

1) π_2, π_4; 2) π_1, π_3; 3) π_1, π_2; 4) π_3, π_4.

Н2.14 Плоскости $2x-4y+\alpha z+10=0$ и $4x-4y-z=0$ перпендикулярны при α равном:

1) 1; 2) -8; 3) 4; 4) -4.

Н2.15 Угол между плоскостями $2x-2y+3z+10=0$ и $x+4y+2z+11=0$ равен:

1) 45^0; 2) 30^0; 3) 90^0; 4) 60^0.

Н3.1 Угол между плоскостями $2x+\alpha y-3z+10=0$ и $x+4y-2z+11=0$ равен 90^0 при α равном:

1) 4; 2) 3; 3) -2; 4) 2.

Н3.2 Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,4,-2)$ параллельно оси *Oy*, имеет вид:

1) $x=3,\ y=4+t,\ z=-2$; 2) $x=3+t,\ y=4+t,\ z=-2$;

3) $x=3,\ y=4+t,\ z=-2+t$; 4) $x=3,\ y=4+t,\ z=-t$.

Н3.3 Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,4,-2)$ параллельно оси *Ox*, имеет вид:

1) $x=3,\ y=4+t,\ z=-2$; 2) $x=3+t,\ y=4+t,\ z=-2$;

3) $x=3+t,\ y=4,\ z=-2$; 4) $x=3,\ y=4+t,\ z=-t$.

Н3.4 Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,4,-2)$ параллельно оси *Oz*, имеет вид:

1) $x=3,\ y=4+t,\ z=-2$; 2) $x=3+t,\ y=4+t,\ z=-2$;

3) $x=3,\ y=4+t,\ z=-2+t$; 4) $x=3,\ y=4,\ z=-2+t$.

Н3.5 Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(2,4,-1)$ и $B(4,-5,1)$, имеет вид:

1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-9}=\dfrac{z+1}{2}$; 2) $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+4}{-9}=\dfrac{z+1}{2}$;

3) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{9}=\dfrac{z+1}{2}$; 4) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-4}{-9}=\dfrac{z+1}{2}$.

Н3.6 Уравнение прямой, проходящей через $A(4,2,1)$ параллельно вектору $\bar{s}=\{4,5,0\}$, имеет вид:

1) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z+1}{0}$; 2) $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-1}{0}$;

3) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z+1}{0}$; 4) $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+1}{0}$.

Н3.7 Уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,-2,1)$ перпендикулярно плоскости $2x-2y+6z+5=0$, имеет вид:

1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+1}{6}$; 2) $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{0}$;

3) $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+1}{6}$; 4) $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{6}$.

Н3.8 Прямая $x=2+4t,\ y=2-2t,\ z=1-t$ перпендикулярна плоскости

$2x+\alpha y+4z-10=0$ при α равном:

1) -2; 2) 2; 3) -1; 4) 3.

Н3.9 Прямая $x=2+4t,\ y=2-2t,\ z=1-8t$ параллельна плоскости $\alpha x-y-4z-15=0$ при α равном:

1) -2; 2) 2; 3) -1; 4) 3.

Н3.10 При каких значениях A и D прямая $\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{6}=\frac{z+1}{3}$ лежит на плоскости $Ax+4y+2z+D=0$?

1) $A=\frac{15}{2},\ D=-37$ 2) $A=-\frac{15}{2},\ D=37$;

3) $A=\frac{15}{2},\ D=37$; 4) $A=-\frac{15}{2},\ D=30$.

Н3.11 При каких значениях m и B прямая $x=3+mt$, $y=-6+2t$, $z=1+t$ перпендикулярны плоскости $2x-By+3z-10=0$?

1) $m=-\frac{2}{3}, B=-6$; 2) $m=\frac{2}{3},\quad B=6$;

3) $m=\frac{2}{3},\quad B=-6$; 4) $m=\frac{2}{3},\quad B=-5$.

Н3.12 Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$, является…

1) однополостным гиперболоидом; 2) эллипсоидом;
3) сферой; 4) конусом.

Н3.13 Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$, является…

1) однополостным гиперболоидом; 2) эллипсоидом;
3) сферой; 4) конусом.

Н3.14 Уравнение кривой в сечении двуполостного гиперболоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=-1$ плоскостью $y=4$, имеет вид:

1) $\frac{z^2}{18}+\frac{x^2}{50}=1$; 2) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=1$;

3) $\frac{z^2}{18}-\frac{x^2}{50}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

Н3.15 Уравнение кривой в сечении эллипсоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ плоскостью $x=0$, имеет вид:

1) $\frac{z^2}{9}+\frac{x^2}{25}=1$; 2) $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$;

3) $\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$; 4). $\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$

I Линейное пространство. Подпространство линейного пространства

I1.1 Укажите неверное утверждение.

1) В линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент.

2) Для любого элемента x линейного пространства существует единственный противоположный элемент $-x$.

3) Для элемента $-x$ линейного пространства противоположным будет элемент x.

4) Для любого элемента x линейного пространства произведение $0x=1$, где 1 – единичный элемент.

I1.2 Укажите неверное утверждение.

1) Для любого элемента x линейного пространства произведение $-1\cdot x=x$.

2) Пусть θ - нулевой элемент линейного пространства, тогда для любого числа α верно $\alpha\theta=\theta$.

3) Если в линейном пространстве выполнено $\alpha x=0$ и $\alpha\neq 0$, то $x=\theta$.

4) Если в линейном пространстве выполнено $\alpha x=0$ и $x\neq\theta$, то $\alpha=0$.

I1.3 Укажите неверное утверждение.

1) Линейное пространство V называется $\boldsymbol{n}$-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторы являются линейно зависимыми.

2) Линейное пространство, в котором имеется базис, состоящий из конечного числа векторов, называется конечномерным.

3) Линейное пространство называется бесконечномерным, если при любом натуральном числе m в нем найдется m линейно зависимых векторов.

4) Базисом n-мерного линейного пространства V_n называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов этого пространства.

I1.4 Укажите неверное утверждение.

1) Если $\dim R=n\geq 1$, то в пространстве R существует базис из $n+1$ элементов..

2) Пусть линейное пространство X_n обладает базисом $e_1, e_2, ..., e_n$. Тогда любой вектор x из X_n единственным образом представляется в виде $x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$.

3) Линейное выражение вектора x через векторы базиса называют разложением вектора x по базису.

4) Векторы линейного пространства X полностью определяются своими координатами в данном базисе. При этом операции над векторами сводятся к аналогичным операциям над их координатами.

I1.5 Укажите неверное утверждение:.

1) Матрицу, в k-ой строке которой записаны координаты вектора a_k $\left(k=\overline{1,m}\right)$, называют матрицей системы векторов $a_1, a_2, ..., a_m$ в данном базисе, а ранг этой матрицы – рангом системы векторов.

2) Для того чтобы m векторов линейного пространства были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен m.

3) Если ранг матрицы системы m векторов линейного пространства равен r, максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно r.

4) Система n векторов n-мерного линейного пространства линейно независима тогда и только тогда, когда матрица этой системы векторов является невырожденной.

I1.6 Укажите неверное утверждение.

1) Матрицей перехода от базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ к базису $e_1', e_2', ..., e_n'$ называется матрица системы векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ в базисе $e_1', e_2', ..., e_n'$.

2) Матрица перехода от базиса к базису является невырожденной.

3) Всякую невырожденную матрицу порядка n можно рассматривать как матрицу перехода от базиса к базису в n-мерном пространстве.

4) Задача преобразования координат заключается в нахождении зависимости между координатами вектора в разных базисах.

I1.7 Укажите неверное утверждение.

1) Два линейных пространства V и U называются изоморфными, когда между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что если $x_1 \leftrightarrow y_1$, $x_2 \leftrightarrow y_2$, где $x_1, x_2 \in V$, $y_1, y_2 \in U$, то

1) $\left(x_1 + x_2\right) \leftrightarrow \left(y_1 + y_2\right)$;

2) $\alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1$,

где α - действительное число.

2) Два линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

3) Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.

4) Если линейные пространства R и R' изоморфны, то линейно независимым элементам $x_1, ..., x_m$ пространства R соответствуют линейно независимые элементы $x_1', ..., x_n'$ пространства R' ($m \neq n$).

I1.8 Укажите неверное утверждение.

1) Множество $W \subset V$ называется подпространством линейного пространства V, если выполняются следующие условие если $x, y \in W$, то $x + y \in V$.

2) Всякое подпространство W линейного пространства V является линейным пространством, т.е. в W выполняются аксиомы I – VIII линейного пространства.

3) Нулевой элемент θ линейного пространства V образует подпространство данного пространства, которое называют нулевым подпространством.

4) Само линейное пространство V можно рассматривать как подпространство этого пространства.

I1.9 Укажите неверное утверждение:

1) Пусть в линейном пространстве X дана система векторов $a_1, a_2, ..., a_k$. Множество всевозможных линейных комбинаций $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k$ этой системы называют линейной оболочкой системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$.

2) Линейная оболочка L системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$ является подпространством в X.

3) Линейную оболочку L системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$ также называют подпространством, порожденным этой системой векторов, или подпространством, натянутым на эту систему векторов.

4) Линейное подпространство конечномерного линейного пространства является конечномерным, причем размерность подпространства превышает размерность всего линейного пространства на единицу.

I1.10 Укажите неверное утверждение:

1) Пусть L - подпространство n-мерного линейного пространства X. Любой базис $a_1, a_2, ..., a_k$ в L можно дополнить до базиса $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n$ всего линейного пространства X, причем линейному подпространству L принадлежат те и только те векторы, которые в указанном базисе имеют столбцы координат вида $(x_1', x_2', ..., x_k', 1, ..., 1)^T$.

2) Пусть X – конечномерное линейное пространство и в нем задан базис. Тогда для любого линейного подпространства L в X можно указать такую однородную систему линейных уравнений $Ax = 0$, что множество координатных столбцов всех векторов L будет совпадать с множеством решений системы $Ax = 0$.

3) Если некоторое множество в заданном базисе описывается однородной системой линейных уравнений, то и в любом другом базисе это множество описывается некоторой системой линейных уравнений.

4) Однородную систему линейных уравнений, описывающую данное линейное подпространство L, называют общими уравнениями этого подпространства.

I1.11 Укажите неверное утверждение:

1) Пусть в линейном пространстве X даны подпространства L_1 и L_2. Множество $L_1 \cap L_2$ векторов, принадлежащих как L_1, так и L_2 называется пересечением подпространств L_1 и L_2.

2) Множество всех векторов x вида $x = a + b$, где $a \in L_1$, $b \in L_2$, называют суммой подпространств L_1 и L_2 и обозначают через $L_1 + L_2$.

3) Если пересечение $L_1 \cap L_2$ – нулевое подпространство, то сумму $L_1 + L_2$ называют прямой суммой и обозначают через $L_1 \oplus L_2$.

4) Сумма подпространств подпространством не является.

I1.12 Укажите неверное утверждение:

1) Понятия пересечения и суммы подпространств распространяются на любое число подпространств.

2) Если сумма $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 в X является прямой, то представление любого вектора x в виде $x = a + b$, где $a \in L_1$, $b \in L_2$, единственно.

3) Если $X = L_1 \oplus L_2$ каждый вектор $x \in X$ имеет представление $x = a + b$, причем единственное.

4) Подпространства L_1 и L_2 называют прямыми дополнениями друг друга, если $X = L_1 \cap L_2$.

I1.13 Укажите неверное утверждение:

1) Пусть $L_1 = \langle a_1, a_2, ..., a_k \rangle$, $L_2 = \langle b_1, b_2, ..., b_l \rangle$ - подпространства в линейном пространстве X. Чтобы найти какой-либо базис в подпространстве $L_1 + L_2$, следует выделить какую-либо максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$, $b_1, b_2, ..., b_l$.

2) Для этого достаточно составить матрицу из координатных строк этих векторов и в этой матрице выделить какой-либо базисный минор.

3) Если пространства L_1 и L_2 заданы однородными системами уравнений, то пересечение $L_1 \cap L_2$ будет определяться системой, получаемой объединением всех уравнений двух систем.

4) В конечномерном линейном пространстве X размерность суммы $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения, т.е. $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$.

I1.14 Два линейных пространства V и U называются изоморфными, когда между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что если $x_1 \leftrightarrow y_1$, $x_2 \leftrightarrow y_2$, где $x_1, x_2 \in V$, $y_1, y_2 \in U$, то

1) $(x_1 + x_2) \leftrightarrow (y_1 + y_2)$ и $\alpha x_1 \leftrightarrow \beta y_1$, $\alpha, \beta \in R$;

2) $x_1 \cdot x_2 \leftrightarrow y_1 \cdot y_2$ и $\alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1$, $\alpha \in R$;

3) $(x_1 + x_2) \leftrightarrow (y_1 + y_2)$ и $\alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1$, $\alpha \in R$;

4) $\alpha(x_1 + x_2) \leftrightarrow (y_1 + y_2)$ и $x_1 \leftrightarrow y_1$, $\alpha \in R$.

I1.15 Пусть X – конечномерное линейное пространство и в нем задан базис. Тогда для любого линейного подпространства L в X можно указать такую однородную систему линейных уравнений $Ax = 0$, что множество координатных столбцов всех векторов L будет

1) совпадать с координатами одного из базисных векторов;

2) совпадать с базисной системой векторов;

3) пустым;

4) совпадать с множеством решений системы $Ax = 0$.

I2.1 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{-1, 2\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1$ будут…

1) $\{2, 3\}$; 2) $\{3, 2\}$; 3) $\{-2,3\}$; 4) $\{2,-3\}$.

I2.2 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{2, 2\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1$ будут…

1) $\{2, 3\}$; 2) $\{2, 0\}$; 3) $\{-2, 0\}$; 4) $\{2, -3\}$.

I2.3 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{-1, 0\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1$ будут…

1) $\{2, 3\}$; 2) $\{0, 1\}$; 3) $\{0, -1\}$; 4) $\{3, -1\}$.

I2.4 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{7, 10\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = 3e_1 + 4e_2$ будут…

1) $\{2, 1\}$; 2) $\{10, 7\}$; 3) $\{-7, -10\}$; 4) $\{1, 2\}$.

I2.5 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{1, 3\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = 3e_1 + 4e_2$ будут…

1) $\{2, 1\}$; 2) $\{10, 7\}$; 3) $\left\{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$; 4) $\{1, 2\}$.

I2.6 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{4, 0\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = 3e_1 + 4e_2$ будут…

1) $\{2, 1\}$; 2) $\{10, 7\}$; 3) $\{-8, 4\}$; 4) $\{1, 2\}$.

I2.7 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{3, 3\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = 3e_1 + 4e_2$ будут…

1) $\{2, 1\}$; 2) $\{10, 7\}$; 3) $\{-7, -10\}$; 4) $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.

I2.8 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{-1, 2\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = 3e_1 + 4e_2$ будут…

1) $\{2, 1\}$; 2) $\{5, -2\}$; 3) $\{-7, -10\}$; 4) $\{1, 2\}$.

I2.9 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{2, 1\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = 3e_1 + 4e_2$ будут…

1) $\{2, 1\}$; 2) $\{10, 7\}$; 3) $\{-7, -10\}$; 4) $\{-2{,}5,\ 1{,}5\}$.

I2.10 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{2, -1\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = -e_1 + 2e_2$, $e_2' = -e_1$ будут…

1) $\{2, 3\}$; 2) $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$; 3) $\{-1, -3\}$; 4) $\{2, -3\}$.

I2.11 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{1, -2\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = -e_1 + 2e_2$, $e_2' = -e_1$ будут…

1) $\{2, 3\}$; 2) $\{2, 0\}$; 3) $\{-1, -3\}$; 4) $\{-1, 0\}$.

I2.12 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{1, 0\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = -e_1 + 2e_2$, $e_2' = -e_1$ будут…

1) $\{0, -1\}$; 2) $\{2, 0\}$; 3) $\{-1, -3\}$; 4) $\{2, -3\}$.

I2.13 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{2, 2\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = -e_1 + 2e_2$, $e_2' = -e_1$ будут…

1) $\{2, 3\}$; 2) $\{2, 0\}$; 3) $\{-1, -3\}$; 4) $\{1, -2\}$.

I2.14 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{1, -2\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$ будут…

1) $\{-2, 1\}$; 2) $\{1, 2\}$; 3) $\{3, -2\}$; 4) $\{3, 2\}$.

I2.15 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{1, -1\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$ будут…

1) $\{-1, 1\}$; 2) $\{3, -2\}$; 3) $\{1, 2\}$; 4) $\{2, -1\}$.

J Евклидово и унитарное пространство

J1.1 Если U^* - эрмитово сопряженная матрица, по отношению к матрице U, то верными будут следующие утверждения

1) $U^{-1} = U^*$;
2) $UU^* = 1$;
3) $U^* + U = 0$;
4) $\left|\det U^*\right| = 0$.

1) 1,3; 2) 3, 4; 3) 1, 2; 4) 2, 4.

J1.2 Укажите неверное утверждение:

1) Эрмитово произведение двух векторов в ортонормированном базисе унитарного пространства равно сумме произведений координат первого вектора на соответствующие координаты второго вектора.

2) Длина вектора, заданного в ортонормированном базисе унитарного пространства, равна корню квадратному из суммы квадратов модулей его координат.

3) Изоморфные евклидовы пространства имеют одну и ту же размерность.

4) Любые евклидовы пространства E и E', имеющие одну и ту же размерность n, изоморфны между собой.

J1.3 Укажите неверное утверждение:

1) Система векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ называется ортонормированной, если она

ортогональна.

2) Базис n-мерного евклидова пространства называется ортонормированным, если базисные векторы образуют ортонормированную систему.

3) Во всяком евклидовом n-мерном пространстве $(n \geq 2)$ существует ортонормированный базис.

4) В пространстве V_3 геометрических векторов любые три единичных попарно ортогональных вектора i, j, k образуют ортонормированный базис (i, j, k называют ортами).

J1.4 Среди указанных аксиом укажите аксиомы эрмитового произведения;

1) $(x, y) = (y, x)$.

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

4) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$.

5) $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.

6) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

7) $(x, x) > 0$, если $x \neq \theta$ и $(x, x) = 0$, если $x = \theta$.

1) 1, 3, 4, 5; 2) 2, 3, 4, 7; 3) 1, 3, 5, 7; 4) 1, 3, 5, 6.

J1.5 Среди свойств нормы вектора укажите свойство называемое неравенством Коши-Буняковского:

1. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, где α - действительное число.
3. $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

J1.6 Среди свойств нормы вектора укажите свойство называемое неравенством треугольника:

1. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, где α - действительное число.
3. $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

J1.7 Укажите неверное утверждение:

1) Углом между двумя векторами x и y евклидова пространства называется угол φ, для которого $cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ $\quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

2) Вектор a называется нормированным, или единичным, если $\|a\| = 1$.

3) Если a - ненулевой вектор, то каждый из векторов $a_1^0 = \frac{a}{\|a\|}$, $a_2^0 = -\frac{a}{\|a\|}$ будет нормированным.

3) Множитель $\mu = \pm\frac{1}{\|a\|}$ - нормирующим множителем.

J1.8 Укажите неверное утверждение

1) Процесс ортогонализации – способ перехода от любой линейно независимой системы из k векторов евклидова пространства E_n к ортогональной системе, также состоящей из k ненулевых векторов

2) Всякое евклидово пространство обладает ортогональными базисами, причем любой ненулевой вектор этого пространства входит в состав некоторого ортогонального базиса.

3) Применяя процесс ортогонализации к произвольному базису пространства E_n, мы получим ортогональную систему из n ненулевых векторов, т.е. ортогональный базис.

4) Ортогональный базис – система линейно независимых, равных между собой, векторов.

J1.9 Из перечисленных утверждений укажите то, которое не является аксиомой скалярного произведения:

1) $(x, y) = (y, x)$.

2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

4) $(\alpha x, \alpha x) = (x, y)$.

J1.10 Укажите неверное утверждение:

1) Скалярное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой.

2) Скалярное произведение (x, x) вектора x на себя называется скалярным квадратом этого вектора и обозначается x^2.

3) Евклидовым пространством называется линейное действительное пространство, в котором задана операция скалярного умножения векторов, удовлетворяющая восьми аксиомам.

4) В n-мерном линейном пространстве скалярное умножение можно задать многими различными способами.

J1.11 Укажите неверное утверждение:

1) Векторы a и b называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, $(a, b) = 0$.

2) Нулевой вектор ортогонален любому вектору, т.е. $(0, a) = (0, b) = 0$.

3) Система векторов называется ортогональной системой, если все векторы этой системы попарно ортогональны между собой.

4) Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно-зависима.

J1.12 Какие из указанных аксиом не являются аксиомами эрмитового произведения:

1) $(x,\ y) = (y,\ x)$.

2) $(x,\ y) = \overline{(y,\ x)}$.

3) $(x + y,\ z) = (x,\ z) + (y,\ z)$.

4) $(\lambda x,\ y) = \lambda(x,\ y)$.

5) $(x,\ \lambda y) = \overline{\lambda}(x,\ y)$.

6) $(x,\ y + z) = (x, y) + (x,\ z)$.

7) $(x,\ x) > 0$, если $x \neq \theta$ и $(x,\ x) = 0$, если $x = \theta$.

1) 1, 3, 7; 2) 2, 4, 6; 3) 1, 6, 7; 4) 1, 5, 6.

J1.13 Если U^* - эрмитово сопряженная матрица, по отношению к матрице U, то верными будут следующие утверждения

1) $U^{-1} = U^*$; 2) $UU^* = 1$;

3) $U^* + U = 0$; 4) $\left|\det U^*\right| = 0$.

1) 1, 2; 2) 3, 4; 3) 1, 3; 4) 2, 4.

J1.14 Из перечисленных утверждений укажите то, которое не является аксиомой скалярного произведения:

1) $(x,\ y) = (y,\ x)$.

2) $(\alpha x,\ \alpha x) = (x,\ y)$.

3) $(\alpha x,\ y) = \alpha(x,\ y)$.

4) $(x + y,\ z) = (x,\ z) + (y,\ z)$.

J1.15 Среди свойств нормы вектора укажите свойство называемое неравенством Коши-Буняковского:

1. $|(x,\ y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
2. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, где α - действительное число.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

J2.1 Эрмитово произведение векторов $a(2;\ 2 - i)$ и $b(3 + i,\ 2)$, равно:

1) 10; 2) $10 - 4i$; 3) $11 - i$; 4) $11 + i$.

J2.2 Эрмитово произведение векторов $a(1;\ 1 - i)$ и $b(2 - i;\ 3)$, равно

1) $5 - 5i$; 2) $4 - 3i$; 3) $5 - i$; 4) $5 - 2i$.

J2.3 При каком значении параметра p эрмитово произведение векторов $a(p;\ 1 - i)$ и $b(2 - i;\ 3)$ равно $5 - 2i$?

1) 2; 2) 1; 3) -1; 4) 0.

J2.4 Эрмитово произведение векторов $a(2;\,2-i)$ и $b(3+i;\,p)$, равно $10-4i$ при p равном:

1) 2; 2) 1; 3) -1; 4) 0.

J2.5 Эрмитово произведение векторов $a(2;\,p-i)$ и $b(3+i;\,p)$, будет равным $10-4i$ при p:

1) 0; 2) 1; 3) -1; 4) 2.

J2.6 Длина вектора $a(2;\,2-i)$, равна

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) $\sqrt{14}$.

J2.7 Длина вектора $b(3+i;\,2)$, равна

1) 5; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{12+6i}$; 4) $\sqrt{14}$.

J2.8 Длина вектора $a(p;\,p-i)$, равна трем, при p равном

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

J2.9 Длина вектора $a(2;\,2+pi)$, равна трем, при p равном

1) 1; 2) -1; 3) 2; 4) -2.

J2.10 Сумма длин векторов $(2;\,2-i)$ и $(3+i,\,2)$, равна

1) 5; 2) 23; 3) $3+\sqrt{14}$; 4) 9.

J2.11 Базис, образованный векторами $g_1=\lambda e_1+e_2+e_3+e_4$, $g_2=e_1+\lambda e_2+e_3+e_4$, $g_3=e_1+e_2+\lambda e_3+e_4$, $g_4=e_1+e_2+e_3+\lambda e_4$ является ортогональным при λ равном

1) 0; 2) 1; 3) -1; 4) 2.

J2.12 Размерность линейной оболочки $L(x_1,x_2,x_3,x_4)$, если $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$,

$X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$, $X_4=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\\6\end{pmatrix}$, равна

1) 4; 2) 5; 3) 2; 4) 3.

J2.13 Размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$, если $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, равна

1) 4; 2) 5; 3) 2; 4) 3.

J2.14 Если элементы $g_1 = 1$, $g_2 = x$, $g_3 = x^2 - \dfrac{3}{2}$ составляют ортогональный базис, то ортонормированным будет базис:

1) $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; e_2 = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; e_3 = \dfrac{x^2}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; e_2 = \dfrac{x}{\sqrt{2}}; e_3 = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}$;

3) $e_1 = \dfrac{3}{2}; e_2 = \dfrac{3x}{2}; e_3 = \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{9}{4}$; 4) $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; e_2 = \dfrac{x}{\sqrt{2}}; e_3 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

J2.15 Размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$, если $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, равна

1) 4; 2) 5; 3) 2; 4) 3.

K Линейные операторы

K1.1 Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если поменять местами два элемента первого базиса?

1) поменяются местами два столбца;

2) поменяются местами две строки;

3) новая матрица получится из старой в результате симметрии относительно своего центра;

4) матрица не изменится.

К1.2 Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если поменять местами два элемента второго базиса?

1) поменяются местами два столбца;

2) поменяются местами две строки;

3) новая матрица получится из старой в результате симметрии относительно своего центра;

4) матрица не изменится.

К1.3 Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если записать элементы обоих базисов в обратном порядке?

1) поменяются местами два столбца;

2) поменяются местами две строки;

3) новая матрица получится из старой в результате симметрии относительно своего центра;

4) матрица не изменится.

К1.4 Укажите неверное утверждение:

1) Ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ линейного пространства называется собственным вектором линейного оператора f этого пространства, если существует число k такое, что $f(\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{x}$.

2) Собственный вектор линейного оператора имеет единственное собственное значение k.

3) Если $\boldsymbol{x}$ - собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k и λ - любое отличное от нуля число, то $\lambda\boldsymbol{x}$ - также собственный вектор оператора f с собственным значением k.

4) Если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ - линейно независимые собственные векторы линейного оператора f с одним и тем же собственным значением k, то $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ - также собственный вектор этого оператора с собственным значением $2k$.

К1.5 Укажите неверное утверждение:

1) Если $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}}$ - линейно независимые собственные векторы линейного оператора f с одним и тем же собственным значением k, то любая нетривиальная комбинация этих векторов есть собственный вектор этого оператора с собственным значением mk.

2) Собственные векторы линейного оператора, с попарно различными собственными значениями, линейно независимы.

3) Если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ - собственные векторы линейного оператора f с собственными значениями k и m, причем $k \neq m$, то $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ - линейно независимы.

4) Собственный вектор линейного оператора имеет единственное собственное значение.

К1.6 Укажите неверное утверждение:

1) Если $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}$; (1), $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{n}}$ (2)

базисы некоторого линейного пространства и A - матрица линейного оператора f в базисе (1), то матрица B этого оператора в базисе (2) имеет вид

$B = T^{-1}AT$, где T - матрица перехода от базиса (1) к базису (2).

2) Если линейный оператор имеет в некотором базисе невырожденную матрицу, то в любом другом базисе матрица этого оператора является вырожденной.

3) Если A и B - матрицы линейного оператора в разных базисах, то $r_A = r_B$.

4) Две квадратные матрицы A и B порядка n тогда и только тогда являются матрицами одного и того же линейного оператора пространства V_n в соответствующих базисах, когда матрица B подобна матрице A.

K1.7 Укажите неверное утверждение:

1) Ядром оператора $f: V \to W$ называется множество тех векторов пространства V, каждый из которых данный оператор переводит в единичный вектор.

2) Областью значений или образом оператора $f: V \to W$ называется множество векторов пространства W, каждый из которых является образом хотя бы одного вектора из V.

3) Рангом оператора f называется $\dim \operatorname{Im} f$, т.е. размерность образа оператора.

4) Дефектом оператора f называется $\dim \ker f$, т.е. размерность ядра оператора

K1.8 Укажите неверное утверждение:

1) Каждому линейному оператору n-мерного линейного пространства соответствует матрица порядка n в данном базисе.

2) Каждой матрице порядка n соответствует линейный оператор n-мерного пространства.

3) Матрица тождественного преобразования в любом базисе будет единичной.

4) Любой единичной матрице n-го порядка соответствует оператор вращения на угол φ.

K1.9 Укажите неверное утверждение:

1) Если переменные $y_1, y_2, ..., y_n$ связаны с переменными $x_1, x_2, ..., x_n$ формулами $Y = AX$, будем говорить, что задан линейный однородный оператор с матрицей A, переводящий переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ в переменные $y_1, y_2, ..., y_n$.

2) Линейный однородный оператор $Y = AX$ называется невырожденным, если $det\, A = 0$.

3) Если для любого столбца $X = (x_1, x_1, ..., x_m)^T$ имеет место равенство $AX = BX$, где $A = (a_{ij});\ B = (b_{ij})\ (i = \overline{1, m};\quad j = \overline{1, m})$,то $A = B$.

4) Если для любой матрицы-строки $X = (x_1, x_1, ..., x_m)$ имеет место равенство $XA = XB$, где $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})\ (i = \overline{1, m};\quad j = \overline{1, m})$, то $A = B$.

K1.10 Укажите неверное утверждение:

1) Если линейный оператор f в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ имеет матрицу A и в

базисе $e_1', e_2', ..., e_n'$ матрицу B, то $\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E)$, где λ - любое действительное число; E - единичная матрица n-го порядка.

2) Многочлен $\det(A-\lambda E)$ называется характеристическим многочленом матрицы A, или характеристическим многочленом линейного оператора f.

3) Характеристическим уравнением линейного оператора называется уравнение $det(A-\lambda E)=1$, где A - матрица этого оператора в некотором базисе.

4) Корни характеристического уравнения называются характеристическими числами линейного оператора f, или характеристическими числами матрицы A.

К1.11 Укажите неверное утверждение:

1) Собственные векторы действительной симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям равны между собой.

2) Корни характеристического уравнения действительной симметрической матрицы являются действительными числами.

3) Действительная симметрическая матрица имеет только действительные собственные векторы.

4) Собственные векторы действительной симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

К1.12 Укажите неверное утверждение:

1) Линейный оператор называется оператором простой структуры, если существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

2) Оператор называется диагонализируемым, если существует базис, в котором его матрица простой структуры.

3) Для того чтобы линейный оператор f был диагонализируемым, необходимо и достаточно, чтобы он был оператором простой структуры.

4) Квадратная матрица A называется диагонализируемой в комплексном пространстве, если существует невырожденная комплексная матрица T, такая, что матрица $T^{-1}AT$ диагональная.

К1.13 Укажите неверное утверждение:

1) Оператор, заключающийся в последовательном применении операторов f и g, называется произведением оператора f на оператор g.

2) Композиция операторов g и f обозначается $g \circ f(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$.

3) Если в некотором базисе линейные операторы f и g имеют соответственно матрицы A и B, то оператор произведения $g \circ f$ в том же базисе имеет матрицу BA.

4) Произведение линейных операторов является линейным оператором.

К1.14 Укажите неверное утверждение:

1) Суммой операторов f и g некоторого пространства называется оператор h такой, что для любого вектора $\boldsymbol{x}$ этого пространства выполняется $h(x) = f(g(x))$.

2) Сумму операторов f и g будем обозначать $f+g$. Очевидно, $f+g=g+f$.

3) Сумма линейных операторов является линейным преобразованием.

4) Если линейные операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы A и B, то оператор $f+g$ в том же базисе имеет матрицу $A+B$.

K1.15 Укажите неверное утверждение:

1) Два линейных оператора f и φ называются взаимно обратными, если для любого $\boldsymbol{x}$ имеют место равенства $f\circ\varphi(\boldsymbol{x})=\varphi\circ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$, т.е. $f\circ\varphi$ и $\varphi\circ f$ - тождественные операторы.

2) Если справедливы равенства $f\circ\varphi(\boldsymbol{x})=\varphi\circ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$, то оператор f называется обратным оператору φ, а φ - обратным оператору f.

3) Для того чтобы линейный оператор имел обратный оператор, необходимо и достаточно, чтобы он был вырожденным.

4) Для данного линейного невырожденного оператора с матрицей A в некотором базисе существует единственный обратный оператор, причем матрица обратного оператора равна матрице A^{-1} в том же базисе.

K2.1 Если линейные операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, то оператор $f+g$ в том же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 2 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ -2 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

K2.2 Если линейные операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, то оператор $f+g$ в том же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 6 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

K2.3 Если линейный оператор f в некотором базисе имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, то оператор $2f$ в том же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

K2.4 Если линейный оператор f в некотором базисе имеет матрицу $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, то оператор $3f$ в том же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

K2.5 Если операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, то оператор $f-2g$ в этом же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;4) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

K2.6 Если операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, то оператор $g-2f$ в этом же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;4) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

K2.7 Если операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то оператор $2f+g$ в этом же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;3) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

K2.8 Если линейные операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то оператор $f \circ g$ в этом же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

K2.9 Если линейные операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то оператор $g \circ f$ в этом же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

K2.10 Если линейные операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, то оператор $f \circ g$ в этом же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

K2.11 Если линейный оператор f двумерного пространства в базисе e_1, e_2 задан матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а вектор $x=e_1+e_2$, то $f(x)$ запишется так…

1) $f(x)=-e_1+5e_2$; 2) $f(x)=e_1+e_2$;
3) $f(x)=5e_1-e_2$; 4) $f(x)=e_1-e_2$.

K2.12 Если линейный оператор f двумерного пространства в базисе e_1, e_2 задан матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, а вектор $x=e_1-2e_2$, то $f(x)$ запишется так…

1) $f(x)=e_1-5e_2$; 2) $f(x)=-3e_1+e_2$;
3) $f(x)=e_1-2e_2$; 4) $f(x)=e_2-2e_1$.

K2.13 Если линейный оператор f двумерного пространства в базисе e_1, e_2 задан матрицей $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, а вектор $x=e_1+2e_2$, то $f(x)$ запишется так…

1) $f(x)=e_1-2e_2$; 2) $f(x)=-2e_1+4e_2$;
3) $f(x)=2e_1-e_2$; 4) $f(x)=4e_1-2e_2$.

K2.14 Если линейный оператор f двумерного пространства в базисе e_1, e_2 задан матрицей $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, а вектор $x=2e_1+e_2$, то $f(x)$ запишется так…

1) $f(x)=-2e_1+4e_2$; 2) $f(x)=e_1-2e_2$;
3) $f(x)=2e_1-e_2$; 4) $f(x)=4e_1-2e_2$.

K2.15 Если линейный оператор f двумерного пространства в базисе e_1, e_2 задан матрицей $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, а вектор $x=e_1-e_2$, то $f(x)$ запишется так…

1) $f(x)=e_1-2e_2$; 2) $f(x)=-2e_1+4e_2$;
3) $f(x)=2e_1-e_2$; 4) $f(x)=2e_1+e_2$.

K3.1 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(2,-1)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1'=-e_1+2e_2$, $e_2'=-e_1$ будут

1) $(2,3)$; 2) $(-2,-3)$; 3) $(-1,-3)$; 4) $(2,-3)$.

K3.2 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(1,-2)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1'=-e_1+2e_2$, $e_2'=-e_1$ будут

1) $(2,3)$; 2) $(2,0)$; 3) $(-1,-3)$; 4) $(-1,0)$.

K3.3 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(1,0)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1'=-e_1+2e_2$, $e_2'=-e_1$ будут

1) $(-1,-2)$; 2) $(2,0)$; 3) $(-1,-3)$; 4) $(2,-3)$.

K3.4 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(2,2)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1'=-e_1+2e_2$, $e_2'=-e_1$ будут

1) $(2,3)$; 2) $(2,0)$; 3) $(-1,-3)$; 4) $(2,-6)$.

K3.5 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(1,-2)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1'=e_1$, $e_2'=e_1+e_2$ будут

1) $(-2,1)$; 2) $(1,2)$; 3) $(3,-2)$; 4) $(3,2)$.

K3.6 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(1,-1)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$ будут

1) $(-1, 1)$; 2) $(3, -2)$; 3) $(1, 2)$; 4) $(2, -1)$.

K3.7 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(-2, 1)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$ будут

1) $(-1, 1)$; 2) $(-3, 1)$; 3) $(-1, -3)$; 4) $(2, -3)$.

K3.8 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(-1, 1)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$ будут

1) $(-2, 1)$; 2) $(2, 0)$; 3) $(-1, -3)$; 4) $(2, -3)$.

K3.9 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(1, 2)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$ будут

1) $(2, 3)$; 2) $(2, 0)$; 3) $(-1, -3)$; 4) $(-1, 2)$.

K3.10 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(2, 3)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1$ будут

1) $(1, -3)$; 2) $(-1, 3)$; 3) $(3, 1)$; 4) $(3, -1)$.

K3.11 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(-2, 1)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1$ будут

1) $(1, -3)$; 2) $(-1, 3)$; 3) $(-2, 3)$; 4) $(2, -3)$.

K3.12 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(-1, 3)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1$ будут

1) $(1, -3)$; 2) $(3, 2)$; 3) $(-3, 4)$; 4) $(2, -3)$.

K3.13 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(-2, 3)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1$ будут

1) $(3, -5)$; 2) $(3, -5)$; 3) $(-2, 3)$; 4) $(2, -3)$.

K3.14 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(1, 1)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = -e_1 + 2e_2$, $e_2' = -e_1$ будут

1) $(2, 3)$; 2) $(2, 0)$; 3) $(-1, -3)$; 4) $(2, -3)$.

K3.15 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(-1, 2)$, тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = -e_1 + 2e_2$, $e_2' = -e_1$ будут

1) $(1, 0)$; 2) $(2, 0)$; 3) $(-1, -3)$; 4) $(2, -3)$.

L Квадратичные формы

L1.1 Укажите неверное утверждение:

1) Квадратичной формой f от n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, называется сумма, каждый член которой является квадратом одного из этих неизвестных.

2) Квадратичную форму переменных x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ можно записать следующим образом: $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

3) Матрица квадратичной формы – симметрическая (ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой).

4) Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы

L1.2 Укажите неверное утверждение

1) Квадратичная форма n переменных называется *невырожденной*, если ее матрица – невырожденная, т.е. $r = n$, и вырожденной, если $r < n$.

2) Выражение вида $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$ представляет собой матричный вид квадратичной формы.

3) Две квадратичные формы называются конгруэнтными, если существует вырожденный линейный однородный оператор, переводящий одну из них в другую.

4) Свойства конгруэнтности квадратичных форм:

1 $f(x_1, x_2, ..., x_n) \sim f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

2 Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \sim \varphi(y_1, y_2, ..., y_n)$,

$\varphi(y_1, y_2, ..., y_n) \sim \ \sim \psi(z_1, z_2, ..., z_n)$, то $f(x_1, x_2, ..., x_n) \sim \psi(z_1, z_2, ..., z_n)$.

L1.3 Укажите неверное утверждение:

1) Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с матрицей A линейным однородным оператором $X = BY$ переводится в квадратичную форму $\varphi(y_1, y_2, ..., y_n)$ с матрицей $C = BAB^T$.

2) Определители матриц конгруэнтных невырожденных действительных квадратичных форм имеют одинаковые знаки.

3) Конгруэнтные квадратичные формы имеют одинаковые ранги.

4) Число отличных от нуля коэффициентов в квадратичной форме $f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + ... + b_n y_n^2$ равно рангу r формы f.

L1.4 Укажите неверное утверждение:

1) Любая квадратичная форма некоторым невырожденным линейным оператором может быть приведена к каноническому виду.

2) Каноническая квадратичная форма называется нормальной (или имеет нормальный вид), если $|\alpha_{ii}| = 1$ $(i = 1, 2, ..., r)$, т.е. отличные от нуля коэффициенты при квадратах переменных равны $+1$ или -1.

3) Любую действительную квадратичную форму линейным невырожденным оператором можно привести к нормальному виду.

4) Квадратичная форма действием нескольких невырожденных операторов, которые можно заменить одним невырожденным оператором – их суммой, приводится к каноническому виду.

L1.5 Укажите неверное утверждение:

1) Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная действительная квадратичная форма невырожденным действительным линейным оператором, не зависит от выбора оператора.

2) Число положительных квадратов в нормальной форме, к которой приводится данная действительная квадратичная форма, называют положительным индексом инерции этой формы, число отрицательных квадратов – отрицательным индексом инерции.

3) Сумма положительного и отрицательного индексов инерции называется сигнатурой формы квадратичной формы f.

4) Две действительные квадратичные формы от n переменных тогда и только тогда конгруэнтны, когда они имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.

L1.6 Укажите неверное утверждение:

1) Квадратичная форма f тогда и только тогда будет иметь форму $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + ... + b_r y_r^2$ своим каноническим видом, если ранг формы f равен r, а положительный индекс инерции этой формы совпадает с числом положительных коэффициентов формы.

2) Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется положительно определенной, если она приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов.

3) Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ положительно определена, если ранг и положительный индекс инерции равен сумме неизвестных.

4)Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда она принимает положительные значения при любой ненулевой системе значений $x_1, x_2, ..., x_n$.

L1.7 Укажите неверное утверждение:

1) Главными минорами квадратичной формы f называются миноры порядка 1, 2 …, n ее матрицы A, расположенные в левом верхнем углу; последний из них совпадает с определителем матрицы.

2) Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с действительной матрицей является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны.

3), Невырожденные квадратичные формы с действительными коэффициентами, нормальный вид которых содержит лишь отрицательные квадраты неизвестных называются отрицательно определенными формами.

4) Вырожденные квадратичные формы, нормальный вид которых состоит из квадратов одного знака, называются неопределенными.

L1.8 Укажите неверное утверждение:

1) Квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и

только тогда, когда ее главные миноры четного порядка отрицательны, а нечетного – положительны.

2) Если существует ортогональный оператор с матрицей C, приводящий действительную квадратичную форму $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ к каноническому виду $\varphi(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$, то $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - характеристические числа матрицы A квадратичной формы f.

3) Для любой действительной симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица T, что $T^{-1}AT$ - диагональная матрица.

4) Для любой действительной квадратичной формы существует ортогональный оператор, приводящий ее к каноническому виду.

L1.9 Укажите неверное утверждение:

1) Любая действительная симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду.

2) Если линейный оператор действительного линейного пространства имеет действительную симметрическую матрицу в некотором ортонормированном базисе, то существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

3) Если A - действительная симметрическая матрица линейного преобразования f в ортонормированном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$, то существует такая ортонормированная матрица T, что $T^{-1}AT$ - диагональная матрица.

4) Ортогональное преобразование T переводит ортонормированный базис $e_1, e_2, ..., e_n$ в ортонормированный базис $e'_1, e'_2, ..., e'_n$, в котором матрица f является ортогональной.

L1.10 Укажите неверное утверждение:

1) *Квадратичные формы* подразделяют на различные типы в зависимости от множества их значений.

2) Квадратичную форму $f(x) = x^T Ax$, $x = (x_1 \ ... \ x_n)^T$, называется положительно определенной, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x) < 0$.

3) Квадратичную форму $f(x) = x^T Ax$, $x = (x_1 \ ... \ x_n)^T$, называется неотрицательно определенной, если $f(x) \geq 0$ для любого столбца x, для которого $f(x) = 0$.

4) Квадратичную форму $f(x) = x^T Ax$, $x = (x_1 \ ... \ x_n)^T$, называется знакопеременной (неопределенной), если существуют такие столбцы x и y, что $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$.

L1.11 Укажите неверное утверждение:

1) Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, …, $\Delta_n > 0$ (Δ_i - угловые миноры).

2) Для того чтобы квадратичная форма n переменных была отрицательно

определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 > 0$, $-\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, …, $(-1)^{n-1}\Delta_n > 0$.

3) Симметрическую матрицу A называют положительно (отрицательно) определенной и пишут $A > 0$ ($A < 0$), если положительно (отрицательно) определена соответствующая квадратичная форма.

4) Невырожденная квадратичная форма может либо положительно определенной, либо отрицательно определенной, либо знакопеременной – в зависимости от знаков коэффициентов в ее каноническом виде.

L1.12 Укажите неверное утверждение:

1) Симметрическую матрицу A называют положительно (отрицательно) определенной и пишут $A > 0$ ($A < 0$), если положительно (отрицательно) определена соответствующая квадратичная форма.

2) Симметрическая матрица положительно определена, если все ее угловые миноры положительны.

3) Симметрическая матрица отрицательно определена, если все ее угловые миноры отрицательны.

4) Если симметрическая матрица положительно определена, то все ее диагональные элементы положительны.

L1.13 Укажите неверное утверждение. Невырожденная квадратичная форма знакопеременна тогда и только тогда, когда для матрицы квадратичной формы выполнено хотя бы одно из условий:

1) один из угловых миноров равен нулю;

2) один из угловых миноров четного порядка отрицателен;

3) два угловых минора четного порядка имеют разные знаки;

4) два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки.

L1.14 Укажите неверное утверждение:

1) Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с действительной матрицей является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны.

2) Квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры отрицательны.

3) Если симметрическая матрица положительно определена, то все ее диагональные элементы положительны.

4) Если один из угловых миноров четного порядка отрицателен, то соответствующая невырожденная квадратичная форма знакопеременна.

L1.15 Укажите неверное утверждение:

1) Симметрическая матрица положительно определена, если все ее условия миноры положительны.

2) Если симметрическая матрица положительно определена, то все ее диагональные элементы положительны.

3) Если симметрическая матрица отрицательно определена, то все ее диагональные элементы отрицательны.

4) Невырожденная квадратичная форма может либо положительно определенной, либо отрицательно определенной, либо знакопеременной – в зависимости от знаков коэффициентов в ее каноническом виде.

L2.1 Матрица квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 7x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$ имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 \\ 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -8 & -5 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & \sqrt{7} & 2 \\ -4 & 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

L2.2 Матрица квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4_2x_3 + 9x_3^2$ имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 2 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L2.3 Матрица квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + {}+8x_2^2 - 9_2x_3 + 9x_3^2$ имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 8 & -9 \\ 5 & -9 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & \sqrt{8} & -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & 8 & -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & 9 \end{pmatrix}$.

L2.4 Даны квадратичные формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3$, $g(x_1, x_2, x_3) = -7x_1x_2 + 2x_3^2$, $h(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 - 4x_3^2$, $l(x_1, x_2, x_3) = 8x_1x_2 + 5x_3^2$, тогда вырожденными из них будут:

1) g, l; 2) g, h; 3) f, h; 4) f, g.

L2.5 Если даны квадратичные формы $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 5x_1^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_3$, $h(x_1, x_2, x_3) = 5x_1x_2 - 5x_3^2$, $l(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2$, тогда вырожденными из них будут:

1) f, g, h; 2) l; 3) f, l; 4) g, l.

L2.6 Если даны квадратичные формы $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 5x_1^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_3$, $h(x_1, x_2, x_3) = 5x_1x_2 - 5x_3^2$, $l(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2$, тогда невырожденными из них будут:

1) l; 2) f, h; 3) h, l; 4) f, g, h.

L2.7 При каком значении параметра k квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + kx_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_3^2$ будет вырожденной?

1) 4; 2) -2; 3) 1; 4) 0.

L2.8 При каком значении параметра k квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_1x_2 + kx_2^2 - 2x_3^2$ будет вырожденной?

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

L2.9 При каком значении параметра k квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - kx_1x_2 + 6x_1x_3 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$ будет вырожденной?

1) 3; 2) -1; 3) -4; 4) 0.

L2.10 При каком значении параметра k квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - kx_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$ будет вырожденным?

1) 3; 2) -3; 3) 0; 4) 1.

L2.11 Квадратичная форма $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 - kx_3^2$ будет вырожденной при k равном:

1) 2; 2) 0; 3) 3; 4) -2.

L2.12 Укажите все значения параметра a, при которых квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + ax_3^2$ является положительно определенной.

1) $(1; +\infty)$; 2) $[-\infty; 1)$; 3) $\varnothing$; 4) $[1; +\infty)$.

L2.13 Укажите все значения параметра a, при которых квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 - ax_3^2$ является положительно определенной.

1) $(9; +\infty)$; 2) $(-\infty; -9)$; 3) $(9; +\infty)$; 4) $\varnothing$.

L2.14 Укажите все значения параметра k, при которых квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - kx_3^2$ является отрицательно определенной.

1) $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$; 2) $\varnothing$; 3) $(-\infty; -0{,}8)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$.

L2.15 Укажите все значения параметра k, при которых квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 - kx_3^2$ является отрицательно определенной.

1) $(-\infty; -9)$; 2) $\varnothing$; 3) $(9; +\infty)$; 4) $(-\infty; 9)$.

M Элементы дифференциальной геометрии и топологии

M1.1 Уравнения кривой на плоскости в декартовой системе координат имеют вид

1) $F(r, \varphi) = 0$; 2) $r = f(\varphi)$;
3) $F(x, y) = 0$; 4) $x = x(t),\ y = y(t)$.

M1.2 Параметрическое задание кривой на плоскости есть

1) $F(r, \varphi) = 0$; 2) $x = x(t),\ y = y(t)$;
3) $y = f(x)$; 4) $r = f(\varphi)$.

M1.3 Кривая n-го порядка определяется числом точек, равным

1) n; 2) $n - 1$; 3) $\frac{n+3}{2}$; 4) $\frac{n(n+3)}{2}$.

M1.4 Линия порядка n пересекает линию порядка m в

1) $(n + m)$ точках; 2) nm точках;
3) n точках; 4) m точках.

M1.5 Если уравнение кривой дано в форме $y = f(x)$, то уравнение касательной имеет вид:

1) $Y - y = y'(X - x)$; 2) $\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$;
3) $X - x_0 = 0$; 4) $Y - y_0 = 0$.

M1.6 Уравнение касательной, параллельной оси Ox имеет вид

1) $Y - y_0 = 0$; 2) $\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$;

3) $X - x_0 = 0$; 4) $Y - y = y'(X - x)$.

М1.7 Допишите предложение так, чтобы оно было верным. «Нормалью к кривой в точке $M(x;\, y)$ называется прямая, проходящая через выбранную точку кривой…»

1) перпендикулярно к ее касательной в той же точке;
2) параллельно к ее касательной в той же точке;
3) перпендикулярно оси Ox в той же точке;
4) перпендикулярно оси Oy в той же точке;

М1.8 Если уравнение кривой задано в виде $y = f(x)$, то касательная имеет уравнение

1) $\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$; 2) $(X - x)x' + (Y - y)y' = 0$;

3) $\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$; 4) $Y - y = \frac{\partial y}{\partial x}(X - x)$.

М1.9 Если уравнение кривой задано в виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то уравнение нормали есть

1) 1) $\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$; 2) $(X - x)x' + (Y - y)y' = 0$;

3) $\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$; 4) $Y - y = \frac{\partial y}{\partial x}(X - x)$.

М1.10 Если кривая на плоскости задана уравнением $F(x,\, y) = 0$, то уравнение нормали имеет вид

1) $\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$; 2) $(X - x)x' + (Y - y)y' = 0$;

3) $\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$; 4) $Y - y = \frac{\partial y}{\partial x}(X - x)$.

М1.11 Если $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ - уравнения некоторой кривой на плоскости, то уравнение касательной запишется в виде

1) $\dfrac{X-x}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = \dfrac{Y-y}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$; 2) $(X-x)x' + (Y-y)y' = 0$;

3) $\dfrac{X-x}{x'} = \dfrac{Y-y}{y'}$; 4) $Y - y = \dfrac{\partial y}{\partial x}(X-x)$.

М1.12 Укажите верное утверждение. «Для окружности средняя кривизна любого ее участка постоянна и…»

1) равна обратной величине ее радиуса;
2) равна величине ее радиуса;
3) равна величине ее диаметра;
4) равна обратной величине ее диаметра.

М1.13 Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то ее кривизна определяется формулой

1) $K = \dfrac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}$; 2) $K = \dfrac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$;

3) $K = \dfrac{\left(1-y'^2\right)^{3/2}}{y''}$; 3) $K = \dfrac{y''}{\left(1-y'^2\right)^{3/2}}$.

М1.14 Укажите верное утверждение. «Эволютой для данной кривой называется…»

1) величина, обратная радиуса ее кривизны;
2) величина, равная сумме ее кривизны и ее радиуса;
3) величина, обратная ее кривизне;
4) геометрическое место центров ее кривизны.

М1.15 Укажите верное утверждение. «Для окружности средняя кривизна любого ее участка постоянна и…»

1) равна величине ее радиуса;
2) равна обратной величине ее диаметра;
3) равна величине ее диаметра;
4) равна обратной величине ее радиуса.

М2.1 Эволюта кривой …

1) есть огибающая ее касательных; 2) равна ее кривизне;
3) есть огибающая ее нормалей; 4) равна ее радиусу.

М2.2 Предельное положение плоскости, проходящей через касательную прямую и близкую точку кривой, называют

1) соприкасающейся плоскостью; 2) спрямляющей плоскостью;
3) нормальной плоскостью; 4) ортогональной плоскостью.

М2.3 Единичный вектор, перпендикулярный к касательной, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленный в сторону вогнутости кривой (по вектору кривизны) называется

1) бинормальной кривой; 2) главной нормалью кривой;
3) подвижным триедром; 4) вектором кручения кривой.

М2.4 Бинормаль кривой

1) параллельна касательной и перпендикулярна главной нормали;
2) перпендикулярна касательной и параллельна главной нормали;
3) перпендикулярна касательной и главной нормали;
4) параллельна касательной и главной нормали.

М2.5 Главными направляемым в данной точке линии являются

1) касательная, главная нормаль, бинормаль;
2) касательная, главная нормаль, вектор кручения;
3) касательная, бинормаль, вектор кручения;
4) бинормаль, главная нормаль, вектор кручения.

М2.6 Подвижный триедр кривой составляют следующие плоскости

1) нормальная, спрямляющая, ортогональная;
2) ортогональная, спрямляющая, соприкасающая;
3) бинормальная, нормальная, спрямляющая;
4) нормальная, спрямляющая, соприкасающая.

М2.7 Скорость вращения бинормали в каждой точке кривой…

1) равна ее кручению в этой точке;
2) равна ее кручению в этой точке, взятому с обратным знаком;
3) обратна величине ее кручения;
4) ее кривизне в этой точке, взятой с обратным знаком.

М2.8 Кручение плоской кривой равно

1) нулю; 2) единице;
3) ее радиусу; 4) ее кривизне.

М2.9 Укажите верное утверждение. «Формулы Френе-Серре…»

1) есть производные главных плоскостей;
2) выражают произведение главных векторов, расположенные по направлениям последних;
3) есть натуральные уравнения кривой;
4) есть формулы переноса и поворота прямой в пространстве.

М2.10 Поверхности неалгебраические называются..

1) параметрическими; 2) порядковыми;
3) несущественными; 4) трансцендентными.

М2.11 Укажите верное утверждение.

1) нормалью поверхности в заданной точке называется вектор,

перпендикулярный к касательной плоскости в данной точке;

2) нормалью поверхности в заданной точке называется вектор, параллельный к касательной плоскости в данной точке;

3) нормалью поверхности в заданной точке называется вектор, лежащий в касательной плоскости;

4) нормалью поверхности в заданной точке называется вектор, перпендикулярный к нормальной плоскости в данной точке;

M2.12 для поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, уравнение касательной плоскости в точке (x, y, z, t) имеет вид

1) $\dfrac{X - x}{\frac{\partial x}{\partial s}} = \dfrac{Y - y}{\frac{\partial x}{\partial s}} = \dfrac{Z - z}{\frac{\partial x}{\partial s}}$; 2) $\dfrac{\partial F}{\partial x}X + \dfrac{\partial F}{\partial y}Y + \dfrac{\partial F}{\partial z}Z + \dfrac{\partial F}{\partial t}T = 0$;

3) $\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial s} = 0$; 4) $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$.

M2.13 Если поверхность определяется параметрическими уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то семейство линий $v = const$ или $v = const$ образуют на данной поверхности так называемые

1) нормальные семейства линий;
2) ортогональные семейства линий;
3) координатные семейства линий;
4) главные семейства линий.

M2.14 Первая основная квадратичная форма поверхности $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ имеет вид

1) $dS = Edu + 2Fdudv + Gdv$; 2) $dS^2 = E^2du + 2Fdudv + G^2dv$;
3) $d^2S = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2$; 4) $dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$.

M2.15 Вторая (гауссова) квадратичная форма поверхности $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ имеет вид

1) $-d\rho dN = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$;

2) $-d\rho dN = Ddu^2 + D'dudv + D''dv^2$;

3) $dN = Ddv^2 + \dfrac{1}{2}D'dudv + D''du^2$;

4) $d\rho = Ddu^2 + \dfrac{1}{2}D'dudv + D''dv^2$.

M3.1 Кривизна окружности $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ равна…

1) 3; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\dfrac{1}{3}$.

M3.2 Кривизна окружности $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{3}$.

М3.3 Кривизна окружности $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{\sqrt{4}}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$.

М3.4 Кривизна окружности $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 5.

М3.5 Кривизна окружности $x^2 + y^2 + 20x + 22y + 185 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{\sqrt{6}}$; 2) $\sqrt{6}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 6.

М3.6 Кривизна окружности $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) 5.

М3.7 Кривизна окружности $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 24 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$; 2) $\frac{1}{7}$; 3) $\sqrt{7}$; 4) 7.

М3.8 Кривизна окружности $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{\sqrt{4}}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$.

М3.9 Кривизна окружности $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{3}$.

М3.10 Кривизна окружности $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{3}$.

М3.11 Кривизна окружности $x^2 - 2x + y^2 - 2 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{3}$.

М3.12 Кривизна окружности $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$ равна…

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{3}$.

М3.13 Кривизна окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ равна…

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{2}$.

М3.14 Кривизна окружности $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ равна…

1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{2}$.

М3.15 Кривизна окружности $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ равна…

1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{2}$.

М4.1 Преобразования геометрической фигуры, при которых разрешено сжимание, растягивание любым способом без разрывов и на «склеивающим» различные ее точки в одну фигуру называются

1) гетероморфизмами;
2) гомеоморфизмами;
3) комбинаторными;
4) качественными.

М4.2 Отображение $f : X \to Y$ метрических пространств, называется гомеоморфизмом, а пространства X, Y - гомеоморфными, если выполнены условия:

1) f биективно и непрерывно, f^{-1} - непрерывно;
2) f - непрерывно, f^{-1} - непрерывно и биективно;
3) f - сюръективно, f^{-1} - биективно;
4) f - биективно, f^{-1} - непрерывно.

М4.3 Если отображение $f : X \to Y$ является гомеоморфизмом на свой образ $f(X)$, рассматриваемый как подпространство в Y, то

1) f называют вложением пространства Y в X;
2) f называют вложением пространства X в Y;
3) f называют топологически эквивалентным;
4) f называют гомеоморфизмом.

М4.4 Если «склеить» точки, диаметрально противоположные относительно центра O прямоугольника $ABCD$, лежащие на сторонах AB и CD, то получим

1) фактор-множество;
2) проективную плоскость;
3) окрестность точки O;
4) «лист Мебиуса».

М4.5 Гомеоморфные топологические пространства называются

1) «склеенными» между собой;
2) топологически эквивалентными;
3) равными;
4) пространственными.

М4.6 Пространства, полученные из конечного числа выгнутых многоугольников склейкой их сторон и последующих топологических преобразований называется

1) трехмерными многообразиями;
2) бесконечно-триангулируемыми;
3) конечно-триангулируемым;
4) многомерными многообразиями.

М4.7 Конечно-триангулируемые связные двумерные многообразия называются

1) замкнутыми поверхностями;
2) открытыми поверхностями;
3) поверхностями с краем;
4) поверхностями с дырой.

М4.8 Если e - число вершин, k - число ребер, f - число многоугольников триангуляции для триангулированной поверхности Π, тогда характеристика Эйлера поверхности Π, находится по формуле:

1) $\chi(\Pi) = e + k + f$; 2) $\chi(\Pi) = e - k + f$;
3) $\chi(\Pi) = -e + k + f$; 4) $\chi(\Pi) = e + k - f$.

М4.9 Укажите неверное утверждение:

1) аналитическая функция $w = w(z)$, удовлетворяющая уравнению $a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + ... + a_n(z)w = 0$ называется алгебраической формулой;

2) алгебраическая функция $a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + ... + a_n(z)w = 0$ многозначна;

3) для алгебраического уравнения $w^2 - z = 0$ определена риманова поверхность – график Π_1 в $\widetilde{C} \times \widetilde{C}$, на котором функция w однозначна;

4) присоединив к $П_1$ точку (∞, ∞) получим «расширение» $П_1$ - топологический многоугольник.

М4.10 Укажите неверное утверждение:

1) топологическими свойствами метрических пространств называются такие свойства, которые сохраняются при гомеоморфизмах;

2) гомеоморфные метрические пространства называют топологически эквивалентными;

3) отображение $f: X \to Y$ метрических пространств называется гомеоморфизмом, если f сюръективно, а ему обратное f^{-1} - инъективным;

4) отображение $f: X \to Y$ непрерывно, если для любого $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, что $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, как только $\rho_1(x, x_0) < \sigma$.

М4.11 Укажите неверное утверждение:

1) расслоенное пространство можно представить как непрерывную совокупность пространств – слоев, гомеоморфных друг другу и «занумерованных» точками другого пространства – базы расслоения;

2) симплекс – выпуклая оболочка линейно-независимых точек в евклидовом пространстве или ее гомеоморфный образ;

3) указанные точки называются вершинами симплекса;

4) количество этих точек определяет размерность симлекса.

М4.12 Укажите неверное утверждение:

1) размерность евклидова пространства есть алгебраическое понятие;

2) гомеоморфные евклидовы пространства имеют одну и ту же размерность;

3) размерность пустого множества полагается равной нулю;

4) если известно что такое размерность $n-1$, то размерность n некоторого множества A $(dim\, A = n)$ означает, что его можно разбить на сколь угодно мелкие части множеством размерности $n-1$ и нельзя этого сделать множеством размерности $n-2$.

М4.13 Топологические пространства и их непрерывные отображения, изучение их общих свойств составили содержание одного из разделов топологии, известного под названием

1) комбинаторная топология;

2) алгебраическая топология;

3) связная топология;

4) общая топология.

М4.15 В работах Б. Римана впервые было введено понятие n-мерного многообразия как пространства, в котором…

1) всякое непрерывное отображение выпуклого ограниченного замкнутого

множества в себя имеет n неподвижных точек;

2) точки обладают $n+1$ числовыми координатами;

3) точки «занумерованы» точками другого пространства;

4) точки обладают n числовыми координатами, определенными, по крайней мере на достаточно малых участках пространства.

М4.15 Симплекс – это…

1) алгебраический метод вычисления гомологических групп с помощью спектральной последовательности;

2) выпуклая оболочка линейно независимых точек в евклидовом пространстве или ее гомеоморфный образ;

3) непрерывная совокупность пространств-слоев, гомеоморфных друг другу;

4) совокупность нормалей или касательных плоскостей к двумерной поверхности.

5 Решение нулевого варианта ДКР (II семестр)

Задача 1 Даны вершины треугольника ABC: $A(4{,}3)$, $B(-3{,}-3)$, $C(2{,}7)$. Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

Решение. а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, получим уравнение стороны *AB*:

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3},$$

откуда

$$6(x-4)=7(y-3) \text{ или } 6x-7y-3=0;$$

б) Согласно уравнению прямой с угловым коэффициентом, угловой коэффициент прямой *AB* $k_1=6/7$. С учетом условия перпендикулярности прямых *AB* и *CH* угловой коэффициент высоты *CH* $k_2=-7/6$ $(k_1k_2=-1)$. По точке $C(2{,}7)$ и угловому коэффициенту $k_2=-7/6$ составляем уравнение высоты *CH*:

$$y-7=-\frac{7}{6}(x-2) \text{ или } 7x+6y-56=0;$$

в) По формулам нахождения координат точки делящей отрезок пополам, находим координаты *x, y* середины *M* отрезка *BC*:

$$x=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}, \quad y=\frac{-3+7}{2}=2.$$

Теперь по двум известным точкам *A* и *M* составляем уравнение медианы *AM*:

$$\frac{x-4}{-1/2-4}=\frac{y-3}{2-3} \text{ или } 2x-9y+19=0;$$

г) Для нахождения координат точки *N* пересечения прямых *AM* и *CH* составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 7x+6y-56=0; \\ 2x-9y+19=0. \end{cases}$$

Решив ее, получаем *N*(26/5,49/15);

д) Так как прямая, проходящая через вершину *C*, параллельна стороне *AB*, то их угловые коэффициенты равны $k_1=6/7$. Тогда составляем уравнение прямой *CD* по точке *C* и угловому коэффициенту k_1:

$$y-7=\frac{6}{7}(x-2) \text{ или } 6x-7y+37=0;$$

е) Расстояние от точки *C* до прямой *AB* вычисляется по формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$:

Следовательно, $d=|CH|=\dfrac{|6\cdot 2-7\cdot 7-3|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\dfrac{40}{\sqrt{85}}\approx 4{,}4$.

Задача 2 Составить канонические уравнения:

а) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5},0)$;

б) гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13},0)$;

в) параболы, имеющей директрису $x=-3$.

Решение. а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. По условию задачи большая полуось $a=3, c=\sqrt{5}$. Для эллипса выполняется равенство $b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Искомое уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию мнимая полуось $b = 2, c = \sqrt{13}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2 = (\sqrt{13})^2 - 2^2 = 9$. Записываем искомое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1;$$

в) Каноническое уравнение параболы в данном случае должно иметь вид $y^2 = 2px$, а уравнение ее директрисы $x = -p/2$. Но по условию задачи уравнение директрисы $x = -3$. Поэтому $-p/2 = -3, \ p = 6$ и искомое каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 12x$.

Задача 3 Даны четыре точки $A_1(4,7,8)$, $A_2(-1,13,0)$, $A_3(2,4,9)$, $A_4(1,8,9)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_4N, параллельной прямой A_1A_2;

Вычислить:

д) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

е) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение. а) Используя формулу для нахождения уравнения плоскости, проходящей через три точки получаем

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $6x - 7y - 9z + 97 = 0$;

б) Учитывая уравнение прямой, проходящей через две точки, уравнение прямой A_1A_2 можно записать в виде

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z-9}{-9};$$

в) Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой $\bar{s}$ можно взять нормальный вектор $\bar{n} = \{6,-7,-9\}$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M с учетом канонического уравнения прямой запишется в виде

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9};$$

г) Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2, то их направляющие векторы $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ можно считать совпадающими: $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \{5,-6,8\}$. Следовательно, уравнение прямой A_4N имеет вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-9}{8};$$

д) Синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ находим по формуле $\sin\varphi = \dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

$$\sin\varphi = \frac{|6\cdot 5+(-7)(-6)+(-9)8|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\sqrt{5^2+(-6)^2+8^2}} = \frac{34}{\sqrt{11}\sqrt{166}} \approx 0{,}8;$$

е) Косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$, находим по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}$, причем $\bar{n}_1 = \{0,0,1\}$.

$$\cos\varphi = \frac{0\cdot 6+0(-7)+1(-9)}{\sqrt{1}\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} = \frac{-9}{\sqrt{166}} = -0{,}7.$$

Задача 4 Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярных координатах $\rho = 4(1-\sin\varphi)$.

Решение. Составим таблицу, в которой приведены значения полярного угла φ_i $(i=\overline{1,16})$ и соответствующие им значения полярного радиуса ρ_i:

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	4	$\pi/2$	0	π	4	$3\pi/2$	8
$\pi/6$	2	$2\pi/3$	$\approx 0{,}6$	$7\pi/6$	6	$5\pi/3$	$\approx 7{,}4$
$\pi/4$	$\approx 1{,}2$	$3\pi/4$	$\approx 1{,}2$	$5\pi/4$	$\approx 6{,}8$	$7\pi/4$	$\approx 6{,}8$
$\pi/3$	$\approx 0{,}6$	$5\pi/6$	2	$4\pi/3$	$\approx 7{,}4$	$11\pi/6$	6

Построив найденные точки $M_i(\rho_i,\varphi_i)$ в полярной системе координат и соединив их плавной линией, получим достаточно точное представление о кардиоиде (рисунок 1).

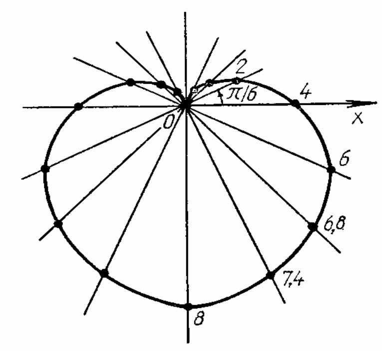


Рисунок 1

Задача 5 Найти расстояние от точки $M_0(1,-1,2)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,5,-7), M_2(-3,6,3), M_3(-2,7,3)$.

Решение. Расстояние d от точки $M_0(1,-1,2)$ до плоскости равно длине проекции вектора $\overline{M_1M_0}$ на нормальный вектор плоскости $\bar{n}$, т.е.

$$d = \left| ПР_{\bar{n}} \overline{M_1M_0} \right| = \frac{\left| \left(\bar{n}, \overline{M_1M_0} \right) \right|}{|\bar{n}|}.$$

Поскольку нормальный вектор плоскости $\bar{n}$ ортогонален векторам $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ его можно найти как их векторное произведение:

$$\bar{n} = \left[\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3} \right].$$

Находим координаты векторов:

$\overline{M_1M_2} = \{-4,1,10\}, \overline{M_1M_3} = \{-3,2,10\}, \overline{M_1M_0} = \{0,-6,9\}$,

и нормального вектора плоскости:

$$\bar{n} = \left[\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Вычисляем расстояние d от точки M_0 до плоскости

$$d = \frac{\left| \left(\bar{n}, \overline{M_1M_0} \right) \right|}{|\bar{n}|} = \left| \frac{-105}{\sqrt{(-10)^2 + 10^2 + (-5)^2}} \right| = 7.$$

Следовательно, $d = 7$ (ед. длины).

Задача 6 Написать каноническое уравнение прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей (общими уравнениями)

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0, \\ x - 2y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Проверим, что векторы $\bar{n}_1 = \{2,3,1\}, \bar{n}_2 = \{1,-2,-2\}$ неколлинеарны. Имеем

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}.$$

Векторы $\bar{n}_1 = \{2,3,1\}, \bar{n}_2 = \{1,-2,-2\}$ неколлинеарны, так как их координаты непропорциональны. Следовательно, две плоскости пересекаются по прямой.

Так как прямая принадлежит одновременно обеим плоскостям, то ее направляющий вектор $\vec{a}$ ортогонален нормальным векторам обеих плоскостей, т.е. $\bar{a} \perp \bar{n}_1,\ \bar{a} \perp \bar{n}_2$.

Следовательно, направляющий вектор $\bar{a}$ находим по формуле

$$\bar{a} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k}.$$

Теперь находим какую-нибудь точку на прямой. Поскольку направляющий вектор прямой непараллелен ни одной из координатных плоскостей, то прямая пересекает все три координатные плоскости. Следовательно, в качестве точки на прямой может быть взята точка ее пересечения, например с плоскостью $y=0$. Координаты этой точки находим, решая систему трех уравнений

$$\begin{cases} 2x + z - 8 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Получим $x_0 = 3, y_0 = 0, z_0 = 2,\ M_0(3,0,2)$.

Подставляя найденные направляющий вектор и точку в канонические уравнения прямой, получим

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-7}$$

- каноническое уравнение заданной прямой.

Задача 7 Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(2,-1,2)$ относительно прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-2}.$$

Решение. Искомая точка Q лежит на прямой, перпендикулярной данной и пересекающей ее в точке P'. Поскольку точка P' делит отрезок PQ пополам, координаты точки $Q\left(x_q, y_q, z_q\right)$ определяются из условий

$$x_{p'} = \frac{x_p + x_q}{2}, y_{p'} = \frac{y_p + y_q}{2}, y_{z'} = \frac{z_p + z_q}{2} \qquad (*)$$

где $\left(x_p, y_p, z_p\right)$- координаты точки P и $\left(x_{p'}, y_{p'}, z_{p'}\right)$- координаты ее проекции P' на данную прямую.

Найдем проекцию точки P на данную прямую, т.е. точку P'.

Для этого: а) Составим уравнение плоскости, проходящей через точку P перпендикулярной данной прямой. В качестве нормального вектора $\bar{n}$ этой плоскости можно взять направляющий вектор данной прямой $\bar{n} = \bar{a} = \{1,0,-2\}$. Тогда

$$1(x-2)+0(y+1)-2(z-2)=0 \Rightarrow x-2z+2=0;$$

б) Найдем точку пересечения заданной прямой и плоскости $x-2z+2=0$. Для этого запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t+1, \\ y = 0, \\ z = -2t-1. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости, находим значение параметра t, при котором происходит пересечение прямой и плоскости: $t_0 = -1$

в) Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0 = -1$, получаем

$$x_{p'} = 0, y_{p'} = 0, z_{p'} = 1.$$

Таким образом, точка пересечения прямой и плоскости и, следовательно, проекция точки P на прямую есть $P'(0,0,1)$.

Координаты точки Q, симметричной P относительно прямой, определяются из условий (*):

$$x_q = 2x_{p'} - x_p = -2,$$
$$y_q = 2y_{p'} - y_p = 1,$$
$$z_q = 2z_{p'} - z_p = 0.$$

Следовательно, $Q(-2,1,0)$.

Задача 8 Записать уравнение поверхности, полученной при вращении:

1) параболы $z = -\frac{1}{2}y^2$: а) вокруг оси Oy; б) вокруг оси Oz;

2) эллипса $\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$: а) вокруг оси Oz; б) вокруг оси Oy.

Решение. 1) В соответствии с общим правилом получения уравнения поверхности вращения находим:

а) $\pm\sqrt{x^2+z^2} = -\frac{1}{2}y^2$, $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$

(алгебраическая поверхность четвертого порядка);

б) $z = -\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$, $z = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$

(параболоид вращения (рисунок 2)).

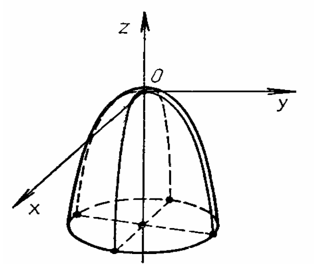


Рисунок 2

2) Имеем: а) $\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$.

Получили сплюснутый вдоль оси Oz эллипсоид вращения (сфероид), полуоси его главных сечений $OA=OB=8$, $OC=2$ (рисунок 3);

б) $\frac{y^2}{64}+\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$

(вытянутый вдоль оси Oy эллипсоид вращения: $OA=OC=2$, $OB=8$).

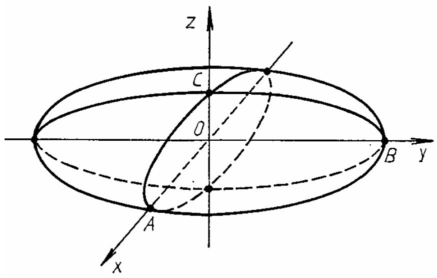


Рисунок 3

Задача 9 Найти координаты вектора x в базисе (e_1', e_2', e_3'), если она задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 2e_2 - 3e_3, \\ e_2' = e_1 - e_2 + 2e_3, \qquad x=\{-1,2,7\}. \\ e_3' = e_1 + 2e_2 - 5e_3, \end{cases}$$

Решение. Составляем матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e_1', e_2', e_3'):

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Искомые координаты вектора x находим по формуле

$X' = T^{-1}X$.

Находим матрицу T^{-1}.

$$T^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{S_1\cdot(-2)+S_2 \\ S_1\cdot 3+S_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{S_2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{S_2\cdot(-5)+S_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1/3 & 5/3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{S_3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -5/6 & -3/6 \end{array}\right) \overset{S_3\cdot(-1)+S_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5/6 & 5/6 & 3/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -5/6 & -3/6 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{S_2\cdot(-1)+S_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 7/6 & 3/6 \\ 0 & 1 & 0 & 4/6 & -2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -5/6 & -3/6 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X' = T^{-1}\cdot X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 34 \\ -8 \\ -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 \\ -4/3 \\ -16/3 \end{pmatrix}.$$

Итак, в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) заданный вектор x имеет координаты $\left\{17/3, -4/3, -16/3\right\}$.

Задача 10 Пусть $V = R^3$, $v_1 = (2, 1, -3)$, $v_2 = (3, 2, -5)$, $v_3 = (1, -1, 1)$. Выяснить, образуют ли элементы v_1, v_2, v_3 базис в R^3, и если да, то найти координаты строки $x = (6, 2, -7)$ в базисе $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Решение. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = C^*\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$, где $\{e_1, e_2, e_3\}$ - стандартный базис в R^3,

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строки v_1, v_2, v_3 образуют базис в R^3 тогда и только тогда, когда матрица T обратима. Если матрица T обратима, то столбец координат строки x в базисе $\{v_1, v_2, v_3\}$ равен

$$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления этого столбца применим алгоритм вычисления матрицы $T^{-1}X$, в процессе работы которого проверяется, обратима ли матрица T:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, матрица T обратима, $(1, 1, 1)$ - координаты столбца X в базисе $\{v_1, v_2, v_3\}$, $x = v_1 + v_2 + v_3$.

(В данной задаче продемонстрирован несколько иной подход, чем тот, который был использован в предыдущей. За студентами же остается право выбора).

Задача 11 Пусть $V_1 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq R^4$ (линейная оболочка строк $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, 1)$), $V_2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq R^4$ (линейная оболочка строк $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 2, 1, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1, 2)$). Найти базисы линейных пространств $V_1 + V_2$ и $V_1 \cap V_2$, при этом строки u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 выразить через базис пространства $V_1 + V_2$.

Решение. Запишем строки u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 по столбцам и приведем полученную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

Поскольку

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&2&1\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&1&0&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{cccccc}u_1'&u_2'&u_3'&v_1'&v_2'&v_3'\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&1&2&-1&0\\0&0&0&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

Поскольку $V_1+V_2=\langle u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3\rangle$ и элементарные преобразования строк матрицы не меняют линейных соотношений между столбцами, то $\{u_1,u_2,u_3,v_1\}$ - базис соотношений между столбцами, то $\{u_1,u_2,u_3,v_1\}$ - базис в V_1+V_2 (и так как $dim(V_1+V_2)=4$, то $V_1+V_2=R^4$). Из ступенчатого вида мы вычисляем v_2' и v_3' через u_1',u_2',u_3',v_1':

$$v_2'+v_1'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=u_1'+u_2'+u_3'.$$

Поэтому $v_2'=u_1'+u_2'+u_3'-v_1'$ и, следовательно, $v_2=u_1+u_2+u_3-v_1$. Для v_3' мы видим, что $v_3'+v_1'=(2,0,2,0)^*=2u_1'+2u_3'$, поэтому $v_3=2u_1+2u_3-v_1$. Проведенные вычисления равносильны завершению приведения матрицы к главному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&2\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&2\\0&0&0&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

Рассмотрим теперь $V_1\cap V_2$. Для этого найдем однородные системы линейных уравнений, чьи множества решений совпадают с V_1 и V_2 соответственно.

Для V_1:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

система уже имеет ступенчатый вид, x_1,x_2,x_3 - главные неизвестные, x_4 - свободная. Фундаментальная система решений состоит из одной строки $(-1,1,-1,1)$. Итак, подпространство V_1 совпадает с пространством решений однородной системы линейных уравнений

$$(-1, 1, -1, 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Для V_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и мы приходим к ступенчатому виду, при этом x_1, x_2, x_3 - главные неизвестные, а x_4 - свободная. Фундаментальная система решений состоит из одной строки $(-1, -1, 1, 1)$. Значит, однородная система линейных уравнений

$$(-1, -1, 1, 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

задается пространством V_2.

Ясно, что система

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

задает подпространство $V_1 \cap V_2$. Решим эту систему:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 - главные неизвестные, x_3, x_4 - свободные неизвестные. Фундаментальная система решений состоит из двух строк

$u=(0, 1, 1, 0)$,

$v=(1, 0, 0, 1)$.

Следовательно, $\{u, v\}$ - базис линейного подпространства $V_1 \cap V_2$.

Задача 12 Найти собственные векторы и собственные значения оператора f, действующего в евклидовом пространстве ε_5 и имеющего в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 матрицу

$$A_e=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен оператора f имеет вид

$$det(A_e-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-6),$$

поэтому $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=6$ - собственные значения этого оператора.

Чтобы найти координаты собственных векторов, нужно решить систему уравнений $(A_e-\lambda E)X=O$ при $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=6$.

При $\lambda=-4$ эта система принимает вид

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2 = 0, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=0, \\ 4x_2+5x_3=0. \end{cases}$$

Так как число неизвестных равно 3, а ранг матрицы системы равен 2, то размерность пространства решений равна 1. Следовательно, ФСР состоит из одного решения: $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Числа $3, -5, 4$ являются координатами собственного вектора x_1 в базисе e_1, e_2, e_3, т.е. $x_1 = 3e_1 - 5e_2 + 4e_3$ - собственный вектор оператора f, соответствующих собственному значению $\lambda = -4$, дается формулой $c(3e_1 - 5e_2 + 4e_3)$, где c - любое вещественное число, не равное нулю.

При $\lambda = 1$ система запишется так:

$$\begin{cases} 3x_2 = 0, \\ 3x_1 + 4x_3 = 0, \\ 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Столбец $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ - ФСР этой системы, поэтому множество всех собственных векторов оператора f, соответствующих собственному значению $\lambda = 1$, дается формулой $c(-4e_1 + 3e_3)$, где c - любое вещественное число, не равное нулю.

Наконец, при $\lambda = 6$ система уравнений относительно координат собственного вектора имеет вид

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Столбец $X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ - ФСР этой системы, поэтому множество всех собственных векторов оператора f, соответствующих собственному значению $\lambda = 6$, дается формулой $c(3e_1 + 5e_2 + 4e_3)$, где c - любое вещественное число, не равное нулю.

Задача 13 Выяснить, можно ли матрицу A линейного оператора φ действительного пространства R^3 привести к диагональному виду путем перехода к новому базису, и если можно, то найти этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу.

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Находим характеристический многочлен матрицы A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1).$$

Он имеет три корня: 1, 2 и -1. Отображение φ имеет столько различных собственных значений, какова размерность пространства V. Следовательно, его матрица приводится к диагональной форме – элементам ее главной диагонали будут собственные значения 1, 2 и -1.

$$A\to D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для отыскания базиса нужно найти собственные векторы, отвечающие полученным собственным значениям, из соответствующих систем уравнений:

$$\left(A^T-\lambda E\right)X=0,$$

где A^T - транспонированная матрица для матрицы A. По условию матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda=1$, то

$$A^T-\lambda E=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система $\left(A^T-\lambda E\right)X=0$ примет вид:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -2x_1+0\cdot x_2+2x_3=0, \\ 1x_1+0\cdot x_2-1x_3=0, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+1x_3=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -2x_1+2x_3=0, \\ x_1-\ x_3=0, \\ x_3=0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1-x_3=0, \\ x_3=0, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=0, \\ x_3=0, \\ x_2-\text{любое действительное число.} \end{cases}$$

Множеством всех решений системы является $\{(0,\,x_2,\,0)/x_2\in R\}$.

Имеется всего один параметр - x_2. Следовательно, фундаментальный набор решений данной системы состоит всего лишь из одного вектора. Например,

$x_2 = 1$ имеем $b_1 = (0, 1, 0)$ собственный вектор, отнесенный к собственному значению $\lambda = 1$.

Если $\lambda = 2$, то $\left(A^T - \lambda E\right)X = 0$, примет вид:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 0 \cdot x_2 + 2x_3 = 0, \\ 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как полученная система неопределенна и $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, переменные x_1, x_3 - базисные, x_2 - параметр. Переписываем систему в виде

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = x_2. \end{cases}$$

$$\Delta = 1, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ x_2 & -1 \end{vmatrix} = -2x_2, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = -3x_2.$$

Таким образом, система имеет решение

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-2x_2}{1} = -2x_2, \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-3x_2}{1} = -3x_2,$$

x_2 - любое действительное число.

Итак, множество решений системы $\{(-2x_2, x_2, -3x_2)/x_2 \in R\}$ зависит от одного параметра x_2.

Пусть $x_2 = -1$, тогда $b_2 = (2, -1, 3)$ - собственный вектор, отнесенный к собственному значению $\lambda = 2$.

Если $\lambda = -1$, то $\left(A^T - \lambda E\right)X = 0$, примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2x_3 = 0, \\ 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

Множество решений системы $\{(-2x_2, x_2, 0)/x_2 \in R\}$.

Тогда при $x_2 = -1$ имеем $b_3 = (2, -1, 0)$ - собственный вектор, отнесенный к собственному значению $\lambda = -1$.

Система векторов b_1, b_2, b_3 составляет искомый базис, в котором линейный оператор φ задается диагональной матрицей

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Говорят, что матрицу A привели к диагональному виду D.

Проверка. Убедимся, что матрицы A и D подобны, т.е. проверим справедливость равенства $A=Q^{-1}DQ$, где Q - матрица перехода от данного базиса e_1, e_2, e_3 (который считаем единичным) к базису b_1, b_2, b_3.

Известно, что

$$\begin{cases}b_1=0\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3,\\ b_2=2\cdot e_1-1\cdot e_2+3\cdot e_3,\\ b_3=2\cdot e_1-1\cdot e_2+0\cdot e_3.\end{cases}$$

Следовательно,

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&3\\2&-1&0\end{pmatrix}.$$

Найдем Q^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{S_1\leftrightarrow S_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&3&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{\frac{1}{2}S_1}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1/2&3/2&0&1/2&0\\0&1&0&1&0&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{(-2)S_1+S_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1/2&3/2&0&1/2&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&-3&0&-1&1\end{array}\right)\overset{\left(-\frac{1}{3}\right)S_3}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1/2&3/2&0&1/2&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1/3&-1/3\end{array}\right)\overset{\left(\frac{1}{2}\right)S_2+S_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3/2&1/2&1/2&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1/3&-1/3\end{array}\right)\overset{\left(-\frac{3}{2}\right)S_3+S_1}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&0&1/2\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1/3&-1/3\end{array}\right)\Rightarrow Q^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\1&0&0\\0&1/3&-1/3\end{pmatrix},$$

т.е. $Q^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0&3\\6&0&0\\0&2&-2\end{pmatrix}$,

т.к. $QQ^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&3\\2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&3\\6&0&0\\0&2&-2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$,

$$A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0&3\\6&0&0\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&3\\2&-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0&-3\\6&0&0\\0&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&3\\2&-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6&6&0\\0&6&0\\12&-6&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\2&-1&2\end{pmatrix}=A.$$

Итак, матрица A приводится к диагональному виду, а именно:

$$A\to D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \text{ в базисе } \begin{array}{l} b_1=(0,1,0),\\ b_2=(2,-1,3),\\ b_3=(2,-1,0).\end{array}$$

б) Найдем характеристический многочлен матрицы A:

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}5-\lambda&8&12\\0&1-\lambda&0\\-2&-4&-5-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

Так как у многочлена $f(\lambda)$ имеется кратный корень $\lambda=1$, т.е. не все корни различные, то сразу на поставленный вопрос в задаче ответить нельзя, надо сначала найти сумму размерностей собственных подпространств $L(1)$ и $L(-1)$, отвечающим собственным значениям $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=-1$.

Для $\lambda_1=1$ собственные векторы находим из системы уравнений

$$\begin{cases}4x_1+0\cdot x_2-2x_3=0,\\ 8x_1+0\cdot x_2-4x_3=0,\\ 12x_1+0\cdot x_2-6x_3=0,\end{cases}$$

фундаментальный набор которой состоит из 2 решений, например $b_1=(1,0,2)$, $b_2=(0,1,0)$, таким образом, $\dim L(1)=2$.

Для $\lambda_2=-1$ получим следующую систему:

$$\begin{cases}6x_1+0\cdot x_2-2x_3=0,\\ 8x_1+2\cdot x_2-4x_3=0,\\ 12x_1+0\cdot x_2-4x_3=0.\end{cases}$$

Фундаментальный набор состоит из одного вектора, например, из вектора $b_3=(1,2,3)$, отсюда $\dim L(-1)=1$.

Итак,

$$\dim L(1)+\dim L(-1)=2+1=3=\dim R^3.$$

Поэтому матрица A приводится к диагональной, а именно в базисе b_1, b_2, b_3 она принимает вид:

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \text{где}\ \begin{matrix}b_1=(1,0,2),\\ b_2=(0,1,0),\\ b_3=(1,2,3).\end{matrix}$$

в) В этом случае характеристический многочлен

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}6-\lambda & 3 & 2\\ -5 & -2-\lambda & -2\\ 2 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

также имеет кратный корень $\lambda=1$. Подпространство $L(1)$ задается системой уравнений:

$$\begin{cases}5x_1-5x_2-3x_3=0,\\ 3x_1-3x_2-2x_3=0,\\ 2x_1-2x_2-\ x_3=0,\end{cases}$$

для которой фундаментальный набор решений состоит из одного вектора, откуда $\dim L(1)=1$. Подпространство $L(2)$ задается системой:

$$\begin{cases}4x_1-5x_2-3x_3=0,\\ 3x_1-\ x_2-2x_3=0,\\ 2x_1-2x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

Ее фундаментальный набор также состоит из одного вектора, поэтому $\dim L(2)=1$.

Итак, $\dim L(1)+\dim L(2)=2<3$, значит, матрица к диагональному виду не приводится.

в) Характеристический многочлен $f(\lambda)=-(\lambda+3)(\lambda^2-\lambda+1)$ имеет, в частности, корни $1/2\pm i\sqrt{3}/2$ не принадлежащие полю R.

Поэтому матрица к диагональному виду не приводится.

Задача 14 Привести, если возможно, действительные матрицы

$$A_1=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -1 & 8 & 6\\ 2 & -14 & -10\end{pmatrix}$$

к диагональному виду и построить для них канонические разложения.

Решение. а) Корнями характеристического многочлена

$$|A_1-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & -1\\ -3 & 5-\lambda & -1\\ -3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

матрицы A_1 являются числа $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ соответственно кратности $k_1=2$, $k_2=1$. Все они действительные и потому являются собственными значениями матрицы A_1. При $\lambda_1 = 2$ матрица

$$A_1 - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $r_1 = 1$, и потому $l_1 = n - r_1 = 3 - 1 = 2 = k_1$.

При $\lambda_2 = 1$ матрица

$$A_1 - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $r_2 = 2$, и потому $l_2 = n - r_2 = 3 - 2 = 1 = k_2$.

Таким образом, у матрицы A_1 геометрическая кратность каждого λ_i совпадает с его алгебраической кратностью. Поэтому матрица A_1 приводится к диагональному виду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом можно убедиться и непосредственным конструированием матрицы T, удовлетворяющей соотношению $T^{-1} A_1 T = \Lambda$. Действительно, при $\lambda = 2$ система $(A_1 - \lambda E)X = 0$, т.е. система

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет общее решение $X = (x_1, x_2, -3x_1 + 3x_2)^T$, в котором два $(l_1 = k_1)$ свободных неизвестных. Из общего решения при $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ и при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ получаем фундаментальную систему решений $X_1 = (1, 0, -3)^T$, $X_2 = (0, 1, 3)^T$.

При $\lambda = 1$ система $(A_1 - \lambda E)X = 0$, т.е. система

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} = 0 \end{cases}$$

имеет общее решение $X = (x_1, x_1, x_1)^T$, в котором одно $(l_2 = k_2)$ свободное неизвестное. Поэтому ФСР этой системы состоит из одного решения, например из решения $X_3 = (1, 1, 1)^T$. Из решений X_1, X_2, X_3, как из столбцов, составляется невырожденная матрица.

$$T=\left(X_1,\,X_2,\,X_3\right)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-3&3&1\end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица A_1 приводится к диагональному виду

$$\Lambda=T^{-1}A_1T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

и имеет каноническое разложение

$$A_1=T^{-1}\Lambda T=T\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}T^{-1}.$$

б) Корнями характеристическими многочлена

$$\left|A_2-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&3&3\\-1&8-\lambda&6\\2&-14&-10-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)^2$$

являются $\lambda_{1,2}=-1$, $\lambda_3=0$ соответственно кратности $k_1=2$, $k_2=1$. Все они действительные и потому являются собственными значениями матрицы A_2. При $\lambda_1=-1$ матрица

$$A_2-\lambda_1E=\begin{pmatrix}1&3&3\\-1&9&6\\2&-14&9\end{pmatrix}$$

имеет ранг $r_1=2$, и потому $l_1=n-r_1=3-2=1\neq k_1$, т.е. геометрическая кратность $l_1=1$ характеристического числа $\lambda_1=-1$ не равна его алгебраической кратности $k_1=2$. Поэтому матрица A_2 не приводится к диагональному виду. Если бы строили для матрицы A_2 не приводится к диагональному виду. Если бы строили для матрицы A_2 матрицу T, удовлетворяющую соотношениям

$$T^{-1}AT=\Lambda \qquad \text{и} \qquad A=T\Lambda T^{-1},$$

то она получилась бы неквадратной.

Действительно, при $\lambda=-1$ система $\left(A_2-\lambda E\right)X=0$, т.е. система

$$\begin{cases}x_1+\;\;3x_2+3x_3=0,\\-x_1+\;\;9x_2+6x_3=0,\\2x_1-14x_2-9x_3=0\end{cases}$$

имеет ФСР, состоящую из одного решения $\left(l_1\neq k_1\right)$, например из решения $X_1=(3,3,-4)^T$.

При $\lambda=0$ система $\left(A_2-\lambda E\right)X=0$, т.е. система

$$\begin{cases} \quad\quad 3x_2 + \ 3x_3 = 0, \\ -x_1 + \ 8x_2 + \ 6x_3 = 0, \\ 2x_1 - 14x_2 - 10x_3 = 0, \end{cases}$$

также имеет ФСР, состоящую из одного решения $(l_2 = k_2)$, например из решения $X_2 = (2, 1, -1)^T$. Решений X_1 и X_2 недостаточно для конструирования квадратной невырожденной матрицы T третьего порядка. Поэтому матрица A_2 не приводится к диагональному виду и не имеет канонического разложения.

Задача 15 Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму двух переменных x_1, x_2:

$$f(x_1, x_2) = 11x_1^2 - 16x_1x_2 - x_2^2.$$

Решение. Поскольку в данном случае $a_{11} = 11$, $a_{12} = -8$, $a_{22} = -1$, то матрица A этой квадратичной формы и ее характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ запишутся так:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 11-\lambda & -8 \\ -8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение $-(11-\lambda)(1+\lambda) - 64 = 0$, или $\lambda^2 - 10\lambda - 75 = 0$, имеет корни $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 15$, которые являются собственными значениями матрицы A.

Найдем собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениями. Координаты (s, t) этих векторов определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} (11-\lambda)s - 8t = 0, \\ -8s - (1+\lambda)t = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 15$ имеем две системы:

$$\begin{cases} 16s - 8t = 0, \\ -8s + 4t = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -4s - 8t = 0, \\ -8s - 16t = 0. \end{cases}$$

Из этих систем соответственно находим собственные векторы $\boldsymbol{u} = (s, 2s)$, где $s \neq 0$, $\mathbf{v} = (-2t, t)$, где $t \neq 0$. Положив $s = 1, t = 1$, получим $\boldsymbol{a}(1, 2)$, $\mathbf{b}(-2, 1)$. Пронормировав эти векторы, запишем их координаты в столбцы и составим матрицу B:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

С помощью матрицы B записываем искомое ортогональное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_2, \\ x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} (y_1 - 2y_2), \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} (2y_1 + y_2). \end{cases}$$

Это преобразование приводит данную квадратичную форму к каноническому виду $\varphi(y_1, y_2) = -5y_1^2 + 15y_2^2$.

6 Индивидуальные задания ДКР (II семестр)

Задача 1 Даны вершины треугольника ABC: $A(4,3), B(-3,-3), C(2,7)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

1.1 $\grave{A}(-2,4)$, $\hat{A}(3,1)$, $\tilde{N}(10,7)$.

1.2 $A(-3,-2)$, $B(14,4)$, $C(6,8)$.

1.3 $A(1,7)$, $B(-3,-1)$, $C(11,-3)$.

1.4 $A(1,0)$, $B(-1,4)$, $C(9,5)$.

1.5 $A(1,-2)$, $B(7,1)$, $C(3,7)$.

1.6 $A(-2,-3)$, $B(1,6)$, $C(6,1)$.

1.7 $A(-4,2)$, $B(-6,6)$, $C(6,2)$.

1.8 $A(4,-3)$, $B(7,3)$, $C(1,10)$.

1.9 $A(4,-4)$, $B(8,2)$, $C(3,8)$.

1.10 $A(-3,-3)$, $B(5,-7)$, $C(7,7)$.

1.11 $A(1,-6)$, $B(3,4)$, $C(-3,3)$.

1.12 $A(-4,2)$, $B(8,-6)$, $C(2,6)$.

1.13 $A(-5,2)$, $B(0,-4)$, $C(5,7)$.

1.14 $A(4,-4)$, $B(6,2)$, $C(-1,8)$.

1.15 $A(-3{,}8)$, $B(-6{,}2)$, $C(0,-5)$.

1.16 $A(6,-9)$, $B(10,-1)$, $C(-4{,}1)$.

1.17 $A(4{,}1)$, $B(-3,-1)$, $C(7,-3)$.

1.18 $A(-4{,}2)$, $B(6,-4)$, $C(4{,}10)$.

1.19 $A(3,-1)$, $B(11{,}3)$, $C(-6{,}2)$.

1.20 $A(-7,-2)$, $B(-7{,}4)$, $C(5,-5)$.

1.21 $A(-1,-4)$, $B(9{,}6)$, $C(-5{,}4)$.

1.22 $A(10{,}2)$, $B(4,-5)$, $C(-3{,}1)$.

1.23 $A(-3,-1)$, $B(-4,-5)$, $C(8{,}1)$.

1.24 $A(-2,-6)$, $B(-3{,}5)$, $C(4{,}0)$.

1.25 $A(-7,-2)$, $B(3,-8)$, $C(-4{,}6)$.

Задача 2 Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B - точки лежащие на кривой, F - фокус, a - большая (действительная) полуось, b - малая (мнимая) полуось, ε - эксцентриситет, $y = \pm kx$ - уравнение асимптот гиперболы, d - директриса кривой, $2c$ - фокусное расстояние).

2.1 а) $b = 15,\ F(-10{,}0)$; б) $a = 13,\ \varepsilon = 14/13$; в) $d : x = -4$.

2.2 а) $b = 2,\ F(4\sqrt{2},0)$; б) $a = 7,\ \varepsilon = \sqrt{85}/7$; в) $d : x = 5$.

2.3 а) $A(3{,}0),\ B(2,\sqrt{5}/3)$; б) $k = 3/4,\ \varepsilon = 5/4$; в) $d : y = -2$.

2.4 а) $\varepsilon = \sqrt{21}/5,\ A(-5{,}0)$; б) $A(\sqrt{80},3),\ B(4\sqrt{6},3\sqrt{2})$; в) $d : y = 1$.

2.5 а) $2a = 22,\ \varepsilon = \sqrt{57}/11$; б) $k = 2/3,\ 2c = 10\sqrt{13}$; в) ось симметрии Ox и $A(27{,}9)$.

2.6 а) $b = \sqrt{15},\ \varepsilon = \sqrt{10}/25$; б) $k = 2/3,\ 2a = 16$; в) ось симметрии Ох и $A(4,-8)$.

2.7 а) $a = 4,\ F(3{,}0)$; б) $b = 2\sqrt{10},\ F(-11{,}0)$; в) $d : x = -2$.

2.8 а) $b = 4,\ F(9{,}0)$; б) $a = 5,\ \varepsilon = 7/5$; в) $d : x = 6$.

2.9 а) $A(0,\sqrt{3}),\ B(\sqrt{14/3},1)$; б) $k = \sqrt{21}/10,\ \varepsilon = 11/10$; в) $d : y = -4$.

2.10 а) $\varepsilon = 7/8,\ A(8{,}0)$; б) $A(3,-\sqrt{3/5}),\ B(\sqrt{13/5},6)$; в) $d : y = 4$.

2.11 а) $2a = 24,\ \varepsilon = \sqrt{22}/6$; б) $k = \sqrt{2/3},\ 2c = 10$; в) ось симметрии Ox и $A(-7,-7)$.

2.12 а) $b = 2,\ \varepsilon = 5\sqrt{29}/29$; б) $k = 12/13,\ 2a = 26$; в) ось симметрии Ох и $A(-5{,}15)$.

2.13 а) $a = 65,\ F(-4{,}0)$; б) $b = 3,\ F(7{,}0)$; в) $d : x = -7$.

2.14 а) $b = 7,\ F(5{,}0)$; б) $a = 11,\ \varepsilon = 12/11$; в) $d : x = 10$.

2.15 а) $A(-\sqrt{17/3},1/3)$, $B(\sqrt{21}/2,1/2)$; б) $k=1/2$, $\varepsilon=\sqrt{5}/2$; в) $d: y=-1$.

2.16 а) $\varepsilon=3/5$, $A(0,8)$; б) $A(\sqrt{6},0)$, $B(-2\sqrt{2},1)$; в) $d: y=9$.

2.17 а) $2a=22$, $\varepsilon=10/11$; б) $k=\sqrt{11}/5$, $2c=12$; в) ось симметрии Ox и $A(-7,5)$.

2.18 а) $b=5$, $\varepsilon=12/13$; б) $k=1/3$, $2a=6$; в) ось симметрии Oy и $A(-9,6)$.

2.19 а) $a=9$, $F(7,0)$; б) $b=6$, $F(12,0)$; в) $d: x=-1/4$.

2.20 а) $b=5$, $F(-10,0)$; б) $a=9$, $\varepsilon=4/3$; в) $d: x=12$.

2.21 а) $A(0,-2)$, $B(\sqrt{15}/2,1)$; б) $k=2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon=11/9$; в) $d: y=5$.

2.22 а) $\varepsilon=2/3$, $A(-6,0)$; б) $A(\sqrt{8},0)$, $B(\sqrt{20}/3,2)$; в) $d: y=1$.

2.23 а) $2a=50$, $\varepsilon=3/5$; б) $k=\sqrt{29}/14$, $2c=30$; в) ось симметрии Oy и $A(4,1)$.

2.24 а) $b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=7/8$; б) $k=5/6$, $2a=12$; в) ось симметрии Oy и $A(-2,3\sqrt{2})$.

2.25 а) $a=13$, $F(-5,0)$; б) $b=44$, $F(-7,0)$; в) $d: x=-3/8$.

Задача 3 Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат.

3.1 $\rho=2\sin 4\varphi$.

3.2 $\rho=2(1-\sin 2\varphi)$.

3.3 $\rho=2\sin 2\varphi$.

3.4 $\rho=3\sin 6\varphi$.

3.5 $\rho=2/(1+\cos\varphi)$.

3.6 $\rho=3(1+\sin\varphi)$.

3.7 $\rho=2/(1-\cos\varphi)$.

3.8 $\rho=3(1-\cos 2\varphi)$.

3.9 $\rho=4\sin 3\varphi$.

3.10 $\rho=4\sin 4\varphi$.

3.11 $\rho=3(\cos\varphi+1)$.

3.12 $\rho=1/(2-\sin\varphi)$.

3.13 $\rho=5(1-\sin 2\varphi)$.

3.14 $\rho=3(2-\cos 2\varphi)$.

3.15 $\rho=6\sin 4\varphi$.

3.16 $\rho=2\cos 6\varphi$.

3.17 $\rho=3/(1-\cos 2\varphi)$.

3.18 $\rho=2(1-\cos 3\varphi)$.

3.19 $\rho=3/(1-\cos 4\varphi)$.

3.20 $\rho=5(2-\sin\varphi)$.

3.21 $\rho=3\sin 4\varphi$.

3.22 $\rho=2\cos 4\varphi$.

3.23 $\rho=4(1+\cos 2\varphi)$.

3.24 $\rho=1/(2-\cos 2\varphi)$.

3.25 $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

Задача 4 Даны четыре точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_4N, параллельной прямой A_1A_2;

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

4.1 $A_1(3,1,4),\ A_2(-1,6,1),\ A_3(-1,1,61),\ A_4(0,4,-1).$

4.2 $A_1(3,-1,2),\ A_2(-1,0,1),\ A_3(1,7,3),\ A_4(8,5,8).$

4.3 $A_1(3,5,4),\ A_2(5,8,3),\ A_3(1,2,-2),\ A_4(-1,0,2).$

4.4 $A_1(2,4,3),\ A_2(1,1,5),\ A_3(4,9,3),\ A_4(3,6,7).$

4.5 $A_1(9,5,5),\ A_2(-3,7,1),\ A_3(5,7,8),\ A_4(6,9,2).$

4.6 $A_1(0,7,1),\ A_2(2,-1,5),\ A_3(1,6,3),\ A_4(3,-9,8).$

4.7 $A_1(5,5,4),\ A_2(1,-1,4),\ A_3(3,5,4),\ A_4(5,8,-1).$

4.8 $A_1(6,1,1),\ A_2(4,6,6),\ A_3(4,2,0),\ A_4(1,2,6).$

4.9 $A_1(7,5,3),\ A_2(9,4,4),\ A_3(4,5,7),\ A_4(7,9,6).$

4.10 $A_1(6,8,2),\ A_2(5,4,7),\ A_3(2,4,7),\ A_4(7,3,7).$

4.11 $A_1(4,2,5),\ A_2(0,7,1),\ A_3(0,2,7),\ A_4(1,5,0).$

4.12 $A_1(4,4,10),\ A_2(7,10,2),\ A_3(2,8,4),\ A_4(9,6,9).$

4.13 $A_1(4,6,5),\ A_2(6,9,4),\ A_3(2,10,10),\ A_4(7,5,9).$

4.14 $A_1(3,5,4),\ A_2(8,7,4),\ A_3(5,10,4),\ A_4(4,7,8).$

4.15 $A_1(10,9,6),\ A_2(2,8,2),\ A_3(9,8,9),\ A_4(7,103).$

4.16 $A_1(6,6,5),\ A_2(4,9,5),\ A_3(4,6,11),\ A_4(6,9,3).$

4.17 $A_1(7,2,2),\ A_2(-5,7-7),\ A_3(5,-3,1),\ A_4(2,3,7).$

4.18 $A_1(8,-6,4),\ A_2(10,5,-5),\ A_3(5,6,-8),\ A_4(8,10,7).$

4.19 $A_1(1,-1,3),\ A_2(6,5,8),\ A_3(3,5,8),\ A_4(8,4,1).$

4.20 $A_1(1,-2,7),\ A_2(4,2,10),\ A_3(2,3,5),\ A_4(5,3,7).$

4.21 $A_1(4,2,10),\ A_2(1,2,0),\ A_3(3,5,7),\ A_4(2,-3,5).$

4.22 $A_1(2,3,5),\ A_2(2,8,2),\ A_3(9,8,9),\ A_4(7,103).$

4.23 $A_1(1;3;0),\ A_2(4;-1;2),\ A_3(3;0;1),\ A_4(-4;3;5).$

4.24 $A_1(0,4,5),\ A_2(3,-2,1),\ A_3(4,5,6),\ A_4(3,3,2).$

4.25 $A_1(2,-1,7),\ A_2(6,3,1),\ A_3(3,2,8),\ A_4(2,-3,7).$

Задача 5 Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

5.1	$M_1(0,7,-4)$,	$M_2(4,8,-1)$,	$M_3(-2,1,3)$,	$M_0(-9,10,2)$.
5.2	$M_1(5,8,3)$,	$M_2(10,5,6)$,	$M_3(8,7,4)$,	$M_0(7,0,1)$.
5.3	$M_1(1,3,5)$,	$M_2(-5,5,2)$,	$M_3(7,-1,8)$,	$M_0(-3,4,3)$.
5.4	$M_1(0,-2,-1)$,	$M_2(-3,-1,2)$,	$M_3(1,0,-2)$,	$M_0(-3,3,1)$.
5.5	$M_1(2,3,1)$,	$M_2(2,0,3)$,	$M_3(1,2,0)$,	$M_0(3,0,5)$.
5.6	$M_1(4,3,5)$,	$M_2(4,5,2)$,	$M_3(5,1,4)$,	$M_0(-2,-6,2)$.
5.7	$M_1(4,5,0)$,	$M_2(4,3,0)$,	$M_3(1,2,9)$,	$M_0(6,1,-6)$.
5.8	$M_1(5,12,1)$,	$M_2(0,5,-3)$,	$M_3(-4,2,-1)$,	$M_0(-4,9,-8)$.
5.9	$M_1(0,3,5)$,	$M_2(0,-1,-3)$,	$M_3(4,0,0)$,	$M_0(-1,4,6)$.
5.10	$M_1(1,-2,2)$,	$M_2(-3,2,3)$,	$M_3(3,0,6)$,	$M_0(-2,5,-4)$.
5.11	$M_1(1,2,5)$,	$M_2(5,8,2)$,	$M_3(2,-1,0)$,	$M_0(10,1,-2)$.
5.12	$M_1(1,2,3)$,	$M_2(1,6,6)$,	$M_3(3,7,-4)$,	$M_0(-7,10,1)$.
5.13	$M_1(2,3,-5)$,	$M_2(4,5,-2)$,	$M_3(4,-1,5)$,	$M_0(3,-4,5)$.
5.14	$M_1(10,-2,1)$,	$M_2(4,-1,-2)$,	$M_3(-1,1-2)$,	$M_0(2,5,3)$.
5.15	$M_1(3,3,-1)$,	$M_2(-2,1,3)$,	$M_3(2,2,1)$,	$M_0(-3,5,5)$.
5.16	$M_1(3,3,0)$,	$M_2(3,5,-2)$,	$M_3(4,1,4)$,	$M_0(-2,6,-2)$.
5.17	$M_1(3,5,1)$,	$M_2(5,3,1)$,	$M_3(1,2,0)$,	$M_0(7,1,-6)$.
5.18	$M_1(5,2,1)$,	$M_2(0,5,4)$,	$M_3(4,-2,-1)$,	$M_0(4,-9,-8)$.
5.19	$M_1(1,3,-5)$,	$M_2(1,-1,-3)$,	$M_3(4,2,0)$,	$M_0(-1,-4,3)$.
5.20	$M_1(2,-2,2)$,	$M_2(2,2,3)$,	$M_3(1,0,6)$,	$M_0(1,-5,-4)$.
5.21	$M_1(1,5,-4)$,	$M_2(2,6,-1)$,	$M_3(-2,1,3)$,	$M_0(-9,10,-2)$.
5.22	$M_1(2,4,1)$,	$M_2(10,-5,3)$,	$M_3(1,1,5)$,	$M_0(-7,1,-1)$.
5.23	$M_1(1,2,4)$,	$M_2(-5,-5,-2)$,	$M_3(5,4,0)$,	$M_0(-6,4,-3)$.
5.24	$M_1(4,1,1)$,	$M_2(1,5,2)$,	$M_3(1,1,-2)$,	$M_0(-3,-3,-1)$.
5.25	$M_1(-2,-3,1)$,	$M_2(-2,1,-3)$,	$M_3(1,3,0)$,	$M_0(-3,1,5)$.

Задача 6 Написать канонические уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей.

6.1 $\begin{cases} x+y-2z-2=0, \\ x-y+z+2=0. \end{cases}$

6.2 $\begin{cases} x-y+z-2=0, \\ x-2y-z+4=0. \end{cases}$

6.3 $\begin{cases} x+5y+2z-5=0, \\ 2x-5y-z+5=0. \end{cases}$

6.14 $\begin{cases} x+5y-z+11=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$

6.15 $\begin{cases} 6x-7y-z-2=0, \\ x+7y-4z-5=0. \end{cases}$

6.16 $\begin{cases} x-3y+z+2=0, \\ x+3y+2z+14=0. \end{cases}$

6.4 $\begin{cases} 2x+3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$

6.5 $\begin{cases} 3x+3y+z-1=0, \\ 2x-3y-2z+6=0. \end{cases}$

6.6 $\begin{cases} 2x-3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$

6.7 $\begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z-8=0. \end{cases}$

6.8 $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-z+6=0. \end{cases}$

6.9 $\begin{cases} 2x-3y+2z+2=0, \\ 2x+3y+z+14=0. \end{cases}$

6.10 $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

6.11 $\begin{cases} x+y-z-4=0, \\ x-y+2z=0. \end{cases}$

6.12 $\begin{cases} 2x+2y-2z+1=0, \\ 3x-2y+3z+4=0. \end{cases}$

6.13 $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-3y+z+4=0. \end{cases}$

6.17 $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y-2z+4=0. \end{cases}$

6.18 $\begin{cases} 6x-5y+3z+8=0, \\ 6x+5y-4z+4=0. \end{cases}$

6.19 $\begin{cases} 2x+y-3z-2=0, \\ 2x-y+z+6=0. \end{cases}$

6.20 $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

6.21 $\begin{cases} 6x-5y+4z+8=0, \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$

6.22 $\begin{cases} x-2y+2z-4=0, \\ 2x+2y-2z-8=0. \end{cases}$

6.23 $\begin{cases} 2x+3y+z+3=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

6.24 $\begin{cases} x+y-2z-1=0, \\ x-2y+2z=0. \end{cases}$

6.25 $\begin{cases} 4x+y-3z+4=0, \\ 2x-y+2z+2=0. \end{cases}$

Задача 7 Найти координаты точки, симметричной точке P относительно заданной прямой.

7.1 $P(0,2,1)$, $\quad \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}.$

7.2 $P(0,-3,-2)$, $\quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z}{1}.$

7.3 $P(2,-1,1)$, $\quad \dfrac{x-4{,}5}{1}=\dfrac{y+3}{-0{,}5}=\dfrac{z-2}{1}.$

7.4 $P(1,1,1)$, $\quad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-2}=\dfrac{z-1}{1}.$

7.5 $P(1,2,3)$, $\quad \dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}.$

7.6 $P(1,0,-1)$, $\quad \dfrac{x-3{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{2}=\dfrac{z}{0}.$

7.7 $P(2,1,0)$, $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z+0{,}5}{1}$.

7.8 $P(-2,-3,0)$, $\frac{x+0{,}5}{1}=\frac{y+1{,}5}{0}=\frac{z-0{,}5}{1}$.

7.9 $P(-1,0,-1)$, $\frac{x}{-1}=\frac{y-1{,}5}{0}=\frac{z-2}{1}$.

7.10 $P(0,2,1)$, $\frac{x-1{,}5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

7.11 $P(3,-3,-1)$, $\frac{x-6}{5}=\frac{y-3{,}5}{4}=\frac{z+0{,}5}{0}$.

7.12 $P(3,3,3)$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1{,}5}{0}=\frac{z-3}{1}$.

7.13 $P(-1,2,0)$, $\frac{x+0{,}5}{1}=\frac{y+0{,}7}{-0{,}2}=\frac{z-2}{2}$.

7.14 $P(2,-2,-3)$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+0{,}5}{0}=\frac{z+1{,}5}{0}$.

7.15 $P(-1,0,1)$, $\frac{x+0{,}5}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{2}$.

7.16 $P(0,-3,-2)$, $\frac{x-0{,}5}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z-1{,}5}{1}$.

7.17 $P(0,-3,1)$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

7.18 $P(2,1,-1)$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{-1}$.

7.19 $P(-1,0,3)$, $\frac{x}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$.

7.20 $P(3,0,-1)$, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$.

7.21 $P(-1,2,1)$, $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{0}$.

7.22 $P(3,-1,0)$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{2}$.

7.23 $P(-1,3,0)$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

7.24 $P(1,-1,2)$, $\frac{x}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

7.25 $P(0,3,-1)$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$

Задача 8 Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

8.1 а) $y^2 = 2z$, Oz; б) $9y^2 + 4z^2 = 36$, Oy.

8.2 а) $4x^2 - 3y^2 = 12$, Ox; б) $x = 1,\ y = 2,\ Oz$.

8.3 а) $x^2 = -3z$, Oz; б) $3x^2 + 5z^2 = 15$, Ox.

8.4 а) $3y^2 - 4z^2 = 12$, Oz; б) $y = 4,\ z = 2$, Ox.

8.5 а) $x^2 = 3y$, Oy; б) $3x^2 + 4z^2 = 24$, Oz.

8.6 а) $2x^2 - 6y^2 = 12$, Ox; б) $y^2 = 4z$, Oz.

8.7 а) $x^2 + 3z^2 = 9$, Oz; б) $x = 4,\ z = 6$, Oy.

8.8 а) $3x^2 - 5z^2 = 15$, Oy; б) $z = -1$, $y = 3$, Ox.

8.9 а) $y^2 = 3z$, Oz; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Ox.

8.10 а) $y^2 - 5x^2 = 5$, Oy; б) $y = 3,\ z = 1$, Ox.

8.11 а) $x^2 = -4z$, Oz; б) $y^2 + 4z^2 = 4$, Oy.

8.12 а) $5x^2 - 6z^2 = 30$, Ox; б) $x = 3, z = -2$, Oy.

8.13 а) $z^2 = 2y$, Oy; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Oz.

8.14 а) $y^2 = -4z$, Oz; б) $3y^2 + z^2 = 6$, Oy.

8.15 а) $7x^2 - 5y^2 = 35$, Ox; б) $x = -1,\ y = -3$, Oz.

8.16 а) $2x^2 = z$, Oz; б) $x^2 + 4z^2 = 4$, Ox.

8.17 а) $2y^2 - 5z = 10$, Oz; б) $y = 2,\ z = 6$, Ox.

8.18 а) $x^2 = -5y$, Oy; б) $2x^2 + 3z = 6$, Oz.

8.19 а) $x^2 = 9y^2 = 9$, Ox; б) $3y^2 = z$, Oz.

8.20 а) $x^2 + 2z = 4$, Oz; б) $x = 3,\ z = -1$, Oy.

8.21 а) $15x^2 - 3y^2 = 1$, Ox; б) $x = 3, y = 4$, Oz.

8.22 а) $y^2 = 5z$, Oz; б) $3x^2 + 7y^2 = 21$, Ox.

8.23 а) $15y^2 - x^2 = 6$, Oy; б) $y = 5,\ z = 2$, Oy.

8.24 а) $5z = -x^2$, Oz; б) $3y^2 + 18z^2 = 1$, Oy.

8.25 а) $3x^2 - 8y^2 = 288$, Ox; б) $x = 5,\ z = -3$, Oy.

Задача 9 Найти координаты вектора x в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

9.1 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 7e_3, \\ e_2' = (7/8)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{3, -8, 8\}.$

9.2 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3, \\ e_2' = (7/6)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{1, 6, 12\}.$

9.3 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (6/7)e_3, \\ e_2' = -6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{7, 7, 2\}.$

9.4 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2' = 2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{6, -1, 3\}.$

9.5 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (7/6)e_3, \\ e_2' = -7e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{-12, 6, 1\}.$

9.6 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 8e_3, \\ e_2' = (8/7)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{-1, 7, 14\}.$

9.7 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 8e_3, \\ e_2' = (8/9)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{1, -9, 9\}.$

9.8 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (2/3)e_3, \\ e_2' = -2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{12, 3, -1\}.$

9.14 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (1/2)e_3, \\ e_2' = -e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{2, 4, 3\}.$

9.15 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (4/3)e_3, \\ e_2' = 4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{6, 3, 1\}.$

9.16 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2' = (3/4)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{1, -4, 8\}.$

9.17 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (8/9)e_3, \\ e_2' = -8e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{9, 9, 2\}.$

9.18 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e_2' = (2/3)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{2, 6, -3\}.$

9.19 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (4/5)e_3, \\ e_2' = -4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{5, -5, -4\}.$

9.20 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (6/5)e_3, \\ e_2' = 6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{10, 5, 1\}.$

9.21 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 6e_3, \\ e_2' = (6/7)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{1, 7, -7\}.$

9.9 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ e_2' = (4/3)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{1, 3, 6\}$.

9.10 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (5/6)e_3, \\ e_2' = -5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{6, 6, 2\}$.

9.11 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 4e_3, \\ e_2' = (4/5)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{7, -5, 10\}$.

9.12 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e_2' = (3/2)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{1, 2, 4\}$.

9.13 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - e_3, \\ e_2' = (1/2)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{-3, 2, 4\}$.

9.22 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (5/4)e_3, \\ e_2' = 5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{8, 4, 1\}$.

9.23 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e_2' = (6/5)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{2, 5, 10\}$.

9.24 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (3/2)e_3, \\ e_2' = 3e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{2, 4, 1\}$.

9.25 $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 5e_3, \\ e_2' = (5/6)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases}$
$x = \{1, -6, 6\}$.

Задача 10 Пусть $V = R^3$ заданы три вектора v_1, v_2, v_3. Выяснить, образуют ли элементы v_1, v_2, v_3 базис в R^3, и если да, то найти координаты строки x в базисе $\{v_1, v_2, v_3\}$.

10.1 $v_1 = \{0,-1,2\}$, $v_2 = \{1,0,-1\}$, $v_3 = \{-1,2,4\}$, $x = \{-2,0,9\}$.

10.2 $v_1 = \{0,2,4\}$, $v_2 = \{3,1,-1\}$, $v_3 = \{0,-3,1\}$, $x = \{5,-12,1\}$.

10.3 $v_1 = \{-1,1,0\}$, $v_2 = \{2,-1,3\}$, $v_3 = \{1,0,1\}$, $x = \{-5,2,-1\}$.

10.4 $v_1 = \{1,1,0\}$, $v_2 = \{-1,0,1\}$, $v_3 = \{-1,0,2\}$, $x = \{1,1,-1\}$.

10.5 $v_1 = \{2,1,1\}$, $v_2 = \{-2,0,-3\}$, $v_3 = \{-1,2,1\}$, $x = \{-1,5,5\}$.

10.6 $v_1 = \{2,0,1\}$, $v_2 = \{1,2,-1\}$, $v_3 = \{0,4,-1\}$, $x = \{-1,-2,3\}$.

10.7 $v_1 = \{1,1,-3\}$, $v_2 = \left\{3/4, -1, 0\right\}$, $v_3 = \{-1,1,1\}$, $x = \{1,-4,8\}$.

10.8 $v_1 = \{0,-1,1\}$, $v_2 = \{2,0,1\}$, $v_3 = \{3,-1,0\}$, $x = \{1,-5,7\}$.

10.9 $v_1 = \{2,0,2\}$, $v_2 = \{0,-1,1\}$, $v_3 = \{3,-1,4\}$, $x = \{5,1,4\}$.

10.10 $v_1 = \{-2,2,1\}$, $v_2 = \{2,0,1\}$, $v_3 = \{1,1,1\}$, $x = \{-3,7,4\}$.
10.11 $v_1 = \{4,1,1\}$, $v_2 = \{2,0,-3\}$, $v_3 = \{-1,2,1\}$, $x = \{-9,5,5\}$.
10.12 $v_1 = \{-2,0,1\}$, $v_2 = \{1,3,-1\}$, $v_3 = \{0,4,1\}$, $x = \{-5,-5,5\}$.
10.13 $v_1 = \{1,0,2\}$, $v_2 = \{0,1,0\}$, $v_3 = \{2,-1,4\}$, $x = \{3,-3,4\}$.
10.14 $v_1 = \{3,1,0\}$, $v_2 = \{-1,2,1\}$, $v_3 = \{-1,0,2\}$, $x = \{3,3,-1\}$.
10.15 $v_1 = \{-1,2,1\}$, $v_2 = \{2,0,3\}$, $v_3 = \{1,1,-1\}$, $x = \{-1,7,-4\}$.
10.16 $v_1 = \{1,1,4\}$, $v_2 = \{0,-3,2\}$, $v_3 = \{2,1,-1\}$, $x = \{6,5,-14\}$.
10.17 $v_1 = \{1,-2,0\}$, $v_2 = \{-1,1,3\}$, $v_3 = \{1,0,4\}$, $x = \{6,-1,7\}$.
10.18 $v_1 = \{1,0,5\}$, $v_2 = \{-1,3,2\}$, $v_3 = \{0,-1,1\}$, $x = \{5,15,0\}$.
10.19 $v_1 = \{1,1,0\}$, $v_2 = \{0,1,-2\}$, $v_3 = \{1,0,3\}$, $x = \{2,-1,11\}$.
10.20 $v_1 = \{1,0,2\}$, $v_2 = \{-1,0,1\}$, $v_3 = \{2,5,-3\}$, $x = \{11,5,-3\}$.
10.21 $v_1 = \{2,0,1\}$, $v_2 = \{1,1,0\}$, $v_3 = \{4,1,2\}$, $x = \{8,0,5\}$.
10.22 $v_1 = \{0,1,3\}$, $v_2 = \{1,2,-1\}$, $v_3 = \{2,0,-1\}$, $x = \{3,1,8\}$.
10.23 $v_1 = \{1,2,-1\}$, $v_2 = \{3,0,2\}$, $v_3 = \{-1,1,1\}$, $x = \{8,1,12\}$.
10.24 $v_1 = \{1,4,1\}$, $v_2 = \{-3,2,0\}$, $v_3 = \{1,-1,2\}$, $x = \{-9,-8,-3\}$.
10.25 $v_1 = \{0,1,-2\}$, $v_2 = \{3,-1,1\}$, $v_3 = \{4,1,0\}$, $x = \{-5,9,-13\}$.

Задача 11 Пусть $V_1 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq R^4$ (линейная оболочка строк u_1, u_2, u_3), $V_2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq R^4$ (линейная оболочка строк v_1, v_2, v_3). Найти базисы линейных пространств $V_1 + V_2$ и $V_1 \cap V_2$, при этом строки u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 выразить через базис пространства $V_1 + V_2$.

11.1 $u_1(1, 0, 0, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 0, 1, 0)$, $v_2(0, 2, 0, 1)$, $v_3(1, 1, 2, 2)$.
11.2 $u_1(1, 1, 0, 0)$, $u_2(1, 0, 1, 0)$, $u_3(1, 0, 1, 0)$,
$v_1(1, 0, 0, 0)$, $v_2(0, 2, 1, 1)$, $v_3(1, 0, 2, 2)$.
11.3 $u_1(1, 1, 0, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 1)$, $u_3(1, 1, 1, 0)$,
$v_1(1, 2, 1, 0)$, $v_2(2, 2, 0, 1)$, $v_3(1, 1, 1, 2)$.
11.4 $u_1(1, 1, 0, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 1)$, $u_3(1, 1, 1, 0)$,
$v_1(1, 0, 1, 2)$, $v_2(0, 2, 2, 1)$, $v_3(1, 1, 1, 2)$.
11.5 $u_1(1, 0, 1, 1)$, $u_2(1, 1, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 1, 1, 0)$, $v_2(1, 2, 0, 1)$, $v_3(2, 1, 2, 2)$.
11.6 $u_1(1, 0, 1, 1)$, $u_2(1, 1, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 1)$,
$v_1(1, 0, 1, 0)$, $v_2(0, 2, 2, 1)$, $v_3(1, 1, 0, 2)$.
11.7 $u_1(0, 1, 0, 1)$, $u_2(1, 0, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 2, 1, 2)$, $v_2(1, 2, 1, 1)$, $v_3(1, 2, 2, 2)$.

11.8 $u_1(1, 0, 1, 1)$, $u_2(1, 0, 0, 1)$, $u_3(1, 0, 0, 0)$,
$v_1(1, 0, 2, 2)$, $v_2(0, 2, 2, 1)$, $v_3(1, 1, 1, 2)$.

11.9 $u_1(1, 0, 1, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 1)$, $u_3(0, 1, 0, 1)$,
$v_1(1, 1, 1, 1)$, $v_2(0, 2, 1, 1)$, $v_3(1, 1, 2, 1)$.

11.10 $u_1(0, 1, 0, 1)$, $u_2(0, 0, 1, 1)$, $u_3(0, 0, 1, 1)$,
$v_1(1, 2, 2, 0)$, $v_2(0, 2, 2, 2)$, $v_3(2, 1, 2, 2)$.

11.11 $u_1(1, 1, 0, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 1)$, $u_3(1, 1, 1, 0)$,
$v_1(1, 0, 1, 0)$, $v_2(0, 2, 2, 1)$, $v_3(1, 1, 0, 2)$.

11.12 $u_1(1, 0, 1, 1)$, $u_2(1, 1, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 0, 0, 0)$, $v_2(0, 2, 1, 1)$, $v_3(1, 0, 2, 2)$.

11.13 $u_1(1, 0, 1, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 1)$, $u_3(0, 1, 0, 1)$,
$v_1(1, 2, 1, 0)$, $v_2(2, 2, 0, 1)$, $v_3(1, 1, 1, 2)$.

11.14 $u_1(1, 0, 0, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 2, 2, 0)$, $v_2(0, 2, 2, 2)$, $v_3(2, 1, 2, 2)$.

11.15 $u_1(1, 0, 1, 1)$, $u_2(1, 1, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 2, 1, 0)$, $v_2(2, 2, 0, 1)$, $v_3(1, 1, 1, 2)$.

11.16 $u_1(0, 1, 0, 1)$, $u_2(0, 0, 1, 1)$, $u_3(0, 0, 1, 1)$,
$v_1(1, 2, 1, 2)$, $v_2(1, 2, 1, 1)$, $v_3(1, 2, 2, 2)$.

11.17 $u_1(1, 0, 1, 1)$, $u_2(1, 1, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 1)$,
$v_1(1, 0, 1, 0)$, $v_2(0, 2, 0, 1)$, $v_3(1, 1, 2, 2)$.

11.18 $u_1(1, 0, 0, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 2, 2, 0)$, $v_2(0, 2, 2, 2)$, $v_3(2, 1, 2, 2)$.

11.19 $u_1(0, 1, 0, 1)$, $u_2(1, 0, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 0, 0, 0)$, $v_2(0, 2, 1, 1)$, $v_3(1, 0, 2, 2)$.

11.20 $u_1(1, 0, 0, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 2, 1, 0)$, $v_2(2, 2, 0, 1)$, $v_3(1, 1, 1, 2)$.

11.21 $u_1(1, 1, 0, 1)$, $u_2(0, 1, 1, 1)$, $u_3(1, 1, 1, 0)$,
$v_1(1, 2, 1, 2)$, $v_2(1, 2, 1, 1)$, $v_3(1, 2, 2, 2)$.

11.22 $u_1(1, 1, 0, 0)$, $u_2(1, 0, 1, 0)$, $u_3(1, 0, 1, 0)$,
$v_1(1, 2, 2, 0)$, $v_2(0, 2, 2, 2)$, $v_3(2, 1, 2, 2)$.

11.23 $u_1(0, 1, 0, 1)$, $u_2(1, 0, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 2, 1, 2)$, $v_2(2, 2, 0, 1)$, $v_3(1, 0, 2, 2)$.

11.24 $u_1(1, 1, 0, 0)$, $u_2(1, 0, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,
$v_1(1, 2, 2, 0)$, $v_2(0, 2, 1, 1)$, $v_3(1, 0, 2, 2)$.

11.25 $u_1(1, 0, 0, 1)$, $u_2(1, 0, 1, 0)$, $u_3(1, 1, 0, 0)$,

$$v_1(1, 2, 2, 0), \qquad v_2(1, 2, 1, 1), \qquad v_3(2, 1, 2, 2).$$

Задача 12 Найти собственные векторы и собственные значения оператора f, действующего в евклидовом пространстве ε_5 и имеющего в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 матрицу A_e.

12.1 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

12.2 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

12.3 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

12.4 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

12.5 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

12.6 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

12.7 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

12.8 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

12.9 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

12.10 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

12.11 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

12.12 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

12.13 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

12.14 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

12.15 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

12.16 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

12.17 $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

12.18 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

12.19 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **12.20** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

12.21 $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **12.22** $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

12.23 $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **12.24** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

12.25 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 13 Выяснить, можно ли матрицу A линейного оператора φ действительного пространства R^3 привести к диагональному виду путем перехода к новому базису, и если можно, то найти этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу.

13.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **13.14** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

13.2 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 8 & 1 & -4 \\ 12 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. **13.15** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

13.3 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **13.16** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13.4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **13.17** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. **13.18** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

13.6 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

13.7 $A=\begin{pmatrix} -10 & 54 & 36 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 18 & 11 \end{pmatrix}$.

13.8 $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

13.9 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

13.10 $A=\begin{pmatrix} -8 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13.11 $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

13.12 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

13.13 $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -4 & 8 & 1 \\ -5 & 12 & 0 \end{pmatrix}$.

13.19 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

13.20 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

13.21 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

13.22 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

13.23 $A=\begin{pmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13.24 $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -7 & 6 & 2 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

13.25 $A=\begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 14 Привести, если возможно, действительные матрицы A_1 и A_2 к диагональному виду и построить для них канонические разложения.

14.1 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

14.2 $A_1=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14.3 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

14.4 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

14.5 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

14.6 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14.7 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

14.8 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

14.9 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

14.10 $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 16 & 12 & 3 \\ 23 & 13 & 11 \end{pmatrix}$.

14.11 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

14.12 $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14.13 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

14.14 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14.15 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

14.16 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14.17 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14.18 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

14.19 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

14.20 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14.21 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

14.21 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

14.22 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14.23 $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14.24 $A_1=\begin{pmatrix}4 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2 & 6 & 2\\ 16 & 12 & 3\\ 23 & 13 & 11\end{pmatrix}$.

14.25 $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Задача 15 Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму двух переменных x_1, x_2.

15.1 $f(x_1, x_2)=12x_1^2-5x_1x_2+x_2^2$.

15.2 $f(x_1, x_2)=-3x_1^2+x_1x_2-4x_2^2$

15.3 $f(x_1, x_2)=4x_1^2+x_1x_2+5x_2^2$.

15.4 $f(x_1, x_2)=2x_1^2-x_1x_2-x_2^2$.

15.5 $f(x_1, x_2)=5x_1^2+3x_1x_2+x_2^2$.

15.6 $f(x_1, x_2)=-x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2$.

15.7 $f(x_1, x_2)=-x_1^2+6x_1x_2-9x_2^2$.

15.8 $f(x_1, x_2)=4x_1^2+3x_1x_2-x_2^2$.

15.9 $f(x_1, x_2)=-4x_1^2-9x_1x_2+x_2^2$.

15.10 $f(x_1, x_2)=-x_1^2+15x_1x_2-2x_2^2$.

15.11 $f(x_1, x_2)=-11x_1^2-x_1x_2-5x_2^2$.

15.12 $f(x_1, x_2)=-4x_1^2-x_1x_2+11x_2^2$.

15.13 $f(x_1, x_2)=-12x_1^2-x_1x_2+5x_2^2$.

15.14 $f(x_1, x_2)=12x_1^2+5x_1x_2+x_2^2$.

15.15 $f(x_1, x_2)=-3x_1^2-x_1x_2-4x_2^2$.

15.16 $f(x_1, x_2)=-3x_1^2+4x_1x_2-5x_2^2$.

15.17 $f(x_1, x_2)=9x_1^2+7x_1x_2-x_2^2$.

15.18 $f(x_1, x_2)=x_1^2-8x_1x_2+6x_2^2$.

15.19 $f(x_1, x_2)=x_1^2+13x_1x_2+5x_2^2$.

15.20 $f(x_1, x_2)=6x_1^2-x_1x_2+6x_2^2$.

15.21 $f(x_1, x_2)=8x_1^2+7x_1x_2-x_2^2$.

15.22 $f(x_1, x_2)=-x_1^2-2x_1x_2+5x_2^2$.

15.23 $f(x_1, x_2)=x_1^2+4x_1x_2-7x_2^2$.

15.24 $f(x_1, x_2) = -4x_1^2 - x_1x_2 + 9x_2^2$.

15.25 $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 - x_1x_2 + 9x_2^2$.

7 Тест контроля остаточных знаний студентов по курсу алгебры и геометрии (демонстрационный вариант)

7.1 Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Задайте списком множество $B \setminus A$.

1) $\{8, 9\}$; 2) $\{3, 4\}$; 3) $\{2, 4, 5, 6\}$; 4) $\varnothing$.

7.2 Какие операции, из предложенных, определены на множестве натуральных чисел **N**?

а) $a \circ b = a - b$; б) $a \circ b = a \cdot b$; в) $a \circ b = OK\{a, b\}$; г) $a \circ b = a : b$.

1) а), б); 2) б), в); 3) в), г); 4) г), а).

7.3 Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 4i$. Тогда число $z = 3z_1 - 2z_2$, равно…

1) $-3 + 5i$; 2) $9 + 5i$; 3) $-3 - 11i$; 4) $-7i$.

7.4 Число $z = 1 + i$, представленное в тригонометрической форме, имеет вид…

1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; 4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

7.5 Произведением многочлена $f(x) = x^3 - x$ и двучлена $2x + 3$ является многочлен…

1) $2x^4 - 3x$; 2) $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x$;

3) $2x^3 - 3x$; 4) $2x^4 - 3x + 3$.

7.6 Если $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, то матрица BA имеет вид…

1) $\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}-2 & -10\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; 4) вычислить невозможно.

7.7 Значение определителя $\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$ равно…

1) 5; 2) -9; 3) -3; 4) 0.

7.8 Переменная z системы $\begin{cases}x+2y+z=4,\\ 3x-5y+3z=1,\\ 2x+7y-z=8\end{cases}$ определяется по формуле…

1) $z=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -5 & 1\\ 2 & 7 & 8\end{vmatrix}}$; 2) $z=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -5 & 1\\ 2 & 7 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}}$;

3) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1\end{vmatrix}}$; 4) $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 8 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}}$.

7.9 Даны векторы $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{b}=4\bar{i}-2\bar{k}$. Тогда вектор $\bar{c}=-2\bar{a}+\bar{b}$ равен…

1) $-6\bar{i}$; 2) $2\bar{j}-10\bar{k}$; 3) $-\bar{i}-5\bar{j}-\bar{k}$; 4) $10\bar{i}-\bar{j}$.

7.10 Векторы $\bar{a}=\{1,\alpha,2\}$ и $\bar{b}=\{3,-6,6\}$ коллинеарны, при α равном…

1) 1; 2) – 2; 3) 3; 4) – 3.

7.11 Смешанное произведение векторов $\bar{a}=\{-1,4,0\}$, $\bar{b}=\{3,0,-1\}$, $\bar{c}=\{0,3,0\}$ равно…

1) 12; 2) 6; 3) – 3; 4) 11.

7.12 Укажите координаты вектора, перпендикулярного прямой $\frac{1}{2}x - 5y - 1 = 0$.

1) $\{-1; 0\}$; 2) $\left\{2, -\frac{1}{5}\right\}$; 3) $\left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$; 4) $\left\{\frac{1}{2}, -5\right\}$.

7.13 Среди уравнений кривых укажите то, которое не является уравнением окружности.

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$; 2) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$;

3) $(x-3)^2 + y^2 = 2$; 4) $x^2 + 2y - 1 = 0$.

7.14 Если действительная полуось гиперболы $a = 4$, а мнимая $b = 2$, то уравнение гиперболы имеет вид…

1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$;

3) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$; 4) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

7.15 Плоскости $2x - \alpha y + 4z + 10 = 0$ и $4x - 8y + 8z + 5 = 0$ параллельны, при α равном…

1) – 2; 2) 2; 3) 4; 4) -4.

7.16 Уравнение прямой, проходящей через точку $N(2; 0; -1)$ перпендикулярно плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$, имеет вид…

1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$; 2) $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$;

3 $\frac{x+2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$; 4) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{-z+1}{1}$.

7.17 При вращении эллипса вокруг одной из своих осей (большой или малой) получится…

1) сфера; 2) цилиндр; 3) эллипсоид; 4) конус.

7.18 Пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $\{4, 0\}$. Тогда координатами этого вектора в базисе $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = 3e_1 + 4e_2$ будут…

1) $\{2, 1\}$; 2) $\{10, 7\}$; 3) $\{-8, 4\}$; 4) $\{1, 2\}$.

7.19 Если операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, то оператор $f-2g$ в этом же базисе имеет матрицу…

1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;4) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

7.20 Кривизна окружности $x^2+y^2+8x+6y-24=0$ равна…

1) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$; 2) $\dfrac{1}{7}$; 3) $\sqrt{7}$; 4) 7.

Список используемой и рекомендуемой литературы

1 **Беклемишев, Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/Д.В. Беклемишев. - М.: Наука,1987 - 320 с.

2 **Бюшгенс, С.С.,** Дифференциальная геометрия / С.С. Бюшгенс. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2006. – 304 с.

3 **Глухов, М.М.** Алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие. /М.М. Глухов. – М.: Гелиос АРВ, 2005. – 392с., ил.

4 **Гусак, А.А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2т. Т.1. /А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск.: ТетраСистемс, 2004. – 544с.

5 **Гусак, А.А.** Пособие к решению задач по высшей математике. / А.А. Гусак. - Минск.: БГУ,1973-532 с.

6 **Ефимов, Н.В.** Квадратичные формы и матрицы. / Н.В. Ефимов. - М.: Наука,1975 - 160 с.

7 **Кострикин, А.И.** Введение в алгебру. / А.Н. Кострикин. - Часть I, II, III. - М.: Физико-математическая литература, 2001 – 368 с.

8 **Куратовский, К.** Топология. / К. Куратовский: пер. с англ. Т. 1. - М.: Мир, 1966 .-594с.

9 **Курош, А.Г.** Курс высшей алгебры. / А.Г. Курош. - М.: Наука,1971-432.

10 **Норден А.П.** Дифференциальная геометрия. уч. пособие для пед. ин-тов. / А.П. Норден. – М.: Учпедгиз, 1948.-215 с.

11 **Позняк, Э.Г.**, Дифференциальная геометрия: Первое знакомство / Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 408с.

12 **Рябушко А.П.** Сборник индивидуальных заданий по высшей математике.: Учеб. Пособие. В 3ч.Ч.1/А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть.-Мн. Выш. Шк.,1991.

13 **Сикорская, Г.А.** Курс лекций по алгебре и геометрии: учебное пособие для студентов транспортного факультета / Г.А. Сикорская, Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. - 376 с.

14 **Сикорская Г.А., Локтионова Г.Н.** Практикум по алгебре и геометрии: учебное пособие для студентов транспортного факультета / Г.А. Сикорская, Локтионова Г.Н. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. - 360 с.

15 **Фиников, С.П.** Дифференциальная геометрия. / С.П. Фиников. - М.: МГУ, 1961 – 158 с.

16 **Фрид, Э.** Элементарное введение в абстрактную алгебру. / Э.Фрид. - М.: Мир, 1979 – 260с.

17 **Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии**: учебное пособие для вузов / Р.Ф. Апатенок [и др.].- 2-е изд., перераб. и доп. - Минск: Вышэйш. шк., 1986. - 272 с.

Приложение А
Ключи к тестам за I семестр

										0	1	2	3	4	5
1															
2															
3															
4															
5															
6															
1															
2															
3															
4															
1															
2															
3															
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															

9															
10															
1															
2															
3															
1															
2															
3															

Приложение В
Ключи к тестам за II семестр

										0	1	2	3	4	5
1															
2															
3															
1															
2															
3															
1															
2															
1															
2															
1															
2															
3															
1															
2															
1															
2															
3															
4															

Приложение C

Ключ к тесту контроля остаточных знаний студентов по курсу алгебры и геометрии

7.1	1
7.2	2
7.3	3
7.4	1
7.5	2
7.6	3
7.7	4
7.8	2
7.9	2
7.10	2

7.11	3
7.12	4
7.13	4
7.14	3
7.15	3
7.16	1
7.17	3
7.18	3
7.19	1
7.20	2